EXAMEN DE SELECTIVIDAD JUNIO 2014. MATEMÁTICAS II

OPCIÓN A

Problema A.1. Dado el sistema de ecuaciones S: $\begin{cases} x+3y+2z=-1 \\ 2x+4y+5z=k-2 \\ x+k^2y+3z=2k \end{cases}$, donde k es un parámetro real se pide:

a) Discutir razonadamente el sistema según los valores de K. (4 puntos)

Por el teorema de Rouché-Frobenius:

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{Si } \operatorname{rg}(A)=rg(A^*)=\text{nº de incógnitas}\rightarrow \text{SCD} \\ \text{Si } \operatorname{rg}(A)=rg(A^*)<\text{nº de incógnitas}\rightarrow \text{SCI} \\ \text{Si } \operatorname{rg}(A)\neq rg(A^*)\rightarrow SI \end{array}}$$

Construimos la matriz de coeficientes y la matriz ampliada:

$$A=\begin{pmatrix}1 & 3 & 2\\ 2 & 4 & 5\\ 1 & k^2 & 3\end{pmatrix}$$

$$A^*=\begin{pmatrix}1 & 3 & 2 & -1\\ 2 & 4 & 5 & k-2\\ 1 & k^2 & 3 & 2k\end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix}1 & 3 & 2\\ 2 & 4 & 5\\ 1 & k^2 & 3\end{vmatrix}=\left(12+4k^2+15\right)-\left(8+5k^2+18\right)=-k^2+1=0\rightarrow k=\pm\sqrt{1}=\pm1$$

1*) Discutimos en función de los valores de K*

$Si\ k=1\ \rightarrow rg(A)=2,\ rg(A^*)=?$

$$A^*_1(1)=\begin{pmatrix}1 & 2 & -1\\ 2 & 5 & -1\\ 1 & 3 & 2\end{pmatrix}\rightarrow\left|A^*_1(1)\right|=\begin{vmatrix}1 & 2 & -1\\ 2 & 5 & -1\\ 1 & 3 & 2\end{vmatrix}=(10-6-2)-(-5-3+8)=2$$

$rg(A)=2\neq\ rg(A^*)=3\rightarrow$ *Sistema Incompatible*

$Si\ k=\text{-}1\ \rightarrow rg(A)=2,\ rg(A^*)=?$

$$A^*_1(-1)=\begin{pmatrix}1 & 2 & -1\\ 2 & 5 & -3\\ 1 & 3 & -2\end{pmatrix}\rightarrow\left|A^*_1(-1)\right|=\begin{vmatrix}1 & 2 & -1\\ 2 & 5 & -3\\ 1 & 3 & -2\end{vmatrix}=-(10-6-6)-(-5-9-8)=0$$

$rg(A)=2=\ rg(A^*)=2\rightarrow$ *Sistema Compatible Indeterminado*

$Si\ k\neq\ \pm1\ \rightarrow rg(A)=3\ rg(A^*)=3=$ *número de incognitas* $\rightarrow$ *Sistema Compatible* Determinado.

CON WIRIS

Problema A.1

Apartado a) Discutir razonadamente el sistema según los valores de k. (

$$A(k)=\begin{pmatrix}1&3&2\\2&4&5\\1&k^2&3\end{pmatrix} \rightarrow k\mapsto\begin{pmatrix}1&3&2\\2&4&5\\1&k^2&3\end{pmatrix}$$

$$B(k)=\begin{pmatrix}1&3&2&-1\\2&4&5&k-2\\1&k^2&3&2k\end{pmatrix} \rightarrow k\mapsto\begin{pmatrix}1&3&2&-1\\2&4&5&k-2\\1&k^2&3&2\cdot k\end{pmatrix}$$

$$|A| \rightarrow \left|k\mapsto\begin{pmatrix}1&3&2\\2&4&5\\1&k^2&3\end{pmatrix}\right|$$

resolver$(|A(k)|=0) \rightarrow \{\{k=-1\},\{k=1\}\}$

Hay que discutir el sistema para los valores $K=-1$ y $K=1$

$|A(1)| \rightarrow 0$

$|A(-1)| \rightarrow 0$

Para $K=1$

$$A(k)=\begin{pmatrix}1&3&2\\2&4&5\\1&k^2&3\end{pmatrix} \rightarrow k\mapsto\begin{pmatrix}1&3&2\\2&4&5\\1&k^2&3\end{pmatrix}$$

rango$(A(1)) \rightarrow 2$

$$B(k)=\begin{pmatrix}1&3&2&-1\\2&4&5&k-2\\1&k^2&3&2k\end{pmatrix} \rightarrow k\mapsto\begin{pmatrix}1&3&2&-1\\2&4&5&k-2\\1&k^2&3&2\cdot k\end{pmatrix}$$

rango$(B(1)) \rightarrow 3$

$rg(A)=2\neq rg(Aq)\mapsto =3$Sistema Incompatible

Para $K=-1$

$$A(k)=\begin{pmatrix}1&3&2\\2&4&5\\1&k^2&3\end{pmatrix} \rightarrow k\mapsto\begin{pmatrix}1&3&2\\2&4&5\\1&k^2&3\end{pmatrix}$$

rango$(A(-1)) \rightarrow 2$

$$B(k)=\begin{pmatrix}1&3&2&-1\\2&4&5&k-2\\1&k^2&3&2k\end{pmatrix} \rightarrow k\mapsto\begin{pmatrix}1&3&2&-1\\2&4&5&k-2\\1&k^2&3&2\cdot k\end{pmatrix}$$

rango$(B(-1)) \rightarrow 2$

$rg(A)=rg(Aq)=2\leq$ Número de incognitas $\mapsto$ Sistema Compatible Indeterminado

b) Obtener razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado, todas las soluciones del sistema cuando K=-1. (2 puntos)

Cuando k = -1 $\rightarrow$ Sistema Compatible Indeterminado

Hay una ecuación que s combinación lineal de las otras

$$\begin{cases} x+3y+2z=-1 \\ 2x+4y+5z=-3 \\ x+y+3z=-2 \end{cases}$$

Se observa que la ecuación 3 $=$ *ecuación* 2 - *ecuación* 1 $\rightarrow$ *y entonces la eliminamos.*
Y la solución depende de un parámetro.

$$\begin{cases} x+3y+2z=-1 \\ 2x+4y+5z=-3 \end{cases}$$

$k=\beta$

$$\begin{cases} x+3y+2\beta=-1 \\ 2x+4y+5\beta=-3 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x+3y=-1-2\beta \\ 2x+4y=-3-5\beta \end{cases} \xrightarrow{\cdot(-2)} \rightarrow \begin{cases} -2x-6y=2+4\beta \\ 2x+4y=-3-5\beta \end{cases}$$

$$\text{-}2y=-1-\beta \rightarrow y=\frac{1+\beta}{2}$$

$$x+3\cdot\left(\frac{1+\beta}{2}\right)=-1-2\beta$$

$$2x+3+3\beta=-2-4\beta$$

$$x=\frac{-7\beta-5}{2}$$

Solución

$$(x,y,z)=\left(\frac{-7\beta-5}{2},\frac{1+\beta}{2},\beta\right)\ \beta\in\Re$$

CON WIRIS

Apartado b) Obtener razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado, todas las soluciones del sistema cuando k=−1.

$$\text{resolver}\left\{\begin{matrix} x+3y+2z=-1 \\ 2x+4y+5z=-3 \\ x+y+3z=-2 \end{matrix}\right\} \rightarrow \left\{\left\{x=-\frac{7}{2}\cdot z-\frac{5}{2}, y=\frac{1}{2}\cdot z+\frac{1}{2}, z=z\right\}\right\}$$

c) Resolver razonadamente el sistema cuando k=0. (2 puntos)

Cuando k = -1 $\rightarrow$ Sistema Compatible Determinado

$$\begin{cases} x+3y+2z=-1 \\ 2x+4y+5z=-2 \\ x+3z=0 \end{cases}$$

Resolver aplicado Gauss

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & 5 & -2 \\ 1 & 0 & 3 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{matrix} F2-2F1 \\ F3-F1 \end{matrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & -1 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow 2F3-3F2 \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & -1 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$z=-2$$
$$-2y+z=0 \rightarrow -2y-2=0 \rightarrow y=-1$$

$$x+3y+2z=-1 \rightarrow x-3-4=-1 \rightarrow x=6$$

Solución

$$(x,y,z)=(6,-1,-2)$$

CON WIRIS

Apartado c) Resolver razonadamente el sistema cuando k=0.

$$\text{resolver}\left\{\begin{bmatrix} x+3y+2z=-1 \\ 2x+4y+5z=-2 \\ x+3z=0 \end{bmatrix}\right\} \rightarrow \{\{x=6,y=-1,z=-2\}\}$$

Problema A.2. Se dan el punto $A=(-1,0,2)$, y las rectas $r:\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y}{3}=z-2$ y $s:\begin{cases}x=-1-2\lambda\\ y=1+3\lambda\\ z=1+\lambda\end{cases}$.

Obtener **razonadamente**, **escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado.**

a) La ecuación del plano π que pasa por el punto A y contiene a la recta r. (3puntos)

$\pi / A\subset \pi, r\subset \pi$

$$\begin{cases}A=(-1,0,2)\\ P_\pi=(1,0,2)\end{cases}\rightarrow d_\pi=AP_\pi=(1,0,2)-(-1,0,2)=(2,0,0)$$

$$d_\pi=d_r=(2,3,1)$$

Y ahora con el punto A, y los dos vectores directores del plano hallamos la ecuación del plano π

$$\begin{vmatrix}x+1 & 2 & 2\\ y & 0 & 3\\ z-2 & 0 & 1\end{vmatrix}=0\rightarrow -2y+6(z-2)=-2y+6z-12=0\xrightarrow{:-2} y-3z+6=0$$

$$\pi: y-3z+6=0$$

CON WIRIS

Problema A.2

Apartado a) La ecuación del plano π que pasa por el punto A y contiene a la recta r.

A=[-1,0,2] → [-1,0,2]

dr=[2,3,1] → [2,3,1]

Pr=[1,0,2] → [1,0,2]

APr=Pr-A → [2,0,0]

plano(punto(-1,0,2),dr,APr) → y-3·z+6=0

b) La ecuación del plano σ que poas por el punto A y es perpendicular a la recta s. (3 puntos)

$\sigma / A \subset \sigma, \sigma \perp s$

$n_\sigma = d_s = (-2,3,1)$

Y ahora con el vector normal construyo la ecuación del plano σ, pero todavía me falta calcular d

$\sigma : -2x + 3y + z + d = 0$

Como $A \subset \sigma$, $-2 \cdot (-1) + 3 \cdot 0 + 2 + d = 0 \rightarrow d = -4$

Y por tanto : $\sigma : -2x + 3y + z - 4 = 0$

CON WIRIS

Apartado b) La ecuación del planlo σ que pasa por el punto A y es perpendicular a la recta s.

nσ=[−2,3,1] ➡ [−2,3,1]
A=punto(−1,0,2) ➡ (−1,0,2)
plano(A,nσ) ➡ −2·x+3·y+z−4=0

c) Un vector dirección de la recta l intersección de los planos π y σ (2 puntos) y la distancia entre las rectas s y l. (2 puntos)

Primero calculo la recta l en su forma paramétrica :

$$\begin{cases} y-3z+6=0 \\ -2x+3y+z-8=0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y-3z=-6 \\ -2x+3y+z=8 \end{cases} \rightarrow z=\lambda$$

$$\begin{cases} y-3\lambda=-6 \\ -2x+3y+\lambda=8 \end{cases} \rightarrow y=3\lambda-6$$

$$-2x+3\cdot(3\lambda-6)+\lambda=8$$
$$-2x+9\lambda-18+\lambda=8$$
$$10\lambda-18-8=2x$$
$$\frac{10\lambda-26}{2}=x$$
$$5\lambda-13=x$$

$$l:\begin{cases} x=5\lambda-13 \\ y=3\lambda-6 \\ z=\lambda \end{cases} \rightarrow \begin{matrix} \vec{d}_l=(5,3,1) \\ P_l=(-11,-6,0) \end{matrix}$$

$$d(s,l)=\frac{\left|\left[\vec{d}_s,\vec{d}_l,\overrightarrow{P_sP_l}\right]\right|}{\left|\vec{d}_s\times\vec{d}_l\right|}=\frac{|-28|}{7\cdot\sqrt{10}}=\frac{28}{7\cdot\sqrt{10}}\cdot\frac{\sqrt{10}}{\sqrt{10}}=\frac{4\sqrt{10}}{10}=\frac{2\sqrt{10}}{5}ua$$

$$\left[\vec{d}_s,\vec{d}_l,\overrightarrow{P_sP_l}\right]=\begin{vmatrix} -2 & 5 & -10 \\ 3 & 3 & -7 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}=(6-30-35)-(-30+14-15)=-28$$

$$\overrightarrow{P_sP_l}=(-11,-6,0)-(-1,1,1)=(-10,-7,-1)$$

$$\vec{d}_s\times\vec{d}_l=\begin{vmatrix} i & j & k \\ -2 & 3 & 1 \\ 5 & 3 & 1 \end{vmatrix}=0i+7j-21k\rightarrow(0,7,-21)$$

$$\left|\vec{d}_s\times\vec{d}_l\right|=\sqrt{0^2+7^2+(-21)^2}=\sqrt{490}=\sqrt{49\cdot10}=7\cdot\sqrt{10}$$

CON WIRIS

Apartado c) Un vctor dirección de la recta l intersección de los planos σ y π y la distancia entre la rectas s y l.

resolver$\left\{\begin{matrix} y-3\cdot z+6=0 \\ -2\cdot x+3\cdot y+z-4=0 \end{matrix}\right\} \rightarrow \{\{x=5\cdot z-11, y=3\cdot z-6, z=z\}\}$

l=recta(punto(−11,−6,0),[5,3,1]) → $3\cdot x-5\cdot y+3=0 \cap 6\cdot x-11\cdot y+3\cdot z=0$

dl=vector(l) → [5,3,1]

Primera forma

$$\begin{vmatrix} -2 & 5 & -10 \\ 3 & 3 & -7 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} \rightarrow -28$$

$$ds\times dl \rightarrow [0,7,-21]$$

$$\| ds\times dl \| \rightarrow 7\cdot\sqrt{10}$$

$$d(s,l)=\frac{\left|\begin{vmatrix} -2 & 5 & -10 \\ 3 & 3 & -7 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}\right|}{\| ds\times dl \|} \rightarrow (s,l)\mapsto \frac{2\cdot\sqrt{10}}{5}$$

Segunda forma

$$\text{distancia}(s,l) \rightarrow \frac{2\cdot\sqrt{10}}{5}$$

Problema A.3. Obtener **razonadamente**, **escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado:**

a) El valor de m para el cual la función $f(x)=\begin{cases} m(x+)e^{2x}, x\le 0 \\ \dfrac{(x+1)senx}{x}, x>0 \end{cases}$ **es continua en x=0. (3 puntos)**

$$\text{Para que f(x) sea continua en x} = 0:$$
$$1)\ \exists\ \mathrm{f}(0)=\mathrm{b}$$
$$2)\exists \lim_{x\to 0}\mathrm{f}(x)=\mathrm{b}$$
$$3)\ \mathrm{f}(0)=\lim_{x\to 0}\mathrm{f}(x)=b$$

$$1)\ \mathrm{f}(0)=\mathrm{m}\cdot(0+1)\cdot e^{2\cdot 0}=m\cdot e^{0}=m$$
$$2)\exists \lim_{x\to 0}\mathrm{f}(x)$$
$$\lim_{x\to 0^+}\mathrm{f}(x)=\lim_{x\to 0^+}\frac{(x+1)\cdot senx}{x}=\frac{0}{0}\xrightarrow{\text{Por L'hopital}}\lim_{x\to 0^+}\frac{1\cdot senx+(x+1)\cdot\cos x}{1}=$$
$$=\lim_{x\to 0^+}1\cdot senx+(x+1)\cdot\cos x=0+1=1$$

$$\lim_{x\to 0^-}\mathrm{f}(x)=\lim_{x\to 0^-}\mathrm{m}\cdot(\mathrm{x}+1)\cdot e^{2\cdot x}=m$$

$$\mathrm{f}(0)=m=\lim_{x\to 0^+}\mathrm{f}(x)=1=\lim_{x\to 0^-}\mathrm{f}(x)\to m=1 \text{ para que f}(x)\text{ sea continua en x} = 0$$

CON WIRIS

Apartado a) El valor de m para que la función $f(x)=\left\{\begin{matrix} m(x+1)e^{2x}, x\leq 0 \\ \frac{(x+1)\text{senx}}{x}, x>0 \end{matrix}\right\}$ sea continua en x=0

Para que que f(x) sea continua :

1) Existir f(0)
2) Existir $\lim_{x\to 0} f(x)$
3) $f(0)=\lim_{x\to 0} f(x)$

1) Existir f(0)

$f(x)=m\cdot(x+1)\cdot e^{2x} \rightarrow x\mapsto (m\cdot x+m)\cdot e^{2\cdot x}$

$f(0) \rightarrow m$

2) Existir $\lim_{x\to 0} f(x)$

$\lim_{x\to 0^-} m\cdot(0+1)\cdot e^{2\cdot 0} \rightarrow m$

$\lim_{x\to 0^+} \frac{(x+1)\cdot \text{sen}(x)}{x} \rightarrow 1$

Entonces m=1 para que f(x) sea continua en x=0

b) Los intervalos de crecimiento o decrecimiento de la función (x+1) e^{2x}. (3 puntos)-

$$f(x)=(x+1)\cdot e^{2x}$$
$$f'(x)=e^{2x}+(x+1)\cdot e^{2x}\cdot 2=e^{2x}\cdot(1+2x+2)=e^{2x}\cdot(2x+3)=0$$

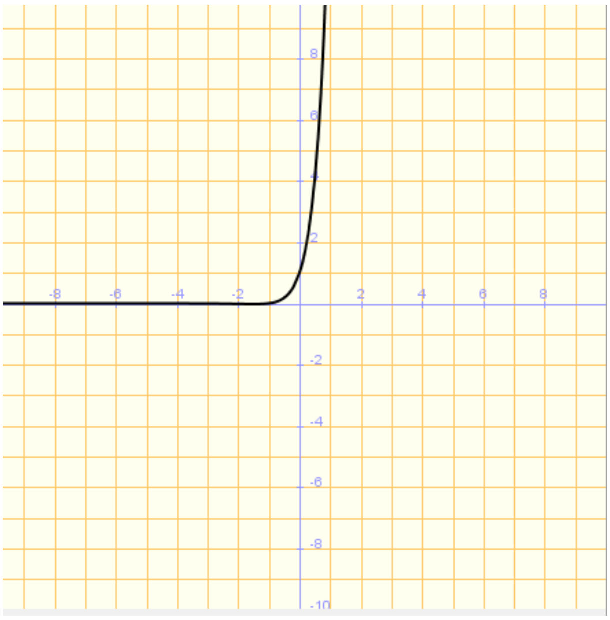
$$e^{2x}\cdot(2x+3)=0\rightarrow\begin{cases} e^{2x}=0\rightarrow \text{No hay ningún valor de x que cumple la ecuación} \\ 2x+3=0\rightarrow x=\frac{-3}{2}\end{cases}$$

$$f''(x)=e^{2x}\cdot 2\cdot(2x+3)+e^{2x}\cdot 2=e^{2x}\cdot(2+4x+6)=e^{2x}\cdot(4x+8)$$
$$f''\left(\frac{-3}{2}\right)=e^{2\cdot\frac{-3}{2}}\cdot\left(4\cdot\frac{-3}{2}+8\right)=2e^{-3}>0\rightarrow \text{En x}=\frac{-3}{2}\text{ hay un mínimo.}$$

		-3/2
f(x)	↘	↗
f'(x)	**f'(-2) =-e^4<0**	**f'(0)=3>0**

I.decrecimiento : (-∞,-3/2)

I.crecimiento: (-3/2,+∞)



Con la gráfica de la primera derivada.

CON WIRIS

Apartado b) Los intervalos de crecimiento o decrecimiento de la función $(x+1)e^{2x}$

$f(x)=(x+1)\cdot e^{2\cdot x} \rightarrow x \mapsto (x+1)\cdot e^{2\cdot x}$

resolver$((x+1)\cdot e^{2\cdot x}=0) \rightarrow \{\{x=-1\}\}$

representar$((x+1)\cdot e^{2\cdot x}) \rightarrow$ tablero1

$f' \rightarrow x \mapsto (2\cdot x+3)\cdot e^{2\cdot x}$

$f'' \rightarrow x \mapsto (4\cdot x+8)\cdot e^{2\cdot x}$

resolver$((2\cdot x+3)\cdot e^{2\cdot x}=0) \rightarrow \left\{\left\{x=-\frac{3}{2}\right\}\right\}$

$f''(-\frac{3}{2}) \rightarrow \frac{2}{e^3}$

$f(-\frac{3}{2}) \rightarrow \frac{-1}{2\cdot e^3}$

Entonces el mínimo está en $(-\frac{3}{2}, \frac{-1}{2\cdot e^3})$

Ramas infinitas.

$\lim_{x\to+\infty} f(x) \rightarrow +\infty$

$\lim_{x\to-\infty} f(x) \rightarrow 0$

I.crecimiento y decrecimiento

$f'(0) \rightarrow 3$

$f'(-3/2) \rightarrow 0$

$f(-1.1) \rightarrow -0.01108$

$f(-1.2) \rightarrow -0.018144$

$f(-1.4) \rightarrow -0.024324$

$f(-1.5) \rightarrow -0.024894$

$f(-1.6) \rightarrow -0.024457$

$f(-1.7) \rightarrow -0.023361$

$f(-1.99) \rightarrow -0.018499$

$f'(-2) \rightarrow \frac{-1}{e^4}$

c) Los integral ∫ (x+1) e^{2x} dx, (2 puntos) y el área limitada por la curva y=(x+1) e^{2x} y las rectas x=0, x=1 e y=0. (2 puntos).

$$\int (x+1)\cdot e^{2x}dx = \frac{(x+1)\cdot e^{2x}}{2} - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\int 2\cdot e^{2x}dx = \frac{(x+1)\cdot e^{2x}}{2} - \frac{e^{2x}}{4} = 1\frac{2\cdot(x+1)\cdot e^{2x} - e^{2x}}{4}$$

$$u = x+1 \rightarrow du = dx$$

$$dv = e^{2x}dx \rightarrow v = \frac{1}{2}\int 2\cdot e^{2x}dx = \frac{1}{2}e^{2x}$$

CON WIRIS

Apartado c)La integral $\int (x+1)e^{2x}\,dx$ y el área limitida po rla curva y=(x+1)e^{2x} y las rectas x=0, x=1, e y = 0

dibujar(x=0,{color=rojo}) ➞ tablero1

dibujar(x=1,{color=rojo}) ➞ tablero1

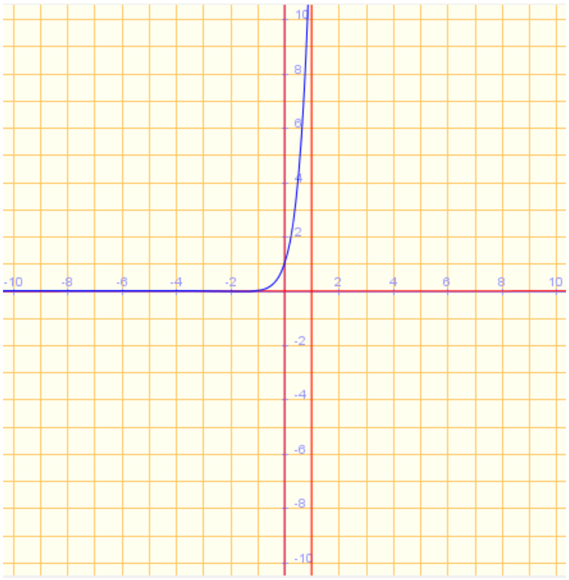
dibujar(y=0,{color=rojo}) ➞ tablero1

dibujar((x+1) · $e^{2\cdot x}$,{color=azul}) ➞ tablero1

$$\int (x+1)\cdot e^{2\cdot x}\,dx \rightarrow \left(\frac{x}{2}+\frac{1}{4}\right)\cdot e^{2\cdot x}$$

Y el área limitada por la curva y=(x+1) e^{2x} y las rectas x=0, x=1 e y=0, se calcula mediante la integral definida, utilizando la regla de barrow:

Primero observamos la gráfica,



Y calculamos la integral definida:

$$\int_0^1 (x+1)\cdot e^{2x}dx = \frac{2\cdot(x+1)\cdot e^{2x} - e^{2x}}{4}\Big|_0^1 = \frac{2\cdot(1+1)\cdot e^2 - e^2}{4} - \frac{2\cdot(1)\cdot e^0 - e^0}{4} = \frac{3e^2}{4} - \frac{1}{4}$$

Puesto que :

1) $f(x) = (x+1)\cdot e^{2x}$ es continua en el intervalo $[0,1]$

2) $\frac{2\cdot(x+1)\cdot e^{2x} - e^{2x}}{4}$ es una función derivable en el intervalo $[0,1]$

Entonces

$$\int_0^1 (x+1)\cdot e^{2x}dx = \frac{2\cdot(1+1)\cdot e^2 - e^2}{4} - \frac{2\cdot(1)\cdot e^0 - e^0}{4}$$

Apartado c)La integral $\int (x+1)e^{2x}\,dx$ y el área limitida po rla curva y=(x+1)e^{2x} y las rectas x=0, x=1, e y = 0

dibujar(x=0,{color=rojo}) → tablero1

dibujar(x=1,{color=rojo}) → tablero1

dibujar(y=0,{color=rojo}) → tablero1

dibujar($(x+1)\cdot e^{2\cdot x}$,{color=azul}) → tablero1

$\int_0^1 (x+1)\cdot e^{2\cdot x}\,dx \rightarrow \frac{3\cdot e^2}{4} - \frac{1}{4}$

OPCIÓN B

Problema B.1. Se dan las matices $A=\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}-2\\ 1\\ -1\end{pmatrix}, C=\begin{pmatrix}-1 & 1 & 3\end{pmatrix}$ Obtener **razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado.**

a) La matriz inversa A^{-1} de la matriz A. **(3 puntos)**

$$|A|=\begin{vmatrix}1 & -1 & 1\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1\end{vmatrix}=1\cdot 1\cdot 1=1\neq 0\,(\text{Por ser Matriz Triangular Inferior})\rightarrow \exists A^{-1}$$

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}Adj(A)^t$$

$$A_{11}=\begin{vmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{vmatrix}=1 \quad A_{21}=-\begin{vmatrix}-1 & 1\\ 0 & 1\end{vmatrix}=1 \quad A_{31}=\begin{vmatrix}-1 & 1\\ 1 & 1\end{vmatrix}=-2$$

$$A_{12}=-\begin{vmatrix}0 & 1\\ 0 & 1\end{vmatrix}=0 \quad A_{22}=\begin{vmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{vmatrix}=1 \quad A_{32}=-\begin{vmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{vmatrix}=-1$$

$$A_{13}=\begin{vmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{vmatrix}=0 \quad A_{23}=-\begin{vmatrix}1 & -1\\ 0 & 0\end{vmatrix}=0 \quad A_{33}=\begin{vmatrix}1 & -1\\ 0 & 1\end{vmatrix}=1$$

$$A^{-1}=\frac{1}{1}\begin{pmatrix}1 & 1 & -2\\ 0 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 1 & -2\\ 0 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

Comprobación

$$A\cdot A^{-1}=I$$

$$\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 1 & -2\\ 0 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

CON WIRIS

OPCIÓN B

Apartado a) La matriz A^{-1} de la matriz A.

$$A=\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

$$|A|\rightarrow 1$$

$$A^{-1}\rightarrow\begin{pmatrix}1 & 1 & -2\\ 0 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

$$A\cdot A^{-1}\rightarrow\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

b) La matriz X que es solución de la ecuación AX=BC. **(3 puntos)**

$$AX = BC \quad \left(\text{Pre multiplicacmo por la izquierda por la } \mathrm{A}^{-1}\right)$$
$$\mathrm{A}^{-1}AX = \mathrm{A}^{-1}BC \qquad \left(\mathrm{A}^{-1}A = I\right)$$
$$X = \mathrm{A}^{-1}BC$$

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}_{3x3} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}_{3x1} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}_{1x3} = \begin{pmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{pmatrix}_{3x3}$$

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}_{3x3} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}_{3x1} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}_{1x3} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 3 \\ -2 & 2 & 6 \\ 1 & -1 & -3 \end{pmatrix}$$

Comprobación

$$AX = BC$$

$$AX = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 1 & 3 \\ -2 & 2 & 6 \\ 1 & -1 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -6 \\ -1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & -3 \end{pmatrix}$$

$$BC = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -6 \\ -1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & -3 \end{pmatrix}$$

CON WIRIS

Apartado b) La matriz X que es solución de la ecuación AX = BC

$A^{-1}AX=A^{-1}\,BC \;-->\; X=A^{-1}\,BC$

$$A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$B=\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$C=\begin{pmatrix} -1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1}\cdot B \rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$X=A^{-1}\cdot B\cdot C \rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 1 & 3 \\ -2 & 2 & 6 \\ 1 & -1 & -3 \end{pmatrix}$$

$$X \rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 1 & 3 \\ -2 & 2 & 6 \\ 1 & -1 & -3 \end{pmatrix}$$

$$A \cdot X \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & -2 & -6 \\ -1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & -3 \end{pmatrix}$$

$$B \cdot C \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & -2 & -6 \\ -1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & -3 \end{pmatrix}$$

c) El determinante de la matriz $2M^3$, siendo M una matriz cuadrada de orden 2 cuyo determinante vale 1/2 . **(3 puntos)**

$$\left|2 \cdot M^3\right| = 2^2 \cdot |M|^3 = 4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 = 4 \cdot \frac{1}{8} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$$

CON WIRIS

$$M = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$|M| \rightarrow \frac{1}{2}$$

$$|2M^3| \rightarrow \frac{1}{2}$$

Problema B.2. Se da el triángulo T, cuyos vértices son A=(1,2,-2), B=(0,-3,1), C=(-1,0,0), y los planos

$\pi_1 : x + y + z + 1 = 0$ y $\pi_3 : \begin{cases} x = -\alpha + \beta + 1 \\ y = \alpha - 2\beta \\ z = \alpha + \beta \end{cases}$ Obtener **razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado.**

a) La posición relativa del plano π_1 y del plano que contiene al triángulo T. **(4 puntos)**

Primero *construimos el plano* (π_3) *que contiene el triángulo T.*

1) *Hallamos dos vectores directores del plano* π_3

$$\vec{AC} = (-1,0,0) - (1,2,-2) = (-2,-2,2)$$
$$\vec{AB} = (0,-3,1) - (1,2,-2) = (-1,-5,3)$$

2) *A partir de un punto, por ejemplo* $C = (-1,0,0)$ *y los dos vectores construimos las ecuaciones paramétricas del plano.*

$$\pi_3: \begin{cases} x = -1-2\lambda-\beta \\ y = -2\lambda - 5\beta \\ z = 2\lambda + 3\beta \end{cases} \rightarrow \pi_3: \begin{vmatrix} x+1 & -2 & -1 \\ y & -2 & -5 \\ z & 2 & 3 \end{vmatrix} = (x+1)\cdot(4) - y\cdot(-4) + z\cdot 8 = 0 \rightarrow 4x + 4 + 4y + 8z = 0$$
$$\pi_3: 4x + 4y + 8z + 4 = 0 \rightarrow \pi_3: x + y + 2z + 1 = 0$$

3) *Posición relativa del plano* π_1 *y* π_3

Construimos dos matrices con los coeficientes de los planos π_1 *y* π_3.

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad M^* = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Si $rg(M) = rg(M^*) = 1 \rightarrow$ *planos coincidentes*
Si $rg(M) = rg(M^*) = 2 \rightarrow$ *planos secantes*
Si $rg(M) = 1 \neq rg(M^*) = 2 \rightarrow$ *planos paralelos*

$$rg(M) = 2 \rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 2 - 1 = 1$$
$$rg(M^*) = 2 \rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 2 - 1 = 1$$

Entonces π_1 *y* π_3 *son planlos secantes.*

CON WIRIS

Problema B.2

Apartado a)

A=punto(1,2,−2) → (1,2,−2)

B=punto(0,−3,1) → (0,−3,1)

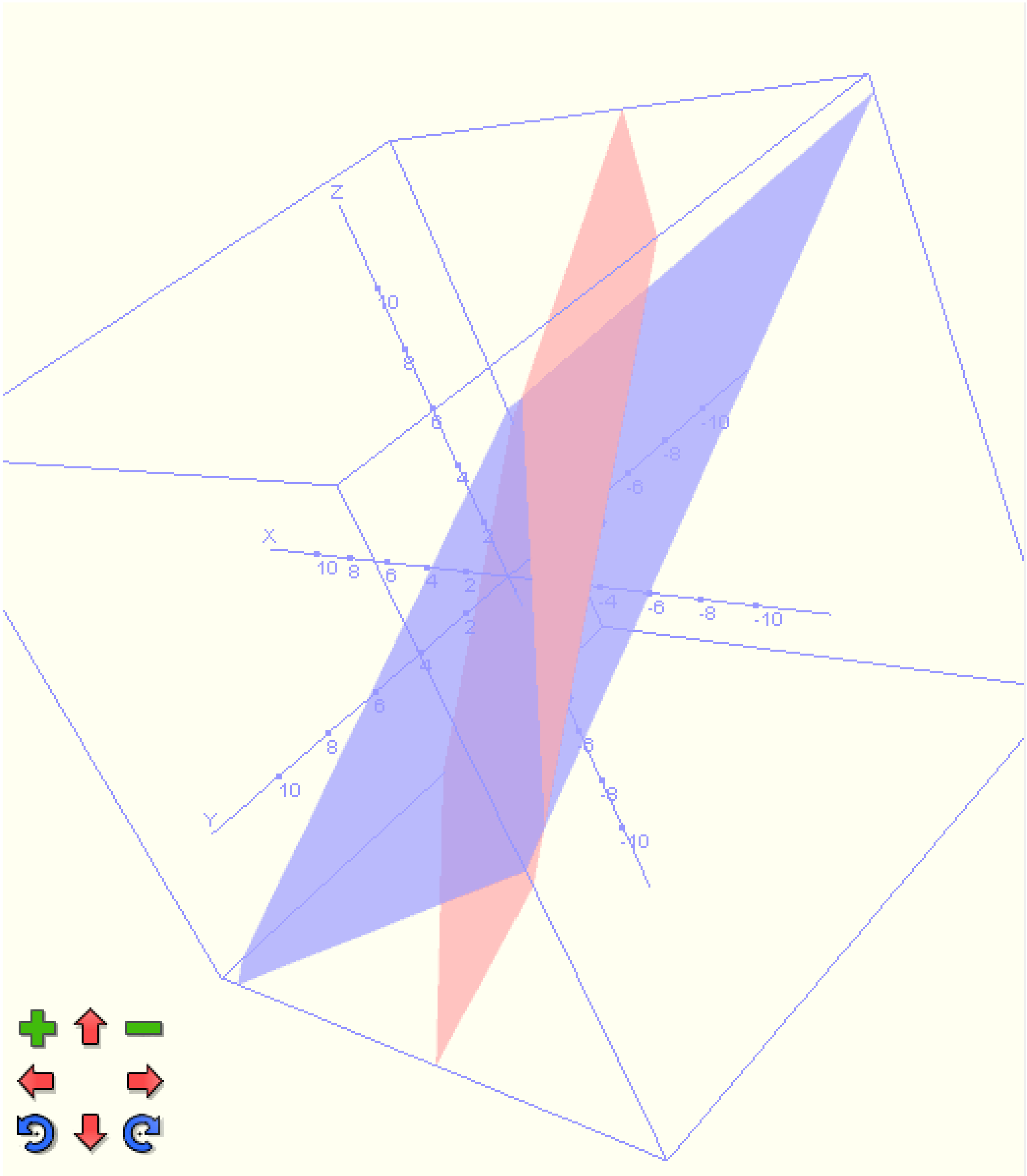
C=punto(−1,0,0) → (−1,0,0)

π3=plano(A,B,C) → $-x-y-2\cdot z-1=0$

π1=x+y+z+1=0 → $x+y+z+1=0$

dibujar3d(π1,{color=rojo}) → tablero1

dibujar3d(π3,{color=azul}) → tablero1



b) Un vector $\vec{n_1}$ perpendicular al plano π_1 y un vector $\vec{n_2}$ **perpendicular al plano** π_2 **(1,5 puntos) y el coseno del ángulo formado por los vectores** $\vec{n_1}$ y $\vec{n_2}$.

$\pi_1 : x + y + z + 1 = 0$

1) *Hallamos la ecuación en formal general del planlo* π_2.

$$\pi_2 : \begin{vmatrix} x-1 & -1 & 1 \\ y & 1 & -2 \\ z & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow (x-1)\cdot 3 - y\cdot(-2) + z = 0 \rightarrow 3x - 3 + 2y + z = 0$$

$\pi_2 : 3x + 2y + z - 3 = 0$

2) *Sabemos que los coficientes de los planos forman los vectores normales.*

$\vec{n_1} = (1,1,1)$

$\vec{n_2} = (3,2,1)$

3) *Hallamos el* $\cos\left(\widehat{\vec{n_1},\vec{n_2}}\right) = \dfrac{\vec{n_1}\cdot\vec{n_2}}{\left|\vec{n_1}\right|\cdot\left|\vec{n_2}\right|} = \dfrac{(1,1,1)\cdot(3,2,1)}{\sqrt{1^2+1^2+1^2}\cdot\sqrt{3^2+2^2+1^2}} = \dfrac{6}{\sqrt{3}\cdot\sqrt{14}} = \dfrac{6}{\sqrt{42}}$

$$\cos\left(\widehat{\vec{n_1},\vec{n_2}}\right) = \frac{6}{\sqrt{42}} = \frac{6\cdot\sqrt{42}}{\sqrt{42}\cdot\sqrt{42}} = \frac{\sqrt{42}}{7}$$

Apartado b)

$\pi 1 = x+y+z+1=0 \rightarrow x+y+z+1=0$

$\pi 2 = \begin{vmatrix} x-1 & -1 & 1 \\ y & 1 & -2 \\ z & 1 & 1 \end{vmatrix} \rightarrow 3\cdot x+2\cdot y+z-3$

$n1 = [(1,1,1)] \rightarrow [1,1,1]$

$n2 = [(3,2,1)] \rightarrow [3,2,1]$

$n1\cdot n2 \rightarrow 6$

$\|n1\| \rightarrow \sqrt{3}$

$\|n2\| \rightarrow \sqrt{14}$

$\|n1\|\cdot\|n2\| \rightarrow \sqrt{42}$

$\dfrac{n1\cdot n2}{\|n1\|\cdot\|n2\|} \rightarrow \dfrac{\sqrt{42}}{7}$

c) Las ecuaciones paramétricas de la recta intersección de los planos $\vec{\pi}_1$ y $\vec{\pi}_2$ **(3 puntos).**

$$r:\begin{cases} \pi 1: x+y+z+1=0 \\ \pi 2: 3x+2y+z-3=0 \end{cases}$$

Re*solvemos el sistema, utilizando un parámetro:*

$$z=\lambda$$

$$\begin{cases} x+y+\lambda+1=0 \\ 3x+2y+\lambda-3=0 \end{cases} \to \begin{cases} x+y=-\lambda-1 \\ 3x+2y=-\lambda+3 \end{cases} \to {}^{*(-3)}\begin{cases} -3x-3y=3\lambda+3 \\ 3x+2y=-\lambda+3 \end{cases}$$

$$-y = 2\lambda+6$$

$$y=-2\lambda-6$$

$$x+y=-\lambda-1 \to x+(-2\lambda-6)=-\lambda-1 \to x=-\lambda-1+2\lambda+6 \to x=\lambda+5$$

$$r:\begin{cases} x=\lambda+5 \\ y=-2\lambda-6 \\ z=\lambda\lambda \end{cases}$$

CON WIRIS

Apartado c)Las ecuaciones paramétricas de la recta intersección de los planos π1 y π2.

π1=x+y+z+1=0 ➡ x+y+z+1=0

$$\pi 2=\left|\begin{pmatrix} x-1 & -1 & 1 \\ y & 1 & -2 \\ z & 1 & 1 \end{pmatrix}\right|=0 \to 3\cdot x+2\cdot y+z-3=0$$

r=recta(π1,π2) ➡ $-2\cdot x-y+4=0 \cap 6\cdot x+5\cdot y+4\cdot z=0$

dibujar3d(π1,{color=rojo}) ➡ tablero1

dibujar3d(π2,{color=azul}) ➡ tablero1

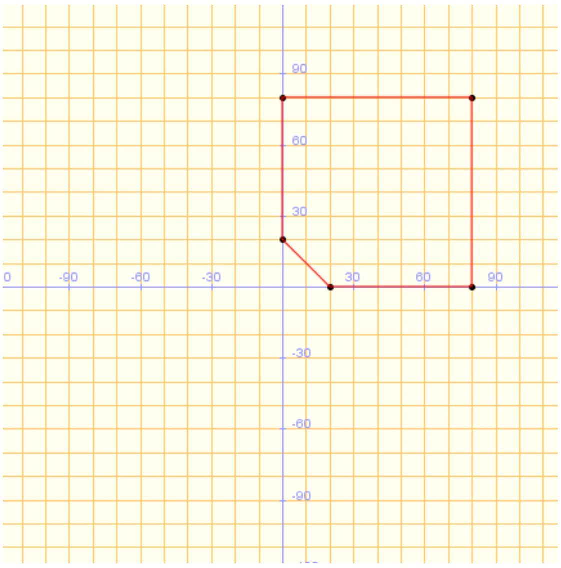
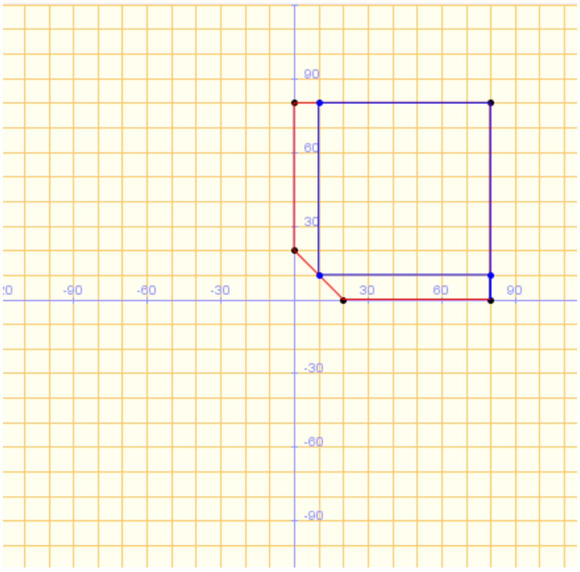
$$\text{resolver}\begin{Bmatrix} x+y+z=-1 \\ 3x+2y+z=3 \end{Bmatrix} \to \{\{x=z+5, y=-2\cdot z-6, z=z\}\}$$

Problema B.3. Se tiene un cuadrado de mármol de lado 80 cm. Se produce la rotura de una esquina y queda un pentágono de vértices A=(0,20), B=(20,0), C=(80,0) y E=(0,80). Para obtener una pieza rectangular se elige un punto P=(x,y) del segmento AB y se hacen dos cortes paralelos a los ejes X e Y. Así se obtiene un rectángulo R cuyos vértices son los puntos P=(x,y), F(80,y), D=(80,80) y G=(x,80).

Obtener **razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado.**

a) El área del rectángulo R en función de x, cuando 0≤x≤80. (3puntos).

Podemos observar el pentágono y el rectángulo resultante.

El rectángulo resultante tiene la siguiente área :

$$A = b \cdot h = (80 - x) \cdot (80 - y)$$

Se observa que y = 20 - x y por lo tanto nos queda :

$$A = b \cdot h = (80 - x) \cdot (80 - (20 - x)) = (80 - x) \cdot (60 + x) = 4800 + 80x - 60x - x^2 = -x^2 + 20x + 4800$$

b) El valor de x para el que el área del rectángulo R es máxima. (3 puntos).

$$A = -x^2 + 20x + 4800$$

$$A' = -2x + 20 = 0 \rightarrow x = 10$$

$$A'' = -2 \rightarrow A''(10) = -2 < 0 \rightarrow \text{En } x = 10 \text{ hay un máximo}$$

CON WIRIS

Apartado b) El valor de x el que el área del rectángulo R es máxima. (5 puntos)

$A = -x^2 + 20x + 4800 \rightarrow -x^2 + 20 \cdot x + 4800$
$A' \rightarrow -2 \cdot x + 20$
resolver$(A' = 0) \rightarrow \{\{x = 10\}\}$
$A'' \rightarrow -2$

evaluar$(A'', 10) \rightarrow -2$
Observamos que en x=10 hay un máximo

c) El valor del área máxima del rectángulo R. (3 puntos)

$$A(10) = -10^2 + 20 \cdot 10 + 4800 = 4900$$

CON WIRIS

Apartado c) El valor del área máxima del rectángulo R. (2 puntos)
$A = -x^2 + 20x + 4800 \rightarrow -x^2 + 20 \cdot x + 4800$
evaluar$(A, 10) \rightarrow 4900$