

# **GEOMETRÍA DINAMICA Y ESTADÍSTICA CON LA CLASSPAD 300 Y LA FX-9860G SD**

## **4. LUGARES GEOMÉTRICOS Y CÓNICAS.**

**PLANOS EN EL ESPACIO Y SUPERFICIES EN 3D.  
CURVAS EN POLARES Y PARAMÉTRICAS**

---

**CASIO®**

**MAURICIO CONTRERAS**

## CURVAS Y SUPERFICIES


### Introducción

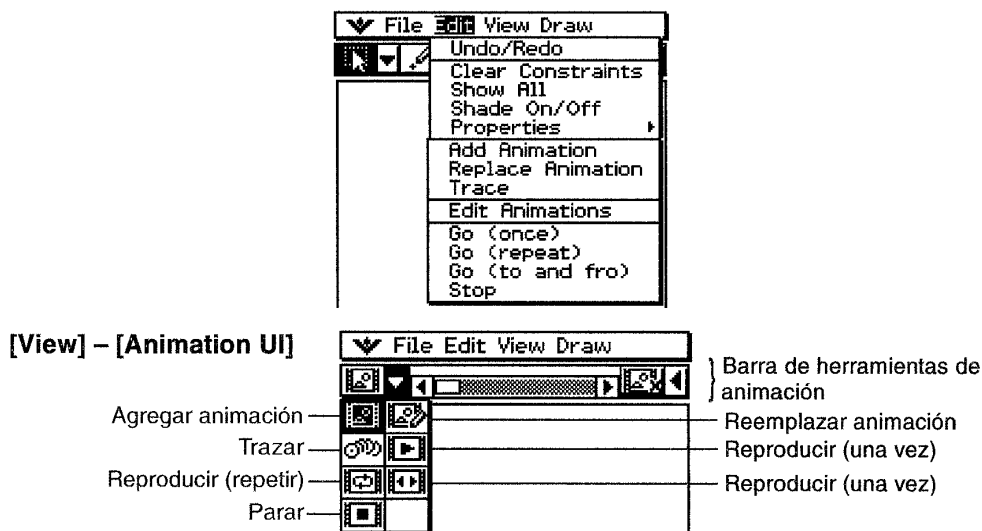
También es posible dibujar cónicas y construir lugares geométricos. La ClassPad 300 dispone de la herramienta Animación, con la que es posible visualizar construcciones de figuras y curvas. La ClassPad 300 dispone además de la presentación de la pantalla 3D en la que podemos visualizar gráficas de funciones del tipo  $z = f(x, y)$ , que podemos girar y visualizar de diversas formas.

En esta sesión analizaremos los lugares geométricos y las animaciones, los gráficos de curvas cónicas, las curvas en coordenadas polares y las representaciones de superficies en tres dimensiones.

### 1. Lugares geométricos

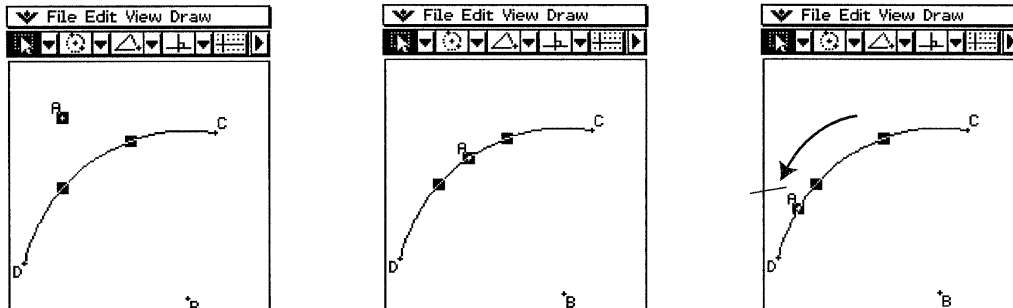
- **ANIMACIONES**

- Puedes construir y ejecutar una animación usando comandos del menú o usando la barra de herramientas de animación que aparece cuando seleccionas el comando Ver / UI de animación.
- Para editar animaciones, debes seleccionar el comando Edit / Animación / Editar animaciones.
- Para cerrar la barra de herramientas de animación y volver a la barra normal, toca el botón  situado a la derecha de la barra de herramientas de animación o selecciona el comando Ver / UI de animación.



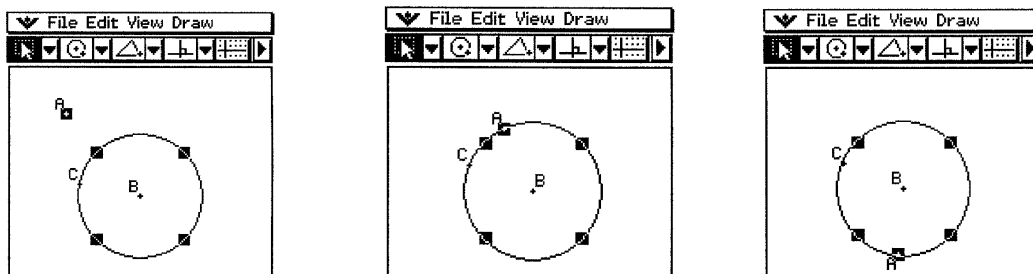
- Añade una animación y reproducéla. Sigue los siguientes pasos:
  - a) Marca un punto y dibuja un arco. (También puedes dibujar un círculo, una elipse, un segmento de recta o una función).
  - b) Selecciona el punto y el arco.
  - c) Selecciona el comando Edit / Animación / Agregar animación.

- d) Selecciona el comando Edit / Animación / Reproducir (una vez). Después selecciona sucesivamente las opciones Reproducir (repetir) y Reproducir (av/ret). Observa, en cada caso, que el punto A se mueve a lo largo del arco CD.
- e) Selecciona el comando Edit / Animación / Parar para parar la animación.



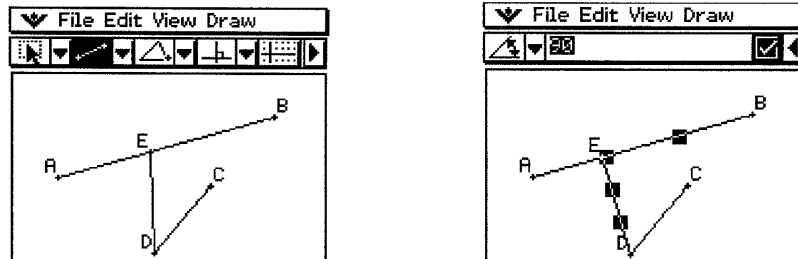
- f) Dibuja un segmento de recta y marca otro punto.
- g) Selecciona el segmento y el punto.
- h) Repite los pasos (c) y (d). Observa que de esta forma se produce una animación múltiple.


- Anima un punto alrededor de un círculo. Sigue los siguientes pasos:
  - a) Selecciona el comando Edit / Animación / Editar animaciones. En el cuadro de diálogo que aparece selecciona Eliminar.
  - b) Marca un punto y dibuja un círculo y luego selecciónalos.
  - c) Selecciona Edit / Animación / Agregar animación.
  - d) Selecciona Edit / Animación / Reproducir (una vez). El punto viaja alrededor del círculo.

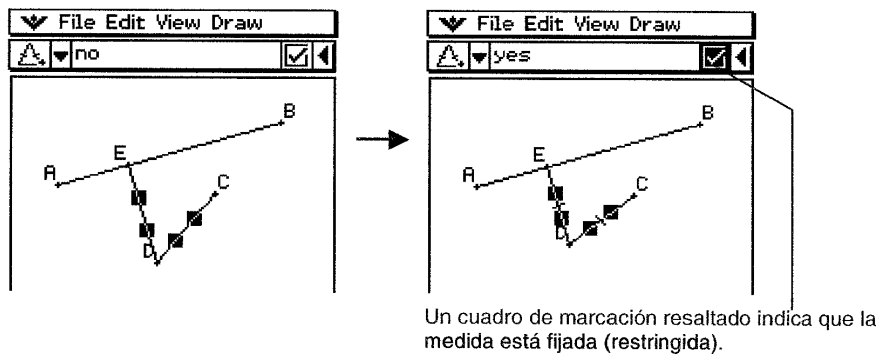


- Reemplaza la animación actual por una nueva. Sigue los siguientes pasos:
  - a) Selecciona el punto y la curva para la nueva animación.
  - b) Selecciona el comando Edit / Animación / Reemplazar animación. Se configura una nueva animación para un nuevo conjunto de curva y punto.
  - c) Selecciona Edit / Animación / Reproducir (una vez) para ver la nueva animación.
- Dibuja un lugar geométrico. Sigue los siguientes pasos:
  - a) Dibuja un segmento AB y un punto C que no se encuentre sobre el segmento AB.
  - b) Marca un punto D, que tampoco esté sobre el segmento AB y que esté en el mismo lado respecto el segmento que el punto C.
  - c) Dibuja un segmento que conecte el punto D con el punto C.

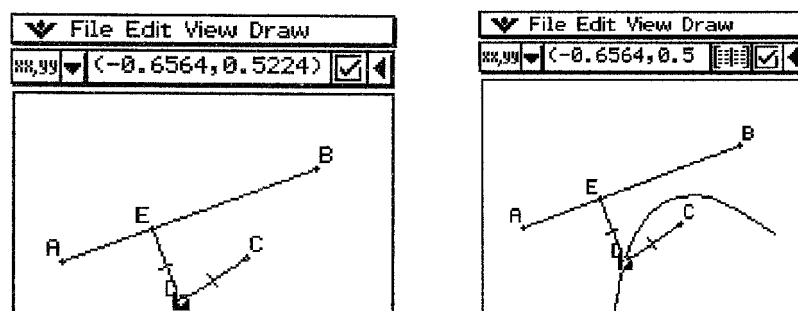
- d) Dibuja otro segmento DE que conecte el punto D con el segmento AB.
- e) Toca el botón [▶] para ver el cuadro de medidas.
- f) Selecciona los segmentos AB y DE, introduce 90 grados en el cuadro de medidas, y toca el cuadro de marcación junto al cuadro de medidas. Se fija el ángulo entre AB y DE en 90 grados.




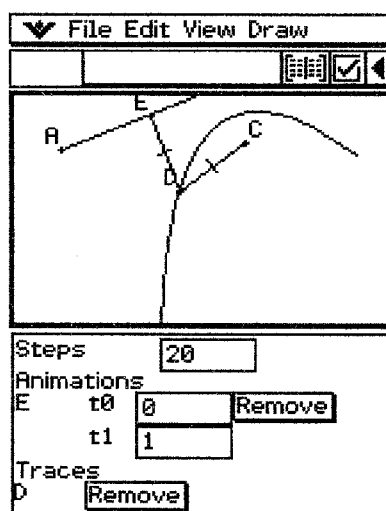
- g) Selecciona los segmentos DE y DC y luego toca el botón [▼] junto al cuadro de medidas.
- h) Toca el icono  y selecciona el cuadro de marcación a la derecha del cuadro de medidas. De esta forma los segmentos DE y DC son congruentes en longitud.



- i) Selecciona el punto E y el segmento AB.
- j) Selecciona el comando Edit / Animación / Agregar animación.
- k) Toca la pantalla para cancelar la selección de los elementos seleccionados.
- l) Selecciona el punto D.
- m) Selecciona el comando Edit / Animación / Trazo.
- n) Con el punto D todavía seleccionado, elige el comando Edit / Animación / Reproducir (una vez). Se traza una parábola en la pantalla. Observa que el segmento AB es la directriz y el punto C es el foco de la parábola.




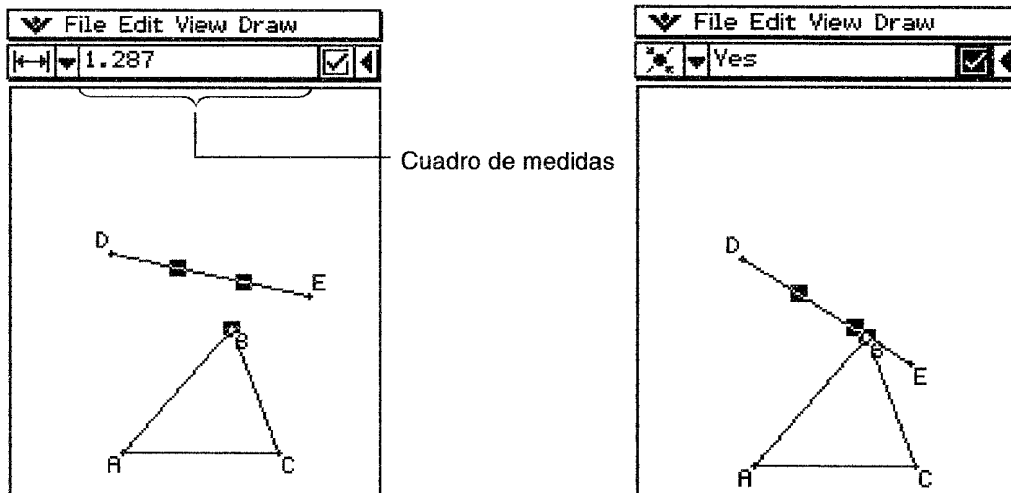
- Edita una animación. Sigue los siguientes pasos:
  - a) Con la animación que deseas editar en pantalla, selecciona Edit / Animación / Editar animaciones. Aparece la ventana de edición de animaciones en la parte inferior.
  - b) Edita la animación siguiendo los siguientes pasos:
    - ❑ Steps. Indica cuántos pasos recorre el punto E para moverse a lo largo del segmento AB. El valor inicial por defecto es 20.
    - ❑ Animations:
      - ❑ La E bajo Animations indica que el punto E es el que se mueve en la animación. Si se hace una animación múltiple, aparece una lista de todos los puntos que intervienen en la animación.
      - ❑ Si tocas el botón [Remove] se borra la animación correspondiente.
      - ❑ t0 y t1 indican el rango de movimiento del punto E sobre el segmento AB. Los valores iniciales por defecto son t0=0 y t1=1.
      - ❑ Durante la animación se considera que la longitud de AB es de una unidad. Los valores por defecto indican que el movimiento del punto E es desde el punto inicial A (donde la longitud es 0) hasta el punto final B (donde la longitud es igual a 1).
      - ❑ Cambia el valor t0 a 0,5. El punto E se mueve desde el punto medio del segmento AB hasta B.
      - ❑ Cambia el valor de t0 a -1. El punto E empieza en un punto fuera del segmento AB a una distancia igual a la longitud del segmento AB y acaba en el punto B.
      - ❑ Traces. Este elemento muestra el punto de trazo indicado. Si tocas el botón [Remove] se cancela la configuración del punto de trazo.
  - c) Con la ventana inferior activa, selecciona el comando  / Cerrar para cerrar la ventana de edición de animaciones.



- Construye una tabla de animación. Sigue los siguientes pasos:
  - a) Dibuja un triángulo y un segmento encima del triángulo.
  - b) Toca el botón [▶] para ver el cuadro de medidas.
  - c) Selecciona el segmento y el vértice más cercano a la recta.

d) Toca el botón [▼] junto al cuadro de medidas.


e) Toca el botón  y luego selecciona el cuadro de marcación a la derecha del cuadro de medidas. Se conecta el segmento y el vértice.

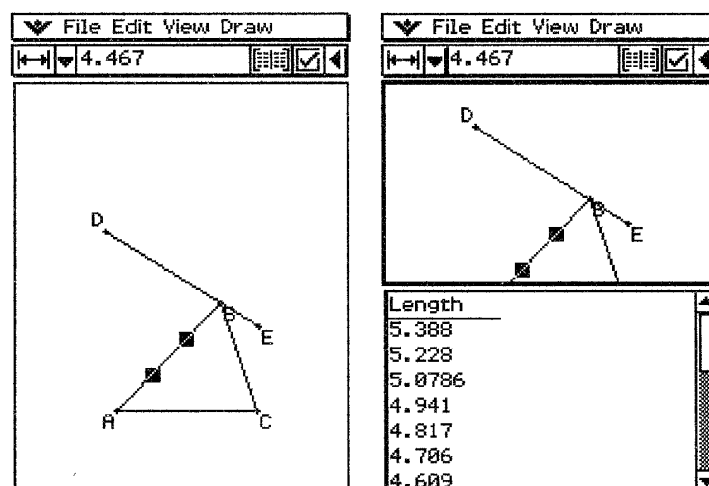



f) Con la recta y el vértice seleccionados, selecciona el comando Edit / Animación / Agregar animación.

g) Selecciona solamente un lado del triángulo.

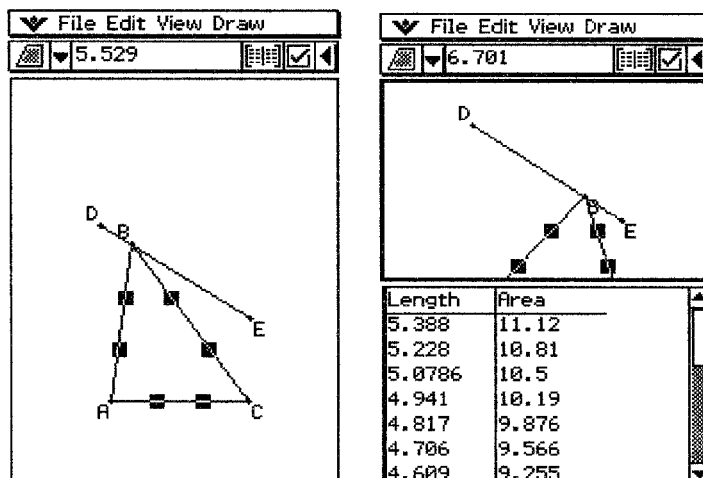
h) Selecciona el comando Edit / Animación / Reproducir (una vez).

i) Toca el botón  junto al cuadro de medidas. Mientras la animación se reproduce, la ventana inferior muestra la tabla para la longitud del lado seleccionado.



j) Selecciona otro lado y reproduce la animación otra vez, para ver la tabla de ese otro lado, o bien selecciona otro lado y toca el botón .

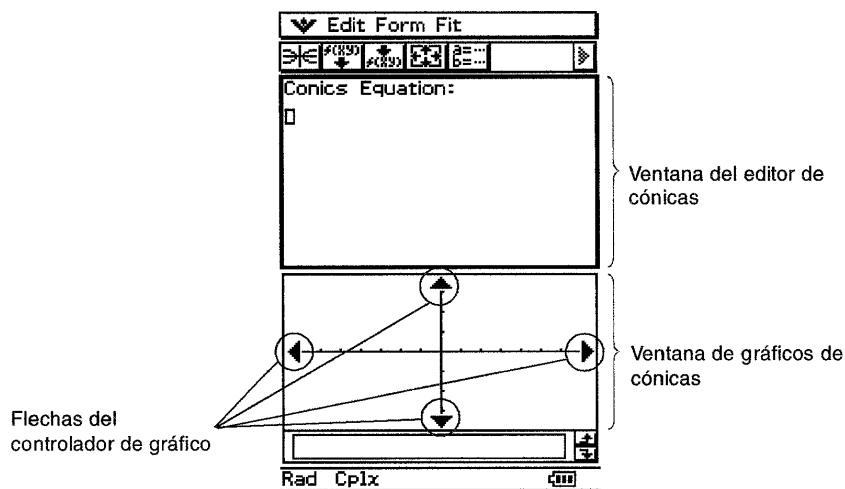
k) Selecciona los tres lados del triángulo y reproduce la animación otra vez. La tabla que aparece en la ventana inferior muestra cómo cambia el área del triángulo mientras se reproduce la animación.



## 2. Cónicas











- En el menú de aplicaciones, toca el botón . De esta forma se inicia la aplicación Cónicas y aparecen las ventanas del editor y de gráficos de cónicas. En el editor sólo puede haber una ecuación de cónica. Puedes tocar las flechas de la ventana de gráficos para desplazarla.



- En el menú Edit, dispones de las opciones de Cortar, Copiar, Pegar, Seleccionar todo y Borrar todo. Además tienes otros menús con los siguientes comandos:

Función	Botón	Acción
Forma / Ins. forma cónica		Inserta una forma cónica en la ventana del editor de cónicas
Ajustar / Ajustar a forma cónica		Ajusta la ecuación en la ventana del editor de cónicas a una forma de cónica.
		Dibuja un gráfico de cónica
/Preferencias/ Ventana vis.	—	Configura la ventana de gráficos.
/Preferencias/Adm.devariable	—	Muestra el administrador de variables.


- Cuando la ventana de gráficos esta activa, disponemos de los menús Zoom, Análisis y  $\blacklozenge$ , cuyos comandos principales se describen a continuación:

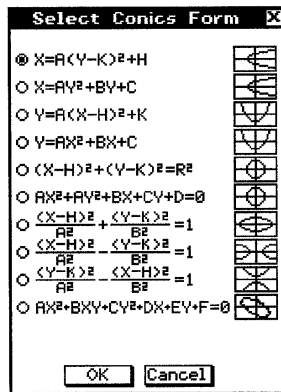
Función	Botón	Acción
Zoom/Cuadro		Amplia la parte de pantalla limitada por un cuadro.
Zoom/Factor	—	Indica un factor de zoom
Zoom/Aumentar	—	Acerca según el factor de zoom
Zoom/Reducir	—	Aleja según el factor de zoom
Zoom/Auto		Configura el eje OY de la ventana de visualización y dibuja el gráfico de forma que ocupe toda la pantalla.
Zoom/Original	—	Dibuja el gráfico en su tamaño original
Zoom/Cuadrado	—	Ajusta las dimensiones de la ventana de visualización de forma que los valores de OX sean idénticos a los de OY.
Zoom/Redondeo	—	Redondea las coordenadas usando la función de trazo
Zoom/Entero	—	Hace que el valor de cada punto sea igual a 1, de forma que las coordenadas sean enteras.
Zoom/Anterior	—	Devuelve los parámetros de visualización a sus valores anteriores.
Zoom/Rápido	—	Adapta la pantalla según el tipo de representación
Análisis/Trazo		Muestra las coordenadas de un punto del gráfico.
Análisis/Esbozo	—	Inserta puntos, gráficos o textos dentro de un gráfico.
Análisis/Resolución G.	—	Realiza una operación de Resolución Gráfica.
$\blacklozenge$ /Almacenar imagen	—	Guarda un gráfico como datos tipo imagen.
$\blacklozenge$ /Recuperar imagen	—	Recupera la imagen de un gráfico.
$\blacklozenge$ /Volver a dibujar		Vuelve a dibujar un gráfico
		Activa la ventana del editor de cónicas
$\blacktriangledown$ /Preferencias/Ventana vis.		Muestra el cuadro de diálogo de la ventana de visualización
		Activa la función de desplazamiento panorámico para mover la pantalla con el lápiz táctil
$\blacktriangledown$ /Preferencias/Adm.devariable		Muestra el administrador de variables.




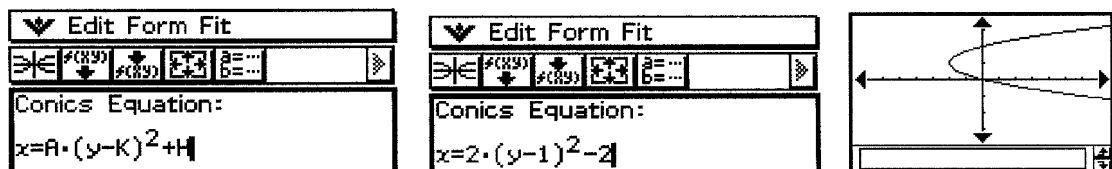
**INTRODUCIENDO ECUACIONES DE CÓNICAS**

Introduce la ecuación de una parábola de eje horizontal. Sigue los siguientes pasos:

- a) Con la ventana del editor de cónicas activa, toca el botón  o selecciona el comando Forma / Ins. forma cónica. Se muestra una pantalla con los distintos formatos de cónicas que se pueden introducir:




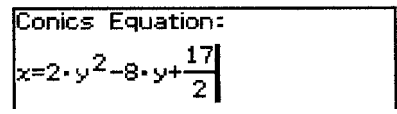
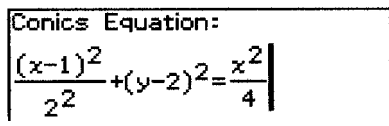
- b) Selecciona la forma de cónica "X=A(Y-K)<sup>2</sup>+H". Toca el botón [OK] para cerrar el cuadro de diálogo y verás la ecuación seleccionada en el editor de cónicas.
- c) Modifica la ecuación en la ventana del editor de ecuaciones, de forma que los coeficientes sean A=2, K=1 y H=-2.
- d) Toca el botón  para representar gráficamente la ecuación.



Transforma la ecuación  $\frac{(x-1)^2}{2^2} + (y-2)^2 = \frac{x^2}{4}$  en la forma de cónica estándar  $x = Ay^2 + By + C$ .

Sigue los siguientes pasos:



- a) En la ventana del editor de cónicas, introduce la ecuación anterior. Para mayor comodidad, utiliza el teclado 2D del teclado virtual.
- b) Después de introducir la ecuación, toca el botón  o selecciona el comando Ajustar / Ajustar a forma cónica. Aparece el cuadro de diálogo de selección de forma de cónica.
- c) Selecciona la forma "X=AY<sup>2</sup>+BY+C" y luego toca el botón [OK]. Se transforma la ecuación de manera que se convierte en  $x = 2y^2 - 8y + \frac{17}{2}$ .

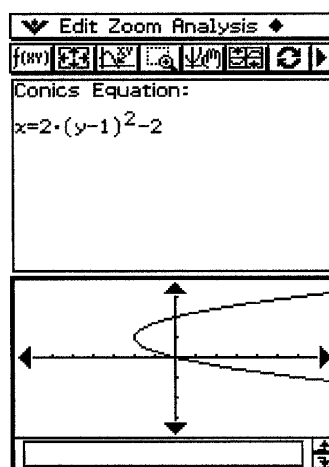


Nota.- Si la ecuación no se puede transformar en la forma de cónica seleccionada, aparece un mensaje de error. Puede que no se pueda transformar si la ecuación incluye una raíz cuadrada u otra función.



• **DIBUJANDO CÓNICAS**

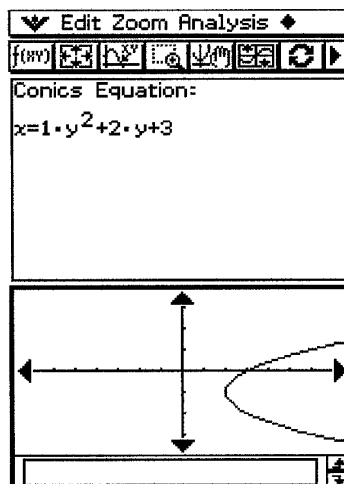
• Dibuja la parábola  $x = 2(y - 1)^2 - 2$ .

- a) En la ventana del editor de cónicas, toca el botón  o selecciona el comando Forma / Ins. forma cónica. Aparece el cuadro de diálogo de selección de forma cónica.
- b) Selecciona "X=A(Y-K)<sup>2</sup>+H" y luego toda el botón [OK]. Se cierra el cuadro de selección y aparece la ecuación en la ventana del editor de cónicas.
- c) Cambia los coeficientes de manera que A=2, K=1, H=-2.
- d) Toca el botón  para representar gráficamente la ecuación.

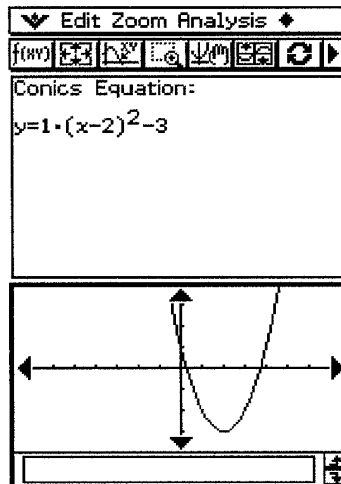




• Dibuja la parábola  $x = y^2 + 2y + 3$ .

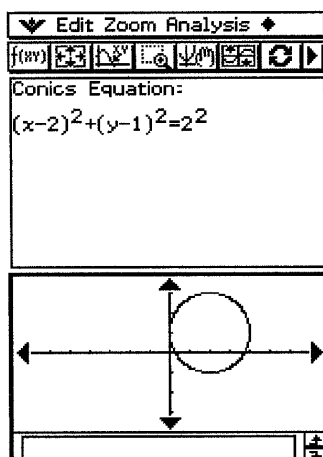
- a) En la ventana del editor de cónicas, toca el botón  o selecciona el comando Forma / Ins. forma cónica. Aparece el cuadro de diálogo de selección de forma cónica.
- b) Selecciona "X=AY<sup>2</sup>+BY+C" y toca el botón [OK].
- c) Cambia los coeficientes de la ecuación de manera que A=1, B=2, C=3.
- d) Toca el botón  para representar gráficamente la ecuación.




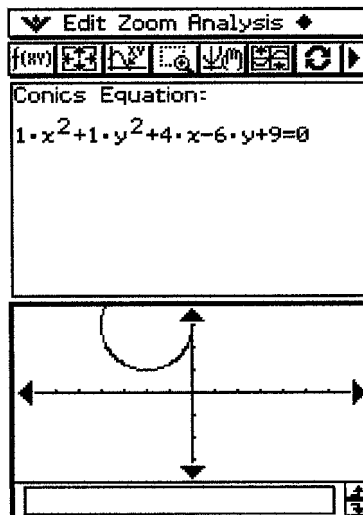
- Dibuja la parábola  $y = (x - 2)^2 - 3$ .
  - a) Utiliza el mismo procedimiento que en casos anteriores, pero en el cuadro de diálogo de forma cónica selecciona "Y=A(X-H)<sup>2</sup>+K".
  - b) Modifica los coeficientes, de forma que A=1, H=2 y K=-3.





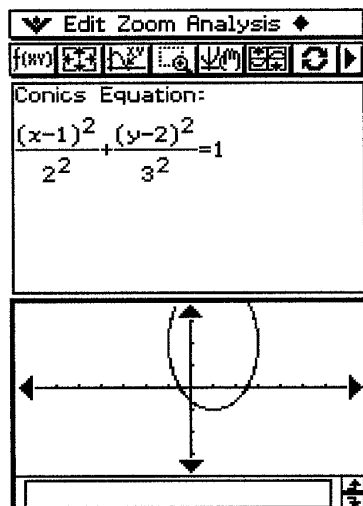
- Dibuja la parábola  $y = 2X^2 - 8X + 7$ .
  - a) Utiliza el mismo procedimiento que en casos anteriores, pero en el cuadro de diálogo de forma cónica selecciona "Y=AX<sup>2</sup>+BX+C".
  - b) Modifica los coeficientes, de forma que A=2, B=-8 y C=7.
- Dibuja un círculo con centro en el punto (2, 1) y radio 2.
  - a) En la ventana del editor de cónicas, toca el botón  o selecciona el comando Forma / Ins. forma cónica. Aparece la pantalla de selección de forma cónica.
  - b) Selecciona "(X-H)<sup>2</sup>+(Y-K)<sup>2</sup>=R<sup>2</sup>" y luego toca el botón [OK]. Se cierra el cuadro de diálogo y aparece la ecuación en la ventana del editor de cónicas.
  - c) Cambia los coeficientes de la ecuación de forma que: H=2, K=1, R=2.
  - d) Toca el botón  para representar gráficamente la cónica.




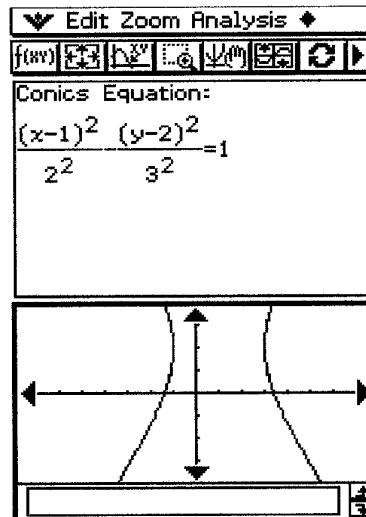
- Dibuja el círculo  $x^2 + y^2 + 4x - 6y + 9 = 0$ .
  - a) Repite el procedimiento anterior, pero en el cuadro de diálogo de forma cónica selecciona la opción " $AX^2+AY^2+BX+CY+D=0$ ".
  - b) Sustituye los valores siguientes para los coeficientes:  $A=1, B=4, C=-6, D=0$  y toca el botón  para dibujar el círculo.




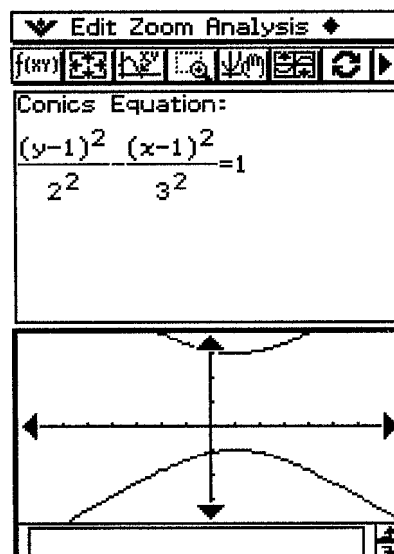
- Dibuja la elipse  $\frac{(x-1)^2}{2^2} + \frac{(y-2)^2}{3^2} = 1$ .
  - a) En la ventana del editor de cónicas, toca el botón  o selecciona el comando Forma / Ins. forma cónica. Aparece el cuadro de diálogo de selección de forma cónica.
  - b) Selecciona " $\frac{(X-H)^2}{A^2} + \frac{(Y-K)^2}{B^2} = 1$ " y luego toca el botón [OK]. Se cierra el cuadro de selección y aparece la ecuación en la ventana del editor.
  - c) Cambia los coeficientes de la ecuación como sigue:  $A=2, B=3, H=1, K=2$  y toca el botón  para dibujar la elipse.





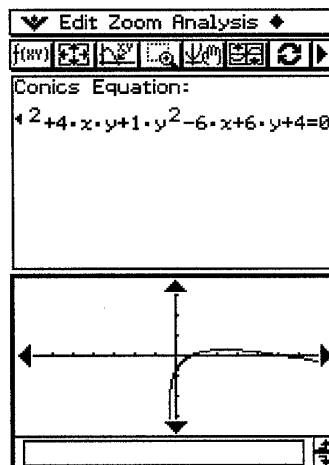
- Dibuja la hipérbola de eje horizontal  $\frac{(x-1)^2}{2^2} - \frac{(y-2)^2}{3^2} = 1$ .
  - a) Repite el procedimiento anterior, pero en el cuadro de diálogo de forma cónica selecciona la opción " $\frac{(X-H)^2}{A^2} - \frac{(Y-K)^2}{B^2} = 1$ " y luego toca el botón [OK].
  - b) Cambia los coeficientes de la ecuación como sigue: A=2, B=3, H=1, K=2 y toca el botón  para dibujar la hipérbola.






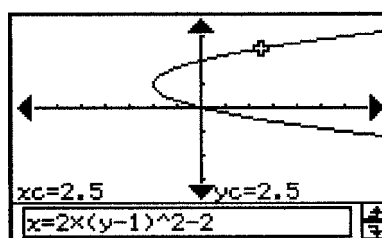
- Dibuja la hipérbola de eje vertical  $\frac{(y-1)^2}{2^2} - \frac{(x-1)^2}{3^2} = 1$ 
  - a) Repite el mismo procedimiento, pero en el cuadro de diálogo de forma cónica selecciona la opción " $\frac{(Y-K)^2}{A^2} - \frac{(X-H)^2}{B^2} = 1$ " y luego toca el botón [OK].
  - b) Modifica los coeficientes de forma que sean K=1, H=1, A=2, B=3 y toca el botón  para dibujar la hipérbola.



- Dibuja la cónica  $x^2 + 4xy + y^2 - 6x + 6y + 4 = 0$ .
  - a) En la ventana del editor de cónicas, toca el botón  o selecciona el comando Forma / Ins. forma cónica. Aparece el cuadro de diálogo de selección de forma cónica.
  - b) Selecciona "AX<sup>2</sup>+BXY+CY<sup>2</sup>+DX+EY+F=0" y luego toca el botón [OK]. Se cierra el cuadro de diálogo y aparece la ecuación en la ventana del editor de cónicas.
  - c) Cambia los coeficientes de la ecuación como sigue: A=1, B=4, C=1, D=-6, E=6, F=4 y toca el botón  para dibujar la cónica.




- Representa gráficamente la cónica  $x = 2(y - 1)^2 - 2$  y luego recorre el gráfico con la opción Trazo para leer las coordenadas.
  - a) En la ventana del editor de cónicas, introduce la ecuación anterior y luego toca el botón  para representarla gráficamente.
  - b) Selecciona el comando Análisis / Trazo o toca el botón . Aparece Trace en la ventana de gráficos y un puntero sobre la curva.
  - c) Pulsa las teclas [◀] [▶] de la Classpad o toca las flechas izquierda o derecha del controlador de gráfico. El puntero se mueve a lo largo del gráfico y aparecen las coordenadas de la posición del cursor. Cuando el cursor se acerca al punto de infinito aparece el mensaje "Error" en lugar de las coordenadas del punto. También puedes mover el puntero a un determinado punto introduciendo las coordenadas. Por ejemplo, introduce y=2 y el cursor se desplaza a dicho punto mostrando el valor de x correspondiente. Si la cónica es una parábola o hipérbola vertical, basta dar el valor de x para leer el valor de y correspondiente. Para cualquier otro tipo de cónica, introduce un valor del parámetro t cuando la gráfica esté en formato paramétrico.
  - d) Para finalizar la operación de trazo, toca el botón .



## • ELEMENTOS DE LAS CÓNICAS


- Con la ventana de gráficos de cónicas activada, selecciona el comando Análisis / Resolución G. Se abre un menú que permite analizar los distintos elementos de las cónicas. En la siguiente tabla tienes una descripción de este menú:

Función	Acción
Foco	Foco de una parábola, elipse o hipérbola.
Vértice	Vértice de una parábola, elipse o hipérbola.
Directriz	Directriz de una parábola
Simetría	Eje de simetría de una parábola.
Longitud de lado recto	Longitud del lado recto de una parábola.
Centro	Centro de un círculo, elipse o hipérbola.
Radio	Radio de un círculo.
Asíntotas	Asíntota de una hipérbola.
Excentricidad	Excentricidad de una parábola, elipse o hipérbola.
Corte x	Intersección con el eje OX.
Corte y	Intersección con el eje OY.
Cal Y	Coordenada y para una coordenada x dada.
Cal X	Coordenada x para una coordenada y dada.

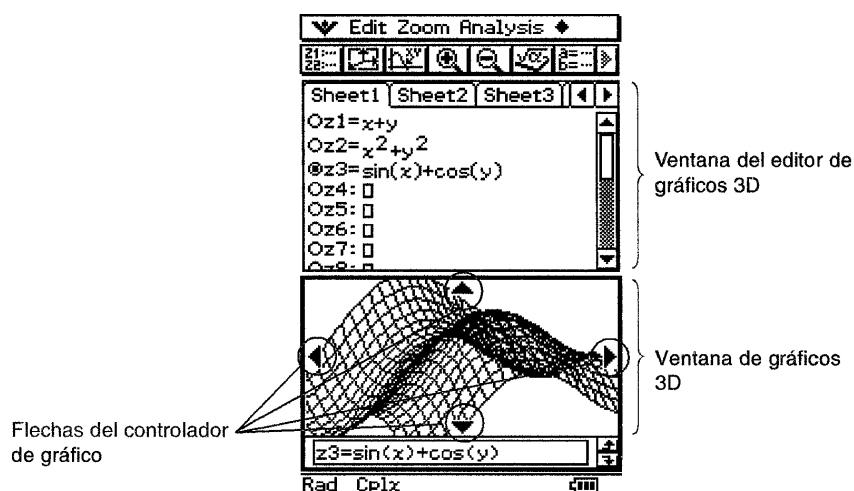
- No todos los comandos están disponibles para cualquier cónica. En caso de no estar disponibles, aparecen tachados.
- Halla el foco de la parábola  $x = 2(y - 1)^2 - 2$ .
  - a) En la ventana del editor de cónicas, introduce la ecuación de la cónica y luego toca el botón  para representarla gráficamente.
  - b) Selecciona el comando Análisis / Resolución G. / Foco.
  - c) Si la cónica es una elipse o una hipérbola, pulsa las teclas de cursor [◀] [▶] de la Classpad o las flechas izquierda y derecha del controlador de gráficos para que se muestren los dos focos.
- Halla los vértices de la elipse  $\frac{(x - 1)^2}{2^2} + \frac{(y - 2)^2}{3^2} = 1$ , utilizando el comando Análisis / Resolución G. / Vértice. Como la elipse tiene cuatro vértices, utiliza las teclas de cursor [◀] [▶] de la Classpad o las flechas izquierda y derecha del controlador de gráficos para que se muestren.
- Halla la directriz de la parábola  $x = 2(y - 1)^2 - 2$ , utilizando el comando Análisis / Resolución G. / Directriz.
- Halla el eje de simetría de la parábola  $x = 2(y - 1)^2 - 2$ , utilizando el comando Análisis / Resolución G. / Simetría.
- Halla el lado recto de la parábola  $x = 2(y - 1)^2 - 2$ , utilizando el comando Análisis / Resolución G. / Longitud de lado recto.

- Halla el centro del círculo  $x^2 + y^2 + 4x - 6y + 9 = 0$ , usando el comando Análisis / Resolución G. / Centro.
- Halla el radio del círculo  $x^2 + y^2 + 4x - 6y + 9 = 0$  con el comando Análisis / Resolución G. / Radio.
- Halla las asíntotas de la hipérbola  $\frac{(x-1)^2}{2^2} - \frac{(y-2)^2}{3^2} = 1$  con el comando Análisis / Resolución G. / Asíntotas.
- Halla la excentricidad de la elipse  $\frac{(x-1)^2}{2^2} + \frac{(y-2)^2}{3^2} = 1$  usando el comando Análisis / Resolución G. / Excentricidad.
- Halla el punto de corte de la parábola  $x = 2(y-1)^2 - 2$  con el eje OX, usando el comando Análisis / Resolución G. / Corte X. Si hubieran dos puntos de corte, utiliza las teclas de desplazamiento del cursor.
- Halla la intersección con el eje OY de la elipse  $\frac{(x-1)^2}{2^2} + \frac{(y-2)^2}{3^2} = 1$ , usando el comando Análisis / Resolución G. / Corte Y. Si hubieran dos intersecciones, utiliza las teclas de desplazamiento del cursor.
- Para la hipérbola  $\frac{(x-1)^2}{2^2} - \frac{(y-2)^2}{3^2} = 1$ , halla la coordenada x cuando la coordenada y es 0, usando el comando Análisis / Resolución G. / Cal x. Si hay dos valores de x, usa las teclas de desplazamiento del cursor para obtenerlos.
- Para la hipérbola  $\frac{(x-1)^2}{2^2} - \frac{(y-2)^2}{3^2} = 1$ , halla la coordenada y cuando la coordenada x es 3. Usa el comando Análisis / Resolución G. / Cal y. Si hubiesen dos valores, usa las teclas [◀] [▶] para obtenerlos.

### 3. Superficies

- En el menú de aplicaciones, toca el botón . Se inicia la aplicación Gráficos 3D y se muestran las ventanas del editor y de gráficos 3D. El editor tiene cinco hojas (Hoja 1 a Hoja 5) y cada una puede contener 20 funciones.
- Puedes tocar las flechas del controlador de la ventana de gráficos 3D o pulsar las teclas de cursor para girar el gráfico. También puedes usar las flechas del controlador de la ventana 3D para mover el cursor a lo largo del gráfico cuando se ha seleccionado la opción de Trazo.
- El menú Edit contiene los comandos habituales: Borrar, Cortar, Copiar, Pegar, Seleccionar todo, Borrar todo. En la siguiente tabla se muestran los comandos más importantes de Gráficos 3D:






Función	Botón	Acción
Edit / Borrar		Borra la selección actual.
Hoja / Nombre por defecto		Restablece el nombre de la hoja actual a su nombre inicial por defecto (Hoja 1 a Hoja 5).
Hoja / Borrar hoja		Restablece el contenido y el nombre de la hoja activa a sus valores iniciales por defecto.
		Dibuja un gráfico
▼ /Preferencias/Ventana vis.		Muestra el cuadro de diálogo de la ventana de visualización para configurarla.
▼ /Preferencias/Adm.devariable		Muestra el administrador de variables.
		Guarda las expresiones introducidas en el editor de gráficos 3D.



- Si la ventana de gráficos 3D está activada, la configuración de menú y comandos es la siguiente:

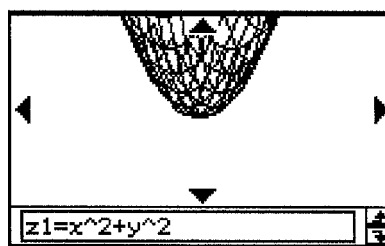
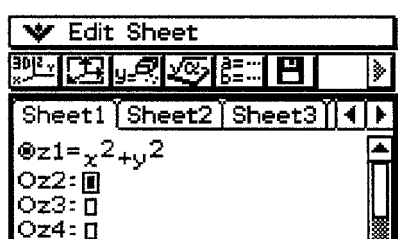
Función	Botón	Acción
Zoom / Aumentar		Amplia el tamaño del gráfico en pantalla.
Zoom / Reducir		Reduce el tamaño del gráfico en pantalla.
Zoom / Visualización		Muestra el gráfico desde el eje x, eje y o eje z.
Zoom / Visualización inicial		Vuelve la ventana de gráficos 3D a su estado inicial por defecto.
Análisis / Trazo		Muestra las coordenadas de un punto en el gráfico 3D.
Análisis / Esbozo		Escribe un texto en la ventana de gráficos 3D.
Análisis / Cal z		Calcula el valor de z para unos valores de x e y dados.
♦ / Rotar		Gira automáticamente un gráfico en la dirección indicada durante unos 30 segundos.
♦ / Almacenar imagen		Guarda un gráfico como datos de tipo imagen
♦ / Recuperar imagen		Recupera la imagen de un gráfico.
♦ / Volver a dibujar		Vuelve a dibujar un gráfico

		Hace que la ventana del editor de gráficos 3D sea la ventana activa.
--	---	--



• **DIBUJANDO GRÁFICOS 3D**

• Dibuja la gráfica de la superficie  $z = x^2 + y^2$ . Sigue los siguientes pasos:

- a) En el menú de aplicaciones, toca el botón . Se inicia la aplicación Gráficos 3D y se muestra la ventana del editor de gráficos.
- b) Toca la línea z1 en el editor de gráficos 3D e introduce la expresión  $x^2 + y^2$ . Pulsa [EXE]. Se guarda la expresión, lo que se indica con el símbolo ⊙.
- c) Toca el botón  para representar gráficamente la superficie.
- d) También puedes arrastrar una expresión desde la aplicación Principal hasta la ventana del editor de gráficos 3D.




• Dibuja la gráfica de la superficie  $z=xy$  configurando previamente la ventana de visualización.

- a) En el menú de aplicaciones, toca el botón . Se inicia la aplicación Gráficos 3D y se muestra la ventana del editor de gráficos.
- b) Toca el botón  para ver el cuadro de diálogo de la ventana de visualización.
- c) Configura los parámetros de visualización tal como se describe a continuación. Pulsa [▼] para mover el cursor.

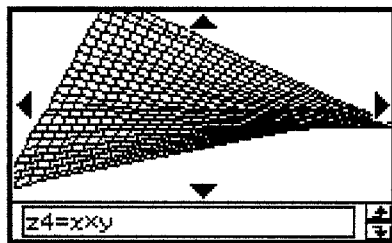
Utiliza este elemento:	Para configurar este parámetro de la ventana de visualización:	Valor inicial por defecto
xmin	Valor mínimo del eje x	-3
xmax	Valor máximo del eje x	3
xgrid	Número de líneas de la rejilla en la dirección del eje x	25
ymin	Valor mínimo del eje y	-3
ymax	Valor máximo del eje y	3
ygrid	Número de líneas de rejilla en la dirección del eje y	25
zmin	Valor mínimo del eje z	-3
zmax	Valor máximo del eje z	3
angle θ	Ángulo en sentido horario del eje x	20
angle Φ	Posición relativa del ojo respecto al plano formado por los ejes x e y, y ángulo del eje z	70

Los rangos permitidos para los parámetros de la ventana de visualización son: xgrid (rejilla x) e ygrid (rejilla y): 2 a 50; ángulo  $\theta$ :  $-180 < \theta \leq 180$ ; ángulo  $\phi$ : 0 a 180.

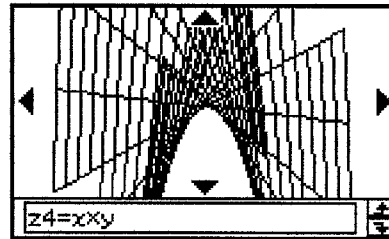
Los parámetros de ángulo,  $\phi$  y  $\theta$ , siempre están en grados, sea cual sea la opción de medida angular seleccionada en Formato básico.

- d) Cuando todos los parámetros tengan los valores deseados, pulsa [OK]. Se cierra el cuadro de la ventana de visualización.
- e) En la ventana del editor de gráficos 3D, escribe en z1 la expresión xy y pulsa [EXE].
- f) Toca el botón  para representar gráficamente la superficie.

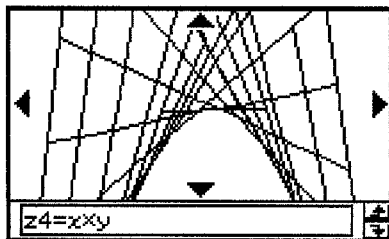
- Dibuja la gráfica de la superficie  $z=xy$  según las ventanas de visualización que se indican a continuación:



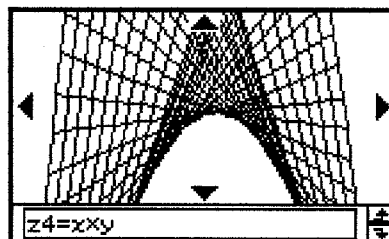
xmin/ymin = -1, xmax/ymax = 1



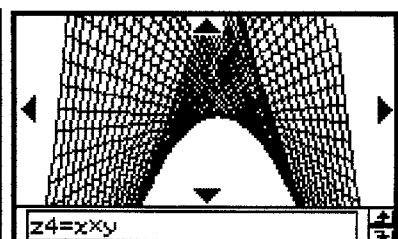
xmin/ymin = -5, xmax/ymax = 5




xgrid = 10, ygrid = 10



Iniciales por defecto





xgrid = 40, ygrid = 40

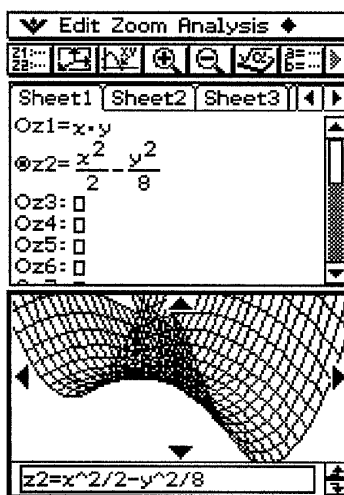
- Representa gráficamente la parábola hiperbólica  $z = \frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{8}$ 
  - a) En la aplicación Gráficos 3D haz que la ventana del editor de gráficos 3D sea la ventana activa.
  - b) Toca el botón  para ver el cuadro de diálogo de la ventana de visualización, y luego configura los parámetros siguientes:

xmin=-3	xmax=3	xgrid=25
ymin=-3	ymax=3	ygrid=25
ángulo $\theta=45$	Ángulo $\phi=70$	

Salvo el ángulo  $\theta$ , los valores anteriores son los iniciales por defecto. Cuando los valores sean los deseados, toca el botón [OK] para cerrar el cuadro de diálogo.

- c) Toca la línea z2 en la ventana del editor de gráficos 3D e introduce la expresión  $\frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{8}$ .
- d) Toca el botón [EXE]. Se guarda la expresión y queda seleccionada con el símbolo  $\odot$ .



- e) Toca el botón  para representar gráficamente la función.
- f) Utiliza las teclas de cursor para girar el gráfico en pantalla.
- g) Selecciona el comando  /Preferencias / Configuración / Formato 3D. Aparece el cuadro de diálogo Formato 3D en el que puedes controlar el tipo de ejes para el gráfico, la visualización de las etiquetas del eje y otras opciones.
- h) Haz que se muestren los ejes y las etiquetas de los ejes. Pulsa el botón [Def.] para aceptar los cambios y observa la nueva imagen en pantalla.

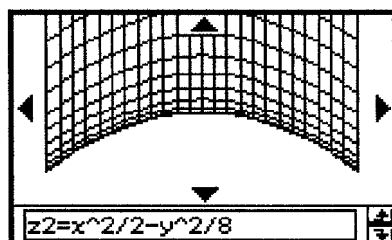


- Representa gráficamente las siguientes superficies: a)  $x=y+z$ , b)  $z = x^2 + y^2$ , c)  $z = \sin(x) + \cos(y)$ . Busca en cada caso la ventana de visualización más adecuada.

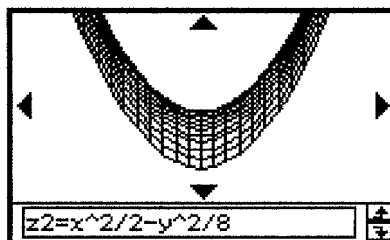
• **MODIFICANDO GRÁFICOS 3D**

- Representa gráficamente la superficie  $z = \frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{8}$ . A continuación modifica el gráfico siguiendo estos pasos:

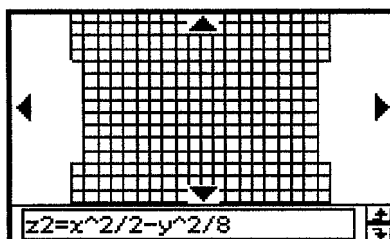
- a) Con la ventana de gráficos 3D activa, toca el botón  o selecciona el comando Zoom / Aumentar. De esta forma se amplía el tamaño del gráfico.
- b) Toca el botón  o selecciona el comando Zoom / Reducir para que el gráfico se reduzca de tamaño, recuperando las dimensiones originales.
- c) Para ver el gráfico desde el eje OX, selecciona el comando Zoom / Visualización x, o pulsa la tecla [x].





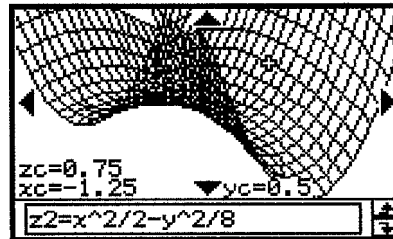
- d) Para ver el gráfico desde el eje OY, selecciona el comando Zoom / Visualización y, o pulsa la tecla [y].



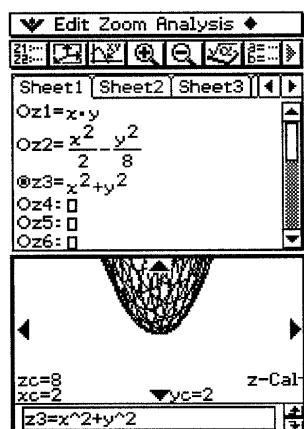
- e) Para ver el gráfico desde el eje OZ, selecciona el comando Zoom / Visualización z, o pulsa la tecla [z].



- f) Pulsa la tecla [◀] de la Classpad o toca la flecha izquierda del controlador de gráfico para girar el gráfico hacia la izquierda manualmente.
- g) Pulsa la tecla [▶] de la Classpad o toca la flecha derecha del controlador de gráfico para girar el gráfico hacia la derecha manualmente.
- h) Pulsa las teclas [▲] [▼] de la Classpad, o las teclas de flecha arriba o flecha abajo para girar el gráfico hacia arriba o hacia abajo manualmente.
- i) Mantén pulsada la tecla [◀] o la flecha izquierda del controlador de gráfico para que el gráfico gire hacia la izquierda continuamente.
- j) Para que empiece la rotación de gráfico automática, selecciona el comando ♦ / Rotar. En el menú secundario que aparece, selecciona la dirección: Izquierda → Derecha, Derecha → Izquierda, Arriba → Abajo, Abajo → Arriba. La rotación continua durante unos 30 segundos y luego se para automáticamente. Puedes parar la rotación automática pulsando la tecla [CLEAR] o tocando el botón  de la pantalla.
- k) Selecciona el comando Zoom / Visualización inicial para restablecer la ventana de Gráficos 3D a su configuración original por defecto.
- l) Con la ventana de gráficos 3D activa, toca el botón  o selecciona el comando Análisis / Trazo. Aparece un puntero en cruz sobre el gráfico. Pulsa las teclas de cursor [◀] [▶] [▲] [▼] de la Classpad o las flechas del controlador de gráfico para mover el puntero a la posición deseada. Observa que aparecen las coordenadas del cursor en pantalla. Cada vez que se pulsa una tecla de cursor o una flecha del controlador gráfico, el puntero se mueve una distancia igual a la indicada en [rejilla] en las opciones de la ventana de visualización.



- m) Mientras se está llevando a cabo la operación de trazo, pulsa una tecla numérica de la Classpad, por ejemplo, 5. Aparece un cuadro de diálogo para introducir las coordenadas x e y. Al pulsar [Acep.], el cursor salta a la posición correspondiente.
- n) Para finalizar la operación de trazo, presiona el botón **ESC** sobre el panel de iconos de la pantalla.
- Dibuja el gráfico de la superficie  $z = x^2 + y^2$  y calcula el valor de z para los puntos  $(x=2, y=3)$ ,  $(x=-1, y=3)$ ,  $(x=0, y=2)$ . Sigue los siguientes pasos:
  - a) Con la ventana de gráficos 3D activa, selecciona el comando Análisis / Cal z. Aparece un cuadro de diálogo para indicar los valores de x e y.
  - b) Introduce los valores de las coordenadas  $x=2$  e  $y=3$ . Pulsa [Acep.] para obtener el valor de z en la ventana de gráficos 3D.
  - c) Pulsa una tecla numérica de la Classpad y volverá a aparecer el mismo cuadro de diálogo. Introduce en él los valores  $x=-1, y=3$ . Pulsa [Acep.] para hallar el valor de z correspondiente.
  - d) Repite la operación para obtener el valor de z correspondiente al par  $(x=0, y=2)$ .
  - e) Para cancelar la operación Cal z, toca el botón **ESC** sobre el panel de iconos de la pantalla.





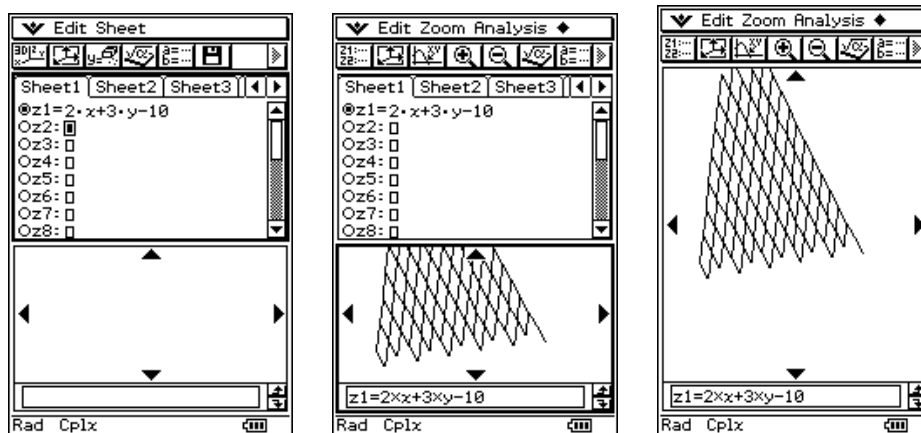
El mensaje "z-Cal" en la ventana de gráficos 3D indica que una operación z-Cal se encuentra en progreso.


## 4. Planos en el espacio

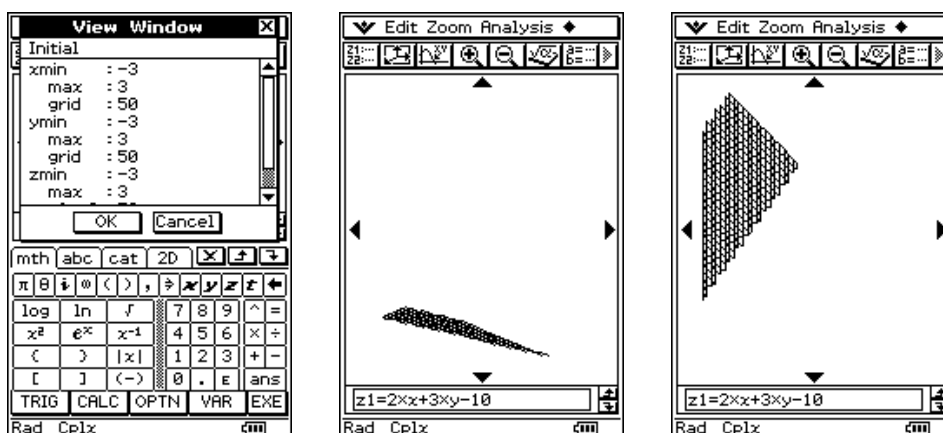
### • REPRESENTACIÓN DE UN PLANO EN LA PANTALLA 3D

Un plano es una superficie en el espacio. Por tanto, podemos usar la aplicación Gráficos 3D para visualizar planos y estudiar sus posiciones relativas. Veamos algunos ejemplos:

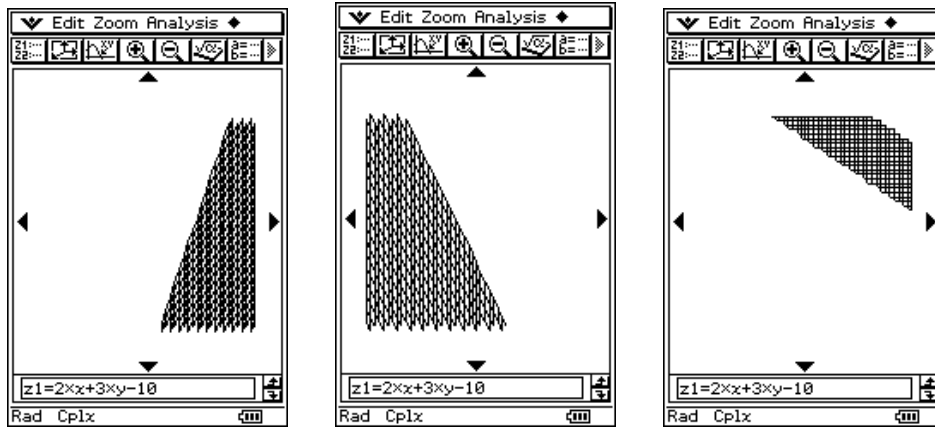
- Representa gráficamente el plano  $2x+3y-z-10=0$ . Modifica el gráfico mediante rotaciones y calcula las coordenadas de algunos de los puntos de este plano.
  - a) Abre el menú Gráficos 3D. En la primera línea de la hoja de datos Sheet1, introduce la ecuación explícita del plano:  $z=2x+3y-10$  y pulsa [EXE].
  - b) Toca el botón  para representar gráficamente la función. Observa el resultado.
  - c) Pulsa Resize para maximizar la ventana gráfica. Selecciona el comando  $\blacklozenge$  / Rotar. En el menú secundario que aparece, selecciona la dirección: Izquierda  $\rightarrow$  Derecha, Derecha  $\rightarrow$  Izquierda, Arriba  $\rightarrow$  Abajo, Abajo  $\rightarrow$  Arriba. La rotación continua durante unos 30 segundos y luego se para automáticamente. Puedes parar la rotación automática pulsando la tecla [CLEAR] o tocando el botón  de la pantalla. Comprueba que, efectivamente, el gráfico corresponde a un plano.



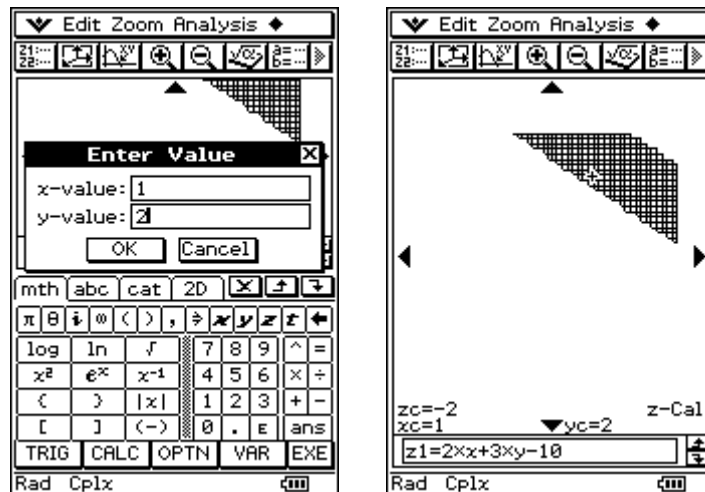
- d) Toca el botón  para ver el cuadro de diálogo de la ventana de visualización, y modifica la rejilla (grid) a 50 tanto para la variable x como para la variable y. De esta forma, veremos el plano más oscuro. Elige de nuevo el comando  $\blacklozenge$  / Rotar y selecciona cada una de las opciones de rotación. Observa el resultado.



- e) Selecciona sucesivamente los comandos Zoom / view-X, Zoom / view-Y, Zoom / view-Z para visualizar el plano según las direcciones de los tres ejes coordenados OX, OY y OZ.



- f) Vamos a calcular el valor de  $z$  para algunas parejas de valores de  $x$  e  $y$ . Por ejemplo, para  $x=1$ ,  $y=2$ , seleccionamos el comando Análisis / Z-Cal y, en la siguiente pantalla, introducimos los valores de  $x$  e  $y$  (1 y 2, respectivamente). Haciendo clic en OK, obtenemos en pantalla el valor de  $z=-2$  y se señala en el gráfico el punto (1, 2, -2).

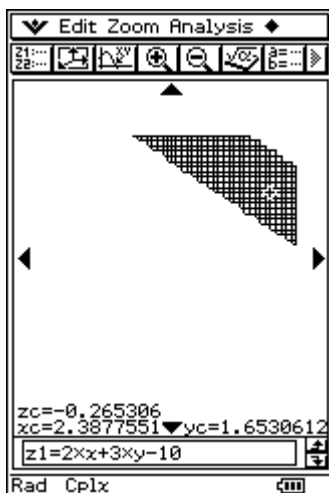


- g) Utilizando el procedimiento anterior, completa la siguiente tabla de valores para  $z$ :

X	1	-2	0	2	-1/2	3.5	-4	4	-8	6
Y	2	0	2	3	-1	7	3	-2	0	5
Z										

- h) Utilizando el comando Análisis / Trace y las teclas de cursor o tocando las flechas de cursor de la pantalla, puedes hacer un recorrido sobre el plano representado gráficamente. Observa como, al mover los cursores, se desplaza el punto sobre el plano.

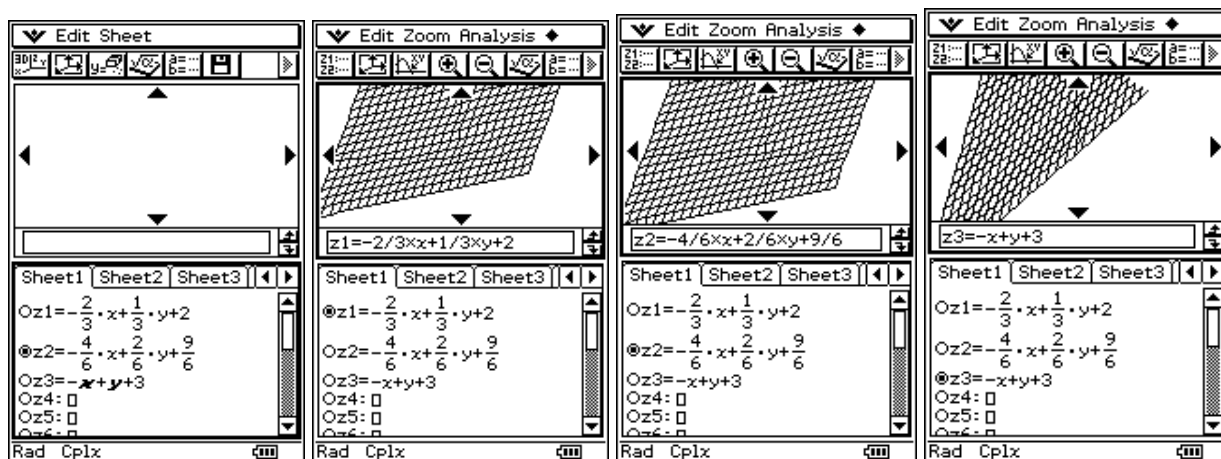




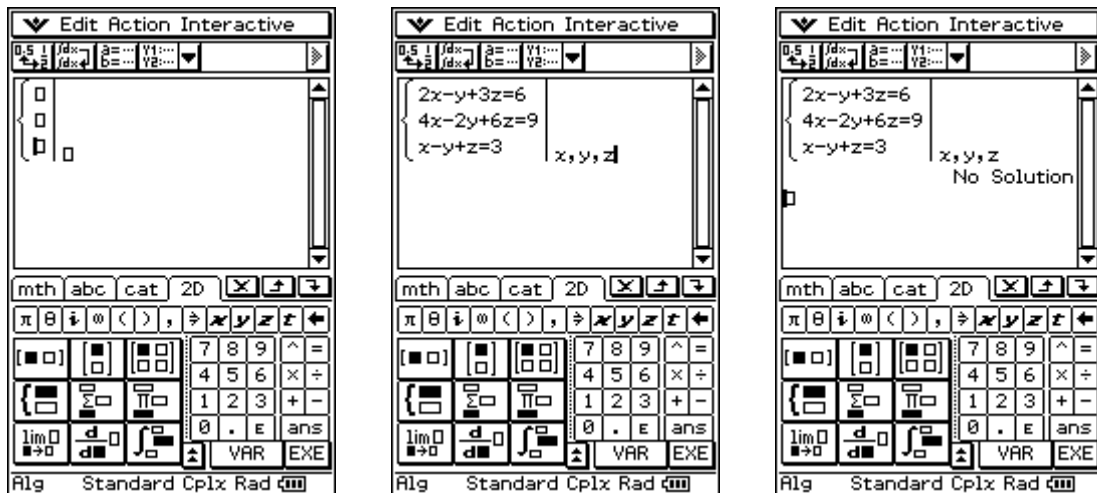
• **POSICIONES RELATIVAS DE PLANOS EN EL ESPACIO**

- Estudia las posiciones relativas de los siguientes planos: 
$$\left. \begin{aligned} 2x - y + 3z &= 6 \\ 4x - 2y + 6z &= 9 \\ x - y + z &= 3 \end{aligned} \right\}$$

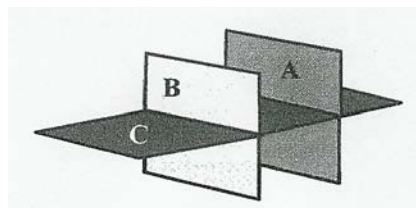
- En el editor de la aplicación Gráficos 3D, introduce las expresiones que resultan de despejar z en cada una de las ecuaciones de los planos.
- Activa cada uno de los planos, haciendo que quede seleccionada su línea. Observa que, aunque podemos visualizar cada plano por separado, no es posible activar a la vez las ecuaciones de los tres planos. Por tanto, no podemos visualizar los tres planos simultáneamente, por lo que esta aplicación no nos sirve para estudiar la posición relativas de los planos.



- En lugar de ello, recurriremos a la aplicación principal. Selecciona el menú Principal e introduce, mediante el teclado 2D, el sistema formado por las ecuaciones de los tres planos.



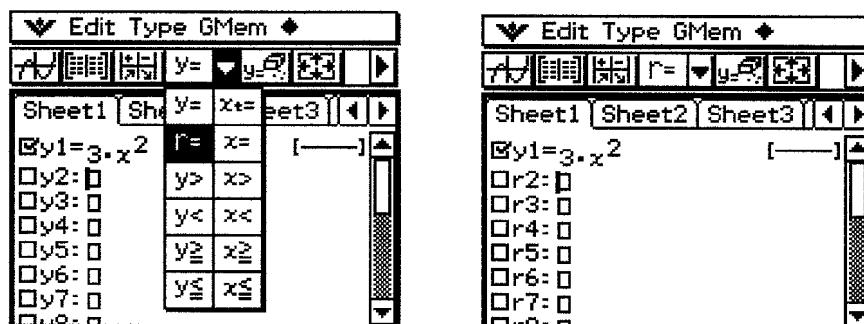
- d) Al pulsar [EXE] vemos que la calculadora responde que no hay solución. Se trata de un sistema incompatible, porque hay dos planos paralelos (los dos primeros) y el tercero interseca a los otros dos. La posición relativa sería la siguiente:



## 5. Curvas en polares y paramétricas


- CURVAS EN COORDENADAS POLARES

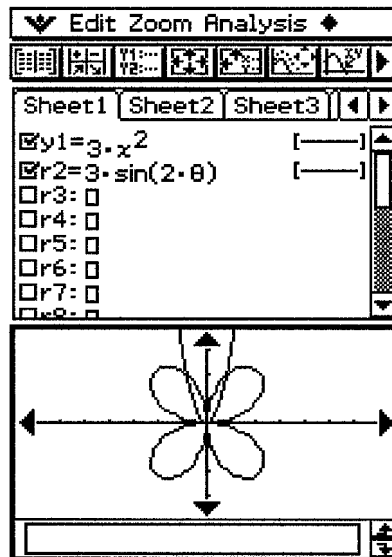
- Representa gráficamente la función  $r=3\sin 2\theta$ . Sigue estos pasos:
  - a) Toca en cualquier lugar dentro de la ventana del editor de gráficos para hacer que sea la ventana activa.
  - b) Toca el botón [▼] junto a [y=] o selecciona el comando Tipo / Tipo r=. De esta forma, todas las líneas que no contienen expresiones se convierten al tipo r: r1, r2, r3, etc. Las líneas ocupadas por expresiones no cambian.




- c) Toca el cuadro de entrada a la derecha de la línea r2 e introduce la expresión: [KEYBOARD] [mth] [3] [TRIG] [sin] [2] [θ] [)] [EXE]. De esta forma se señala el cuadro de marcación de la línea r2.




- d) Toca el botón  para que se represente gráficamente la función. Si hay marcas de verificación en otras funciones, también se representarán gráficamente.



- Representa gráficamente la función  $r=5\sin 3\theta$ . Sigue estos pasos:
  - a) En la ventana del editor de gráficos selecciona el comando Tipo / Tipo r= para indicar una expresión en coordenadas polares.
  - b) Toca el cuadro a la derecha de la línea "r3" e introduce la expresión: [KEYBOARD] [mth] [5] [TRIG] [sin] [3] [θ] [)].
  - c) Pulsa [EXE] para guardar la expresión.
  - d) Selecciona el cuadro de marcación a la izquierda de la línea r3.
  - e) Toca el botón  para que se dibuje la gráfica de la función.

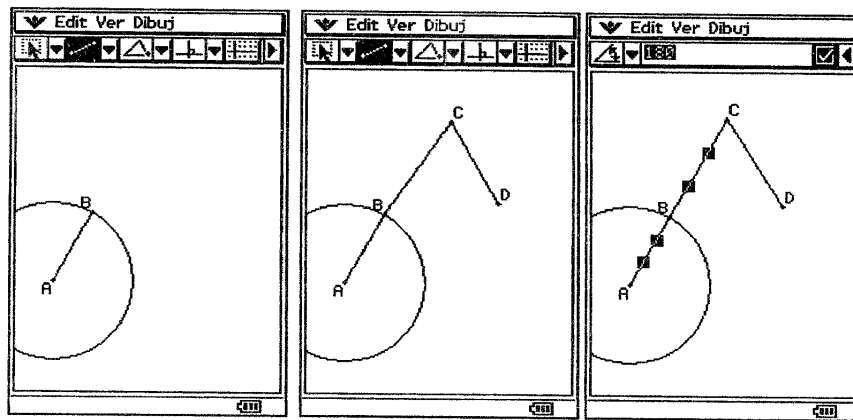
• **GRÁFICAS DE FUNCIONES PARAMÉTRICAS**

- Representa gráficamente la función cuyas ecuaciones paramétricas son:  $x=3\sin(t)$ ,  $y=3\cos(t)$ .
  - a) En la ventana del editor de gráficos, selecciona el comando Tipo / Tipo de parámetro.
  - b) Toca el cuadro a la derecha del número de línea "xt4" e introduce la expresión de x: [KEYBOARD] [mth] [3] [TRIG] [sin] [t] [)] [EXE].
  - c) Toca el cuadro a la derecha del número de línea "yt4" e introduce la expresión de y: [mth] [3] [cos] [t] [)] [EXE].

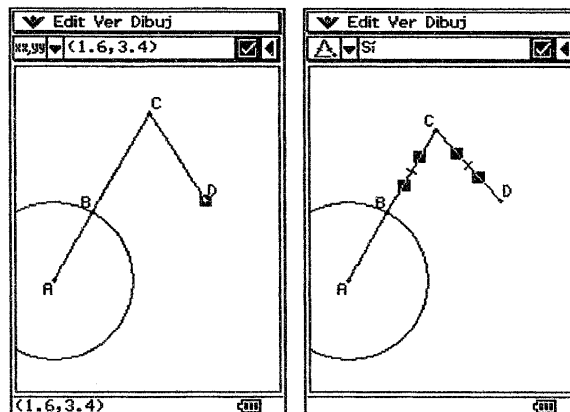
- d) Selecciona el cuadro de marcación a la izquierda de la línea "xt4" y toca el botón  para dibujar la función.
- e) Aparentemente la gráfica corresponde a una elipse. Sin embargo, no es así. Selecciona el comando Zoom / Cuadrado y comprueba que la gráfica corresponde a una circunferencia de centro el origen de coordenadas y radio 3.

## 5. Actividades

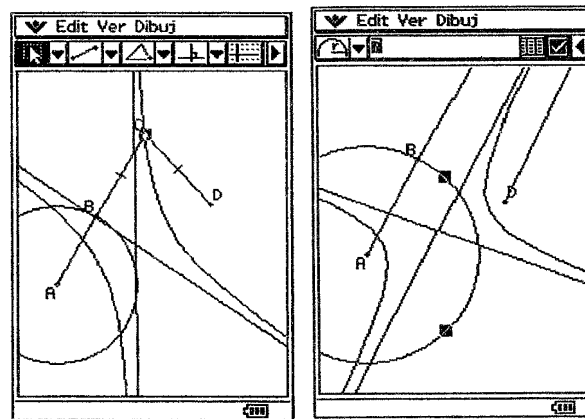
- 1) Dibuja una hipérbola, teniendo en cuenta que es el lugar geométrico de los puntos tales que la diferencia de sus distancias a los focos es constante. Sigue los siguientes pasos:
  - Dibuja un círculo, cuyo radio  $|AB|$  representa la diferencia de las distancias a los focos. Dibuja un tercer punto  $C$  en la recta  $AB$  y un foco  $D$ . Para ello dibuja el segmento  $BC$  y luego fija en 0 grados el ángulo formado por  $AB$  y  $BC$ .




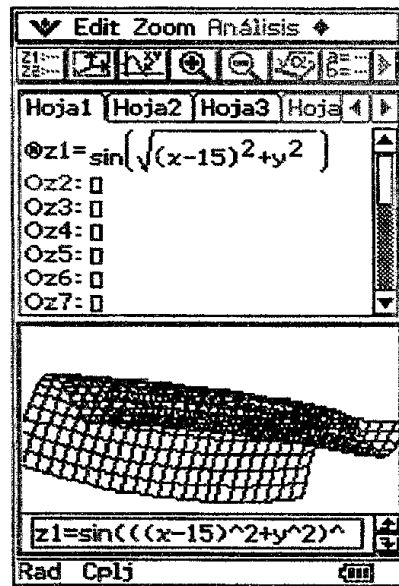
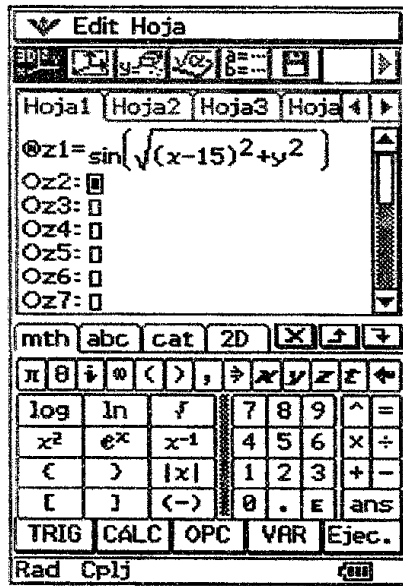
- Fija la ubicación del foco  $D$ , seleccionándolo y bloqueando sus coordenadas con el botón de marcación. Luego indica que los segmentos  $CD$  y  $BC$  sean congruentes, de forma que  $|AC| - |CD| = |AC| - |BC| = |AB|$ , que es la constante.



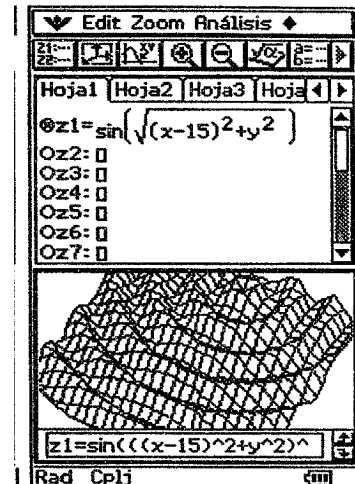
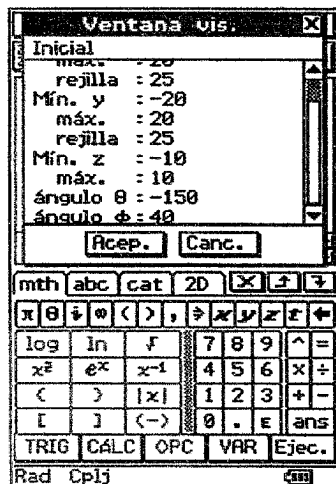
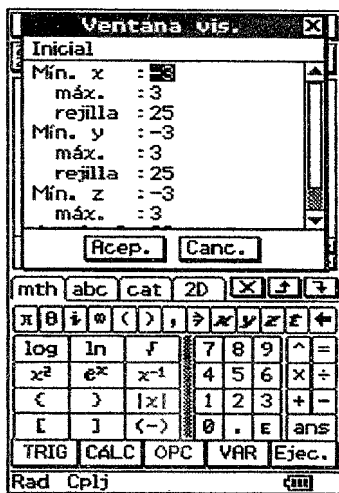
- Agrega una animación de  $B$  alrededor del círculo  $AB$  y haz un trazo del punto  $C$ . Después reproduce la animación para dibujar tanto la hipérbola como sus asíntotas.
- Al cambiar el radio del círculo  $AB$  cambian las características de la hipérbola.



- 2) Dibuja la elipse de ecuación  $3x^2 + 4y^2 = 192$ . Halla la ecuación de la recta tangente a dicha elipse en el punto  $A(4, 6)$ . Halla las ecuaciones de las rectas tangentes a la elipse trazadas por el punto  $P(10, 0)$ .
- 3) Dibuja la cónica de ecuación  $x^2 + 4y^2 - x + 2y - 1 = 0$ . Determina sus elementos (vértices, focos, excentricidad, ejes y distancia focal).
- 4) Dibuja la hipérbola de ecuación  $\frac{x^2}{2} - y^2 = 1$ . Determina las ecuaciones de sus asíntotas y las ecuaciones de las tangentes que pasan por el punto  $P(0, 1)$ .
- 5) Dibuja las parábolas  $x = 2y^2 - 5y + 1$ ,  $y = 3x^2 - 4x + 2$ . Halla el vértice, el foco y la directriz de cada una de dichas parábolas.
- 6) Dibuja la parábola de ecuación  $5x = -y^2 + 5y + 3$ . Determina el vértice, el foco y la directriz de dicha parábola. Halla las ecuaciones de las rectas tangentes desde el punto  $P(0, 1)$ .
- 7) Dibuja la gráfica de la superficie  $z = \sin\left(\sqrt{(x-15)^2 + y^2}\right)$ . Sigue los siguientes pasos:
  - Inicia la aplicación Gráficos 3D y en la ventana del editor introduce la expresión anterior en la línea correspondiente a z1.
  - Toca el botón  para dibujar la superficie. Utiliza los botones de Zoom y las flechas del controlador gráfico de la pantalla para visualizar la superficie desde distintas posiciones.

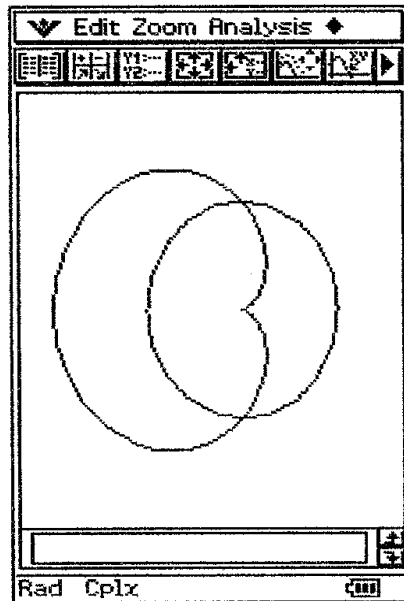


- Modifica la ventana de visualización de forma que el rango de x sea (-20, 20) y el rango de y sea (-10, 10). Ajusta los ángulos de visión de forma que  $\theta = -150$  y  $\phi = 40$  grados. Observa las ondulaciones de la superficie.

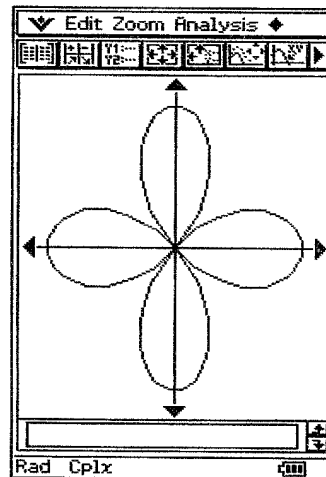
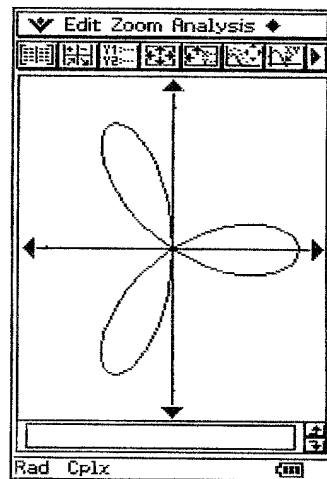


- Utiliza el comando Trazo para recorrer el gráfico y leer las coordenadas de algunos puntos.

8) Prepara la Classpad para trabajar en coordenadas polares. Representa gráficamente las funciones:  $r=1$ ,  $r=2 \cdot (1+\cos \theta)$  en los mismos ejes de coordenadas. Halla los puntos de corte de dichas curvas.



9) Dibuja la gráfica de las funciones  $r=a\cdot\cos(n\theta)$ ,  $r=a\cdot\sin(n\theta)$  para distintos valores de  $a$  y  $n$ . Observa los resultados.



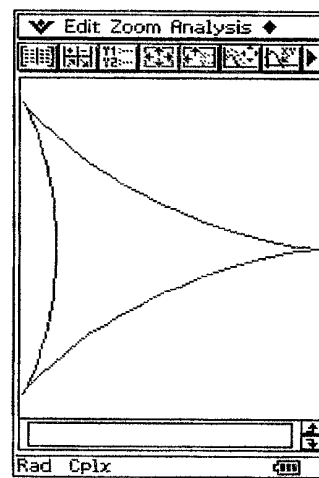
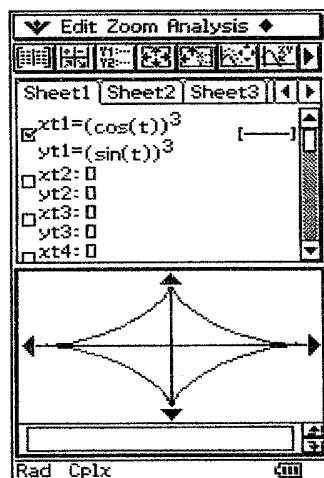
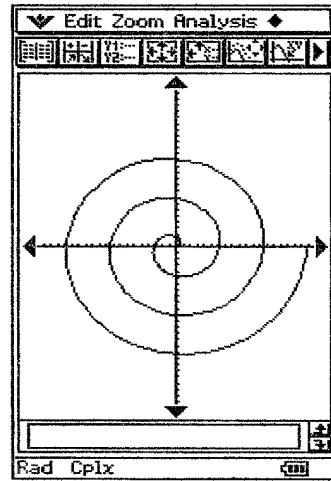
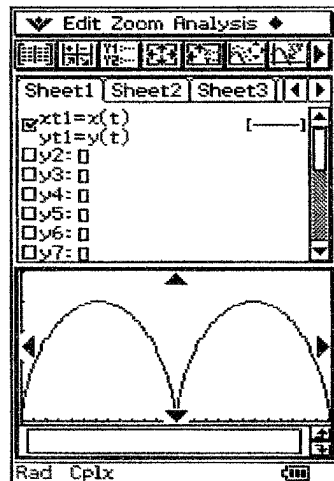
10) Dibuja la gráfica de las funciones:

a)  $\begin{cases} x(t) = 2(t - \sin(t)) \\ y(t) = 2(1 - \cos(t)) \end{cases}$  (cicloide) para los parámetros de visualización que se indican.

b)  $\begin{cases} x(t) = t \cdot \cos(t) \\ y(t) = t \cdot \sin(t) \end{cases}$  para  $t \in [0, 6\pi]$  (espiral de Arquímedes)

c)  $\begin{cases} x(t) = \cos^3 t \\ y(t) = \sin^3 t \end{cases}$  para  $t \in [0, 2\pi]$  (astroide).

- d)  $\begin{cases} x(t) = \cos(t) \\ y(t) = \sin(t) \end{cases}$  (circunferencia).
- e)  $\begin{cases} x(t) = 3 \cdot \cos(t) \\ y(t) = 2 \cdot \sin(t) \end{cases}$  (elipse)
- f)  $\begin{cases} x(t) = 3 \cdot (2 \cos(t) + \cos(2t)) \\ y(t) = 3 \cdot (2 \sin(t) - \sin(2t)) \end{cases}$  (tricúspide)



## CÓNICAS Y CURVAS PARAMÉTRICAS CON LA FX-9860G

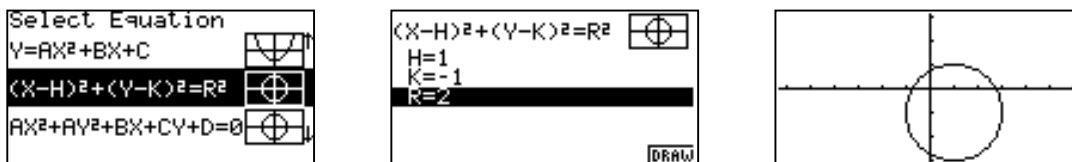
Podemos utilizar la FX-9860G SD para representar curvas y cónicas, resolver problemas relacionados con las cónicas y con sus ecuaciones paramétricas. Veamos algunos ejemplos.



**1. PROBLEMAS SOBRE LA CIRCUNFERENCIA**

- Dibuja una circunferencia de centro (1, -1) y radio 2, utilizando la aplicación cónicas y la aplicación Gráficos y Tablas de la ClassPad 300.

- Inicia la aplicación Cónicas. En el editor de cónicas, selecciona el tipo de ecuación  $[(X-H)^2+(Y-K)^2=R^2]$ , y a continuación introduce los valores apropiados para el gráfico de la circunferencia.



- Otra forma de dibujar la circunferencia es mediante el menú Graph. Una circunferencia es el lugar geométrico de puntos del plano cuya distancia a un punto fijo (centro) es constante (radio). En este caso, podemos escribir:

$$(x - 1)^2 + (y - (-1))^2 = 2^2$$

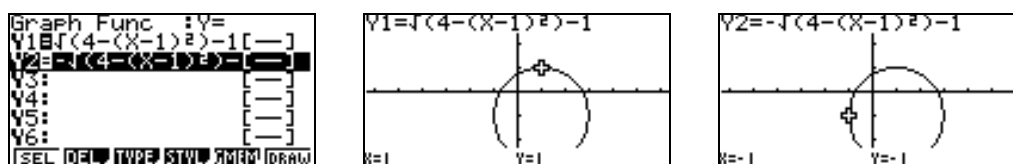
De esta expresión podemos despejar y:

$$(x - 1)^2 + (y + 1)^2 = 4$$

$$(y + 1)^2 = 4 - (x - 1)^2$$

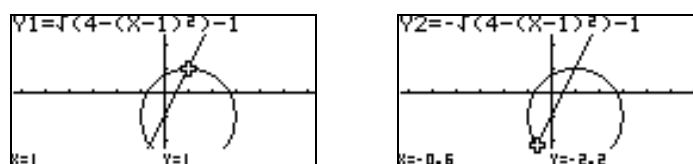
$$y = \pm\sqrt{4 - (x - 1)^2} - 1$$

Necesitamos, por tanto, dos funciones para representar la circunferencia. Abrimos el Editor de Gráficos e introducimos las dos funciones.



- Halla los puntos de corte de la recta  $y = 2x - 1$  con la circunferencia de centro (1, -1) y radio 2. Determina la longitud de la cuerda formada.

- Abrimos el Editor de Gráficos y dibujamos la gráfica de las dos funciones que dan la circunferencia y de la recta. Observamos que la recta corta a la circunferencia en dos puntos. Seleccionamos la opción Trace, pulsando [SHIFT] [F1] y recorremos las gráficas con los cursores para localizar los puntos de intersección. Esta exploración indica que la recta corta a la circunferencia en los puntos (1, 1) y (-0.6, -2.2)



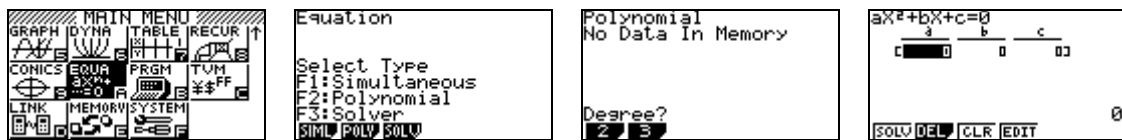
- b) También podemos resolver el problema algebraicamente, resolviendo el sistema formado por las ecuaciones de la circunferencia y la recta:

$$(x - 1)^2 + (y - (-1))^2 = 2^2, \quad y = 2x - 1$$

Podemos sustituir la expresión de la recta en la de la circunferencia, obteniendo.

$$\begin{aligned} (x - 1)^2 + (y - (-1))^2 &= 2^2 \Rightarrow (x - 1)^2 + (2x - 1 + 1)^2 = 2^2 \\ &\Rightarrow x^2 - 2x + 1 + 4x^2 = 4 \\ &\Rightarrow 5x^2 - 2x - 3 = 0 \end{aligned}$$

Para resolver esta ecuación de segundo grado, utilizaremos la FX-9860G SD. Selecciona el menú Equa y pulsa [F2] para seleccionar el tipo Polynomial. Aparece una pantalla en la que pregunta cuál es el grado de la ecuación. Pulsa [F1] para indicar que es de grado 2.



En la siguiente pantalla introduce los coeficientes y el término independiente de la ecuación y pulsa [F1] para seleccionar el comando SOLV.



Observamos que las soluciones del sistema de ecuaciones son  $1$  y  $-\frac{3}{5}$  lo que implica que las abcisas de los dos puntos de corte son  $1$  y  $-\frac{3}{5}$ . Las correspondientes ordenadas de los puntos de corte se pueden obtener sustituyendo estos valores de  $x$  en la ecuación de la recta:

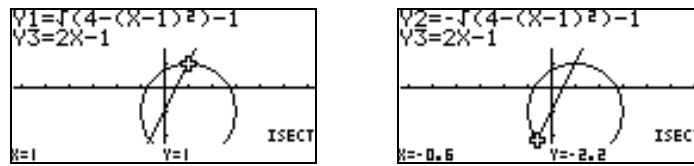
- Si  $x=1$ , entonces  $y=2(1)-1=1$ .
- Si  $x=-\frac{3}{5}$ , entonces  $y=2(-\frac{3}{5})-1=-\frac{11}{5}$ .

Por tanto, los puntos de intersección son  $(-1, 1)$  y  $(-\frac{3}{5}, -\frac{11}{5})$ .

- c) Vamos a verificar gráficamente estas soluciones. Abrimos el Editor de Gráficos y representamos gráficamente las tres funciones (la semicircunferencia positiva, la semicircunferencia negativa y la recta).



- d) Pulsa [SHIFT] [F5] (G-Solve) [F5] (ICST) para hallar los puntos de corte. Pulsa [EXE] y las teclas de cursor y [EXE] y verás en pantalla un punto de intersección. Repite el proceso para obtener el otro punto de corte.

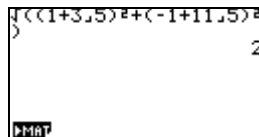


Observamos que las soluciones gráficas coinciden con las soluciones algebraicas, ya que hemos obtenido como intersección los puntos  $(1, -1)$  y  $(-0.6, -2.2)$ , siendo el último punto equivalente a  $(-\frac{3}{5}, -\frac{11}{5})$ .

- e) Para hallar la longitud de la cuerda que determina la recta sobre la circunferencia, calcularemos la distancia entre los dos puntos de corte. Sabemos que la distancia,  $d$ , entre dos puntos de coordenadas  $(x_1, y_1)$  y  $(x_2, y_2)$  viene dada por la fórmula:

$$d = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

En nuestro caso hemos de calcular:  $d = \sqrt{\left(1 + \frac{3}{5}\right)^2 + \left(-1 + \frac{11}{5}\right)^2}$ . Con la calculadora gráfica, en el menú RUN, o pantalla principal, obtenemos:



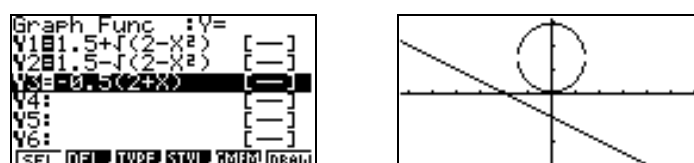
Por tanto, la longitud de la cuerda que determina la recta  $y=2x-1$  sobre la circunferencia de radio 2 y centro  $(1, -1)$  es 2.

- La recta de ecuación  $2y + x = -2$  ¿corta a la circunferencia  $x^2 + (y - 1.5)^2 = 2$ ? Halla los puntos de intersección, si es posible.

- a) La ecuación de la circunferencia se puede expresar de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} x^2 + (y - 1.5)^2 &= 2 \\ (y - 1.5)^2 &= 2 - x^2 \\ y &= 1.5 \pm \sqrt{2 - x^2} \end{aligned}$$

- b) Usando el Editor de Gráficos, representamos las dos funciones y también la recta de ecuación  $2y + x = -2$  que podemos expresar en la forma explícita  $y = -\frac{1}{2}(2 + x)$ .

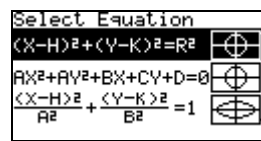


Observamos que la recta es exterior a la circunferencia. Por tanto, no corta a la circunferencia.

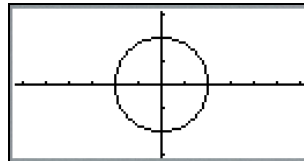
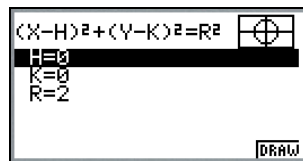
- La recta de ecuación  $y = -x + 2.5$  corta a la circunferencia  $x^2 + y^2 = 8$ . Halla la longitud de la cuerda formada, si es ello posible.

## 2. PROBLEMAS SOBRE SECCIONES CÓNICAS

- Dibuja una circunferencia de centro (0, 0) y radio 2.
  - Selecciona el menú Conics, pulsando [MENU], las teclas de cursor y [EXE]. Selecciona la opción Circunferencia y en la siguiente pantalla introduce los valores H=0, K=0 y R=2, para indicar las coordenadas del centro y el radio.



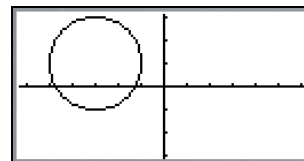
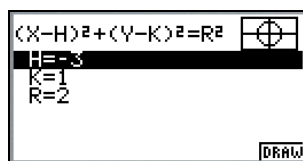
- Pulsa [F6] (DRAW) para dibujar la circunferencia.



Observa que como  $h = 0$ ,  $k = 0$  y  $r = 2$ , la fórmula se puede simplificar:  $x^2 + y^2 = r^2$

- Dibuja la circunferencia de centro (-3, 1) y radio 2.

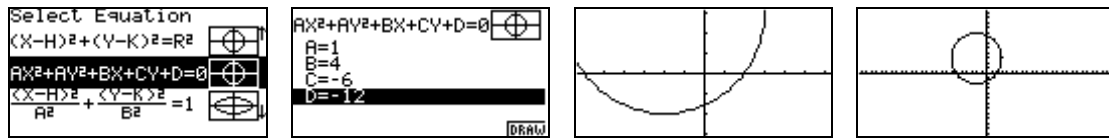
Repite los mismos pasos que en el ejercicio anterior, pero introduciendo los nuevos valores  $H=-3$ ,  $K=1$  y  $R=2$ . Al pulsar [F6] (DRAW) aparece la gráfica de la circunferencia:



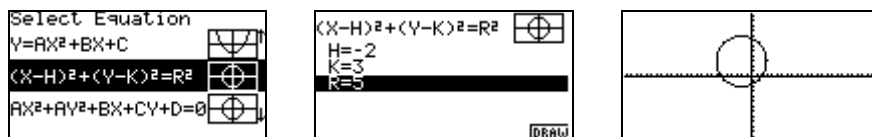
- Dibuja una circunferencia de centro (0, 0) y radios 1, 2, 3, 4 y 5. ¿En qué cambia la circunferencia? ¿Cómo son las circunferencias obtenidas?
- Dibuja la circunferencias de radio  $r=2$ , pero que sus centros sean los puntos (H, K) siendo a)  $H=1, 2, 3, -1, -2, -3$  y  $K=0$ ; b)  $H=0$  y  $K=1, 2, 3, -1, -2, -3$ . Comenta los resultados.
- Dibuja una circunferencia de ecuación  $x^2 + y^2 + 4x - 6y - 12 = 0$ . Dibuja también la circunferencia de ecuación  $(x - [-2])^2 + (y - 3)^2 = 5^2$ . ¿Por qué se obtiene la misma circunferencia?

- Selecciona el MENÚ Conics y elige la ecuación  $AX^2 + AY^2 + BX + CY + D = 0$ .

- b) En la siguiente pantalla introduce los valores de los parámetros  $A=1, B=4, C=-6, D=-12$  y pulsa [F6] (DRAW) para dibujar la circunferencia.
- c) Pulsa [SHIFT] [F2] (Zoom) [F4] (OUT) para visualizar completamente la circunferencia.



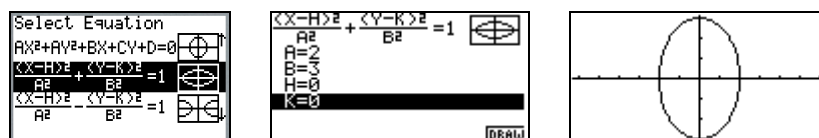
- d) Pulsa [EXIT] varias veces hasta que aparezca la ventana de selección de ecuación. Selecciona el tipo de ecuación  $(X-H)^2+(Y-K)^2=R^2$  y en la siguiente pantalla introduce los valores de los parámetros:  $H=-2, K=3, R=5$ . Pulsa [F6] (DRAW) para que se dibuje la circunferencia.



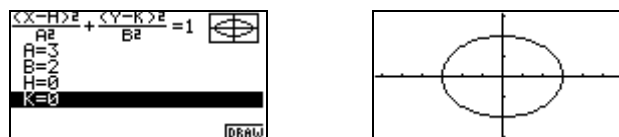
- e) Observa que, en ambos casos, se obtiene el mismo resultado. En efecto, al desarrollar la expresión  $(x-[-2])^2+(y-3)^2=5^2$  se obtiene la ecuación  $x^2+y^2+4x-6y-12=0$ . Se trata de la misma circunferencia.

- Dibuja la elipse de ecuación  $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$ . Dibuja la elipse de ecuación  $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$ . ¿En qué se diferencian?

- a) En el menú Cónicas, selecciona la ecuación  $\frac{(X-H)^2}{A^2} + \frac{(Y-K)^2}{B^2} = 1$ . En la siguiente pantalla introduce los valores de los parámetros:  $A=2, B=3, H=0, K=0$ . Pulsa [F6] (DRAW) y observa el resultado.



- b) Pulsa [EXIT] para volver a la pantalla de selección. Introduce los valores de los parámetros  $A=3, B=2, H=0, K=0$  para la otra elipse. Pulsa [F6] (DRAW) y observa el resultado.



- c) Observa que la segunda elipse es la imagen de la primera por un giro de centro el origen y ángulo de giro  $90^\circ$ .

- Modifica los parámetros A y B solamente, manteniendo H y K en la expresión  $\frac{(X-H)^2}{A^2} + \frac{(Y-K)^2}{B^2} = 1$ . Primero, cambia  $A = 1, 2, 3$  y 4. Tras cada cambio, dibuja el correspondiente gráfico. ¿Qué

diferencias observas?. Después, haz cambios análogos para B. ¿Qué diferencias aparecen? ¿Qué ocurre si  $A = B$ ?

Cuando  $A = B$ , la ecuación se puede simplificar:

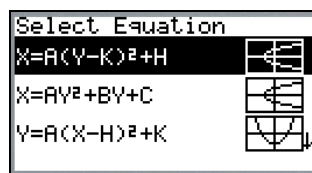
$$\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{a^2} = 1$$

$$\frac{(x-h)^2 + (y-k)^2}{a^2} = 1$$

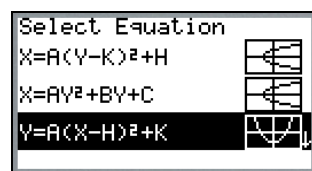
$$(x-h)^2 + (y-k)^2 = a^2$$

La ecuación de la elipse se transforma en la ecuación de una circunferencia.

- Modifica los valores de H y K (sin cambiar los valores de A y B). ¿Cómo afecta esto a los gráficos resultantes?
- Dibuja parábolas horizontales, utilizando la ecuación de selección  $X = A(Y-K)^2 + H$ . Cambia el parámetro A, asignándole los valores 0'5, 0'7, 1, 1'5, 4, -0'5, -0'7, -1, -1'5, -4. ¿Cómo afecta a la forma de la curva?

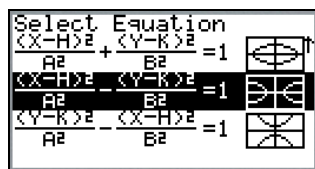


- Dibuja parábolas verticales, utilizando la ecuación de selección  $Y = A(X-K)^2 + H$ . Cambia el parámetro A, asignándole los valores 0'1, 0'2, 0'5, 0'7, 1, 1'5, -0'1, -0'2, -0'5, -0'7, -1, -1'5. ¿Cómo afecta a la forma de la curva?



- Dibuja la parábola dada por la ecuación  $y = 0.5(x-2)^2 - 3$ . Dibuja la parábola de ecuación  $y = 0.5x^2 - 2x - 1$ . ¿Por qué se obtiene la misma parábola?

- En el menú de Cónicas, selecciona la ecuación  $\frac{(X-H)^2}{A^2} - \frac{(Y-K)^2}{B^2} = 1$  (que corresponde a una hipérbola horizontal) e introduce los valores  $A=1, H=0, K=0$  y modifica los valores del parámetro B, de forma que tome valores entre 0'2 y 3. ¿Cómo afecta esto a la forma de la hipérbola? Haz lo mismo para el caso de hipérbolas verticales dadas por la ecuación  $\frac{(Y-H)^2}{A^2} - \frac{(X-K)^2}{B^2} = 1$



- En el menú de Cónicas, selecciona la ecuación  $\frac{(X-H)^2}{A^2} - \frac{(Y-K)^2}{B^2} = 1$  (que corresponde a una hipérbola horizontal) e introduce los valores B=1, H=0, K=0 y modifica los valores del parámetro A, de forma que tome valores entre 0'2 y 3. ¿Cómo afecta esto a la forma de la hipérbola? Haz lo mismo para el caso de hipérbolas verticales dadas por la ecuación  $\frac{(Y-H)^2}{A^2} - \frac{(X-K)^2}{B^2} = 1$
- En el menú de Cónicas, selecciona la ecuación  $\frac{(X-H)^2}{A^2} - \frac{(Y-K)^2}{B^2} = 1$  o la ecuación  $\frac{(Y-H)^2}{A^2} - \frac{(X-K)^2}{B^2} = 1$ . Asigna el valor A=1 y B=1 y modifica los valores de H y K. ¿Cómo afecta esto a la forma de la hipérbola?

### 3. ECUACIONES PARAMÉTRICAS DE SECCIONES CÓNICAS

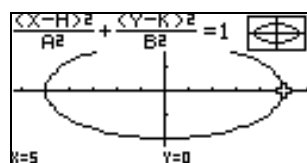
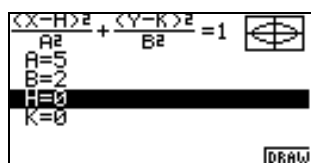
- Representa gráficamente la elipse de ecuaciones paramétricas  $x = 5\cos t$ ,  $y = 2\sin t$ .

#### Forma cartesiana

Elevando al cuadrado las ecuaciones paramétricas, obtenemos  $x^2 = 5^2 \cos^2 t$ ,  $y^2 = 2^2 \sin^2 t \Rightarrow \frac{x^2}{5^2} = \cos^2 t$ ,  $\frac{y^2}{2^2} = \sin^2 t$ . Sumando las dos expresiones:  $\frac{x^2}{5^2} + \frac{y^2}{2^2} = \cos^2 t + \sin^2 t$ , de donde:

$$\frac{x^2}{5^2} + \frac{y^2}{2^2} = 1.$$

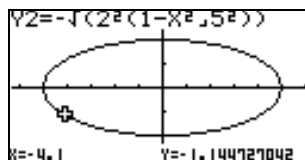
- a) Abrimos el menú Cónicas y seleccionamos la ecuación  $\frac{(X-H)^2}{A^2} + \frac{(Y-K)^2}{B^2} = 1$ . En la siguiente pantalla introducimos los valores de los parámetros: A=5, B=2, H=0, K=0 y pulsamos [F6] (DRAW) para dibujar la elipse.



- b) Alternativamente, podemos dibujar la elipse en la aplicación Gráficos, usando una ecuación cartesiana diferente. Despejando y de la ecuación  $\frac{x^2}{5^2} + \frac{y^2}{2^2} = 1$ , obtenemos:  $\frac{x^2}{5^2} + \frac{y^2}{2^2} = 1 \Rightarrow$

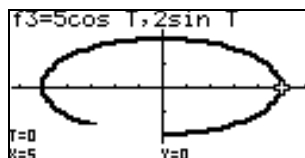
$$\frac{y^2}{2^2} = 1 - \frac{x^2}{5^2} \Rightarrow y = \pm \sqrt{2^2 \left( 1 - \frac{x^2}{5^2} \right)}.$$

Representando gráficamente estas dos funciones en los mismos ejes de coordenadas, obtendremos la gráfica de la elipse. Abrimos el Editor de Gráficos e introducimos las fórmulas de dichas funciones en las líneas Y1 e Y2 para obtener la gráfica.



**Forma paramétrica**

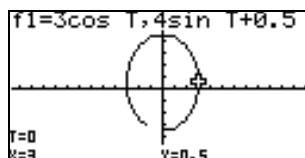
También podemos dibujar la elipse en su forma paramétrica original. En el editor de gráficos introducimos las ecuaciones paramétricas  $x = 5 \cos t$ ,  $y = 2 \sin t$ , y desactivamos las funciones cartesianas que hemos utilizado anteriormente para representar la elipse.



- Las ecuaciones paramétricas de una elipse son  $x = 3 \cos t$ ,  $y = 4 \sin t + 0.5$ . Halla la ecuación de la recta tangente a la elipse en el punto  $t = \frac{\pi}{3}$ .

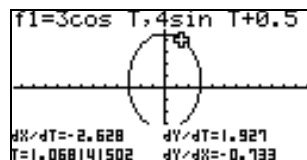
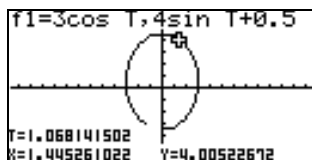
La resolución tradicional consiste en utilizar el cálculo diferencial para calcular la pendiente de la elipse en  $t = \frac{\pi}{3}$ , y calcular la correspondiente ecuación de la tangente. Con la calculadora gráfica podemos resolver el problema gráficamente y utilizando tablas de valores.

- Abre el Editor de Gráficos, selecciona el tipo paramétrico e introduce las ecuaciones paramétricas de la elipse:  $x = 3 \cos t$ ,  $y = 4 \sin t + 0.5$ . Utiliza unas dimensiones adecuadas de la ventana gráfica para visualizar la elipse.



- Utiliza el comando TRACE para recorrer el gráfico y localizar donde ocurre  $t = \frac{\pi}{3}$ , siendo

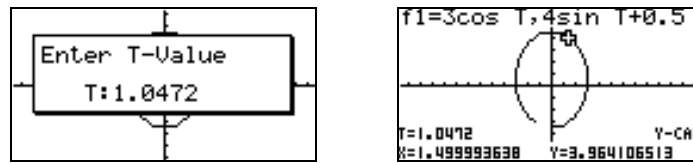
$\frac{\pi}{3} \approx 1.0472$ . Pulsa [SHIFT] [MENU] (SET UP) y selecciona la opción Derivative: On, para que se muestre en la ventana gráfica el valor de la derivada en cada punto. Recorre de nuevo el gráfico con la opción TRACE.



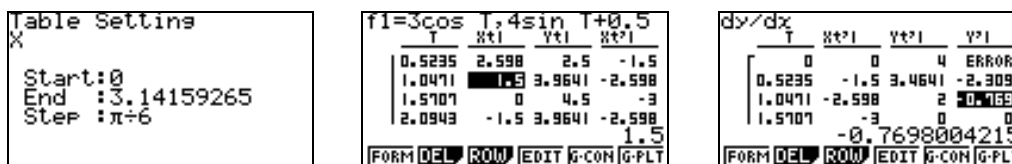
En esta exploración vemos que el punto en que  $t = \frac{\pi}{3}$  está situado en el primer cuadrante y la pendiente (dada por  $\frac{dy}{dx}$ ) es negativa. Esperamos también que la tangente tenga ordenada en el origen positiva.



- c) Mientras está activa la pantalla TRACE, pulsa [SHIFT] [F5] (G-Solve) y selecciona la opción [Y-CAL] para calcular el punto en el que  $t = \frac{\pi}{3}$ . Tomando  $\frac{\pi}{3} \approx 1.0472$ , obtenemos que el punto en que  $t = \frac{\pi}{3}$  es (1.5000, 3.9641), con cuatro decimales exactos.



- d) Por último, necesitamos determinar la pendiente de la elipse cuando  $t = \frac{\pi}{3}$ . Para ello, construiremos una tabla de valores. Selecciona el Editor de Tabla, eligiendo el [MENU] [TABLE]. Pulsa [F5] (SET) para que aparezca la ventana de configuración de tabla. Introduce como valor inicial de t=0 y como valor final  $\pi \approx 3.14159265$ . Introduce como paso  $\text{Step}=\pi/6$  y pulsa [EXE]. Asegúrate que están seleccionadas las ecuaciones paramétricas de la elipse y pulsa [EXE]



Con la tabla hecha, usa las teclas de cursor para explorar la tabla; en particular el punto en el que  $t = \frac{\pi}{3}$ . Observa que dicho punto tiene de coordenadas (1.5, 3.9641), con una pendiente de -0.7698, con cuatro decimales exactos. Usando la forma punto-pendiente, la ecuación de la recta tangente a la elipse  $x = 3 \cos t$ ,  $y = 4 \sin t + 0.5$  para  $t = \frac{\pi}{3}$  es

$$y - 3.9641 = -0.7698(x - 1.5) \Rightarrow y - 3.9641 = -0.7698x + 1.1547$$

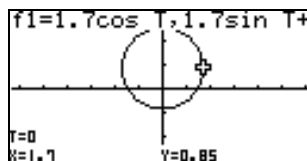
$$\Rightarrow y = -0.7698x + 5.1188$$

Podemos representar gráficamente esta recta, utilizando el Editor de Gráficos:

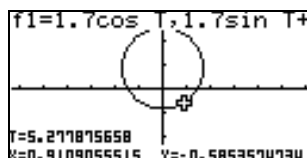
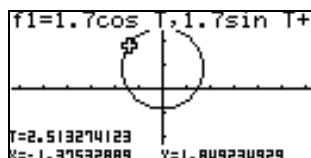


La gráfica muestra que la recta  $y = -0.7698x + 5.1188$  es tangente a la elipse.

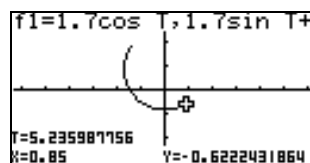
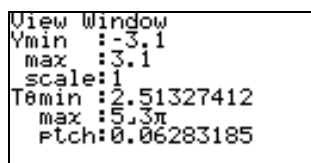
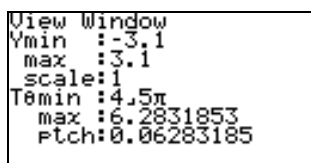
- Representa gráficamente la curva de ecuaciones paramétricas  $x = 1.7 \cos t$ ,  $y = 1.7 \sin t + 0.85$  para  $\frac{4\pi}{5} \leq t \leq \frac{5\pi}{3}$ .
  - Empezamos explorando el gráfico. Abrimos el Editor de Gráficos y elegimos el tipo paramétrico. Introducimos las ecuaciones paramétricas de la curva  $x = 1.7 \cos t$ ,  $y = 1.7 \sin t + 0.85$ . Usa una ventana de visualización apropiada para ver el gráfico.



b) Vemos que el gráfico es una circunferencia de centro  $(0, 0.85)$  y radio  $1.7$ . Para dibujar el gráfico en el intervalo  $\frac{4\pi}{5} \leq t \leq \frac{5\pi}{3}$ , vemos que  $\frac{4\pi}{5} \approx 2.513$  y  $\frac{5\pi}{3} \approx 5.236$ .



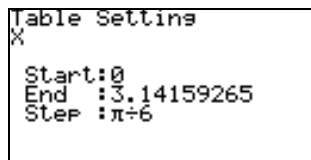
c) Pulsa [SHIFT] [F3] (VIEW WINDOW) para modificar las dimensiones de la ventana de visualización. Introduce como [T0min] el valor  $\frac{4\pi}{5}$  y como [T0max] el valor  $\frac{5\pi}{3}$ . Después dibuja la gráfica de nuevo.



El segmento de circunferencia dibujado corresponde al gráfico de  $x = 1.7 \cos t$ ,  $y = 1.7 \sin t + 0.85$  para  $\frac{4\pi}{5} \leq t \leq \frac{5\pi}{3}$ .

- Las ecuaciones paramétricas de una elipse son  $x = 3 \cos t$ ,  $y = 4 \sin t + 0.5$ . Halla la ecuación de la recta normal a la elipse en el punto  $t = \frac{\pi}{3}$ .

Este problema es similar al que hicimos anteriormente. Para  $t = \frac{\pi}{3}$ , obtenemos el punto  $(1.5, 3.9641)$ , con una pendiente de  $-0.7698$ , con cuatro decimales exactos.



dy/dx	T	Xt+1	Yt+1	Yt
	0	0	4	ERROR
	0.5235	-1.5	3.4641	-2.309
	1.0471	-2.598	2	0.7698
	1.5707	-3	0	0
			-0.7698	0.4215

Usando la propiedad de que la pendiente de la normal es la recíproca y negativa de la pendiente de la tangente, y usando la forma punto-pendiente, obtenemos que la ecuación de la normal a la elipse  $x = 3 \cos t$ ,  $y = 4 \sin t + 0.5$  para  $t = \frac{\pi}{3}$  es  $y - 3.9641 = \frac{1}{0.7698} (x - 1.5)$ .

- Representa gráficamente la curva cuyas ecuaciones paramétricas son  $x = 2 \cosh t$ ,  $y = 5 \sinh t$ , desde  $t = -\frac{\pi}{4}$  hasta  $t = \frac{2\pi}{5}$ .

Abre el Editor de Gráficos y selecciona el tipo paramétrico. Introduce las ecuaciones paramétricas  $x = 2 \cosh t$ ,  $y = 5 \sinh t$  (usa el catálogo de funciones, [SHIFT] [4] (CATALOG) para copiar las funciones hiperbólicas). Pulsa [SHIFT] [F3] (View Window) para acceder a la pantalla que permite configurar la ventana de visualización. Introduce el valor de [Tθmin] como  $-\pi$  y el valor de [Tθmax] como  $\pi$  para explorar el gráfico.



Aparentemente, el gráfico es una rama de la hipérbola  $x = 2 \cosh t$ ,  $y = 5 \sinh t$ . Con la hipérbola dibujada, pulsa [SHIFT] [F3] (View Window) e introduce el valor de [Tθmin] como  $-\frac{\pi}{4}$  y el valor de [Tθmax] como  $\frac{2\pi}{5}$ . Dibuja de nuevo la gráfica. Observa que es un segmento de hipérbola desde  $t = -\frac{\pi}{4}$  hasta  $t = \frac{2\pi}{5}$ .

