PAU 2022

Problema 1.

x = precio alquier local A

y = precio alquier local B

z = precio alquier local C

$$\begin{cases} x+y+z=1650 \\ 0.05x+0.10y+0.20z=132 \\ x=2(y+z) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x+y+z=1650 \\ 0.05x+0.10y+0.20z=132 \\ x-2y-2z=0 \end{cases} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1650 \\ 5 & 10 & 20 & 13200 \\ 1 & -2 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1650 \\ 5 & 10 & 20 & 13200 \\ 1 & -2 & -2 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{matrix} F2-5F1 \\ F3-F1 \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1650 \\ 0 & 5 & 15 & 4950 \\ 0 & -3 & -3 & -1650 \end{pmatrix}$$

$$5F3+3F2 \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1650 \\ 0 & 5 & 15 & 4950 \\ 0 & -3 & -3 & -1650 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1650 \\ 0 & 5 & 15 & 4950 \\ 0 & 0 & 30 & 6600 \end{pmatrix}$$

Y nos queda

$$\begin{cases} x+y+z=1650 \\ 5y+15z=4950 \\ 30z=6600 \end{cases} \to \mathbf{z=\frac{6600}{30}=220}$$

$$5y+15\cdot 220=4950$$

$$5y+3300=4950$$

$$5y=4950-3300 \to \mathbf{y=330}$$

$$\mathbf{x=1650-y-z=1650-220-330=1100}$$

Solución:

x = 1100

y = 330

$z = 220$

Problema 2.

x = número de cajas tipo A

y = número de cajas tipo B

	Romero	Azahara	Multifloral
A	2	2	1
B	1	2	2
	280	300	250

$B(x,y) = 7x+5y$

s. a $2x + y \leq 280$ (1)

$2x+2y \leq 300$ (2)

$x+2y \leq 250$ (3)

$x,y \geq 0$

<u>Representamos las restricciones:</u>

$2x + y \leq 280$ (1)

$2x + y = 280$

x	y
0	280
140	0

$(0,0) \rightarrow 2*0+1*0 \leq 280 \rightarrow 0 \leq 280$ (SÍ)

<u>Representamos las restricciones:</u>

$2x+2y \leq 300$ (2)

$2x+2y = 300$

x	Y
0	150
150	0

(0,0)→ 2*0+2*0 ≤ 300 → 0 ≤ 300 (SÍ)

<u>Representamos las restricciones:</u>

x+2y ≤ 250 (3)

x+2y = 250

x	Y
0	125
250	0

(0,0)→ 0+2*0 ≤ 250 → 0 ≤ 250(SÍ)

Representamos las restricciones. Y nos queda la siguiente región acotada

Hallamos los vértices de la región ACOTADA, y son:

AA = (0,0)

A = (0,125)

B = (50,100)

C = (130,120)

D = (140,20)

Ahora nos queda hallar la cantidad de cada tipo de caja para que los beneficios sean máximos

AA= (0,0)	B(x,y) = 7 · 0 + 5 · 0 = 0
A = (0,125)	B(x,y) = 7 · 0 + 5 · 125 = 625
B = (50,100)	B(x,y) = 7 · 50 + 5 · 100 = 975
C = (130,20)	B(x,y) = 7 · 130 + 5 · 20 = 1010
D = (140,20)	B(x,y) = 7 · 140 + 5 · 20 = 980

Así pues, debo de comercializar 130 cajas de tipo a y 20 de tipo B para maximar los beneficios que serán de 1010 €.

https://www.geogebra.org/m/ew2zzwkc

Problema 3. Dada la función $f(x) = \frac{x^2+x-2}{(x+1)^2}$ se pide:

a) Su dominio y los puntos de corte con los ejes coordenados. (2 puntos)

b) Las asíntotas horizontales y verticales, si existen. (2 puntos)

c) Los intervalos de crecimiento y decrecimiento. (2 puntos)

d) Los máximos y mínimos locales. (2 puntos)

e) La representación gráfica de la función a partir de los resultados de los apartados anteriores. (2 puntos)

Solución:

El dominio de la función son todos los valores de la x que hacen que f(x) tome valores reales. Así pues, vamos a estudiar los valores que anulan el denominador, ya que son los que hace que no exista la función o que no tome valores reales.

$$(x+1)^2 = 0 \rightarrow (x+1)(x+1) = 0 \rightarrow x = -1$$

$$\boldsymbol{Dom\ f(x) = R - \{-1\}}$$

Puntos de corte con los ejes

Eje X (f(x) = 0)

$$x^2 + x - 2 = 0 \rightarrow x_1 = 1\ ,\ x_2 = -2$$

Has dos puntos de corte con en el eje en (1,0) y (-2,0)

Eje Y (x=0)

f(0)= -2 → Hay un punto de corte con el eje Y en (0,-2)

Asíntota Vertical (x=-1)

$$\lim_{x\to -1}\frac{x^2+x-2}{(x+1)^2}=\infty$$ → **Hay una asíntota vertical en x = -1**

$$\lim_{x\to 1^+}\frac{x^2+x-2}{(x+1)^2}=-\infty$$

$$\lim_{x\to 1^-}\frac{x^2+x-2}{(x+1)^2}=-\infty$$

<u>A.H.</u>

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+x-2}{(x+1)^2}=\left\{\frac{\infty}{\infty}\right\}=\ Indeterminación$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+x-2}{(x+1)^2}=\frac{x^2+x-2}{x^2+2x+1}=1$$ → **Hay una asíntota horizontal en y= 1**

<u>Intervalos de crecimiento y decrecimiento</u>

($f'(x)=0$, puntos donde falla el dominio (x= -1)

$$f(x)=\frac{x^2+x-2}{(x+1)^2}$$

$$f'(x)=\frac{(2x+1)\cdot(x^2+2x+1)-(x^2+x-2)\cdot(2x+2)}{(x+1)^4}=$$

$$=\frac{2x^3+4x^2+2x+x^2+2x+1-2x^3-2x^2-2x^2-2x+4x+4}{(x+1)^4}$$

$$=\frac{x^2+6x+5}{(x+1)^4}=0\to x^2+6x+5=0\to \begin{matrix}x=-1\\ x=-5\end{matrix}$$

$-\infty$ $+\infty$

		-5		**-1**	
signo f'(x)	>0	0	<0	∄	<0
f(x)	**Crece**	**Máx**	**Decrece**	∄	**Crece**

$]-\infty, -5[$ f'(-6) = 1/125 > 0

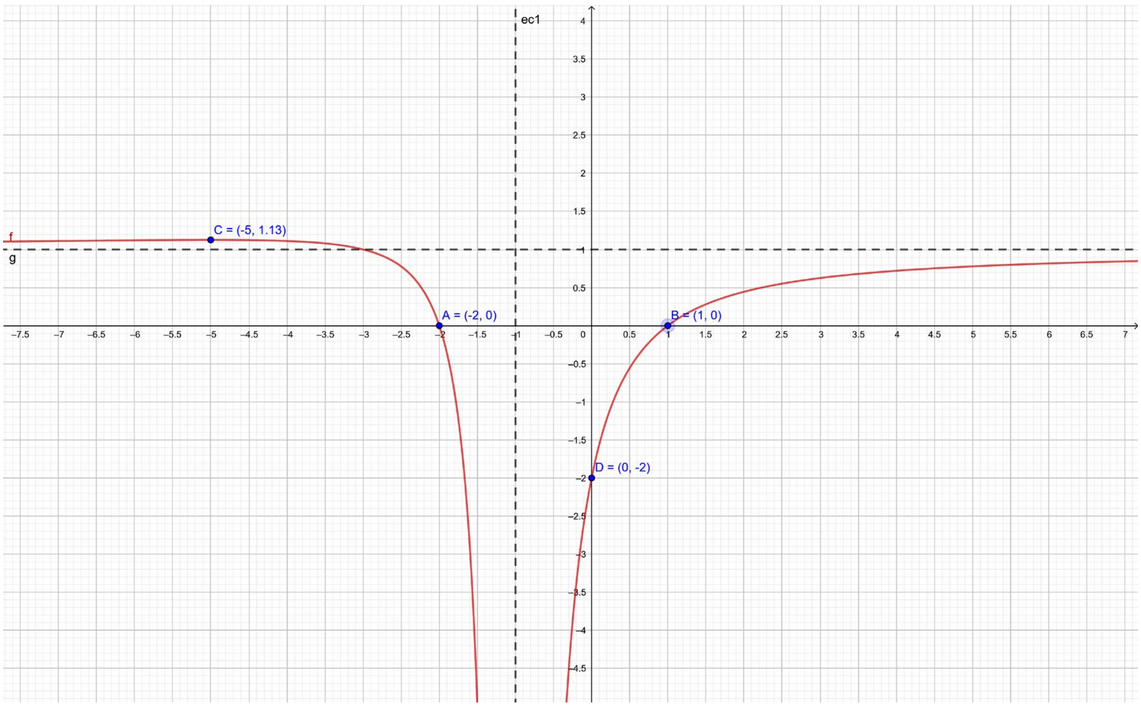
$]-5; -1[$ f'(-2) = - 3 < 0

$]-1, +\infty[$ f'(0) =5 > 0

I.C. = $]-\infty, -5[\cup]-1, +\infty[$

I.D. = $]-5; -1[$

Máximo = (-5; 9/8)



https://www.geogebra.org/classic/pav3macn

Problema 4:

$$B(x) = 50000 + 40x - \left(\frac{x}{10}\right)^2 = 50000 + 40x - (0.1x)^2$$

$$B'(x) = 40 - 2 \cdot 0.1x \cdot 0.1 = 40 - 0.02x = 0 \rightarrow x = 2000$$

0

		2000	
signo B'(x)	>0	0	<0
B(x)	Crece	Máx	Decrece

$]0{,}2000[>$ $B'(1000) = 40 - 0.02 \cdot 1000 = 20$

$]2000, +\infty[$ $B'(3000) = 40 - 0.02 \cdot 3000 = -20$

$$B\,(2000) = 50000 + 40 \cdot 2000 - \left(\frac{2000}{10}\right)^2 = 90000\ euros$$

$]0{,}2000[$ crecen los beneficios

$]2000, +\infty[$ decrecen los beneficios

B(0) = 50 000 (si no se invierte nada en publicidad)

La idea es resolver una inecuación de segundo grado, en el que el benificio relacionado inversión en publicidad sea inferior a 50 000 (beneficio si no invierte nada en publicidad)

$$50000 + 40x - \left(\frac{x}{10}\right)^2 < 50000$$

$$50000 + 40x - \left(\frac{x}{10}\right)^2 = 5000$$

$$-0.01x^2 + 40x + 50000 - 50000 = 0$$

$$-0.01x^2 + 40x = 0$$

$$x(-0.01x+40)=0 \rightarrow \begin{matrix} x=0 \\ x=4000 \end{matrix}$$

0 **4000**

<50000	**>50000**	**<500000**

(0 , 4000) beneficios en publicidad son superiores a 50 000 euros (en caso que no se invirtiera nada)

(4000,+∞) beneficios en publicidad son inferiores si no se inviertierá nada en publicidad.

https://www.geogebra.org/classic/fz8buaza

Problema 5.

Sucesos:

AA = cliente con menos de 30 años” con una P(A) = 0.30

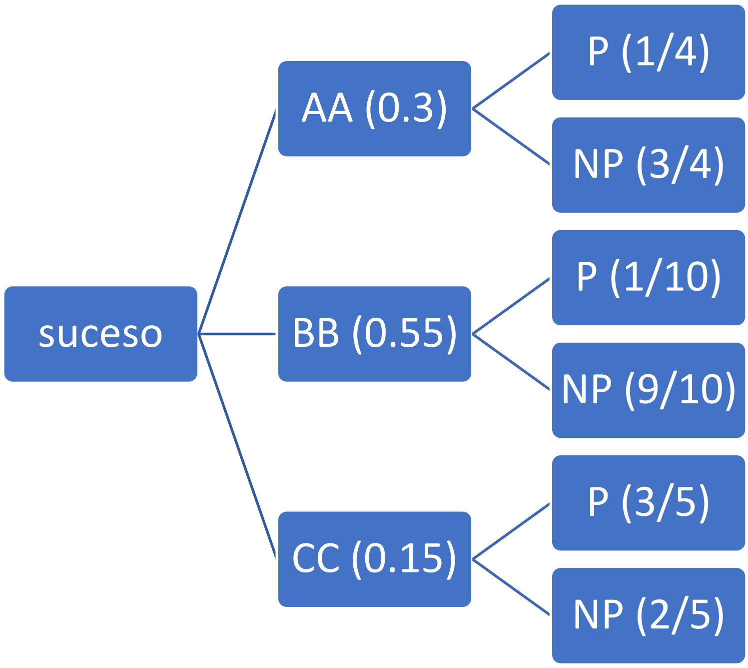
BB = cliente entre 30 y 60 años con una P(A) = 0.55

CC = cliente con más de 60 años con una P(A) = 0.15

Entre los AA, 3/4 no presentan parte de accidente

Entre los BB, 9/10 no presentan parte de accidente

Entre los CC, 2/5 no no presentan parte de accidente



a)

A = suceso “ el cliente seleccionado tiene más de 60 años”

B = suceso “el cliente seleccionado no presenta parte de accidente”

P(AUB) = P(A) + P(B) – P(A∩B) = $0.15 + 0.78 - 0.15 \cdot \frac{2}{5} = 0.87$

P(B) = P(AA) P(B/AA) + P(BB) P(B/BB) + P(CC) P(B/CC) =

$$= 0.3 \cdot \frac{3}{4} + 0.55 \cdot \frac{9}{10} + 0.15 \cdot \frac{2}{5} = 0.78$$

b)

C = suceso " el cliente seleccionado tiene 30 años o más"

D = suceso "el cliente seleccionado presenta parte de accidente"

$$P(C \cap D\ ) = P\big((AA\ U\ BB) \cap D\ \big) = 0.55\frac{1}{10} + 0.15\frac{3}{5} = \frac{29}{200} = 0.145$$

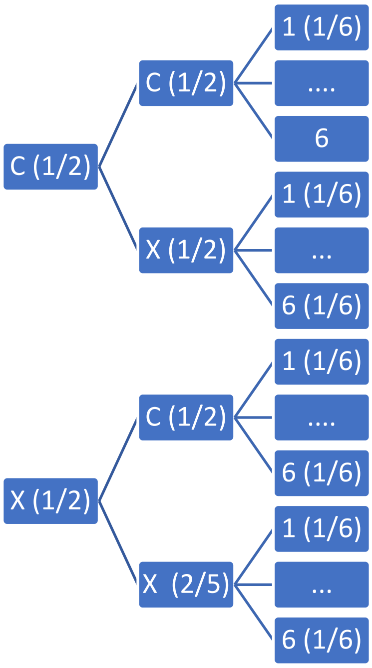
c)

E = suceso " el cliente seleccionado tiene 60 años o menos"

$$P(CC/P\ ) = \frac{P(E\ \ \cap P\ )}{P(P\ )} = \frac{P((AA\ U\ BB)\ \cap P\ )}{P(P\ )}$$
$$= \frac{0.3 \cdot \frac{1}{4} + 0.55 \cdot \frac{1}{10}}{0.3 \cdot \frac{1}{4} + 0.55 \cdot \frac{1}{10} + 0.15 \cdot \frac{3}{5}} = \frac{13}{22}$$

Problema 6.

a)



Un jugador gana si obtienen dos caras y un número par, o bien, si obtiene exactamente una cara y un número mayor o igual que cinco en el dado.

$$\mathrm{P(Gane)} = \mathrm{P(C\,C\,par)} + \mathrm{PP(CX} > 5) + \mathrm{PP(XC} > 5) =$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{6} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{6} = \frac{1}{8} + \frac{2}{24}\cdot 2 = \frac{1}{8} + \frac{2}{12}$$

$$= \frac{3+4}{24} = \frac{7}{24}$$

b) En primer lugar voy a construir todas las combinaciones ganadoras, y de las ganadoras selecciono las que tengan dos caras

C C 2

C C 4

C C 6

C X 5

C X 6

X C 5

X C 6

$$P(CC/Ganado) = \frac{P(CC\ \cap Gana)}{P(Gana)} = \frac{3}{7}$$

Otra forma:

	C C	**No CC**	
Gana	3	4	**7**
No ganar	3	14	**17**
	6	**18**	**24**

$$P(CC/Ganado) = \frac{P(CC\ \cap Gana)}{P(Gana)} = \frac{\frac{3}{24}}{\frac{7}{24}} = \frac{3}{7}$$

Posibles combinaciones

C C 1	**C X 1**	**X C 1**	**X X 1**
C C 2	**C X 2**	**X C 2**	**X X 2**
C C 3	**C X 3**	**X C 3**	**X X 3**
C C 4	**C X 4**	**X C 4**	**X X 4**
C C 5	**C X 5**	**X C 5**	**X X 5**
C C 6	**C X 6**	**X C 6**	**X X 6**

c) En primer lugar voy a construir todas las combinaciones ganadoras, y de las ganadoras selecciono las que tengan un 5 al lanzar el dado

C C 2

C C 4

C C 6

C X 5

C X 6

X C 5

X C 6

$$P(5/\text{Ganado}) = \frac{P(5\ \cap \text{Gana})}{P(\text{Gana})} = \frac{2}{7}$$

Otra forma:

	5	**No 5**	
Gana	2	5	**7**
No ganar	1	16	**17**
	3	**21**	**24**

$$P(5/\text{Ganado}) = \frac{P(5\ \cap \text{Gana})}{P(\text{Gana})} = \frac{\frac{2}{24}}{\frac{7}{24}} = \frac{2}{7}$$

d)

A = suceso "el jugador **no gana**"

B = suceso "el jugacor **obtiene un seis** al lanzar el dado"

De las posibles combinaciones ganadores, podemos construir la siguiente tabla:

	6	**No 6**	
Gana	3	4	**5**
No gana	1	16	**17**
	4	**20**	**24**

¿Son independientes los suceso A y B?

$$\mathrm{P}(\mathrm{A}\ \cap \mathrm{B}) = P(A)\ \cdot P\ (B)\ \ \rightarrow A\ y\ B\ son\ independientes$$

$$\frac{1}{24} = \frac{17}{24} \cdot \frac{3}{6}$$

$$\frac{1}{24} = \frac{17}{48}$$

$$0.0416 \neq 0.35416 \rightarrow A\ y\ B\ son\ independientes$$