TEMA 9 Derivadas. Técnicas de derivación

1. Definición de función derivada.

Halla la función derivada de $f(x)=\sqrt{x+3}$ ***utilizando la definición.***

Función derivada: $f'(x)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$; $f(x+h)=\sqrt{x+h+3}$; $f'(x)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\sqrt{x+h+3}-\sqrt{x+3}}{h}=\dfrac{0}{0}$. Indeterminación.

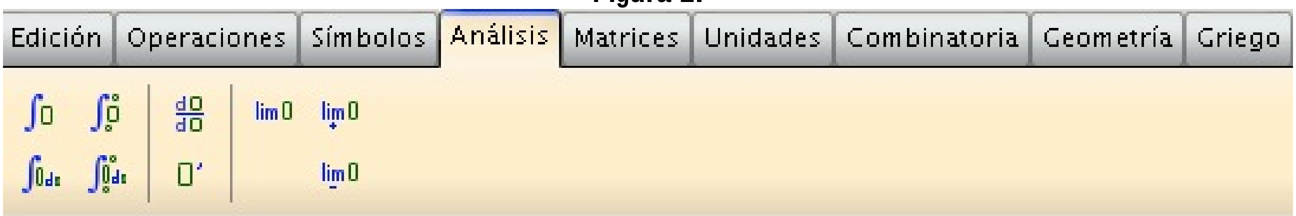
Multiplicamos numerador y denominador por $\sqrt{x+h+3}+\sqrt{x+3}$ para poder simplificar la fracción:

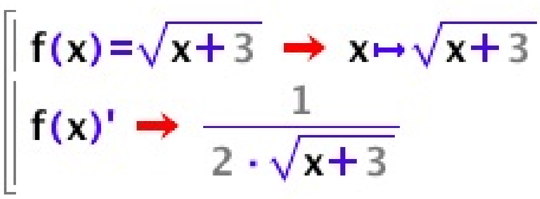
$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{\left(\sqrt{x+h+3}\right)^2-\left(\sqrt{x+3}\right)^2}{h\left(\sqrt{x+h+3}+\sqrt{x+3}\right)}=\lim_{h\to 0}=\frac{1}{\sqrt{x+h+3}+\sqrt{x+3}}=\frac{1}{2\sqrt{x+3}}$$

Ahora resolveremos el problema con Wiris:

1. Comprobaremos el resultado calculando la derivada de la función. Para ello, primero escribimos la función y luego, la derivamos:

Figura 1.





**Para insertar el apóstrofe que nos sirve para derivar, tenemos dos opciones: la primera es insertarla desde el teclado, y la segunda es con el icono en la pestaña Análisis:*

Figura 2.

Enlace con el ejercicio resuelto en la web:

WIRIS

2. Derivadas laterales.

Demuestra, utilizando la definición de derivada, que la función: $f(x) = x|x-1|$ ***no es derivable en x = 1.***

$$|x-1| = \begin{cases} -x+1 & si \quad x<1 \\ x-1 & si \quad x \geq 1 \end{cases} \qquad f(x) = x|x-1| = \begin{cases} -x^2+x & si \quad x<1 \\ x^2-x & si \quad x \geq 1 \end{cases}$$

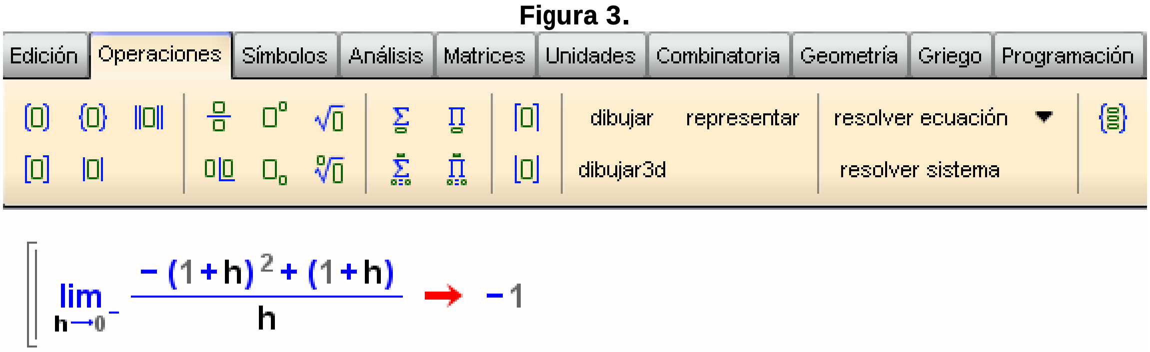
$$f'(1^-) = \lim_{h\to 0^-} \frac{f(1+h)-f(1)}{h} \overset{(*)}{=} \lim_{h\to 0^-} \frac{-(1+h)^2+(1+h)}{h} = \lim_{h\to 0^-}(-1-h) = -1 \quad (*) \text{ Si } h\to 0^-,\ 1+h<1$$

$$f'(1^+) = \lim_{h\to 0^+} \frac{(1+h)^2-(1+h)}{h} = \lim_{h\to 0^+}(h+1) = 1 \quad \text{Como } f'(1^-) \neq f'(1^+),\ f \text{ no es derivable en x = 1.}$$

Ahora resolveremos el problema con Wiris:

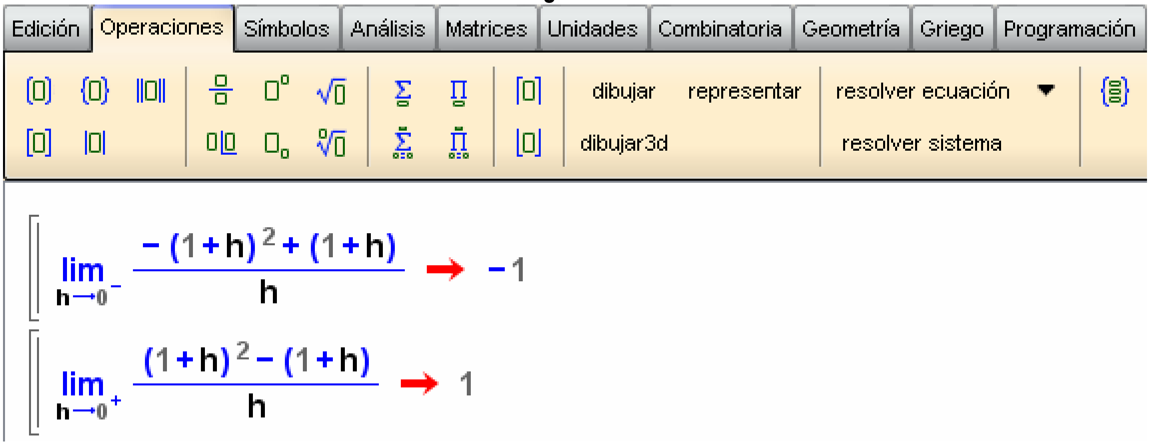
1. Calcularemos el límite cuando x tiende a 0 por la izquierda. Para insertar el límite sólo tenemos que ir a la pestaña ‘Análisis’:

Figura 3.



2. A continuación se estudiará el límite por la derecha, por lo que se hará lo mismo que en el primer paso, pero cuando h tiende a 0 por la derecha:

Figura 4.



Como los límites tanto por la derecha como por la izquierda no coinciden la función $f(x)$ no es derivable en el punto, en este caso, x=0.

Enlace con el ejercicio resuelto en la web:

3. Función derivada.

Dada la función: $f(x)=|x-3|+|x|$ ***halla su función derivada.***

Definimos f por intervalos teniendo en cuenta que:

$$\left.\begin{array}{l} |x-3| = \begin{cases} -x+3 & si \quad x<3 \\ x-3 & si \quad x\geq 3 \end{cases} \\ |x| = \begin{cases} -x & si \quad x<0 \\ x & si \quad x\geq 0 \end{cases} \end{array}\right\} \to \begin{array}{ccccccc} -x+3 & & \vdots & -x+3 & \vdots & & -x+3 \\ \hline & -x & 0 & x & 3 & x & \end{array}$$

$$f(x)=\begin{cases} -2x+3 & si \quad x<0 \\ 3 & si \quad 0\leq x<3 \\ 2x-3 & si \quad x\geq 3 \end{cases} \to f'(x)=\begin{cases} -2 & si \quad x<0 \\ 0 & si \quad 0\leq x<3 \\ 2 & si \quad x\geq 3 \end{cases}$$

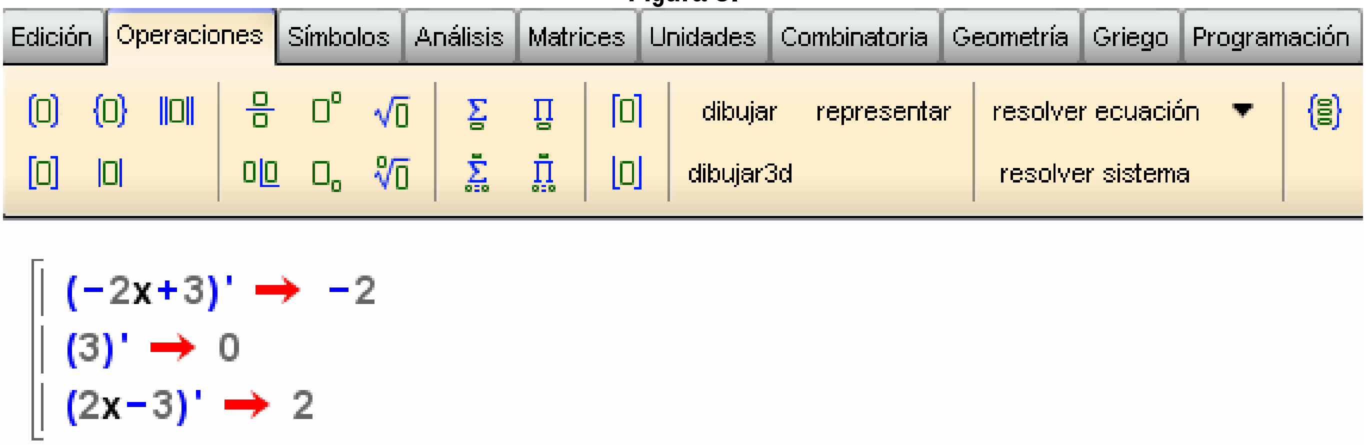
$f'(0^-)=-2,\ f'(0^+)=0 \Rightarrow$ No es derivable en $x=0$ porque $f'(0^-)\neq f(0^+)$

$f'(3^-)=0,\ f'(3^+)=2 \Rightarrow$ No es derivable en $x=3$ porque $f'(3^-)\neq f(3^+)$

Ahora resolveremos el problema con Wiris:

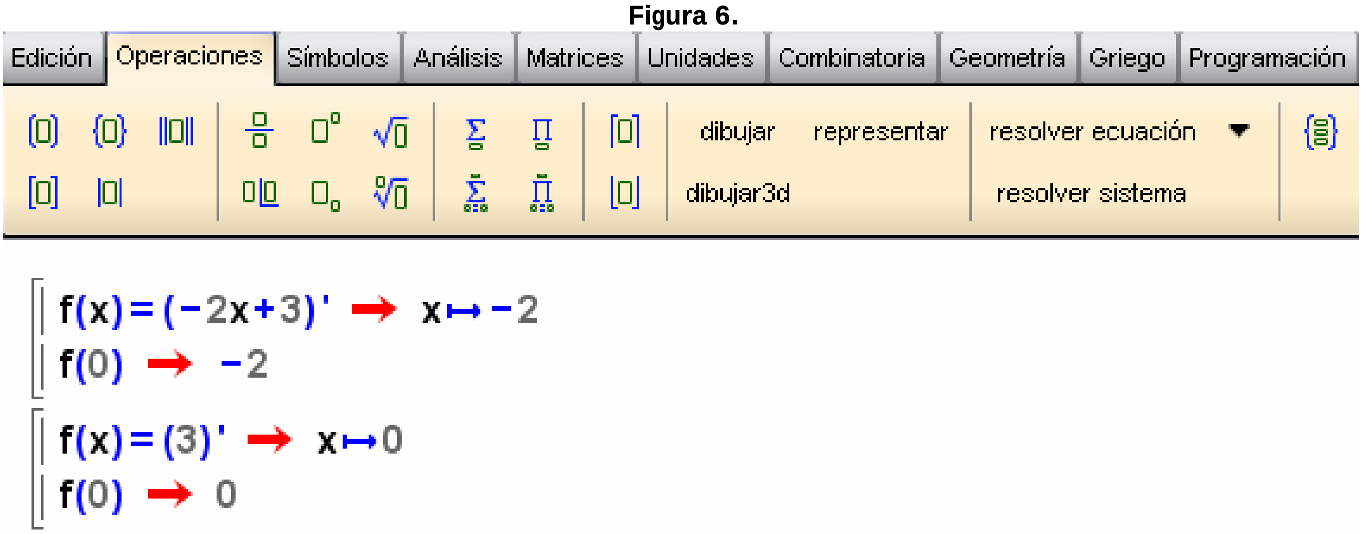
1. En primer lugar, derivamos las tres partes en las que dividimos la función. Para ello, escribimos la función entre paréntesis y escribimos un apóstrofe tras él. Obtendremos el resultado pulsando igual:

Figura 5.



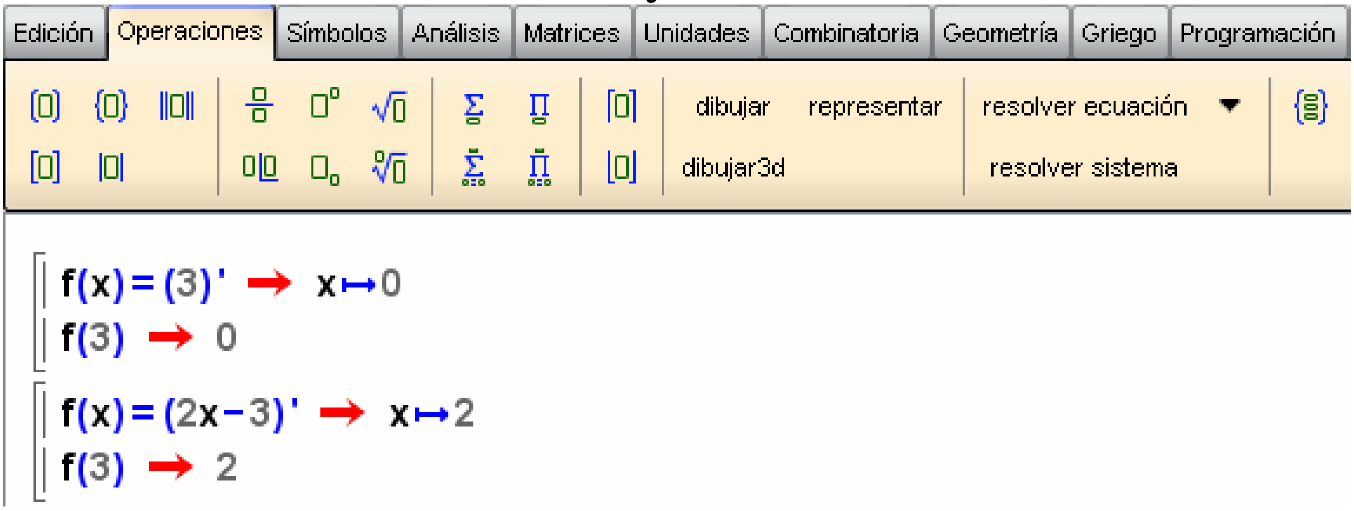
2. Para saber si es derivable en el punto x=0, lo sustituimos en la función derivada. Esto lo haremos escribiendo f(x) y luego la función lista para derivarla. A continuación, y siempre dentro del mismo bloque, escribimos f(0) para sustituir cada x por 0:

Figura 6.



2. Para saber si es derivable en el punto x=3, realizamos los mismos pasos que en el paso anterior:

Figura 7.



Enlace con el ejercicio resuelto en la web:

4. Función no derivable.

Estudia la derivabilidad de la función $f(x)=\begin{cases} 4x+8, & si \quad x\le -2 \\ 4-x^2, & si \quad -2<x<2 \\ 4x-8, & si \quad x\ge 2 \end{cases}$

f está definida por funciones polinómicas en los intervalos $(-\infty,-2),(-2,2)$ y $(2,+\infty)$. Por tanto, f es continua y derivable en esos intervalos. f es continua en x = -2 y en x = 2, porque: $\lim_{x\to -2} f(x)=f(-2)=0$ y $\lim_{x\to 2} f(x)=f(2)=0$

Estudiamos su derivada: $f'(x)=\begin{cases} 4, & si \quad x\le -2 \\ -2x, & si \quad -2<x<2 \\ 4, & si \quad x\ge 2 \end{cases}$ $\quad f(-2^-)=f(-2^+)\to f$ es derivable en $x=-2$; $f(2^-)\neq f(2^+)\to f$ no es derivable en $x=2$

Ahora resolveremos el problema con Wiris:

1. Representamos la función, para verla gráficamente. En ella se puede ver como tiene un punto anguloso en x=2.

Figura 8.

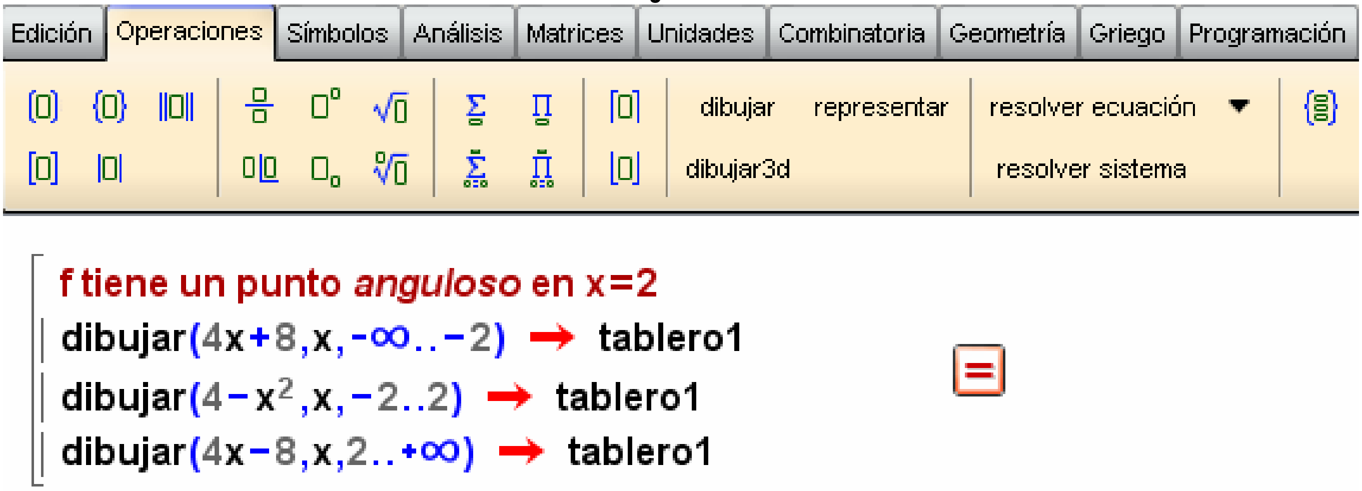
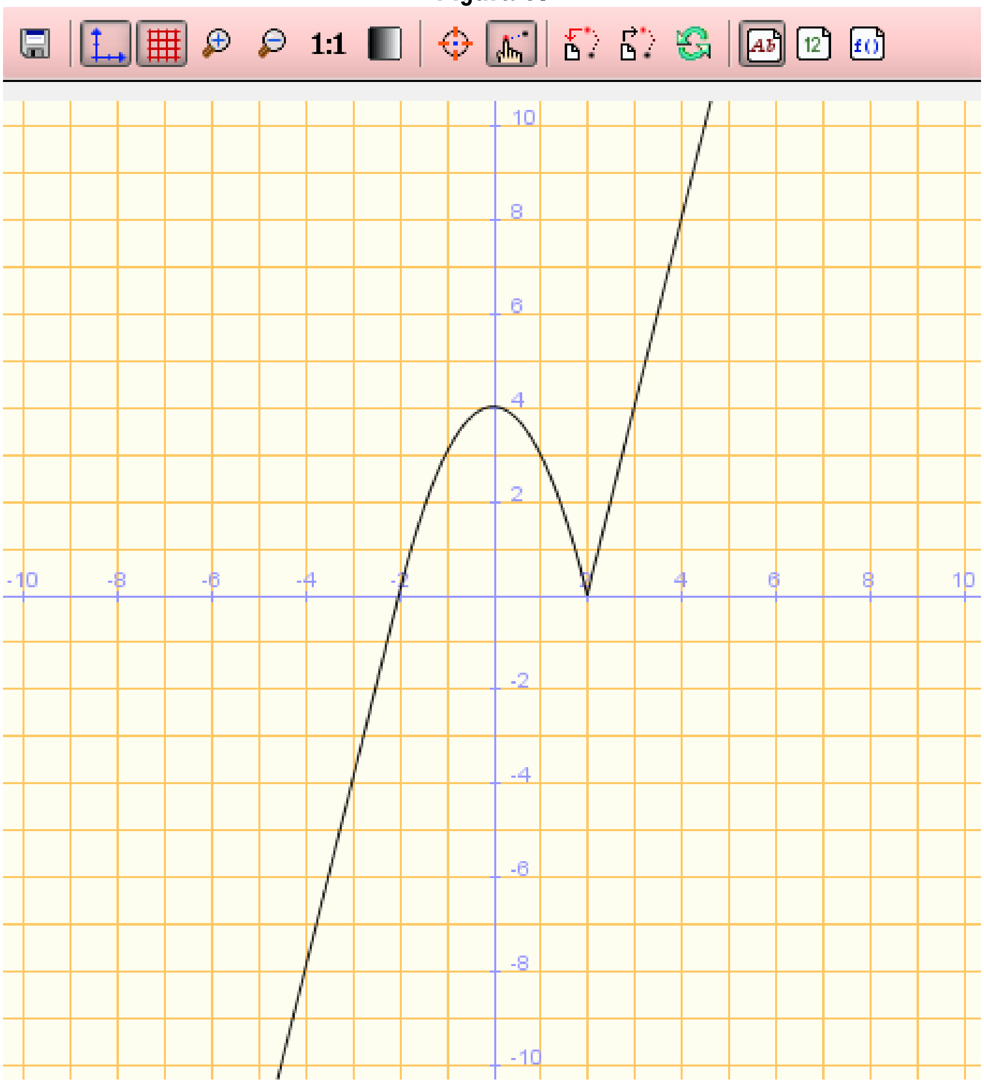


Figura 9.



Enlace con el ejercicio resuelto en la web:

2. Derivamos cada parte de la función, para saber si por cada lado son iguales al sustituir el punto, y por lo tanto, derivables. Si se representa la función se puede ver que f' no existe en $x = 2$.

Figura 10.

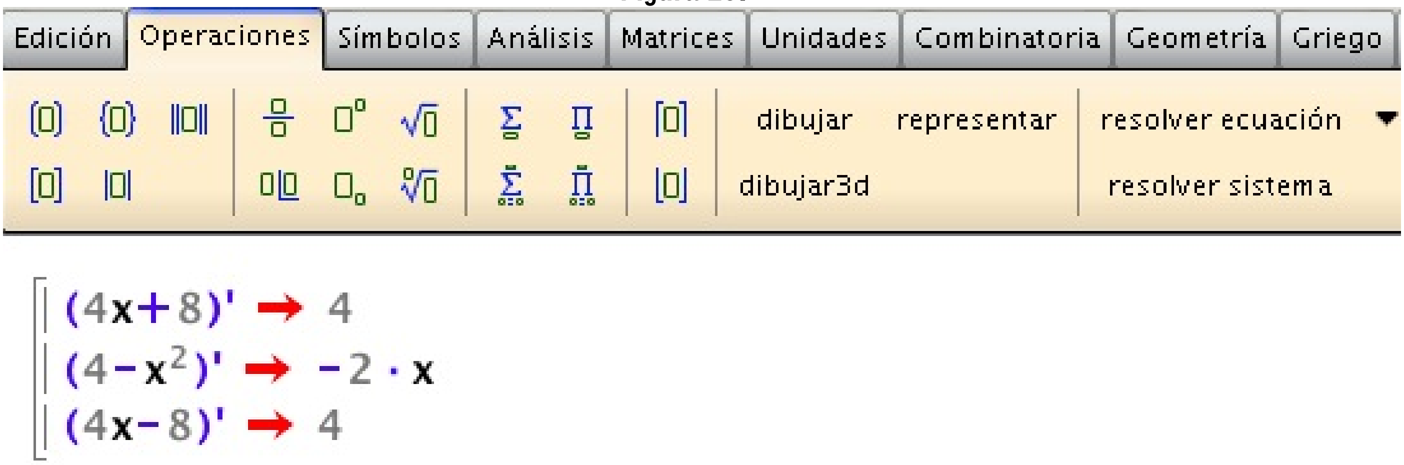


Figura 11.

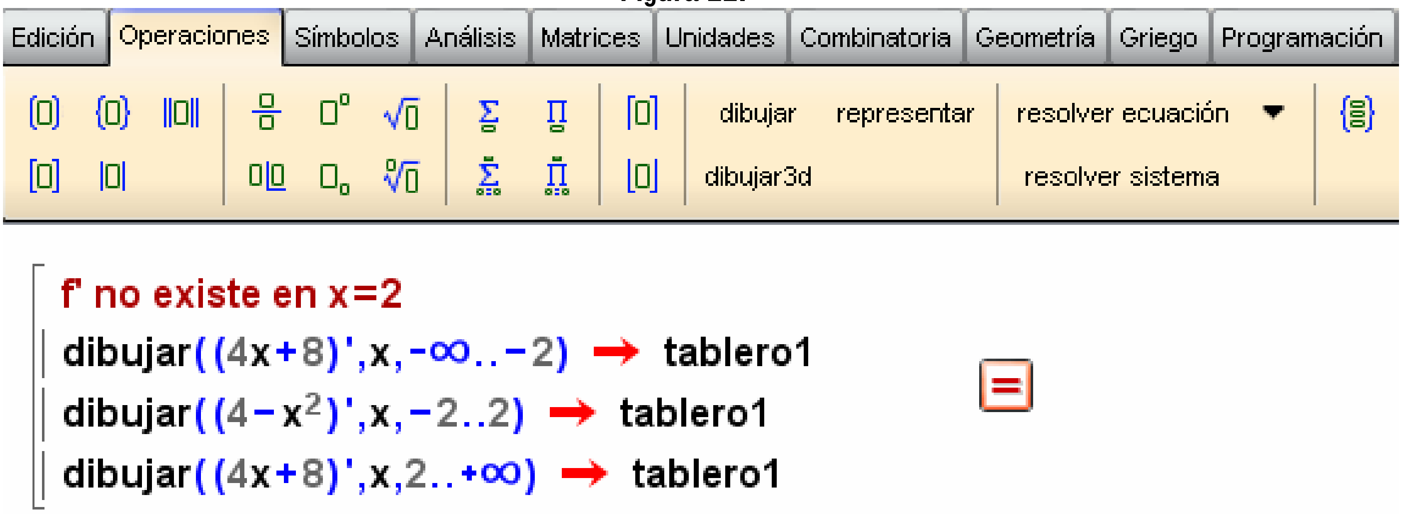
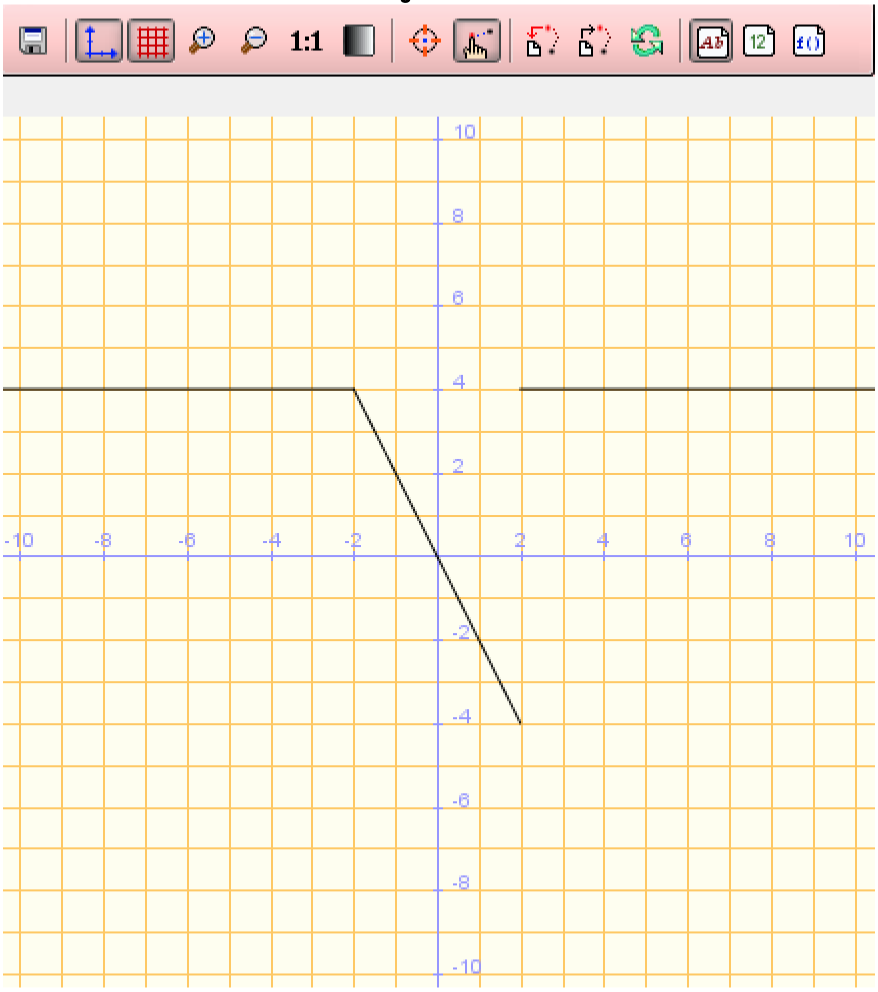


Figura 12.



Enlace con el ejercicio resuelto en la web:

WIRIS

5. Reglas de derivación.

Halla la función derivada de estas funciones:

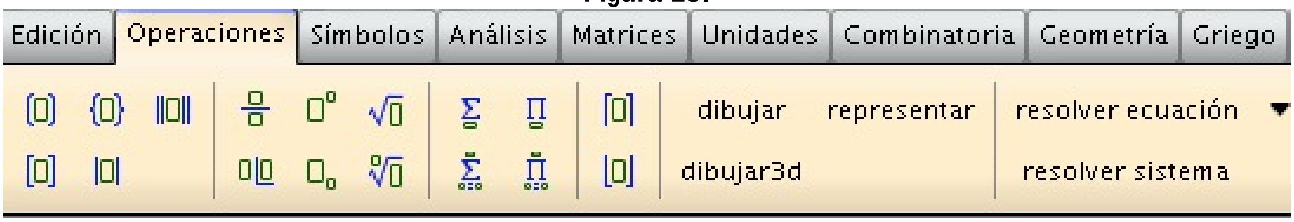
$a)\, y = arc\,sen(2x\sqrt{1-x^2})$ $\qquad b)\, y = arc\,tg\,\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ $\qquad c)\, y = \left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x$

a) $$y' = \frac{1}{\sqrt{1-\left(2x\sqrt{1-x^2}\right)^2}}\cdot D(2x\sqrt{1-x^2}) = \frac{1}{\sqrt{1-4x^2+4x}}\cdot\left(2\sqrt{1-x^2}+\frac{-2x^2}{\sqrt{1-x^2}}\right) = \frac{1}{\sqrt{(1-2x^2)^2}}\cdot\frac{2-4x^2}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{1}{1-2x^2}\cdot\frac{2(1-2x^2)}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{2}{\sqrt{1-x^2}}$$

Ahora resolveremos el problema con Wiris:

1. De la misma forma que en ejercicios anteriores, para resolver este, escribimos la función entre paréntesis, y luego escribimos el apóstrofe. Después, sólo tenemos que pulsar el botón de igual y obtenemos la derivada:

Figura 13.



$$\left(\operatorname{arcsen}\left(2x\sqrt{1-x^2}\right)\right)' \rightarrow \frac{-x\cdot(2\cdot x)'\left(\sqrt{-x^2+1}\right)}{\sqrt{-x^2+1}\cdot\sqrt{-(2\cdot x)\left(\sqrt{-x^2+1}\right)^2+1}}$$

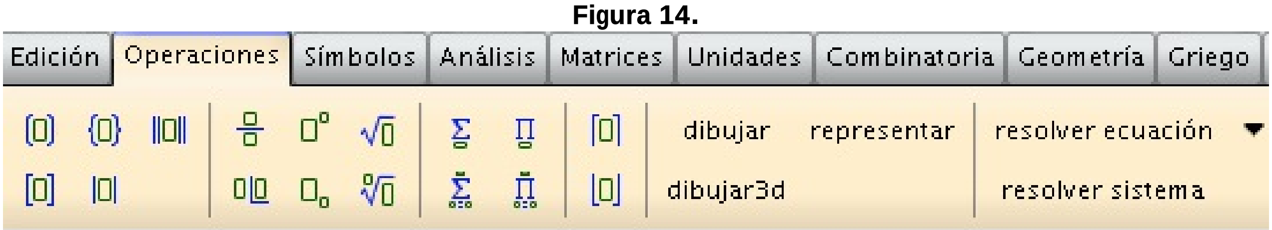
Enlace con el ejercicio resuelto en la web:

b) $$y' = \frac{1}{1+\left(\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right)^2}\cdot D\left(\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right) = (1-x^2)\cdot\frac{\sqrt{1-x^2}-\frac{-2x^2}{2\sqrt{1-x^2}}}{\left(\sqrt{1-x^2}\right)^2} = (1-x^2)\cdot\frac{1}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

Ahora resolveremos el problema con Wiris:

1. Para resolver este apartado, escribiremos la función y luego la derivaremos:

Figura 14.



$$\left(\arctan\left(\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right)\right)' \rightarrow \frac{1}{\sqrt{-x^2+1}}$$

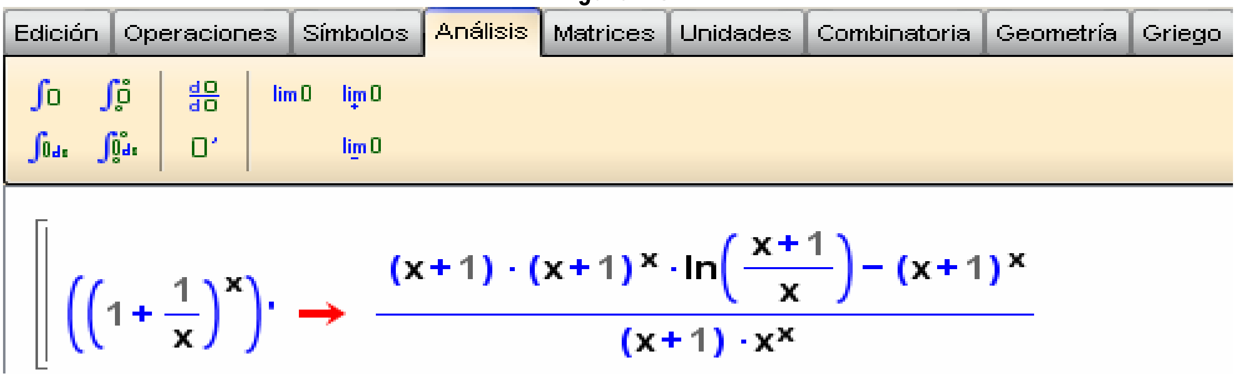
Enlace con el ejercicio resuelto en la web:

c) $\ln y = \ln\left(1+\frac{1}{x}\right)^{2} = x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) \rightarrow \frac{y'}{y} = \ln\left(1+\frac{1}{x}\right) + x\frac{-\frac{1}{x^2}}{1+\frac{1}{x}}$; $y' = \left[\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x+1}\right]y \rightarrow y' = \left[\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x+1}\right]\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}$

Ahora resolveremos el problema con Wiris:

1. Este apartado también lo resolveremos escribiendo la función entre paréntesis y escribiéndo el apóstrofe después:

Figura 15.



Enlace con el ejercicio resuelto en la web:

6. Pendiente de la tangente.

Prueba si existe un punto de la curva y en el que la tangente a esa curva es paralela a la bisectriz del primer cuadrante.

$$y = arctg\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$$

Sabemos que $f'(x_0)$ es la pendiente de la recta tangente a la gráfica de $y = f(x)$ en el punto de abcisa x_0. En este caso buscamos un x_0 tal que $f'(x_0) = 1$, pendiente de la bisectriz.

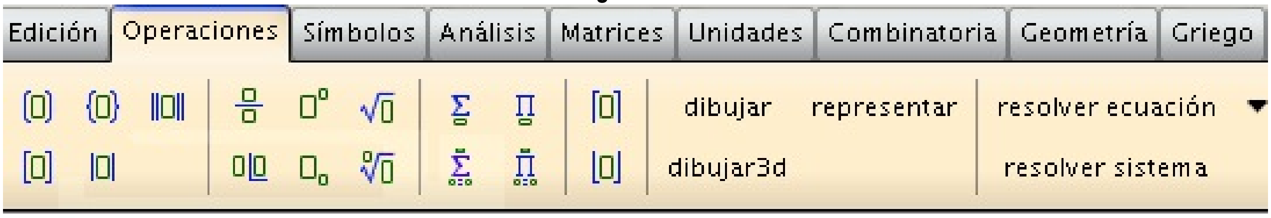
$$f'(x) = \frac{(1-x)+(1+x)}{(1-x)^2} \cdot \frac{1}{1+\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^2} = \frac{1}{1+x^2} \rightarrow f'(x) = 1 \rightarrow x = 0;$$

En $x_0 = 0$, la tangente a la curva es paralela a la bisectriz.

Ahora resolveremos el problema con Wiris:

1. Para resolver este ejercicio, escribiremos la función y después la derivaremos como anteriormente:

Figura 16.



$$f(x)=\arctan\left(\frac{1+x}{1-x}\right) \rightarrow x\mapsto \operatorname{atan}\left(\frac{x+1}{-x+1}\right)$$

$$f(x)' \rightarrow \frac{1}{x^2+1}$$

Enlace con el ejercicio resuelto en la web:

WIRIS

7. Función continua y derivable.

Halla el valor que ha de tener m para que la función f (x) sea derivable en x = 1.

$$f(x)=\begin{cases} 3-mx^2 & si \quad x\le 1 \\ \dfrac{2}{mx} & si \quad x>1 \end{cases}$$

Para que f sea derivable en x = 1, ha de ser continua en x=1.

- Si f es continua en x = 1, $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = f(1) = 3-m$; $\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^-}(3-mx^2) = 3-m \\ \lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{2}{mx} = \dfrac{2}{m} \end{array}\right\}$

  $$3-m=\frac{2}{m} \rightarrow m^2-3m+2=0 \quad \begin{array}{l} m=2 \\ m=1 \end{array}$$

  f Es continua en x = 1 si m = 1 o m = 2.

- f será derivable en x = 1 si $f'(1^-) = f'(1^+)$.

  - Para m = 1. $f(x)=\begin{cases} 3-x^2 & si \quad x\le 1 \\ \dfrac{2}{x} & si \quad x>1 \end{cases} \rightarrow f'(x)=\begin{cases} -2x & si \quad x\le 1 \rightarrow f'(1^-)=-2 \\ -\dfrac{2}{x^2} & si \quad x>1 \rightarrow f'(1^+)=-2 \end{cases}$

    f Es derivable en x = 1 si m = 1.

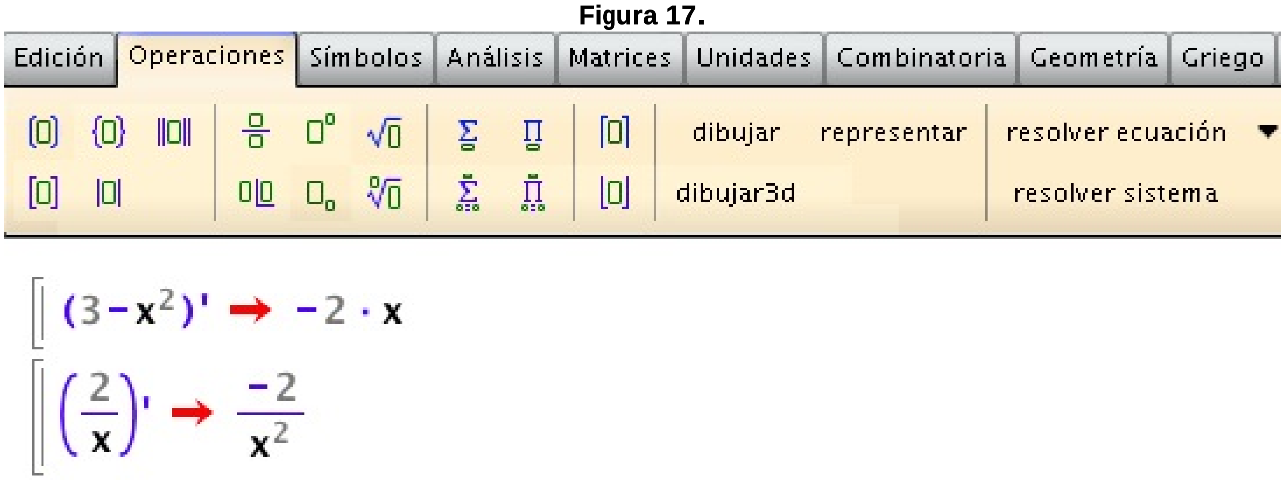
- Para m = 2. $f(x)=\begin{cases}3-2x^2 & si \quad x\le 1\\ \dfrac{1}{x} & si \quad x>1\end{cases} \rightarrow f'(x)=\begin{cases}-4x & si \quad x\le 1 \rightarrow f'(1^-)=-4\\ -\dfrac{1}{x^2} & si \quad x>1 \rightarrow f'(1^+)=-1\end{cases}$

  f No es derivable en x = 1 si m = 2.

Ahora resolveremos el problema con Wiris:

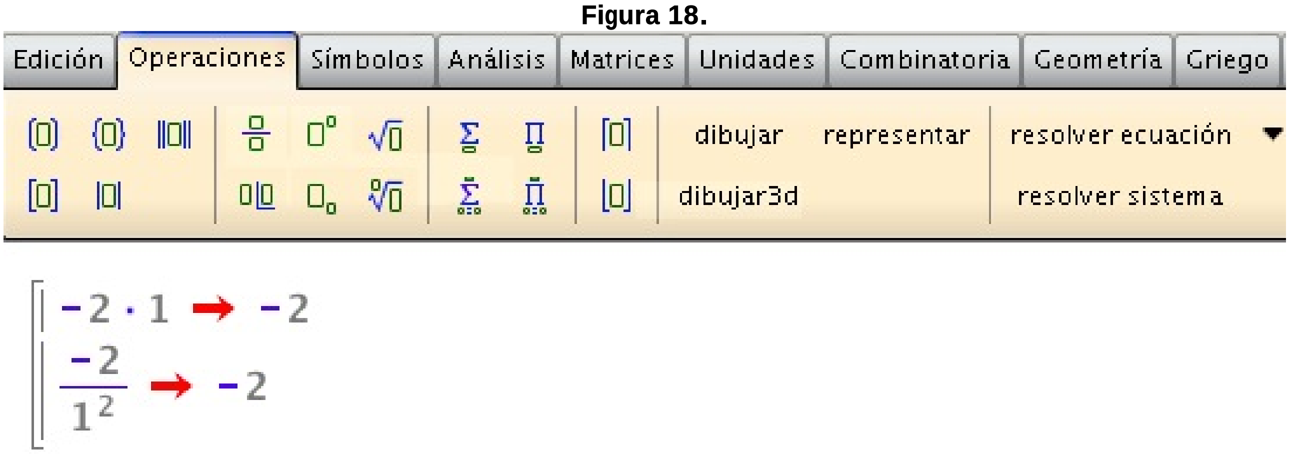
1. Derivamos ambas partes de la función para m=1:

Figura 17.



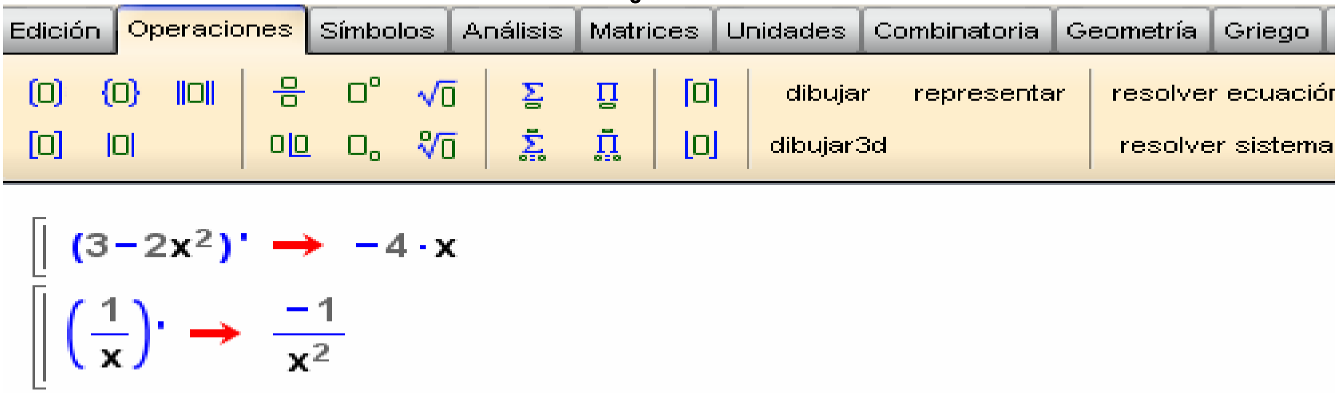
2. Sustituimos el punto (en este caso 1) en ambas partes derivadas:

Figura 18.



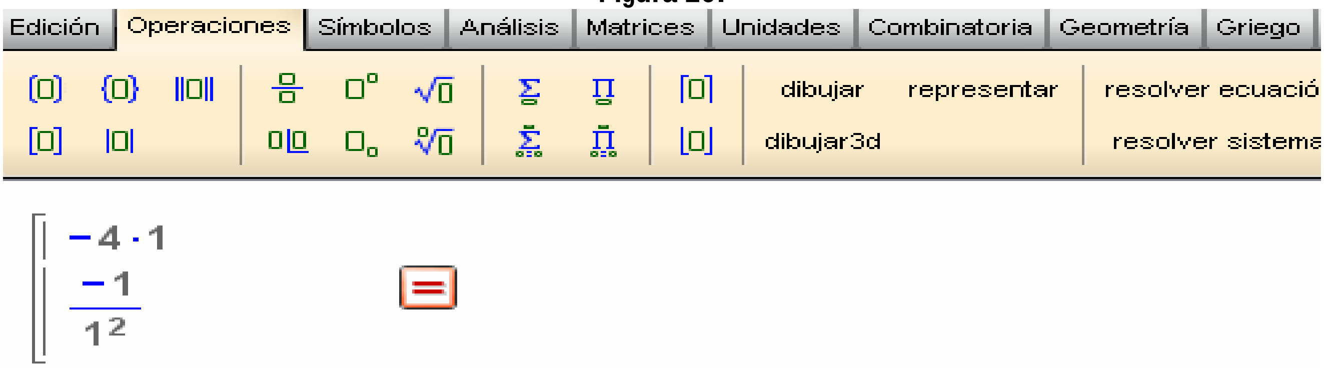
3. Derivamos ambas partes de la función para m=2:

Figura 19.



4. Sustituimos el punto (1) en ambas partes derivadas:

Figura 20.



Enlace con el ejercicio resuelto en la web: