OBJETIVOS

a. Identificar el concepto de múltiplo y de divisor.
b. Identificar números primos y compuestos.
c. Utilizar los criterios de divisibilidad.
d. Realizar la descomposición en factores primos de un número.
e. Conocer y calcular el máximo común divisor y el mínimo común múltiplo de dos o más números.
f. Representar gráficamente y ordenar números enteros.
g. Calcular el valor absoluto de un número entero.
h. Conocer y utilizar los algoritmos de la suma y de la resta de números enteros.
i. Conocer y utilizar la regla de los signos para multiplicar y dividir números enteros.
j. Conocer y utilizar la jerarquía de las operaciones y el uso del paréntesis.

COMPETENCIAS BÁSICAS

Competencia para aprender a aprender

- Resolver problemas aritméticos de divisibilidad y con números enteros aplicando una estrategia apropiada escogiendo adecuadamente el método más conveniente para la realización de un determinado cálculo: mentalmente, por escrito, con calculadora o con ordenador.

CONTENIDOS

Conceptos

- La relación «ser múltiplo de» y «ser divisor de».
- Número primo y número compuesto.
- Descomposición en factores primos.
- Máximo común divisor.
- Mínimo común múltiplo.
- Los números enteros.
- Opuesto de un número entero.
- Valor absoluto de un número entero.
- Suma, resta, multiplicación y división de números enteros.

Procedimientos

- Interpretación y utilización de la relación «ser múltiplo de» y «ser divisor de».
- Utilización de los criterios de divisibilidad del 2, 3 y 5
- Obtención del máximo común divisor de dos o más números.
- Obtención del mínimo común múltiplo de dos o más números.
- Ordenación de números enteros.
- Identificación del opuesto de un número entero.
- Utilización de la representación gráfica de números enteros para ordenar o calcular la suma o la resta de dichos números.
- Utilización de la regla de los signos para multiplicar y dividir números enteros.
- Utilización de la jerarquía de las operaciones en operaciones combinadas.

Actitudes

- Valoración de la utilidad del lenguaje numérico para representar, comunicar o resolver diferentes situaciones de la vida cotidiana.
- Confianza en las propias capacidades para afrontar problemas y realizar cálculos.
- Perseverancia y flexibilidad en la búsqueda de soluciones a los problemas numéricos; interés y respeto por las estrategias y soluciones a problemas numéricos distintas de las propias.

CRITERIOS DE EVALUACIÓN

a.1. Utiliza con propiedad el concepto de múltiplo y de divisor.
b.1. Identifica números primos y compuestos.
c.1. Utiliza los criterios de divisibilidad.
d.1. Realiza la descomposición en factores primos de un número.
e.1. Calcula el máximo común divisor y el mínimo común múltiplo de dos o más números.
f.1. Representa gráficamente y ordena números enteros.
g.1. Calcula el valor absoluto de un número entero.
h.1. Conoce y utiliza los algoritmos de la suma y de la resta de números enteros.
i.1. Conoce y utiliza la regla de los signos para multiplicar y dividir números enteros.
j.1. Conoce y utiliza la jerarquía de las operaciones y el uso del paréntesis.

Divisibilidad I

Bruño

Nombre ______________________ Curso ______ Fecha ______

Un número ***b*** es **divisor** de otro número ***a*** si al dividir ***a*** entre ***b*** la división es exacta. Se dice también que ***a*** es **múltiplo** de ***b***.

1. Completa con la palabra múltiplo o divisor:

a) 5 es divisor de 15

b) 12 es múltiplo de 3

c) 244 es múltiplo de 2

d) 7 es divisor de 42

2. Completa esta tabla sobre los criterios de divisibilidad:

Criterio	Ejemplo
Un número es divisible por dos si acaba en cero o cifra par.	30, 52, 174, 356, 508
Un número es divisible por tres si la suma de sus cifras es múltiplo de 3.	1 257: la suma de sus cifras es 1 + 2 + 5 + 7 = 15 que es múltiplo de tres .
Un número es divisible por diez si acaba en 0 ó 5.	70, 85, 100, 135, 250, 715

3. De los siguientes números: 15, 18, 24, 30, 35, indica cuáles son múltiplos de:

a) 2: Múltiplos de 2: 18, 24 y 30

b) 3: Múltiplos de 3: 15, 18, 24 y 30

c) 5: Múltiplos de 5: 15, 30 y 35

Un número es **primo** si tiene exactamente dos divisores: el 1 y él mismo.
Un número es **compuesto** si tiene más de dos divisores.

4. Clasifica los siguientes números en primos y compuestos:

12 compuesto

29 primo

25 compuesto

17 primo

42 compuesto

43 primo

Divisibilidad II

Nombre ______________________ Curso ________ Fecha ________

La **factorización** de un número consiste en expresarlo como producto de números primos elevados a los exponentes correspondientes

1. Completa esta tabla sobre el procedimiento para factorizar números grandes:

Pasos para la descomposición en factores primos
a) Se escribe el número y, a su derecha, se pone una raya vertical.
b) Si el número termina en ceros, se puede dividir por 10 = 2 · 5. A la derecha de la raya vertical, se pone 2 · 5 elevado, cada uno de ellos, al número de ceros finales que tenga el número.
c) Se sigue dividiendo cada cociente obtenido por el menor número primo, 2, 3, 5,…, que sea divisor, tantas veces como se pueda.
d) Se termina cuando de cociente se obtenga 1.

2. Halla mentalmente la descomposición en factores primos de:

a) 8: 2^3

b) 12: $2^2 \cdot 3$

c) 15: $3 \cdot 5$

d) 25: 5^2

3. Halla la descomposición en factores primos de:

a) 60: $2^2 \cdot 3 \cdot 5$

b) 80: $2^4 \cdot 5$

c) 64: 2^6

d) 72: $2^3 \cdot 3^2$

4. Halla la descomposición en factores primos de:

a) 120: $2^3 \cdot 3 \cdot 5$

b) 840: $2^3 \cdot 3^2 \cdot 5^2$

c) 1800: $2^3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$

d) 2970: $2 \cdot 3^3 \cdot 5 \cdot 11$

Matemáticas 2.º ESO ▮ Unidad 1 ▮ Ficha 3
M.C.D. y m.c.m.

Nombre ______________________ Curso ______ Fecha ____________

El **máximo común divisor** de varios números es el mayor de los divisores comunes a dichos números. Se representa por **M.C.D. (*a, b, c…*).**

El **mínimo común múltiplo** de varios números es el menor de los múltiplos comunes a dichos números, distinto de cero. Se representa por **m.c.m. (*a, b, c…*)**

1. Completa el procedimiento. Para calcular el **M.C.D.** y el **m.c.m.** se hace en primer lugar la factorización de los números y luego:

a) Para hallar el **M.C.D.,** se _multiplican_ los factores _comunes_ con el _menor_ exponente.

b) Para hallar el **m.c.m.** se _multiplican_ todos los factores comunes y _no comunes_ con el _mayor_ exponente.

2. Halla mentalmente

a) M.C.D. (6, 8): _2_

b) M.C.D. (6, 9): _24_

c) m.c.m. (6, 8): _3_

d) m.c.m. (6, 9): _18_

3. Calcula el M.C.D. y el m.c.m. de:

a) (60 y 900): _180 y 1 800_

b) (1100 y 720): _20 y 39 600_

4. Dos barcos salen del puerto de Cádiz. Uno vuelve al puerto cada 18 días y el otro cada 24 días. ¿Cuánto tiempo tiene que pasar para que vuelvan a encontrarse?

m.c.m. (18, 24) = 72 días.

Matemáticas 2.º ESO ▮ Unidad 1 ▮ Ficha 4
Los números enteros

Bruño

Nombre ______________________ Curso ________ Fecha ____________

El **conjunto de los números enteros** está formado por el conjunto de los números naturales N = {0, 1, 2, 3, 4, 5…} y los negativos {– 1, – 2, – 3, – 4, – 5, –6…}

Z = {0, ± 1, ± 2, ± 3, ± 4, ± 5, ±6…}

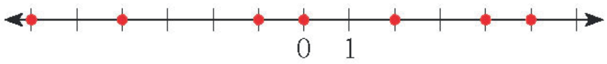
1. Escribe los cinco números enteros positivos más pequeños.

1 2 3 4 5

2. Escribe los cinco números enteros negativos de menor valor absoluto:

–1 –2 –3 –4 –5

3. Halla los números enteros representados en la siguiente recta y ordénalos de menor a mayor:



$-6 < -4 < -1 < 0 < 2 < 4 < 5$

4. Completa la siguiente tabla sobre los operadores relacionales:

Operador	Se lee	Ejemplo	Se lee
=	Igual	$5 = 5$	5 es igual a 5
≠	Distinto	$3 \neq 4$	3 es distinto a 4
<	Menor que	$-2 < 6$	–2 es menor que 6
≤	Menor o igual que	$5 \leq 5$ $2 \leq 6$	5 es menor o igual que 5 2 es menor o igual que 6
>	Mayor que	$7 > 1$	7 es mayor que 1
≥	Mayor o igual que	$5 \geq 5$ $-1 \geq -7$	5 es mayor o igual que 5 –1 es mayor o igual que –7

El **valor absoluto** de un número es el mismo número prescindiendo del signo.

Se representa por $|a|$ y se lee **valor absoluto de *a***

5. Halla el valor absoluto de los siguientes números enteros

a) 5 b) -3 c) – 44 d) 53

a) 5 b) 3 c) 44 d) 53

Matemáticas 2.º ESO | Unidad 1 | Ficha 5
Operaciones con números enteros I

Bruño

Nombre ________________ Curso ______ Fecha ________

El **opuesto de un número** es otro número tal que al sumar ambos, se obtiene cero. Para hallar el opuesto de un número se le cambia el signo.

1. Tacha la opción incorrecta sobre el procedimiento para sumar y restar números enteros.

a) Se suman / ~~restan~~ los números positivos.

b) Se suman / ~~restan~~ los números negativos.

c) Se pone el signo del que tiene mayor / ~~menor~~ valor absoluto.

d) Se ~~suma~~ / resta del número que tiene mayor / ~~menor~~ valor absoluto el que tiene ~~mayor~~ / menor valor absoluto.

2. Realiza las siguientes operaciones:

a) 5 – 3 + 8 – 4 + 9

15

b) – 4 + 1 – 5 + 3 – 8

– 13

3. Aplica la regla de los signos y completa las siguientes tablas:

Multiplicación	
(+) . (+) = +	Más por más igual a más
(-) . (-) = +	Menos por menos igual a más
(+) . (-) = –	Más por menos igual a menos
(-) . (+) = –	Menos por más igual a menos

División	
(+) : (+) = +	Más entre más igual a más
(-) . (-) = +	Menos entre menos igual a más
(+) . (-) = –	Más entre menos igual a menos
(-) . (+) = –	Menos entre más igual a menos

4. Realiza mentalmente las siguientes operaciones:

a) – 8 · 6 = – 48

b) 7 · (– 9) = – 63

c) – 48 : 6= – 8

d) – 72 : (– 9) = 8

e) – 2 · (– 3) · (– 10) · 5 = = – 300

f) – 900 : (– 9) : 2 : (– 5) = – 10

g) 4 · (– 2) · (– 5) · (– 3) = – 120

h) 600 : 10 : (– 3) : (– 5) = 4

Matemáticas 2.º ESO ▮ Unidad 1 ▮ Ficha 6
Operaciones con números enteros II

Nombre ______________________ Curso ________ Fecha __________

La **jerarquía de las operaciones y uso del paréntesis** dice que cuando se tienen distintas operaciones combinadas, se debe seguir este orden:

a) Paréntesis.

b) Multiplicaciones y divisiones.

c) Sumas y restas.

d) Si las operaciones están en el mismo nivel, se comienza por la izquierda.

1. Realiza las siguientes operaciones:

a) $5 \cdot (5 - 9) + 8 \cdot (-9) : 6$

-32

b) $18 : (9 - 7) - 5 \cdot (50 - 53)$

24

El signo de multiplicar es x, o bien un punto, ·, aunque si precede a un paréntesis no es necesario ponerlo.

2. Comprueba la propiedad distributiva en:

a) $-3(4 + 9)$

b) $5(-4 - 7)$

a) $-3(4 + 9) = -3 ? 13 = -39$

$-3 \cdot 4 - 3 \cdot 9 = -12 - 27 = -39$

Ambos miembros dan -39

b) $5(-4 - 7) = 5 \cdot (-11) = -55$

$5(-4) + 5(-7) = -20 - 35 = -55$

Ambos miembros dan -55

3. Halla mentalmente todos los divisores enteros de:

a) 4: $\{\pm 1, \pm 2, \pm 4\}$

b) -7: $\{\pm 1, \pm 7\}$

c) -8: $\{\pm 1, \pm 2, \pm 4, \pm 8\}$

d) 12: $\{\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 6, \pm 12\}$

4. Halla todos los múltiplos enteros de:

a) 2: $M(2) = \{0, \pm 2, \pm 4, \pm 6, \pm 8, \dots\}$

b) -3: $M(-3) = \{0, \pm 3, \pm 6, \pm 9, \pm 12, \dots\}$

c) -4: $M(-4) = \{0, \pm 4, \pm 8, \pm 12, \pm 16, \dots\}$

d) 5: $M(5) = \{0, \pm 5, \pm 10, \pm 15, \pm 20, \dots\}$

Nombre ______________________ Curso ______ Fecha ________

1. Copia y completa con múltiplo o divisor:

a) 8 es <u>múltiplo</u> de 4

b) 7 es <u>divisor</u> de 49

c) 5 es <u>divisor</u> de 35

d) 72 es <u>múltiplo</u> de 9

2. Halla la descomposición en factores primos de:

a) 144: $2^4 \cdot 3^2$

b) 150: $2 \cdot 3 \cdot 5^2$

c) 300: $2^2 \cdot 3 \cdot 5^2$

d) 588: $2^2 \cdot 3 \cdot 7$

3. Calcula el M.C.D. y el m.c.m. de:

a) 124 y 360

b) 600 y 1 176

a) 4 y 11 160

b) 24 y 29 400

4. ¿Con qué número entero representarías la siguiente situación? Estamos en la planta 3.ª del sótano de un aparcamiento:

–3

5. Halla mentalmente todos los divisores enteros de:

a) – 5 b) 6 c) – 9 d) 18

a) D (– 5) = {± 1, ± 5}

b) D (6) = {± 1, ± 2, ± 3, ± 6}

c) D (– 9) = {± 1, ± 3, ± 9}

d) D (18) = {± 1, ± 2, ± 3, ± 6, ± 9, ± 18}

6. Un avión vuela a 11 000 m, y un submarino está a – 850 m. ¿Cuál es la diferencia de alturas entre ambos?

11 000 – (– 850) = 11 000 + 850 = 11 850 m

OBJETIVOS

a. Sumar y restar fracciones con el mismo denominador y con distinto denominador.
b. Identificar la fracción opuesta de una fracción dada.
c. Multiplicar fracciones.
d. Identificar la fracción inversa de una fracción dada.
e. Dividir fracciones.
f. Realizar operaciones combinadas con fracciones.
g. Manejar con soltura los algoritmos de la suma, resta, multiplicación y división de números decimales.
h. Clasificar la expresión decimal de una fracción como decimal exacto o periódico (puro o mixto).
i. Operar con corrección y utilizando la jerarquía de las operaciones y el uso del paréntesis en operaciones con fracciones y decimales.
j. Identificar fracción decimal y fracción ordinaria.
k. Expresar un número decimal exacto o periódico en forma de fracción.
l. Conocer los números irracionales como aquellos que tienen infinitas cifras decimales que no son periódicas.
m. Resolver problemas aritméticos con fracciones y números decimales y escoger adecuadamente el método más conveniente para la realización de los cálculos.

COMPETENCIAS BÁSICAS

Competencia para aprender a aprender

- Resolver problemas de fracciones y números decimales.

Autonomía e iniciativa personal

- Poner en práctica modelos sobre el uso de fracciones, números decimales y de resolución de problemas.

CONTENIDOS

Conceptos

- Fracción. Fracción opuesta. Fracción inversa.
- Suma, resta, multiplicación y división de fracciones.
- Suma, resta, multiplicación y división de números decimales.
- Fracción decimal y fracción ordinaria.
- Estimación. Redondeo.
- Número decimal exacto.
- Número decimal periódico puro y mixto.
- Período de un número decimal.
- Fracción generatriz.
- Número racional

Procedimientos

- Utilización de los algoritmos tradicionales de suma, resta, multiplicación y división con fracciones.
- Utilización de los algoritmos tradicionales de suma, resta, multiplicación y división con números decimales.
- Utilización de la jerarquía y propiedades de las operaciones y de las reglas de uso de los paréntesis en cálculos escritos con fracciones y números decimales.
- Utilización de diversas estrategias para estimar cantidades, teniendo en cuenta la precisión requerida.
- Expresión de números decimales exactos o periódicos como fracción.

Actitudes

- Incorporación al lenguaje habitual de la terminología de las fracciones y de los decimales.

CRITERIOS DE EVALUACIÓN

a.1. Suma y resta de fracciones con el mismo denominador y con distinto denominador..
b.1. Identifica la fracción opuesta de una fracción dada.
c.1. Multiplica fracciones.
d.1. Identifica la fracción inversa de una fracción dada.
e.1. Divide fracciones.
f.1. Realiza operaciones combinadas con fracciones.
g.1. Maneja con soltura los algoritmos de la suma, resta, multiplicación y división de números decimales.
h.1. Clasifica la expresión decimal de una fracción como decimal exacto o periódico (puro o mixto).
i.1. Opera con corrección y utilizando la jerarquía de las operaciones y el uso del paréntesis en operaciones con fracciones y decimales.
j.1. Identifica una fracción decimal y una fracción ordinaria y la expresa como un número decimal clasificándolo en exacto, periódico puro o periódico mixto.
k.1. Expresa un número decimal exacto o periódico como una fracción.
l.1 Conoce los números irracionales como aquellos que tienen infinitas cifras decimales que no son periódicas.
m.1. Resuelve problemas aritméticos con fracciones y decimales eligiendo la forma de cálculo apropiada.

Operaciones con fracciones I

Nombre ______________________ Curso ________ Fecha ____________

La suma y resta de fracciones con igual denominador es otra fracción que tiene por:

- **Numerador:** la suma o resta de los numeradores.
- **Denominador:** el mismo que el de las fracciones.

1. Calcula mentalmente:

a) $= \frac{2}{7} + \frac{3}{7} + \frac{1}{7} = \frac{6}{7}$

b) $= \frac{3}{13} + \frac{4}{13} + \frac{5}{13} = \frac{12}{13}$

La **suma y resta de fracciones con distinto denominador** es otra fracción que tiene por:

Numerador: la suma o resta que se obtiene al dividir el m.c.m. de los denominadores entre cada denominador y multiplicar por el numerador correspondiente.

Denominador: el m.c.m. de los denominadores.

2. Calcula:

a) $= \frac{2}{3} + \frac{5}{6} = \frac{3}{2}$

b) $= \frac{4}{5} + \frac{3}{10} = \frac{11}{10}$

Cuando se realizan operaciones de fracciones con **números enteros,** se considera que los números enteros son fracciones con **denominador 1.**

c) $= \frac{7}{6} - \frac{3}{8} = \frac{19}{24}$

d) $= \frac{7}{10} + \frac{2}{15} = \frac{17}{30}$

3. Realiza mentalmente las siguientes operaciones:

a) $1 + \frac{3}{4} = \frac{7}{4}$

b) $2 - \frac{3}{5} = \frac{7}{5}$

c) $2 + \frac{3}{7} = \frac{17}{7}$

d) $1 - \frac{7}{10} = \frac{3}{10}$

La **fracción opuesta** de una fracción es la que se obtiene al cambiarle el signo.

La **fracción inversa** de una fracción es la que se obtiene al cambiar el numerador por el denominador dejando el mismo signo.

4. Halla las fracciones opuestas y las fracciones inversas de:

a) $\frac{2}{3}$

b) $-\frac{4}{5}$

c) $\frac{1}{2}$

d) $-\frac{1}{3}$

Fracciones opuestas: $-\frac{2}{3}$, $\frac{4}{5}$, $-\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$

Fracciones inversas: $-\frac{3}{2}$, $-\frac{5}{4}$, 2, –3

Matemáticas 2.º ESO ▮ Unidad 2 ▮ Ficha 2
Operaciones con fracciones II

Nombre ______________________ Curso ________ Fecha ________

El **producto de dos fracciones** es otra fracción que tiene por:
- **Numerador:** el producto de los numeradores.
- **Denominador:** el producto de los denominadores.

1. Realiza las siguientes operaciones:

a) $\frac{4}{9} \cdot \frac{9}{7} = \frac{4}{7}$

b) $\frac{2}{3} \cdot \frac{9}{5} = \frac{6}{5}$

c) $\frac{8}{11} \cdot \frac{3}{4} = \frac{6}{11}$

d) $\frac{7}{2} \cdot \frac{3}{14} = \frac{3}{4}$

Para **dividir dos fracciones,** se multiplica la primera por la inversa de la segunda.

2. Se quieren envasar 600 L de alcohol en botellas de 3/4 de litro. ¿Cuántas se necesitarán?

Número de botellas

$600 : \frac{3}{4} = 600 \cdot \frac{4}{3} = \frac{2\,400}{3} = 800$ botellas

3. Indica el orden del 1 al 4 que deben seguir las operaciones cuando están combinadas (según la jerarquía de las operaciones y el uso de los paréntesis):

Jerarquía de operaciones y paréntesis	Ejemplo	Orden
Multiplicaciones y divisiones	$\frac{2}{5} \cdot \left(4 - \frac{7}{3}\right) + \frac{5}{6}$	2
Paréntesis		1
Sumas y restas		3
Si las operaciones están en el mismo nivel, se comienza por la izquierda.		4

4. Realiza las siguientes operaciones:

a) $\frac{5}{6} - \left(\frac{1}{2} - \frac{2}{3}\right) = 1$

b) $2 - \frac{3}{7} - \frac{2}{5} = \frac{69}{35}$

c) $3 - \frac{2}{3} - \left(\frac{3}{9} - \frac{5}{3}\right) = \frac{34}{9}$

d) $\frac{2}{3} - \frac{5}{2} - \frac{4}{15} + 2 = \frac{13}{30}$

Operaciones con números decimales I

Nombre ______________________ Curso ______ Fecha ________

Para **sumar y restar números decimales:**

1. Se colocan los números unos debajo de otros, de forma que coincidan las unidades del mismo orden y la coma decimal.

2. Se suman o restan como si fueran números naturales.

3. En el resultado se pone la coma debajo de las comas.

1. Realiza las siguientes sumas:

a) 14,75 + 61,57 + 9,467 = 85,787

b) 3,18 + 0,56 + 28,365 = 32,105

c) 2,89 + 123,5 + 0,03 = 126,42

d) 21,54 + 100,78 + 2,123 = 124,443

2. En un depósito que tiene 457,85 hL, se vierten 89,54 hL y se desaguan 12,3 hL. ¿Cuántos hectolitros quedan en el depósito?

457,85 + 89,54 – 12,3 = 535,09 hL

Para **multiplicar números decimales:**

1. Se colocan los números uno debajo de otro.

2. Se multiplican como si fueran números naturales.

3. En el resultado se separa con una coma, desde la derecha, un número de cifras decimales igual a la suma de las que tienen los dos factores.

3. En un almacén han comprado 254,5 kg de lenguado a 5,79 €/kg. ¿Cuánto se ha pagado?

254,5 · 5,79 = 1 473,56 €

4. Realiza mentalmente las siguientes multiplicaciones:

a) 7,45 · 100 = 745

b) 20,142 · 1 000 = 20 142

c) 75,6 · 0,01 = 0,756

d) 14,8 · 0,001 = 0,0148

Operaciones con números decimales II

Nombre ______________________ Curso ________ Fecha ____________

Para dividir con **decimales solo en el dividendo:**

a) Se comienza a dividir como si fueran números naturales.

b) Al llegar a la coma en el dividendo, se coloca la coma en el cociente.

c) Se sigue haciendo la división.

1. Haz las siguientes divisiones obteniendo dos decimales:

a) 95,87 : 8 = 11,98

b) 826,24 : 62 = 8,73

c) 78,59 : 9 = 13,32

d) 872,38 : 96 = 9,08

Para dividir con **decimales en el divisor:**

a) Quitamos la coma del divisor

b) Añadimos al dividendo tantos ceros como cifras decimales tiene el divisor.

c) A continuación dividimos como si fueran números enteros.

2. Se dispone de 450 kg de mandarinas y se quieren envasar en bolsas de 7,5 kg. ¿Cuántas bolsas se necesitarán?

450 : 7,5 = 60 bolsas.

3. Se han comprado 1,7 kg de pollo que han costado 3,57 €. ¿Cuánto cuesta el kilo?

3,57 : 1,7 = 2,1 €/kg

• Para **dividir** un **número por la unidad seguida de ceros,** se desplaza la coma hacia la izquierda tantos lugares como ceros acompañen a la unidad.

• Para **dividir** un **número por la unidad decimal,** se desplaza la coma hacia la derecha tantos lugares como ceros tenga el divisor.

4. Divide los siguientes números:

a) 143,7 : 100 = 1,437

c) 8,276 : 0,01 = 827,6

b) 34,18 : 1000 = 0,03418

d) 4,9 : 0,001 = 4900

Fracciones y números decimales

Bruño

Nombre ______________________ Curso ________ Fecha ____________

Toda fracción se puede expresar como un número decimal. Para pasar de fracción a decimal, se realiza **la división** decimal **del numerador entre el denominador.**

1. Calcula mentalmente la expresión decimal de las siguientes fracciones:

a) $\frac{2}{3}$ = 1,5 b) $\frac{1}{5}$ = 0,2 c) $\frac{1}{4}$ = 0,25 d) $\frac{3}{4}$ = 0,75

2. Halla las expresiones decimales de las siguientes fracciones:

a) $\frac{13}{6}$ = 2,16 b) $\frac{72}{9}$ = 8 c) $\frac{41}{9}$ = 4,5 d) $\frac{56}{45}$ = 1,24

Aproximar un número decimal es sustituirlo por otro muy cercano pero con menos cifras significativas. La aproximación puede ser:

a) **Por defecto:** si el número que se toma es menor que el número inicial.

b) **Por exceso:** si el número que se toma es mayor que el número inicial.

Redondear un número es aproximarlo, de forma que si la primera cifra que se suprime es:

a) 0, 1, 2, 3 o 4, la cifra redondeada no varía.

b) 5, 6, 7, 8 o 9, la cifra redondeada aumenta en uno.

3. Redondea a dos cifras decimales los siguientes números y di si la aproximación es por defecto o por exceso:

a) 3,4272 = 3,43 Por defecto / Por exceso Por exceso

b) 0,3629 = 0.36 Por defecto / Por exceso Por defecto

c) 1,2071 = 1,21 Por defecto / Por exceso Por exceso

d) 2,0982 = 2,10 Por defecto / Por exceso Por exceso

Para estimar el resultado de una operación con decimales, se redondean los números a las unidades y se opera.

4. Haz una estimación de las siguientes operaciones:

a) 32,8 · 10,2 = 33 · 10 = 330

b) 240,3 : 1,9 = 240 : 2 = 120

Matemáticas 2.º ESO ▮ Unidad 2 ▮ Ficha 6
Fracción generatriz

Bruño

Nombre ______________________ Curso ________ Fecha ________

Los **números racionales** son los que se pueden expresar en forma de fracción.

1. Expresa mentalmente en forma de fracción los siguientes números decimales:

a) 0,5 b) 0,75 c) 0,2

a) $\frac{1}{2}$ b) $\frac{3}{4}$ c) $\frac{1}{5}$

2. Expresa en forma de fracción los siguientes números decimales:

a) 7,4 b) 0,52 c) 1,324

a) $\frac{37}{5}$ b) $\frac{13}{25}$ c) $\frac{331}{250}$

3. Indica cuáles de los siguientes números son racionales:

a) 3 Racional b) 3/4 Racional c) $\sqrt{2}$ d) $\frac{2}{3}$ Racional

La **fracción generatriz** de un número decimal exacto o periódico es una fracción irreducible en la que al realizar la **división del numerador entre el denominador,** se obtiene como cociente el número decimal dado. La fracción generatriz tiene por:

- **Numerador:** el número decimal sin la coma.
- **Denominador:** la unidad seguida de tantos ceros como cifras decimales tenga el número.

4. Escribe la fracción generatriz del número 4,25.

$$4{,}25 = \frac{425}{100} = \frac{425:25}{100:25} = \frac{17}{4}$$

5. Pon los siguientes números decimales en el lugar que les corresponda del esquema:

a) 6,25 b) $\sqrt{2}$ c) $7{,}\overset{\frown}{3}$ d) 7 e) $5{,}8\overset{\frown}{47}$

Números decimales
- Racionales
  - Enteros: 7
  - Decimales exactos: 6,25
  - Decimales periódicos
    - Puros: $7{,}\overset{\frown}{3}$
    - Mixtos: $5{,}8\overset{\frown}{47}$
- Irracionales
  - Decimales con infinitas cifras decimales no periódicas: $\sqrt{2} = 1{,}414213...$

Nombre ______________________ Curso ________ Fecha ________

1. Calcula mentalmente:

a) $= \frac{18}{53} + \frac{32}{53} + \frac{1}{53} - \frac{16}{53} = \frac{33}{53}$

b) $= \frac{4}{11} - \frac{3}{11} + \frac{2}{11} - \frac{7}{11} = \frac{4}{11}$

2. Calcula mentalmente:

a) $\frac{1}{2} + 1 = \frac{3}{2}$ b) $2 - \frac{1}{3} = \frac{5}{3}$ c) $2 \cdot \frac{3}{5} = \frac{6}{5}$

3. Calcula mentalmente:

a) $\frac{2}{5} \cdot 4 \cdot \frac{1}{3} = \frac{8}{15}$

b) $\frac{3}{2} \cdot \frac{5}{6} \cdot 3 = \frac{15}{4}$

c) $5 \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{2}{7} = \frac{5}{14}$

d) $\frac{3}{8} \cdot 2 \cdot \frac{4}{5} = \frac{3}{5}$

4. Haz las siguientes restas:

a) 234,18 – 40,325 = 193,855

b) 245,8 – 75,54 = 170,26

c) 358,56 – 69,302 = 289,258

d) 125,4 – 75,125 = 50,275

5. Redondea a dos cifras decimales los siguientes números y di si la aproximación es por defecto o por exceso:

a) 0,4752 = 0,48 por exceso

b) 5,7236 = 5,72 por defecto

c) 72,995 = 73 por exceso

d) 3,0274 = 3,03 por exceso

e) 8,4062 = 8,41 por exceso

f) 5,2997 = 5,30 por exceso

6. Haz una estimación de las siguientes operaciones:

a) 139,8 · 9,5 = 140 · 100 = 1400

b) 360,4 : 89,7 = 360 : 90 = 4

OBJETIVOS

- **a.** Identificar la potencia como una multiplicación de factores iguales.
- **b.** Conocer y usar las propiedades de las potencias.
- **c.** Utilizar la notación científica.
- **d.** Conocer y utilizar las potencias de exponente negativo.
- **e.** Reconocer la raíz cuadrada como operación inversa de elevar al cuadrado.
- **f.** Reconocer y utilizar raíces enteras por defecto y por exceso y exactas.
- **g.** Conocer y utilizar las propiedades de la raíz cuadrada.
- **h.** Extraer factores de una raíz cuadrada.
- **i.** Conocer y usar el algoritmo para calcular la raíz cuadrada con decimales.
- **j.** Reconocer la raíz cúbica como operación inversa de elevar al cubo.
- **k.** Reconocer y utilizar raíces cúbicas enteras por defecto y por exceso y exactas.
- **l.** Conocer y utilizar las propiedades de la raíz cúbica.
- **m.** Extraer factores de una raíz cúbica.
- **n.** Manejar con soltura la jerarquía de las operaciones en operaciones combinadas con potencias y raíces.

COMPETENCIAS BÁSICAS

Tratamiento de la información y competencia digital

- Usar con soltura asistentes matemáticos para trabajar y presentar un trabajo sobre potencias y raíces.

Competencia para aprender a aprender

- Resolver problemas aritméticos con potencias y raíces aplicando una estrategia conveniente escogiendo adecuadamente el método más conveniente para la realización de un determinado cálculo: mentalmente, por escrito, con calculadora o con ordenador.

Autonomía e iniciativa personal

- Adaptarse a usar distintas técnicas, instrumentos y métodos para el aprendizaje de las potencias y raíces.

CONTENIDOS

Conceptos

- Potencia de base entera y exponente natural.
- Potencia de base entera y exponente negativo.
- Cuadrado y cubo perfecto.
- Producto de potencias de la misma base.
- Cociente de potencias de la misma base.
- Potencia de un producto.
- Potencia de un cociente.
- Raíz cuadrada. Radicando, índice y raíz.
- Raíz cuadrada entera, por defecto y por exceso y exacta.
- Raíz cúbica. Raíz cúbica entera, por defecto y por exceso y exacta.

Procedimientos

- Interpretación y utilización de las potencias de base entera y exponente natural.
- Interpretación y utilización de la potencia de base entera y exponente negativo.
- Obtención de cuadrados y cubos perfectos.
- Utilización de las propiedades de las potencias.
- Utilización de la jerarquía y propiedades de las operaciones y de las reglas de uso de los paréntesis en cálculos escritos.

Actitudes

- Valoración de la utilidad de las potencias y las raíces para representar, comunicar o resolver diferentes situaciones de la vida cotidiana.
- Confianza en las propias capacidades para afrontar problemas y realizar cálculos.

CRITERIOS DE EVALUACIÓN

- **a.1.** Identifica y calcula la potencia como una multiplicación de factores iguales.
- **b.1.** Conoce y aplica las propiedades de las potencias.
- **c.1.** Utiliza la notación científica.
- **d.1.** Conoce y utiliza las potencias de exponente negativo.
- **e.1.** Reconoce la raíz cuadrada como operación inversa de elevar al cuadrado.
- **f.1.** Reconoce y utiliza raíces enteras por defecto y por exceso y exactas.
- **g.1.** Conoce y utiliza las propiedades de la raíz cuadrada.
- **h.1.** Extrae factores de una raíz cuadrada.
- **i.1.** Conoce y usar el algoritmo para calcular la raíz cuadrada con decimales.
- **j.1.** Reconoce la raíz cúbica como operación inversa de elevar al cubo.
- **k.1.** Reconoce y utiliza raíces cúbicas enteras por defecto y por exceso y exactas.
- **l.1.** Conoce y utiliza las propiedades de la raíz cúbica.
- **m.1.** Extrae factores de una raíz cúbica.
- **n.1** Maneja con soltura la jerarquía de las operaciones en operaciones combinadas con potencias y raíces.

Matemáticas 2.º ESO ▮ Unidad 3 ▮ Ficha 1
Potencias de exponente entero I

Bruño

Nombre ______________________ Curso ________ Fecha ________

Una potencia es un producto de factores iguales.

Exponente: n

Base: a $\qquad an = \overbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}^{n}$

La **base**, a, es el factor que se repite, y el **exponente**, n, es el número de veces que se repite.

1. Completa con la palabra múltiplo o divisor:

Propiedades		Ejemplo	Prueba del ejemplo
$a^n \cdot a^p = a^{n+p}$	El **producto** de dos potencias que tienen la misma base es otra potencia de la misma base y de exponente la suma de los exponentes.	$7^2 \cdot 7^3 = 7^5$	$7^2 \cdot 7^3 = \overbrace{7 \cdot 7}^{2} \cdot \overbrace{7 \cdot 7 \cdot 7}^{3} = 7^5$
$\dfrac{a^n}{a^p} = a^{n-p}$	El **cociente** de dos potencias que tienen la misma base es otra potencia de la misma base y de exponente la diferencia de los exponentes.	$\dfrac{6^5}{6^3} = 6^2$	$\dfrac{6^5}{6^3} = \dfrac{\cancel{6} \cdot \cancel{6} \cdot \cancel{6} \cdot 6 \cdot 6}{\cancel{6} \cdot \cancel{6} \cdot \cancel{6}} = 6 \cdot 6 = 6^2$
$(a^n)^p = a^{n \cdot p}$	Una potencia **elevada** a otra potencia es una nueva potencia de la misma base y de exponente el producto de los exponentes.	$(5^2)^3 = 5^6$	$(5^2)^3 = 5^2 \cdot 5^2 \cdot 5^2 = \overbrace{5 \cdot 5}^{2} \cdot \overbrace{5 \cdot 5}^{2} \cdot \overbrace{5 \cdot 5}^{2} = 5^6$
$(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$	La **potencia de un producto** es igual al producto de cada uno de los factores elevado al mismo exponente.	$(3 \cdot 5)^2 = 3^2 \cdot 5^2$	$(3 \cdot 5)^2 = 3 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 5 = 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 = 3^2 \cdot 5^2$
$\left(\dfrac{a}{b}\right)^n = \dfrac{a^n}{b^n}$	La **potencia de un cociente** es igual al cociente de cada uno de los números elevado al mismo exponente.	$\left(\dfrac{2}{5}\right)^3 = \dfrac{2^3}{5^3}$	$\left(\dfrac{2}{5}\right)^3 = \dfrac{2}{5} \cdot \dfrac{2}{5} \cdot \dfrac{2}{5} = \dfrac{2 \cdot 2 \cdot 2}{5 \cdot 5 \cdot 5} = \dfrac{2^3}{5^3}$
$a^0 = 1,\ a \neq 0$	Todo número distinto de cero elevado a cero es igual a uno.	$2^0 = 1$	$2^0 = 2^{3-3} = \dfrac{2^3}{2^3} = 1$
$a^1 = a$	Todo número elevado a uno es igual a dicho número.	$5^1 = 5$	$5^1 = 5^{3-2} = \dfrac{5^3}{5^2} = \dfrac{\cancel{5} \cdot \cancel{5} \cdot 5}{\cancel{5} \cdot \cancel{5}} = 5$

2. Escribe en forma de potencia:

a) $7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 = 7^6$

b) $-3 \cdot (-3) \cdot (-3) \cdot (-3) \cdot (-3) = (-3)^5$

3. Calcula mentalmente las siguientes potencias:

a) $2^0 = 1$ b) $2^1 = 2$ c) $2^2 = 4$ d) $2^3 = 8$ e) $2^4 = 16$ f) $2^5 = 32$

4. Calcula mentalmente las siguientes potencias:

a) $10^0 = 1$ b) $10^1 = 10$ c) $10^2 = 100$ d) $10^3 = 1\,000$ e) $10^4 = 10\,000$ f) $10^5 = 100\,000$

5. Escribe el resultado en forma de una sola potencia aplicando las propiedades de las potencias:

a) $5^3 \cdot 5^4 = 5^7$ b) $5^9 : 5^3 = 5^6$ c) $(5^3)^2 = 5^6$

d) $5^3 \cdot 7^3 = 35^3$ e) $5^4 : 7^4 = (5 : 7)^4$ f) $5^8 \cdot 5^3 : 5^9 = 5^2$

Potencias de exponente entero II

Bruño

Nombre ______________ Curso ______ Fecha ______

Potencias de base negativa

a) Si la base es negativa y el exponente es par, el resultado es positivo.

b) Si la base es negativa y el exponente es impar, el resultado es negativo.

1. Calcula mentalmente las siguientes potencias:

a) $(-3)^0 = 1$ b) $(-3)^1 = -3$ c) $(-3)^2 = 9$

d) $(-3)^3 = -27$ e) $(-3)^4 = 81$

2. Calcula mentalmente las siguientes potencias:

a) $(-10)^0 = 1$ b) $(-10)^1 = -10$ c) $(-10)^2 = 100$

d) $(-10)^3 = -1\,000$ e) $(-10)^4 = 10\,000$ f) $(-10)^5 = 100\,000$

3. Calcula mentalmente las siguientes potencias:

a) $(-2)^0 = 1$ b) $(-2)^1 = -2$ c) $(-2)^2 = 4$

d) $(-2)^3 = -8$ e) $(-2)^4 = 16$ f) $(-2)^5 = -32$

Potencias de exponente negativo

Si una potencia tiene el exponente negativo, esta es equivalente a una fracción que tiene 1 en el numerador, y en el denominador, la misma potencia, pero con exponente positivo.

4. Escribe en forma de potencia de base entera positiva los siguientes números:

a) $\frac{1}{5^3}$ b) $\frac{1}{16}$ c) $\frac{1}{3^2}$ d) $\frac{1}{81}$

a) 5^{-3} b) 2^{-4} c) 3^{-2} d) 3^{-4}

5. Completa esta tabla con los ejemplos que faltan sobre errores habituales en las operaciones con potencias.

Propiedades	Ejemplo	
a) No debe confundirse potencia con producto: a^n no es igual que $a \cdot n$	$5^3 = 5 \cdot 5 \cdot 5 = 125$	$5 \cdot 3 = 15$
b) No debe confundirse $(-a)^n$ con $-a^n$: Si n es impar, son iguales; y si n es par, es igual a a^n	$(-2)^5 = -32$ $(-2)^4 = 2^4 = 16$	$-2^5 = -32$ $-2^4 = -16$
c) $(a + b)^n$ no es igual que $a^n + b^n$	$(3 + 5)^2 = 8^2 = 64$	$3^2 + 5^2 = 9 + 25 = 34$
d) $(a - b)^n$ no es igual que $a^n - b^n$	$(8 - 3)^2 = 5^2 = 25$	$8^2 - 3^2 = 64 - 9 = 55$

Matemáticas 2.º ESO | Unidad 3 | Ficha 3
Raíz cuadrada I

Nombre ______________________________ Curso ________ Fecha ____________

La **raíz cuadrada** de un número ***a*** es otro número ***b***, tal que ***b*** elevado al cuadrado es ***a***; es decir, la raíz cuadrada es la operación inversa de elevar al cuadrado.

$$\sqrt{a} = b \qquad \text{si} \qquad b^2 = a$$

1. Calcula mentalmente la raíz cuadrada de los siguientes números:

a) 0: 0

b) 49: ± 7

c) 1: ± 1

d) 100: ± 10

Elementos de la **raíz cuadrada**

$$\sqrt{a} = b$$

$\sqrt{}$	Signo radical
a	Radicando
b	Raíz

2. Escribe los 5 primeros cuadrados perfectos.

0, 1, 4, 9 y 16

3. Escribe los 5 primeros cuadrados perfectos mayores que 30.

36, 49, 64, 81 y 100

Una **raíz cuadrada** es **entera** cuando el radicando no es un cuadrado perfecto. En estos casos se puede hallar entre qué dos números enteros positivos se encuentra la raíz cuadrada. El menor de ellos se llama **raíz cuadrada por defecto**, y el mayor, **raíz cuadrada por exceso**.

4. Calcula mentalmente la raíz entera por defecto de los siguientes números:

a) 15: 3

b) 34: 5

c) 57: 7

d) 85: 9

5. Calcula mentalmente la raíz entera por exceso de los siguientes números:

a) 23: 5

b) 44: 7

c) 62: 8

d) 93: 10

Raíz cuadrada II

Bruño

Nombre ______________________ Curso ________ Fecha ____________

Propiedades de la raíz cuadrada

Propiedades		Ejemplo
$\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{a \cdot b}$	El **producto** de dos raíces cuadradas es igual a la raíz del producto.	$\sqrt{12} \cdot \sqrt{3} = \sqrt{36} = \pm 6$
$\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\dfrac{a}{b}}$	El **cociente** de dos raíces cuadradas es igual a la raíz del cociente.	$\dfrac{\sqrt{12}}{\sqrt{3}} = \sqrt{\dfrac{12}{3}} = \sqrt{4} = \pm 2$

1. Aplicando las propiedades de la raíz cuadrada, calcula:

a) $\sqrt{2} \cdot \sqrt{8}$ b) $\sqrt{8} : \sqrt{2}$ a) ± 4 b) ± 2

2. Aplicando las propiedades de la raíz cuadrada, calcula:

a) $\sqrt{3} \cdot \sqrt{12}$ b) $\sqrt{72} : \sqrt{8}$ a) ± 6 b) ± 3

Para **extraer** un **factor de una raíz cuadrada**, se descompone el radicando como producto del mayor cuadrado perfecto posible y otro número. Se extrae como factor la raíz cuadrada del cuadrado perfecto.

3. Extrae del radical el mayor número que puedas:

a) $\sqrt{20}$ b) $\sqrt{75}$ c) $\sqrt{98}$ a) $2\sqrt{5}$ b) $5\sqrt{3}$ c) $7\sqrt{2}$

4. Tacha la opción incorrecta :

Teoría	Ejemplo	
a) $\sqrt{a+b}$ ~~es igual~~/no es igual que $\sqrt{a} + \sqrt{b}$	$\sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5$	$\sqrt{9} + \sqrt{16} = 3 + 4 = 7$
b) $\sqrt{a-b}$ ~~es igual~~/no es igual que $\sqrt{a} - \sqrt{b}$	$\sqrt{25-9} = \sqrt{16} = 4$	$\sqrt{25} - \sqrt{9} = 5 - 3 = 2$

5. Sustituye cada uno de los recuadros por el signo = o ≠ en las siguientes expresiones:

a) $\sqrt{36+64} \,\square\, \sqrt{36} + \sqrt{64}$ b) $\sqrt{169-25} \,\square\, \sqrt{144}$

a) ≠ b) =

6. Una finca tiene forma cuadrada y su área mide 81 m^2. ¿Cuánto mide cada uno de sus lados?

Cada lado = 9 m

Raíz cuadrada con decimales

Nombre ______________________ Curso ________ Fecha ____________

En una raíz cuadrada el resto tiene que ser menor o igual que el doble de la raíz.

La **prueba de la raíz cuadrada** dice:

$$\text{Radicando} = (\text{Raíz})^2 + \text{Resto}$$

1. Halla las siguientes raíces cuadradas con un decimal y haz la comprobación:

a) $\sqrt{237{,}5}$ 15,4 y resto: 0,34. Comprobación: $15{,}4^2 + 0{,}34 = 237{,}5$

b) $\sqrt{5\,816{,}34}$ 76,2 y resto: 9,9. Comprobación: $76{,}2^2 + 9{,}9 = 5\,816{,}34$

La jerarquía de las operaciones y uso del paréntesis dice que cuando se tienen distintas operaciones combinadas se debe seguir el orden:

a) Paréntesis.

b) Potencias y raíces.

c) Multiplicaciones y divisiones.

d) Sumas y restas.

e) Si las operaciones tienen el mismo nivel, se comienza por la izquierda.

2. Halla las siguientes raíces cuadradas con dos decimales y haz la comprobación:

a) $\sqrt{654{,}7}$ 25,58 y resto: 0,3636. Comprobación: $25{,}58^2 + 0{,}3636 = 654{,}7$

b) $\sqrt{1\,805{,}31}$ 42,48 y resto: 0,7596. Comprobación: $42{,}48^2 + 0{,}7596 = 1\,805{,}31$

3. Halla la raíz cuadrada con un decimal de los siguientes números enteros y haz la comprobación:

a) 83: 9,1 y resto: 0,19. Comprobación: $9{,}1^2 + 0{,}19 = 83$

b) 574: 23,9 y resto: 2,79. Comprobación: 23,92 + 2,79 = 574

4. Halla la raíz cuadrada con dos decimales de los siguientes números enteros y haz la comprobación:

a) 845: 29,06 y resto: 0,5164. Comprobación: $29{,}06^2 + 0{,}5164 = 845$

b) 5 874: 76,64 y resto: 0,3104. Comprobación: $76{,}64^2 + 0{,}3104 = 5\,874$

5. Realiza las siguientes operaciones aplicando la jerarquía:

a) $(9^2 + 23 - 7^2) \cdot \sqrt{64}$ a) 440

b) $(10^2 - \sqrt{81} + 5^3) : \sqrt{36}$ b) 36

Raíz cúbica

Nombre ______________________ Curso ________ Fecha ________

La **raíz cúbica** de un número *a* es otro número *b*, tal que *b* elevado al cubo es *a*; es decir, es la operación inversa de elevar al cubo.

$$\sqrt[3]{a} \cdot = b \qquad \text{si} \qquad b^3 = a$$

1. Calcula mentalmente la raíz cúbica de los siguientes números:

a) 0: 0 b) 1: 1 c) – 27: – 3 d) 125: 5

2. ¿Cuántas raíces cúbicas tienen los siguientes números?

a) – 8: una b) 1: una c) 0: una d) 1 000: una

La interpretación geométrica de la raíz cúbica de un número consiste en hallar la arista de un cubo, conocido el volumen.

3. Un envase de zumo tiene forma cúbica, y su capacidad es de 216 cm^3. ¿Cuánto mide la arista?:

Arista: $\sqrt[3]{216} = 6$ cm

Una raíz cúbica es entera cuando el radicando no es un cubo perfecto. En estos casos se puede hallar entre qué dos números enteros se encuentra la raíz cúbica. El menor de ellos se llama raíz cúbica por defecto, y el mayor, raíz cúbica por exceso.

4. Calcula mentalmente la raíz cúbica entera por defecto de los siguientes números:

a) 5: 1 b) 37: 3 c) 84: 4 d) 101: 4

Propiedades de la raíz cúbica

Propiedades		Ejemplo
$\sqrt[3]{a} \cdot \sqrt[3]{b} = \sqrt[3]{a \cdot b}$	El **producto** de dos raíces cúbicas es igual a la raíz cúbica del producto.	$\sqrt[3]{25} \cdot \sqrt[3]{5} = \sqrt[3]{25 \cdot 5} = \sqrt[3]{125} = 5$
$\dfrac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{b}} = \sqrt[3]{\dfrac{a}{b}}$	El **cociente** de dos raíces cúbicas es igual a la raíz cúbica del cociente.	$\dfrac{\sqrt[3]{24}}{\sqrt[3]{3}} = \sqrt[3]{\dfrac{24}{3}} = \sqrt[3]{8} = 2$

5. Aplicando las propiedades de la raíz cúbica, calcula:

a) $\sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[3]{4} = 2$ b) $\sqrt[3]{81} : \sqrt[3]{3} = 3$

Para **extraer un factor de una raíz cúbica**, se descompone el radicando como producto del mayor cubo perfecto posible y otro número. Se extrae como factor la raíz cúbica del cubo perfecto.

6. Extrae fuera del radical el número mayor que puedas:

a) $\sqrt[3]{40} = 2\sqrt[3]{5}$ b) $\sqrt[3]{54} = 3\sqrt[3]{2}$ c) $\sqrt[3]{500} = 5\sqrt[3]{4}$

Nombre ______________________ Curso ________ Fecha ____________

1. Escribe en forma de potencia:

a) $5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = 5^7$

b) $-2 \cdot (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) = (-2)^4$

2. Calcula mentalmente las siguientes potencias:

a) $3^0 = 1$ b) $3^1 = 3$ c) $3^2 = 9$ d) $3^3 = 27$ e) $3^4 = 81$ f) $3^5 = 243$

3. Escribe el resultado en forma de una sola potencia aplicando las propiedades de las potencias:

a) $3^2 \cdot 3^5 = 3^7$ b) $3^5 : 3^2 = 3^3$ c) $(3^5)^2 = 3^{10}$

d) $2^4 \cdot 5^4 = 10^4$ e) $2^7 : 5^7 = (2/5)^7$ f) $8^2 : 2^4 = 2^2$

4. Sustituye cada uno de los recuadros por el signo = o ≠ en las siguientes expresiones:

a) $5^2 \square 25$ b) $(-2)^3 \square 8$ c) $(2 + 3)^2 \square 2^2 + 3^2$ d) $(7 - 4)^2 \square 3^2$

a) = b) ≠ c) ≠ d) =

5. Calcula mentalmente la raíz entera por defecto de los siguientes números:

a) 4: ±2 b) 25: ±5 c) 36: ±6 d) 81: ±9

6. Sustituye cada uno de los recuadros por el signo = o ≠ en las siguientes expresiones:

a) $\sqrt{36 + 64} \square 10$ b) $\sqrt{100 - 36} \square \sqrt{100} - \sqrt{36}$

a) = b) ≠

7. Halla la siguientes raíces cuadradas con un decimal y haz la comprobación:

a) $\sqrt{658,2}$ 25,6 y resto: 2,84. Comprobación: $25,6^2 + 2,84 = 658,2$

b) $\sqrt{3\,456,85}$ 58,7 y resto: 11,16. Comprobación: $58,7^2 + 11,16 = 3\,456,85$

8. Realiza las siguientes operaciones aplicando la jerarquía:

a) $(7\sqrt{36} - 8^2 + 15) \cdot \sqrt{100}$ b) $(7^2 + 476 - \sqrt{64} + 2^5) : \sqrt{81}$

a) –70 b) 61

9. Calcula mentalmente la raíz cúbica de los siguientes números:

a) 8: 2 b) –64: –4 c) 216: 6 d) –1 000: –10

OBJETIVOS

a. Conocer las unidades sexagesimales para medir la amplitud de un ángulo.
b. Sumar y restar amplitudes de ángulos en unidades sexagesimales.
c. Calcular el producto de la amplitud de un ángulo por un número.
d. Calcular la división de la amplitud de un ángulo entre un número.
e. Conocer las unidades sexagesimales de tiempo.
f. Sumar y restar cantidades de tiempo en unidades sexagesimales.
g. Calcular el producto de una cantidad de tiempo por un número.
h. Calcular la división de una cantidad de tiempo entre un número.
i. Resolver problemas aplicando una estrategia conveniente y escogiendo adecuadamente el método más conveniente para la resolución: usando instrumentos de dibujo y medida tradicionales o con ordenador.

COMPETENCIAS BÁSICAS

Competencia en el conocimiento y la interacción con el mundo físico

- Aplicar los conocimientos básicos de las unidades de medida para valorar las informaciones científicas que puedan encontrar en los medios de comunicación y en muchos mensajes publicitarios sobre medidas.

Competencia para aprender a aprender

- Resolver problemas aritméticos con medidas de ángulos y tiempo aplicando una estrategia conveniente y escogiendo adecuadamente el método más conveniente para la realización de un determinado cálculo: mentalmente, por escrito, con calculadora o con ordenador.

CONTENIDOS

Conceptos

- Grado, minuto y segundo.
- Hora, minuto y segundo.

Procedimientos

- Utilización del vocabulario adecuado para interpretar y transmitir informaciones sobre amplitudes de ángulos y medida del tiempo.
- Utilización del algoritmo para la suma y la resta de las amplitudes de dos ángulos en unidades sexagesimales.
- Utilización del algoritmo para el producto de la amplitud de un ángulo por un número.
- Utilización del algoritmo para la división de la amplitud de un ángulo entre un número.
- Utilización del algoritmo para sumar y restar cantidades de tiempo en unidades sexagesimales.
- Utilización del algoritmo para el producto de una cantidad de tiempo por un número.
- Utilización del algoritmo para la división de una cantidad de tiempo entre un número.

Actitudes

- Valoración de la utilidad de las unidades de medida de ángulos y tiempo para representar, comunicar o resolver diferentes situaciones de la vida cotidiana.
- Incorporación del lenguaje con las unidades de medida y tiempo a la forma de comunicación habitual.
- Confianza en las propias capacidades para afrontar problemas y realizar cálculos.
- Perseverancia y flexibilidad en la búsqueda de soluciones a los problemas numéricos.

CRITERIOS DE EVALUACIÓN

a.1. Expresa oralmente y por escrito con corrección los conceptos, procedimientos y la terminología de las medidas de ángulos.
b.1. Calcula la suma y la resta de las amplitudes de dos ángulos en unidades sexagesimales.
c.1. Calcula el producto de la amplitud de un ángulo por un número.
d.1. Calcula la división de la amplitud de un ángulo entre un número.
e.1. Expresa oralmente y por escrito con corrección los conceptos, procedimientos y la terminología de las medidas de tiempo.
f.1. Suma y restar cantidades de tiempo en unidades sexagesimales.
g.1. Calcula el producto de una cantidad de tiempo por un número.
h.1. Calcula la división de una cantidad de tiempo entre un número.
i.1. Resuelve problemas con amplitudes de ángulos en unidades sexagesimales o con cantidades de tiempo en unidades sexagesimales y elige la forma de cálculo apropiada (mentalmente, por escrito, con calculadora o con ordenador) y valora la adecuación del resultado al contexto.

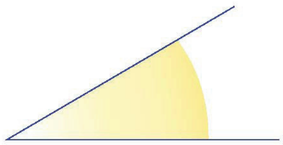
Medida de ángulos

Nombre ______________________________ Curso ________ Fecha __________

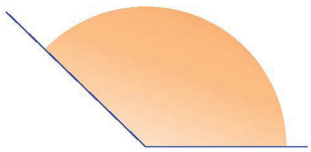
- Un grado es lo que mide el ángulo que resulta de dividir un ángulo recto en 90 partes iguales. Se representa por ° Ángulo recto = 90°
- Un minuto es lo que mide el ángulo que resulta de dividir un ángulo de 1° en 60 partes iguales. Se representa por ′ 1° = 60″.
- Un segundo es lo que mide el ángulo que resulta de dividir un ángulo de 1′ en 60 partes iguales. Se representa por ″ 1′ = 60″.

1. Estima la medida de cada uno de los siguientes ángulos:

a)



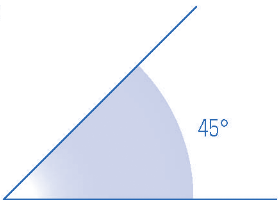
b)



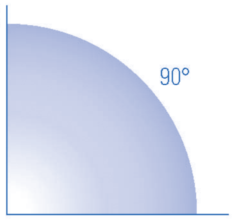
a) 30° b) 140°

2. Dibuja aproximadamente un ángulo de:

a) 45°: a)



b) 90°: b)



3. Convierte mentalmente los siguientes ángulos a forma incompleja:

a) 18° 15′: 18,25°

b) 43° 30′: 43,5°

4. Convierte mentalmente los siguientes ángulos a forma compleja:

a) 57,5°: 57° 30′

b) 125,75°: 125° 45′

5. Convierte los siguientes ángulos a forma incompleja:

a) 23° 47′ 15″: 23,7875°

b) 55° 25′ 48″: 55,43°

6. Convierte los siguientes ángulos a forma compleja:

a) 41,1234°: 41° 7′ 24″

b) 83,67°: 83° 40′ 12″

Matemáticas 2.° ESO ▮ Unidad 4 ▮ Ficha 2
Operaciones con ángulos I

Nombre ______________________ Curso ______ Fecha ________

Para **sumar ángulos** se aplica el siguiente procedimiento:

a) Se colocan los grados debajo de los grados, los minutos debajo de los minutos y los segundos debajo de los segundos.

b) Se comienza sumando los segundos. Por cada 60″ se toma 1′ más.

c) Se suman con los minutos. Por cada 60′ se toma 1° más.

Para **restar ángulos** se aplica el siguiente procedimiento:

a) Se colocan los grados debajo de los grados, los minutos debajo de los minutos y los segundos debajo de los segundos.

b) Se comienza restando los segundos. Si el minuendo es menor que el sustraendo, se pasa un minuto a segundos para poder hacer la resta.

c) Se hace lo mismo con los minutos.

1. Realiza las siguientes operaciones mentalmente:

a) 25° 30′ + 40° 30′ = 66°

b) 57° 45′ – 47° 15′ = 10° 30′

2. Realiza las siguientes operaciones:

a) 44° 53′ 37″ + 32° 35′ 42″ = 77° 29′ 19″

b) (22° 35′ 42″) × 7 = 77° 29′ 19″

3. Realiza las siguientes operaciones:

a) 36° 42′ 25″ + 47° 23′ 52″ = 84° 6′ 17″

b) 125° 44′ 18″ – 47° 51′ 23″ = 77° 52′ 55″

4. Realiza las siguientes operaciones mentalmente:

a) 25° 15′ + 25° 45′ = 51°

b) 33° 30′ – 22° 15′ = 11° 15′

Operaciones con ángulos II

Bruño

Nombre ______________________ Curso ________ Fecha ____________

Para **multiplicar** un ángulo por un número se aplica el siguiente procedimiento:

a) Se multiplica el número por los segundos, minutos y grados sucesivamente.

b) Si los segundos pasan de 60″, se dividen entre 60. El resto son segundos, y el cociente son minutos, que se suman a los minutos.

c) Si los minutos pasan de 60′, se dividen entre 60. El resto son minutos, y el cociente son grados, que se suman a los grados.

Para **dividir** un ángulo entre un número se aplica el siguiente procedimiento:

a) Se dividen los grados entre el número.

b) El resto de los grados se pasa a minutos multiplicando por 60, y estos se suman a los minutos del dividendo.

c) Se dividen los minutos entre el número.

d) El resto de los minutos se pasa a segundos multiplicando por 60, y estos se suman a los segundos del dividendo.

e) Se dividen los segundos entre el número.

1. Realiza las siguientes operaciones mentalmente:

a) (10° 15′) × 4 = 41°

b) (60° 30′) : 3 = 20° 10′

2. Realiza las siguientes operaciones:

a) (22° 35′ 42″) × 7 = 47° 36′ 42″

b) (125° 43′ 58″) : 9 = 13° 58′ 13″

3. Realiza las siguientes operaciones:

a) (15° 23′ 37″) × 8 = 123° 8′ 56″

b) (93° 25′ 14″) : 6 = 15° 34′ 12″

4. Un ángulo agudo de un triángulo rectángulo mide 23° 44′ 53″. ¿Cuánto mide cada uno de los otros ángulos?

Uno mide 90°

El otro mide 90° – 23° 44′ 53″ = 66° 15′ 7″

Matemáticas 2.° ESO ▮ Unidad 4 ▮ Ficha 4
Medida de tiempo

Nombre ______________________ Curso ________ Fecha ________

Milenio: 1 000 años. **Siglo:** 100 años. **Década:** 10 años. **Lustro:** 5 años. **Año:** 12 meses. 365 días (si es bisiesto, 366 días).	**Mes:** 28, 29, 30 o 31 días. **Semana:** 7 días. **Día:** 24 horas. **Hora:** 60 minutos. **Minuto:** 60 segundos. **Segundo:** 10 décimas de segundo.

1. ¿Cuántos lustros tiene un siglo?

Siglo = 100 : 5 = 20 lustros.

2. ¿Qué años fueron bisiestos entre 1590 y 1620?

1592, 1596, 1600, 1604, 1608, 1612, 1616 y 1620

La medida de tiempo está dada en **forma compleja** si se expresa en varias unidades. Ejemplo: 5 h 32 min 46 s	La medida de tiempo está dada en **forma incompleja** si se expresa en varias unidades. Ejemplo: 7,3456 h

3. Pasa mentalmente las siguientes unidades de tiempo a forma incompleja:

a) 2 h 30 min: 2,5 h

b) 5h 45 min: 5,75 h

4. Pasa mentalmente las siguientes unidades de tiempo a forma incompleja:

a) 7,5 h: 7 h 30 min

b) 44,25 h: 44 h 15 min

5. Pasa las siguientes unidades de tiempo a forma incompleja:

a) 22 h 43 min 17 s: 22,72138889 h

b) 75 h 48 min 19 s: 75,80527778 h

6. Pasa las siguientes unidades de tiempo a forma compleja:

a) 5,345 h: 5h 20 min 42 s

b) 27,44 h: 27 h 26 min 24 s

Matemáticas 2.° ESO ▮ Unidad 4 ▮ Ficha 5
Operaciones con medidas de tiempo I

Nombre ______________________ Curso ________ Fecha ____________

Para **sumar tiempos** se aplica el siguiente procedimiento:

a) Se colocan las horas debajo de las horas, los minutos debajo de los minutos y los segundos debajo de los segundos.

b) Se comienza sumando los segundos. Por cada 60 s se toma 1 min más.

c) Se suman los minutos. Por cada 60 min se toma 1 h más.

Para **restar tiempos** se aplica el siguiente procedimiento:

a) Se colocan las horas debajo de las horas, los minutos debajo de los minutos y los segundos debajo de los segundos.

b) Se comienza restando los segundos. Si el minuendo es menor que el sustraendo, se pasa un minuto a segundos para poder hacer la resta.

c) Se hace lo mismo con los minutos.

1. Realiza las siguientes operaciones mentalmente:

a) 2 h 20 min + 3 h 40 min = 6 h

b) 7 h 45 min – 5 h 15 min = 2 h 30 min

2. Realiza las siguientes operaciones:

a) 3 h 50 min 30 s + 6 h 42 min 37 s = 10 h 33 min 7 s

b) 9 h 23 min 5 s – 5 h 52 min 16 s = 3 h 30 min 49 s

3. Realiza las siguientes operaciones:

a) 12 h 23 min 45 s + 9 h 45 min 25 s = 22 h 9 min 10 s

b) 25 h 14 min 5 s – 13 h 25 min 54 s = 11 h 48 min 11 s

Operaciones con medida de tiempo II

Nombre ______________________ Curso ________ Fecha ____________

Para **sumar tiempos** se aplica el siguiente procedimiento:

a) Se multiplica el número por los segundos, minutos y horas sucesivamente.

b) Si los segundos pasan de 60 s, se dividen entre 60. El resto son segundos, y el cociente son minutos, que se suman a los minutos.

c) Si los minutos pasan de 60 min, se dividen entre 60. El resto son minutos, y el cociente son horas, que se suman a las horas.

Para **restar tiempos** se aplica el siguiente procedimiento:

a) Se dividen las horas entre el número.

b) El resto de las horas se pasa a minutos multiplicando por 60, y estos se suman a los minutos del dividendo.

c) Se dividen los minutos entre el número.

d) El resto de los minutos se pasa a segundos multiplicando por 60, y estos se suman a los segundos del dividendo.

e) Se dividen los segundos entre el número.

1. Realiza las siguientes operaciones mentalmente:

a) (2 h 15 min) × 4 = 9 h

b) (50 h 45 min) : 5 = 10 h 9 min

2. Realiza las siguientes operaciones:

a) (7 h 50 min 30 s) × 8 = 59 h 24 min

b) (53 h 44 min 18 s) : 6 = 8 h 57 min 23 s

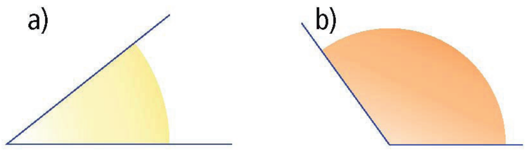
3. Realiza las siguientes operaciones:

a) (12 h 17 min 45 s) × 9 = 110 h 39 min 45 s

b) (44 h 33 min 22 s) : 7 = 6 h 21 min 55 s

Nombre ______________________ Curso ________ Fecha ____________

1. Estima la medida de cada uno de los siguientes ángulos:



a) 45° b) 130°

2. Pasa mentalmente los siguientes ángulos a forma incompleja:

a) 85° 30′: 85,5°

b) 167° 45′: 167,75°

3. Pasa mentalmente los siguientes ángulos a forma compleja:

a) 42,5°: 42° 30′

b) 92,25°: 92° 15′

4. Realiza las siguientes operaciones:

a) 23° 40′ 19″ + 47° 25′ 32″ = 71° 5′ 51″

b) 56° 22′ 11″ – 14° 34′ 33″ = 41° 47′ 38″

c) (12° 46′ 27″) × 13 = 166° 3′ 51″

d) (257° 42′ 35″) : 8 = 32° 12′ 49″

5. ¿Cuántas décadas tiene un siglo?: Siglo = 100 : 10 = 10 décadas.

6. Pasa mentalmente las siguientes unidades de tiempo a forma incompleja:

a) 5 h 15 min: 5,25 h

b) 4 h 30 min: 4,5 h

7. Pasa mentalmente las siguientes unidades de tiempo a forma compleja:

a) 3,25 h: 3 h 15 min

b) 32,75 h: 32 h 45 min

8. Realiza mentalmente las siguientes operaciones:

a) 5 h 30 min + 2h 15 min = 7 h 45 min

b) 8 h 30 min – 4 h 45 min = 3 h 45 min

c) (3 h 10 min) × 5 = 15 h 50 min

d) (13 h) : 5 = 2 h 36 min

OBJETIVOS

a. Identificar y comprender la razón como una división de dos cantidades comparables.
b. Identificar la proporción como una igualdad de dos razones.
c. Conocer y utilizar la propiedad fundamental para calcular un cuarto y un medio proporcional.
d. Identificar magnitudes directamente proporcionales y magnitudes inversamente proporcionales.
e. Identificar el tanto por ciento como una o varias de las cien partes en las que se puede dividir una cantidad.
f. Calcular un tanto por ciento de una cantidad.
g. Resolver problemas de proporcionalidad compuesta con magnitudes directamente proporcionales e inversamente proporcionales usando la regla de tres compuesta.

COMPETENCIAS BÁSICAS

Competencia en el conocimiento y la interacción con el mundo físico

- Aplicar conocimientos básicos de proporcionalidad y porcentajes para interpretar fenómenos observables en la vida cotidiana.

Competencia social y ciudadana

- Tomar decisiones desde el análisis funcional de datos sobre porcentajes.

Competencia para aprender a aprender

- Resolver problemas de proporcionalidad y porcentajes.

Autonomía e iniciativa personal

- Adaptarse a usar distintas técnicas, instrumentos y métodos para el aprendizaje de la proporcionalidad y del cálculo de porcentajes.

CONTENIDOS

Conceptos

- Razón. Proporción. Antecedente y consecuente. Medios y extremos.
- Cuarto proporcional.
- Proporción continua. Medio proporcional.
- Magnitudes directamente proporcionales.
- Magnitudes inversamente proporcionales.
- Tanto por ciento. Descuentos y aumentos porcentuales.
- Proporcionalidad compuesta.

Procedimientos

- Interpretación y utilización de una razón para comparar cantidades.
- Utilización de la propiedad fundamental para calcular un cuarto proporcional y un medio proporcional.
- Identificación de magnitudes directamente proporcionales e inversamente proporcionales.
- Utilización del método de reducción a la unidad para resolver problemas con magnitudes directamente proporcionales e inversamente proporcionales.
- Utilización de la regla de tres simple para resolver problemas con magnitudes directamente proporcionales e inversamente proporcionales.
- Elaboración y utilización de estrategias personales de cálculo mental.
- Utilización de la regla de tres compuesta para resolver problemas de proporcionalidad compuesta.

Actitudes

- Valoración de la utilidad de la proporcionalidad para representar, comunicar o resolver diferentes situaciones de la vida cotidiana.
- Incorporación a la forma de comunicación habitual de la terminología propia de la proporcionalidad y los porcentajes.
- Confianza en las propias capacidades para afrontar problemas y realizar cálculos.
- Perseverancia y flexibilidad en la búsqueda de soluciones a los problemas numéricos.

CRITERIOS DE EVALUACIÓN

a.1. Identifica y comprende la razón como una división de dos cantidades comparables.
b.1. Identifica la proporción como una igualdad de dos razones.
c.1. Utiliza la propiedad fundamental para calcular un cuarto y un medio proporcional.
d.1. Identifica magnitudes directamente proporcionales y magnitudes inversamente proporcionales.
e.1. Identifica el tanto por ciento como una o varias de las cien partes en las que se puede dividir una cantidad.
f.1. Calcula un tanto por ciento de una cantidad.
g.1. Resuelve problemas de proporcionalidad compuesta con magnitudes directamente proporcionales e inversamente proporcionales usando la regla de tres compuesta.

Matemáticas 2.º ESO ▮ Unidad 5 ▮ Ficha 1
Razón y proporción (I)

Bruño

Nombre ______________________ Curso ________ Fecha ____________

Una **razón** es la división entre dos cantidades comparables. Se representa $\frac{a}{b}$ y se lee «*a* es a *b*».

1. Calcula mentalmente las razones entre las cantidades siguientes, e interpreta el resultado:

a) 2 kg de nueces cuestan 7 € — 7 : 2 = 3,5 €/kg ⇒ Es el precio por kilo de las nueces.

b) Un tren en 3 h recorre 360 km — 360 : 3 = 120 km/h ⇒ Es la velocidad media.

c) 25 paquetes de folios cuestan 75 € — 75 : 25 = 3 €/paquete ⇒ Es el precio del paquete de folios.

d) 5 kg de detergente se gastan en 40 lavados. — 40 : 5 = 8 lavados/kg ⇒ Es el número de lavados por kilo.

Una **proporción** es una igualdad de dos razones. Se representa $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ y se lee «*a* es a *b* como *c* es a *d*». $a \cdot d = b \cdot c$. (El producto de los medios es igual al producto de los extremos.)

2. Calcula el término que falta en las siguientes proporciones:

a) $\frac{x}{9} = \frac{8}{3}$ b) $\frac{0,5}{1,5} = \frac{4,2}{x}$ c) $\frac{5,2}{4,3} = \frac{x}{8,6}$ d) $\frac{3,6}{x} = \frac{1,8}{2,3}$

a) $x = \frac{9,8}{3} = 24$ b) $x = \frac{1,5 \cdot 4,2}{0,5} = 12,6$ c) $x = \frac{5,2 \cdot 8,6}{4,3} = 10,4$ d) $x = \frac{3,6 \cdot 2,3}{1,8} = 4,6$

3. Completa para que formen proporción:

a) $\frac{5}{7} = \frac{}{28}$ b) $\frac{}{3} = \frac{35}{15}$ c) $\frac{3}{} = \frac{5}{2,5}$ d) $\frac{6}{0,5} = \frac{12}{}$

a) $\frac{5}{7} = \frac{20}{28}$ b) $\frac{7}{3} = \frac{35}{15}$ c) $\frac{3}{1,5} = \frac{5}{2,5}$ d) $\frac{6}{0,5} = \frac{12}{1}$

4. Resolver los siguientes problemas:

a) La razón de dos números es 2/5. Sabiendo que el mayor de ellos es 35, calcula el otro.

$$\frac{x}{35} = \frac{2}{5} \Rightarrow x = \frac{35 \cdot 2}{5} = 14$$

b) Un transportista cobra 810 € por trasladar una carga a 45 km de distancia. ¿Cuánto cobrará por trasladar la misma carga a 150 km?

$$\frac{45}{150} = \frac{810}{x} \Rightarrow x = \frac{150 \cdot 810}{45} = 2700 \text{ €}$$

Razón y proporción (II)

Nombre ______________________ Curso ________ Fecha ________

Se llama **cuarto proporcional** a un término desconocido de una proporción, conocidos los otros tres.

1. Calcula el cuarto proporcional:

a) $\frac{x}{6} = \frac{5}{0,4}$ b) $\frac{1,8}{2,5} = \frac{5,4}{x}$ c) $\frac{0,2}{1,3} = \frac{x}{3,9}$ d) $\frac{0,24}{x} = \frac{0,02}{0,3}$

a) $x = \frac{6 \cdot 5}{0,4} = 75$ b) $x = \frac{2,5 \cdot 5,4}{1,8} = 7,5$ c) $x = \frac{0,2 \cdot 3,9}{1,3} = 0,6$ d) $x = \frac{0,24 \cdot 0,3}{0,02} = 3,6$

2. Resolver los siguientes problemas:

a) Una familia de 4 miembros pagó 240 € por sus pasajes para unas vacaciones. Si con la familia hubiesen viajado dos familiares más, ¿cuánto se habría pagado por todos los pasajes?

$$\frac{4}{240} = \frac{6}{x} \Rightarrow x = \frac{240 \cdot 6}{4} = 360 \text{ €}$$

b) Para fabricar 5 cubos se necesitan 120 cm² de cartulina, ¿Qué cantidad de cartulina se necesitará para fabricar 14 cubos del mismo tamaño?

$$\frac{5}{120} = \frac{14}{x} \Rightarrow x = \frac{120 \cdot 14}{5} = 336 \text{ cm}^2$$

Se llama medio proporcional a los términos iguales de una proporción continua.

$$\frac{a}{x} = \frac{x}{b} \Rightarrow x^2 = a \cdot b \Rightarrow x = \pm\sqrt{a \cdot b}$$

3. Calcula el medio proporcional:

a) $\frac{10,8}{x} = \frac{x}{1,2}$ b) $\frac{5,12}{x} = \frac{x}{12,5}$ c) $\frac{6,4}{x} = \frac{x}{2,5}$ d) $\frac{7,2}{x} = \frac{x}{0,8}$

a) $x^2 = 12,96 \Rightarrow x = \pm 3,6$ b) $x^2 = 64 \Rightarrow x = \pm 8$

c) $x^2 = 16 \Rightarrow x = \pm 4$ d) $x^2 = 5,76 \Rightarrow x = \pm 2,4$

4. Calcular el valor de x en las siguientes proporciones:

a) $\frac{0,4}{x} = \frac{x}{0,9}$ b) $\frac{4}{x} = \frac{x}{49}$ c) $\frac{2,5}{x} = \frac{x}{14,4}$ d) $\frac{6,4}{x} = \frac{x}{22,5}$

a) $x^2 = 0,36 \Rightarrow x = \pm 0,6$ b) $x^2 = 196 \Rightarrow x = \pm 14$

c) $x^2 = 36 \Rightarrow x = \pm 6$ d) $x^2 = 144 \Rightarrow x = \pm 12$

Matemáticas 2.º ESO ▮ Unidad 5 ▮ Ficha 3
Magnitudes proporcionales I

Nombre ______________________ Curso ________ Fecha ________

> Dos magnitudes son directamente proporcionales si el cociente de las cantidades correspondientes es constante. $\dfrac{a}{b} = \dfrac{c}{d} = k \Rightarrow k$ es la constante de proporcionalidad directa.

1. Calcula x e indica la constante de proporcionalidad:

a) $\dfrac{x}{7} = \dfrac{12}{21}$ b) $\dfrac{2{,}5}{3{,}2} = \dfrac{10}{x}$ c) $\dfrac{5{,}6}{3{,}7} = \dfrac{x}{7{,}4}$ d) $\dfrac{4{,}6}{x} = \dfrac{9{,}2}{4{,}8}$

a) $x = \dfrac{7 \cdot 12}{21} = 4$

$k = \dfrac{4}{7} = \dfrac{12}{21} \cong 0{,}57$

b) $x = \dfrac{3{,}2 \cdot 10}{2{,}5} = 12{,}8$

$k = \dfrac{2{,}5}{3{,}2} = \dfrac{10}{12{,}8} = 0{,}78125$

c) $x = \dfrac{5{,}6 \cdot 7{,}4}{3{,}7} = 11{,}2$

$k = \dfrac{5{,}6}{3{,}7} = \dfrac{11{,}2}{7{,}4} \cong 1{,}51$

d) $x = \dfrac{4{,}6 \cdot 4{,}8}{9{,}2} = 2{,}4$

$k = \dfrac{4{,}6}{2{,}4} = \dfrac{9{,}2}{4{,}8} = 1{,}91\overline{6}$

2. Resuelve los siguientes problemas e indica la constante de proporcionalidad.

a) Si 6 cajas de ciruelas cuestan 10 €, ¿cuánto costarán 21 cajas iguales?

$\dfrac{6}{10} = \dfrac{21}{x} \Rightarrow x = \dfrac{10 \cdot 21}{6} = 35$ € $k = \dfrac{6}{10} = \dfrac{21}{35} = 0{,}6$

b) En una empresa hacen unos calendarios de publicidad para sus clientes. Si por 12 000 calendarios se han pagado 720 €, ¿cuánto se pagará por 20 000 calendarios?

$\dfrac{12\,000}{720} = \dfrac{20\,000}{x} \Rightarrow x = \dfrac{720 \cdot 20\,000}{12\,000} = 1200$ $k = \dfrac{12\,000}{720} = \dfrac{20\,000}{1200} = 16{,}\overline{6}$

> La regla de tres es un procedimiento para hallar un cuarto proporcional. La proporcionalidad es directa cuando va de + a + o de – a –.
>
> ***Magnitud A*** (unidad) (D) ***Magnitud B*** (unidad)
>
> $$\left.\begin{array}{l} a \longrightarrow c \\ b \longrightarrow x \end{array}\right\} \dfrac{a}{b} = \dfrac{c}{x} \Rightarrow x = \dfrac{b \cdot c}{a}$$

3. Resuelve los siguientes problemas:

a) Una pieza de tela de 42 m vale 210 €. ¿Cuánto costará una pieza de 64 m de la misma tela?

Longitud (m) (D) Dinero (€)

$$\left.\begin{array}{l} 42 \longrightarrow 210 \\ 64 \longrightarrow x \end{array}\right\} \dfrac{42}{64} = \dfrac{210}{x} \Rightarrow x = 320 \text{ €}$$

b) Para hacer 90 kg de masa de bizcocho se necesitan 54 kg de harina. ¿Cuántos kilos de harina se necesitarán para hacer 160 kg de masa?

Masa (Kg) (D) Masa (Kg)

$$\left.\begin{array}{l} 90 \longrightarrow 54 \\ 160 \longrightarrow x \end{array}\right\} \dfrac{90}{160} = \dfrac{54}{x} \Rightarrow x = 96 \text{ Kg}$$

Magnitudes proporcionales II

Bruño

Nombre ______________________ Curso ________ Fecha ____________

La regla de tres es inversa cuando va de + a – o de – a +, cuando esto sucede la razón de las cantidades de la magnitud A se colocan invertidas.

Magnitud A (unidad) (I) ***Magnitud B*** (unidad)

$$\left.\begin{array}{l} a \longrightarrow c \\ b \longrightarrow x \end{array}\right\} \frac{b}{a} = \frac{c}{x} \Rightarrow x = \frac{a \cdot c}{b}$$

1. Completa la siguiente tabla:

Para construir un edificio 10 obreros han tardado 100 días.

Nº de obreros	Resolución del problema	Solución
20	$\left.\begin{array}{l} 10 \to 100 \\ 20 \to x \end{array}\right\} \Rightarrow x = \frac{20}{10} = \frac{100}{x} = \frac{10 \cdot 100}{20} = 50$	50 días
40	$\left.\begin{array}{l} 10 \to 100 \\ 40 \to x \end{array}\right\} \Rightarrow x = \frac{40}{10} = \frac{100}{x} = \frac{10 \cdot 100}{40} = 25$	25 días
60	$\left.\begin{array}{l} 10 \to 100 \\ 50 \to x \end{array}\right\} \Rightarrow x = \frac{50}{10} = \frac{100}{x} = \frac{10 \cdot 100}{50} = 20$	20 días
100	$\left.\begin{array}{l} 10 \to 100 \\ 100 \to x \end{array}\right\} \Rightarrow x = \frac{100}{10} = \frac{100}{x} = \frac{10 \cdot 100}{100} = 10$	10 días

2. Resuelve los siguientes problemas:

a) Cinco grifos llenan un depósito en 30 h. ¿Cuánto tiempo tardarán 3 grifos iguales a los anteriores en llenar el mismo depósito?

N.º de grifos (I) Tiempo (h)

$$\left.\begin{array}{l} 5 \longrightarrow 30 \\ 3 \longrightarrow x \end{array}\right\} \frac{3}{5} = \frac{30}{x} \Rightarrow x = 50 \text{ horas}$$

b) Para almacenar una colección de cómics hemos utilizado 60 carpetas con 4 cómics cada una. Si se quieren almacenar 5 cómics en cada carpeta, ¿cuántas se necesitarán?

N.º de cómics (I) N.º de carpetas

$$\left.\begin{array}{l} 4 \longrightarrow 60 \\ 5 \longrightarrow x \end{array}\right\} \frac{5}{4} = \frac{60}{x} \Rightarrow x = 48 \text{ horas}$$

c) Un trabajo mecanografiado tiene 70 páginas, y cada una de ellas tiene 36 líneas. ¿Cuántas páginas tendría el mismo trabajo si cada página tuviese 30 líneas?

N.º de líneas (I) N.º de páginas

$$\left.\begin{array}{l} 36 \longrightarrow 70 \\ 30 \longrightarrow x \end{array}\right\} \frac{30}{36} = \frac{70}{x} \Rightarrow x = 84 \text{ horas}$$

Matemáticas 2.º ESO ▮ Unidad 5 ▮ Ficha 5
Porcentajes

Bruño

Nombre ______________________ Curso ________ Fecha ____________

El tanto por ciento de una cantidad se puede interpretar como una razón y como un decimal

Tanto por ciento	*Razón*	*Decimal*
40 %	$\frac{40}{100}$	0,4

1. Calcular el tanto por ciento.

a) En la compra de un televisor de 300 € se ha realizado un descuento del 15 %. ¿Cuánto dinero se ha descontado?

Se decuenta: $300 \cdot 0{,}15 = 45$ €

b) En una planta de envasado de fruta, el 3 % de las cajas tiene algún defecto. Si se han envasado 12 500 cajas en total, ¿cuántas cajas hay sin defecto?

N.º de cajas sin defecto: $12\,500 \cdot \frac{97}{100} = 12\,125$ cajas

La **disminución porcentual** de una cantidad inicial es lo que disminuye dicha cantidad según un porcentaje *x* %.

2. Resuelve:

a) En un pueblo ha disminuido la población un 8 % en los últimos cinco años. Si la población hace 5 años era de 850 habitantes, ¿Cuántos habitantes quedan actualmente en el pueblo?

$850 \cdot 0{,}92 = 782$ habitantes

b) En una granja de cerdos, se mueren un 22 % de los animales por la peste porcina. Si quedan 273 animales, ¿cuántos cerdos había en la granja?

$273 : \frac{78}{100} = 350$ cerdos

El **aumento porcentual** de una cantidad inicial es lo que aumenta dicha cantidad según un porcentaje *x* %.

3. Resuelve:

a) Una frutería que vende 140 kg de manzanas ha aumentado sus ventas un 20 %. ¿Cuántos kilos de manzanas vende ahora?

$140 \cdot \frac{120}{100} = 168$ kg

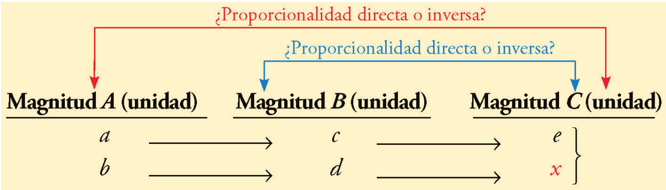
b) Un calzado deportivo que costaba 60 € ha aumentado su precio un 12 % en un año, y al año siguiente aumenta un 10 %. ¿Cuánto se pagará por ese calzado después de dos años?

$60 \cdot 1{,}12 \cdot 1{,}1 = 73{,}92$ €

Proporcionalidad compuesta

Nombre ______________________ Curso ________ Fecha ____________

Una **proporcionalidad es compuesta** si intervienen más de dos magnitudes proporcionales.



Se plantea la proporción, con la razón directa o inversa, según corresponda, y se resuelve.

1. Un ganadero necesita 600 kg de pienso para alimentar a 40 vacas durante 8 días. ¿Cuántos días podrá alimentar a 20 vacas con 1 500 kg de pienso?

(D)

(I)

Masa (Kg)	Nº de vacas	Tiempo (días)
600 →	40 →	8
1500 →	20 →	x

$$\frac{600}{1\,500}\cdot\frac{20}{40}=\frac{8}{x}\Rightarrow\frac{12\,000}{60\,000}=\frac{8}{x}\Rightarrow\frac{1}{5}=\frac{8}{x}\Rightarrow x=\frac{5\cdot 8}{1}=40\text{ días}$$

2. Una obra se hace con 24 obreros durante 18 días a razón de 8 h diarias. ¿Con cuántos obreros se haría la misma obra en 12 días a razón de 9 h diarias?

(I)

(I)

Tiempo (días)	Tiempo (h/días)	Nº de obreros
18 →	8 →	24
12 →	9 →	x

$$\frac{12}{18}\cdot\frac{9}{8}=\frac{24}{x}\Rightarrow x=32\text{ obreros}$$

3. Cinco grifos abiertos 15 h diarias han vertido agua por valor de 25 €. ¿Qué coste de agua se tendrá con 12 grifos abiertos 6 h diarias durante el mismo período de tiempo?

(D)

(D)

N.º de grifos	Tiempo (h/días)	Dinero
5 →	15 →	25
12 →	6 →	x

$$\frac{5}{12}\cdot\frac{15}{6}=\frac{25}{x}\Rightarrow x=24\text{ €}$$

4. Transportar 250 cajas a 400 km de distancia cuesta 320 €. ¿Cuántas cajas pueden transportarse a una distancia de 300 km por 720 €?

(D)

(I)

Dinero (€)	Longitud (km)	Nº de cajas
320 →	400 →	250
720 →	300 →	x

$$\frac{320}{720}\cdot\frac{300}{400}=\frac{250}{x}\Rightarrow x=750\text{ cajas}$$

Nombre ______________________ Curso ________ Fecha ________

1. Calcula el término que falta en las siguientes proporciones:

a) $\dfrac{3{,}5}{8{,}5} = \dfrac{10{,}5}{x}$ b) $\dfrac{8}{11} = \dfrac{x}{22}$ c) $\dfrac{x}{9{,}6} = \dfrac{5{,}4}{3{,}2}$ d) $\dfrac{1{,}8}{x} = \dfrac{3{,}6}{4{,}6}$

a) $\dfrac{8{,}5 \cdot 10{,}5}{3{,}5} = x \Rightarrow x = 25{,}5$ b) $\dfrac{8 \cdot 22}{11} = x \Rightarrow x = 16$

c) $\dfrac{9{,}6 \cdot 5{,}4}{3{,}2} = x \Rightarrow x = 16{,}2$ d) $\dfrac{1{,}8 \cdot 4{,}6}{3{,}6} = x \Rightarrow x = 2{,}3$

2. Calcula el medio proporcional:

a) $\dfrac{5{,}4}{x} = \dfrac{x}{0{,}6}$ b) $\dfrac{10{,}24}{x} = \dfrac{x}{6{,}25}$ c) $\dfrac{12{,}8}{x} = \dfrac{x}{5}$ d) $\dfrac{14{,}4}{x} = \dfrac{x}{1{,}6}$

a) $x^2 = 5{,}4 \cdot 0{,}6 \Rightarrow x = \pm 1{,}8$ b) $x^2 = 10{,}24 \cdot 6{,}25 \Rightarrow x = \pm 8$

c) $x^2 = 12{,}8 \cdot 5 \Rightarrow x = \pm 8$ b) $x^2 = 14{,}4 \cdot 1{,}6 \Rightarrow x = \pm 4{,}8$

3. Plantear y resolver:

a) Un carretel de cable de cobre de 125 m vale 154 €. ¿Cuánto costará un carretel de 250 m del mismo cable?

Longitud (m) (D) Dinero (€)

$$\left.\begin{array}{l} 125 \longrightarrow 154 \\ 250 \longrightarrow x \end{array}\right\} \dfrac{125}{250} = \dfrac{154}{x} \Rightarrow x = 308\ €$$

b) En una granja se tiene alimento para 150 conejos durante 80 días. Si al cabo de 20 días se venden 100 conejos, ¿durante cuántos días se tendrá alimento para los conejos que quedan, sin variar la ración?

Nº de conejos (I) Tiempo (días)

$$\left.\begin{array}{l} 150 \longrightarrow 60 \\ 50 \longrightarrow x \end{array}\right\} \dfrac{50}{150} = \dfrac{60}{x} \Rightarrow x = 180 \text{ días}$$

c) Alba ganaba 1 400 € y ha recibido un aumento del 5 % en su salario. ¿Cuánto gana ahora?

$1\,400 \cdot 1{,}05 = 1\,470$ €

d) Una familia de 4 personas puede mantenerse durante 6 meses con 7 200 €. ¿Cuántas personas podrán mantenerse durante 9 meses con 21 600 €?

(D)

(I)

Dinero (€) Tiempo (meses) N.º personas

$$\left.\begin{array}{l} 7200 \longrightarrow 6 \longrightarrow 4 \\ 21600 \longrightarrow 9 \longrightarrow x \end{array}\right\} \dfrac{7\,200}{21\,600} \cdot \dfrac{9}{6} = \dfrac{4}{x} \Rightarrow x = 8 \text{ personas}$$

OBJETIVOS

a. Resolver problemas de repartos directamente proporcionales.
b. Resolver problemas de repartos inversamente proporcionales.
c. Resolver problemas de grifos con y sin desagüe.
d. Resolver problemas de mezclas y aleaciones.
e. Resolver problemas de móviles y de relojes.

COMPETENCIAS BÁSICAS

Competencia en comunicación lingüística

- Expresar oralmente y por escrito distintos hechos, conceptos, relaciones, operadores y estructuras que se ponen de manifiesto en distintos problemas aritméticos.
- Leer y disfrutar de la lectura de la introducción del tema.

Competencia en el conocimiento y la interacción con el mundo físico

- Aplicar las estrategias de resolución de problemas aritméticos de distinta naturaleza para interpretar fenómenos sencillos observables en el mundo natural.

Competencia para aprender a aprender

- Resolver problemas de repartos, de grifos, de móviles, de relojes, etcétera, aplicando una estrategia apropiada.

Autonomía e iniciativa personal

- Poner en práctica modelos y estrategias de resolución de problemas.

CONTENIDOS

Conceptos

- Reparto directamente proporcional.
- Reparto inversamente proporcional.
- Mezcla. Aleación.
- Precio medio.
- Ley de la aleación.
- Velocidad, espacio y tiempo.

Procedimientos

- Interpretación y utilización de cantidades proporcionales.
- Reducción a la unidad de un caudal en litros/hora.
- Utilización de tablas para analizar los datos y plantear la resolución de problemas de mezclas y aleaciones.
- Utilización de diversos gráficos (lineales o relojes) para analizar los datos y plantear la resolución de problemas de móviles y relojes.
- Elaboración y utilización de estrategias personales de cálculo mental.
- Utilización de la calculadora y del ordenador para la realización de cálculos numéricos, decidiendo sobre la conveniencia de usarla en función de la complejidad de los cálculos y de la exigencia de exactitud en los resultados.
- Decisión sobre qué operaciones son adecuadas en la resolución de problemas numéricos.

Actitudes

- Valoración de la utilidad de las estrategias para la resolución de problemas para representar, comunicar o resolver diferentes situaciones de la vida cotidiana.
- Incorporación a la forma de comunicación habitual de la terminología propia de la resolución de problemas.
- Valoración crítica ante las informaciones y mensajes de naturaleza numérica.
- Valoración de la utilidad de la calculadora y del ordenador para la realización de cálculos e investigaciones numéricas.
- Confianza en las propias capacidades para afrontar problemas y resolverlos.
- Perseverancia y flexibilidad en la búsqueda de soluciones a los problemas numéricos.
- Sensibilidad y gusto por la presentación ordenada y clara del proceso seguido y de los resultados obtenidos en problemas y cálculos numéricos.

CRITERIOS DE EVALUACIÓN

a.1. Resuelve problemas de repartos directamente proporcionales.
b.1. Resuelve problemas de repartos inversamente proporcionales.
c.1. Resuelve problemas de grifos con y sin desagüe.
d.1. Resuelve problemas de mezclas y aleaciones.
e.1. Resuelve problemas de móviles y de relojes.

Problemas de repartos I

Nombre ______________________ Curso ________ Fecha ____________

Para resolver los **repartos directamente proporcionales**:

- Se calcula la parte de N que le corresponde a cada unidad del total de las cantidades conocidas a, b, c, es decir:

$$k = \frac{N}{a + b + c}$$

- Con el valor de la unidad k se calculan los valores de las partes deseadas.

1. Reparte 15 000 de forma directamente proporcional a 2, 3 y 5.

a) $\frac{15\,000}{2 + 3 + 5} = 1\,500$

b) 1.ª parte: $1\,500 \cdot 2 = 3\,000$
2.ª parte: $1\,500 \cdot 3 = 4\,500$
3.ª parte: $1\,500 \cdot 5 = 7\,500$

2. Reparte 1 080 de forma directamente proporcional a 13, 19 y 22.

a) $\frac{1\,080}{13 + 19 + 22} = 20$

b) 1.ª parte: $20 \cdot 13 = 260$
2.ª parte: $20 \cdot 19 = 380$
3.ª parte: $20 \cdot 22 = 440$

3. Sara quiere repartir 580 € de forma directamente proporcional a las edades de sus sobrinos Óscar, Diego y María, que tienen, respectivamente, 7, 10 y 12 años. Calcula la cantidad que le corresponde a cada uno.

a) $\frac{580}{7 + 10 + 12} = 20$

b) Óscar: $20 \cdot 7 = 140$ €
Diego: $20 \cdot 10 = 200$ €
María: $20 \cdot 12 = 240$ €

4. Una empresaria reparte 3 000 € entre tres trabajadores de forma directamente proporcional al tiempo que llevan trabajando. ¿Cuánto le corresponderá a cada uno si llevan 12, 8 y 5 años?

a) $\frac{3\,000}{12 + 8 + 5} = 120$

b) 1.er trabajador: $120 \cdot 12 = 1\,440$ €
2.º trabajador: $120 \cdot 8 = 960$ €
3.er trabajador: $120 \cdot 5 = 600$ €

Problemas de repartos II

Nombre ______________________ Curso ________ Fecha ____________

Los **repartos inversamente proporcionales** consisten en distribuir una cantidad *N* en partes que sean inversamente proporcionales a unas cantidades conocidas *a*, *b*, *c*…

Para repartir una cantidad *N* en partes inversamente proporcionales a otras *a*, *b*, *c*, se hace un reparto directamente proporcional a las inversas **1/*a***, **1/*b*** y **1/*c***.

1. Completa los datos que faltan en el siguiente problema sobre repartos inversamente proporcionales:

Reparte 180 bombones de forma inversamente proporcional a las edades de Lidia, Ernesto y Rodrigo, que tienen, respectivamente, 3, 4 y 6 años. Pregunta: ¿cuánto le corresponde a cada uno?

a) Se calculan los inversos y se reducen a <u>común denominador</u> :

$$\text{m.c.m}\ (3, 4, 6) = 12 \Rightarrow \frac{1}{3} = \frac{4}{12};\ \frac{1}{4} = \frac{3}{12};\ \frac{1}{6} = \frac{2}{12}$$

b) Se hace el reparto directamente <u>proporcional</u> a 4, 3 y 2:

– Bombones totales: <u>180</u>

– Unidades totales: <u>4</u> + <u>3</u> + <u>2</u> = 9

– A una unidad le corresponden $\frac{180}{9}$ bombones

– Lidia = 4 · 20 = <u>80</u> bombones

– Ernesto = <u>3</u> · 20 = <u>60</u> bombones

– Rodrigo = 2 · <u>20</u> = 20 bombones

2. Reparte 225 de forma inversamente proporcional a 4 y 5.

m.c.m. (4, 5) = 20

a) $\frac{1}{4} = \frac{5}{20};\ \frac{1}{5} = \frac{4}{20}$

b) $\frac{225}{5 + 4} = 25$

1.ª parte: 25 · 5 = 125

2.ª parte: 25 · 4 = 100

3. Se deben repartir 220 € de forma inversamente proporcional al lugar en el que quedan los tres primeros clasificados de una carrera. Calcula el dinero que le corresponde a cada uno.

m.c.m. (1, 2, 3) = 6

a) $1 = \frac{6}{6},\ \frac{1}{2} = \frac{3}{6},\ \frac{1}{3} = \frac{2}{6}$

b) $\frac{220}{6 + 3 + 2} = 20$

1.er corredor: 20 · 6 = 120 €

2.º corredor: 20 · 3 = 60 €

3.er corredor: 20 · 2 = 40 €

Problemas de grifos I

Nombre ______________________ Curso ________ Fecha ____________

Resolver **problemas de grifos sin desagüe**:

- Se calcula la parte del depósito que llena cada grifo en una hora.
- Se calcula la parte del depósito que llenan a la vez los dos grifos en una hora.
- Se calcula el tiempo que tardan los dos grifos en llenar a la vez el depósito.

1. Un grifo A tarda 3 h en llenar un depósito. ¿Qué fracción del depósito llenará el grifo en una hora?

En una hora llena 1/3 del depósito.

2. Completa los datos que faltan en el siguiente problema sobre problemas de grifos sin desagüe:

Un grifo A llena un depósito de agua en 2 h, y otro grifo B, en 3 h. ¿Cuánto tiempo tardarán los dos grifos en llenar a la vez el depósito?

- El grifo A llena en una hora 1/2

  El grifo B llena en una hora 1/3
- Los dos grifos a la vez llenan en una hora: $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{3+2}{6} = \frac{5}{6}$ del depósito
- Tiempo que tardan: $1 : \frac{5}{6} = 1 \cdot \frac{6}{5} = \frac{6}{5} = 1{,}2$ h = 1h 12 min

Solución: tardarán: 1 h 12 min

3. Un grifo A llena un depósito de agua en 3 h, y otro grifo B, en 1 h. ¿Cuánto tiempo tardarán los dos grifos en llenar a la vez el depósito?

a) Grifo A llena en una hora: $\frac{1}{3}$ del depósito. Grifo B llena en una hora: el depósito entero.

b) Los dos juntos llenan en una hora: $\frac{1}{3} + 1 = \frac{4}{3}$ del depósito.

c) El tiempo que tardan es:

$1 : \frac{4}{3} = 1 \cdot \frac{3}{4} = \frac{3}{4}$ de hora = 45 min

4. Un grifo A llena un depósito de agua en 8 h, y otro grifo B, en 12 h. ¿Cuánto tiempo tardarán los dos grifos en llenar a la vez el depósito?

a) Grifo A llena en una hora: $\frac{1}{8}$ del depósito. Grifo B llena en una hora: $\frac{1}{12}$ del depósito.

b) Los dos juntos llenan en una hora: $\frac{1}{8} + \frac{1}{12} = \frac{5}{24}$ del depósito.

c) El tiempo que tardan es:

$1 : \frac{5}{24} = 1 \cdot \frac{24}{5} = \frac{24}{5}$ de hora = 4,8 horas = 4 h 48 min

Matemáticas 2.° ESO ▮ Unidad 6 ▮ Ficha 4
Problemas de grifos II

Bruño

Nombre ______________________ Curso ________ Fecha ____________

Resolver **problemas de grifos con desagüe**:

a) Se calcula la parte del depósito que llena cada grifo y la que se vacía por el desagüe en una hora.

b) Se calcula la parte del depósito que llenan los dos grifos a la vez menos la parte que se escapa por el desagüe en una hora.

c) Se calcula el tiempo que tardan los dos grifos en llenar a la vez el depósito estando el desagüe abierto.

1. Completa los datos que faltan en el siguiente problema sobre problemas de grifos con desagüe:

Un grifo A llena un depósito de agua en 4 h, y otro grifo B, en 6 h. El depósito tiene un desagüe que lo vacía en 12 h estando los grifos cerrados. ¿Cuánto tiempo tardarán los dos grifos en llenar a la vez el depósito estando el desagüe abierto?

- El grifo A llena en una hora 1/4

  El grifo B llena en una hora 1/6

  El desagüe vacía en una hora 1/12

- Los dos grifos a la vez, con el desagüe abierto, llenan en una hora:

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{6} - \frac{1}{12} = \frac{3 + 2 - 1}{12} = \frac{4}{12} = \frac{1}{3} \text{ del depósito}$$

- Tiempo que tardan: $1 : \frac{1}{3} = 1 \cdot 3 = 3$ horas

2. Un grifo A llena un depósito de agua en 2 h, y otro grifo B, en 3 h. El depósito tiene un desagüe que lo vacía en 6 h estando los grifos cerrados. ¿Cuánto tiempo tardarán los dos grifos en llenar a la vez el depósito estando el desagüe abierto?

a) Grifo A llena en una hora: $\frac{1}{2}$ del depósito. Grifo B llena en una hora: $\frac{1}{3}$ del depósito.

Desagüe vacía en una hora: $\frac{1}{6}$ del depósito.

b) Los dos grifos juntos con el desagüe abierto llenan en una hora:

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} = \frac{2}{3} \text{ del depósito.}$$

c) El tiempo que tardan es: $1 : \frac{2}{3} = 1 \cdot \frac{3}{2} = \frac{3}{2} = 1{,}5 = 1$ h 30 min

3. Un estanque tiene dos desagües que lo vacían en 60 h y 40 h. Si se abren los dos desagües a la vez, ¿cuánto tiempo tardará en vaciarse el estanque?

a) El primer desagüe vacía en una hora: $\frac{1}{60}$ del depósito.

El segundo desagüe vacía en una hora: $\frac{1}{40}$ del depósito.

b) Los dos juntos vacían en una hora: $\frac{1}{60} + \frac{1}{40} + \frac{1}{24}$ del depósito.

c) El tiempo que tardan es: $1 : \frac{1}{24} = 1 \cdot \frac{24}{1} = 24$ h.

Problemas de mezclas

Nombre ______________________ Curso ________ Fecha ____________

En los **problemas de mezclas** se pide el precio medio al que hay que vender una mezcla de varias sustancias, conocidas las **cantidades** y los **precios** de cada sustancia.

1. Completa la tabla con los datos que se dan en el siguiente problema y calcula a continuación el precio medio de la mezcla según la fórmula del apartado b):

Se tienen 30 kg de un surtido normal de frutos secos a un precio de 12 € el kilo y 50 kg de otro surtido extra a un precio de 14 € el kilo. Si se mezclan los dos surtidos, ¿qué precio tendrá el kilo de mezcla?

a) Pon los datos en la siguiente **tabla**:

	Surtido normal	Surtido extra	Mezcla
Masa (kg)	30	50	80
Precio (€/kg)	12	14	p
Dinero (€)	$30 \cdot 12 + 50 \cdot 14 = 80\,p$		

b) Calcula el **precio medio de la mezcla:**

$$p = \frac{1\,060}{80} = 13{,}25 \text{ €/kg}$$

2. Se mezclan 120 litros de un jabón líquido sin aceite protector de la piel, de 1,5 € el litro, con 80 litros de otro jabón líquido con aceite protector, de 2 € el litro. ¿A qué precio se debe vender la mezcla?

a)	Jabón sin aceite	Jabón con aceite	Mezcla
Masa (kg)	120	80	200
Precio (€/kg)	1,5	2	p
Dinero (€)	$120 \cdot 1{,}5 + 80 \cdot 2 = 200\,p$		

b) El precio medio de la mezcla es: $p = \frac{340}{200} = 1{,}7$ €/kg

3. Se mezclan 5 litros de colonia con alcohol, de 60 € el litro, con 3 litros de colonia sin alcohol, de 80 € el litro. Calcula el precio medio por litro de la mezcla.

a)	Colonia con alcohol	Colonia sin alcohol	Mezcla
Masa (kg)	5	3	8
Precio (€/kg)	60	80	p
Dinero (€)	$5 \cdot 60 + 3 \cdot 80 = 8\,p$		

b) El precio medio de la mezcla es: $p = \frac{540}{8} = 67{,}5$ €/litro

Problemas de móviles y relojes

Nombre ______________________ Curso ________ Fecha ____________

Para resolver problemas de **móviles en sentido contrario**:

Si los dos móviles van en sentido contrario, la velocidad con la que se acerca uno a otro es la suma de las velocidades de los móviles.

- Se suman las velocidades.
- Se calcula el tiempo con la velocidad hallada: $t = \frac{e}{v}$

1. A la misma hora, Juan y Luis salen de dos pueblos distantes entre sí 21 km, y se dirigen el uno hacia el otro. La velocidad de Juan es de 8 km/h, y la de Luis, de 6 km/h. ¿Cuánto tiempo tardarán en encontrarse?

a) La velocidad es: $v = 8 + 6 = 14$ km/h

b) El tiempo es: $t = \frac{e}{v}$ $\quad t = \frac{21}{14} = 1{,}5$ h $= 1$ h 30 min

2. Desde la ciudad A sale una moto hacia B con una velocidad de 50 km/h. A la misma hora sale de B hacia A otra moto a 70 km/h. Si la distancia entre las dos ciudades es de 840 km, ¿cuánto tiempo tardarán en encontrarse?

a) La velocidad es: $v = 50 + 70 = 120$ km/h

b) El tiempo es: $t = \frac{e}{v}$ $\quad t = \frac{840}{120} = 7$ h

Para resolver problemas de **móviles en el mismo sentido**:

Si los dos móviles van en sentido contrario, la velocidad con la que se acerca uno a otro es la suma de las velocidades de los móviles.

- Se restan las velocidades.
- Se calcula, con la velocidad hallada, el tiempo: $t = \frac{e}{v}$

3. Un coche sale de A y, al mismo tiempo, otro sale de B; ambos van hacia el sur por la misma carretera, con velocidades de 100 km/h y 90 km/h, respectivamente. Si B está hacia el sur a una distancia de 60 km de A, ¿cuánto tardará el coche que sale de A en alcanzar al coche que sale de B?

a) La velocidad es: $v = 100 - 90 = 10$ km/h

b) El tiempo es: $t = \frac{e}{v}$ $\quad t = \frac{60}{10} = 6$ h

4. Dos coches salen a la vez desde un pueblo A y desde un pueblo B hacia el oeste por la misma carretera, con velocidades de 105 km/h y 95 km/h, respectivamente. Si B está hacia el oeste a una distancia de 40 km de A, ¿cuánto tiempo tardará en alcanzar el coche que sale desde A al que ha salido de B?

a) La velocidad es: $v = 105 - 95 = 10$ km/h

b) El tiempo es: $t = \frac{e}{v}$ $\quad t = \frac{40}{10} = 4$ h

Nombre ____________________ Curso ________ Fecha ____________

1. Reparte mentalmente 50 bombones de forma directamente proporcional a 2 y 3

50 : 5 = 10

En el primer bote: 10 · 2 = 20 bombones.

En el segundo bote: 10 · 3 = 30 bombones.

2. Reparte 990 de forma directamente proporcional a 7 y 15

a) $\frac{990}{7 + 15} = 15$

b) 1.ª parte: 45 · 7 = 315

2.ª parte: 45 · 15 = 675

3. Un grifo A llena un depósito de agua en 2 h; otro grifo B, en 5 h, y otro C, en 10 h. ¿Cuánto tiempo tardarán los tres grifos en llenar a la vez el depósito?

a) Grifo A llena en una hora: $\frac{1}{2}$ del depósito. Grifo B llena en una hora: $\frac{1}{5}$ del depósito.

Grifo C llena en una hora: $\frac{1}{10}$ del depósito.

b) Los dos grifos juntos con el desagüe abierto llenan en una hora: $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{12} = 1$

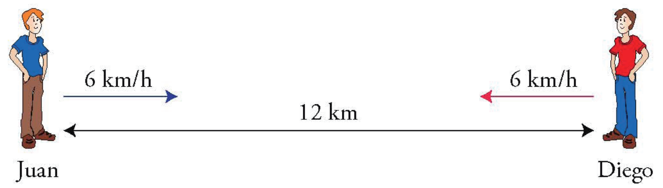
c) El tiempo que tardan es: 1 h

4. Se mezclan 100 kg de trigo a un precio de 0,15 €/kg con 50 kg de cebada de 0,12 €/kg. ¿Cuál es el precio de la mezcla?

a)	Trigo	Cebada	Mezcla
Masa (kg)	100	50	150
Precio (€/kg)	0,15	0,12	*p*
Dinero (€)	100 · 0,15 + 50 · 0,12 = 150 *p*		

b) El precio medio de la mezcla es: $p = \frac{21}{150} = 0,14$ €/kg

5. ¿Cuánto tiempo tardarán en encontrarse Juan y Diego?



12 : 12 = 1 hora

Bruño

OBJETIVOS

a. Identificar expresiones algebraicas.
b. Identificar un monomio, su coeficiente y su grado.
c. Identificar monomios semejantes.
d. Identificar un polinomio y sus términos, grado, coeficientes, coeficiente principal y término independiente.
e. Calcular el valor numérico de un polinomio.
f. Sumar, restar, multiplicar y dividir monomios.
g. Calcular la potencia de un monomio.
h. Multiplicar un monomio por un polinomio y sacar factor común un monomio.
i. Sumar, restar y multiplicar polinomios.
j. Identificar y utilizar las igualdades notables.
k. Realizar mentalmente la descomposición factorial de un polinomio sencillo.
l. Conocer los números poligonales.
m. Identificar fórmula, ecuación e identidad y conocer su diferencia.
n. Resolver problemas de polinomios aplicando una estrategia conveniente y escogiendo adecuadamente el método más conveniente para la realización de un determinado cálculo: mentalmente, por escrito, con calculadora o con ordenador.

COMPETENCIAS BÁSICAS

Competencia en el conocimiento y la interacción con el mundo físico

- Adoptar una actitud investigadora en el planteamiento y resolución de problemas susceptibles de ser tratados algebraicamente.

Competencia para aprender a aprender

- Resolver problemas de polinomios escogiendo el método más conveniente para la realización del cálculo: mentalmente, por escrito, con calculadora o con ordenador.

Autonomía e iniciativa personal

- Poner en práctica modelos de operaciones con polinomios.

CONTENIDOS

Conceptos

- Expresión algebraica.
- Monomio. Grado. Coeficiente. Monomios semejantes.
- Polinomio. Grado. Coeficientes. Coeficiente principal. Términos. Término independiente.
- Suma, resta, multiplicación y división de monomios.
- Valor numérico de un polinomio.
- Suma, resta y multiplicación de polinomios.
- Igualdades notables.
- Factorización de un polinomio.

Procedimientos

- Interpretación y utilización del lenguaje algebraico en diferentes contextos, eligiendo la notación más adecuada para cada caso.
- Utilización de los algoritmos de suma, resta, multiplicación y división con monomios.
- Utilización de los algoritmos tradicionales de suma, resta y multiplicación con polinomios.
- Utilización de la jerarquía y propiedades de las operaciones y de las reglas de uso de los paréntesis en cálculos escritos y en la simplificación de expresiones algebraicas.
- Identificación de problemas de polinomios diferenciando los elementos conocidos de los que se pretende conocer y los relevantes de los irrelevantes.

Actitudes

- Curiosidad e interés por enfrentarse a problemas algebraicos e investigar las regularidades y relaciones que aparecen en las estructuras algebraicas.
- Disposición favorable a la revisión y mejora del resultado de cualquier cálculo o problema algebraico.
- Interés y respeto por las estrategias y soluciones a problemas algebraicos distintas de las propias.

CRITERIOS DE EVALUACIÓN

a.1. Identifica expresiones algebraicas.
b.1. Identifica un monomio, su coeficiente y su grado.
c.1. Identifica monomios semejantes.
d.1. Identifica un polinomio y sus términos, grado, coeficientes, coeficiente principal y término independiente.
e.1. Calcula el valor numérico de un polinomio.
f.1. Suma, resta, multiplica y divide monomios.
g.1. Calcula la potencia de un monomio.
h.1. Multiplica un monomio por un polinomio y saca factor común un monomio.
i.1. Suma, resta y multiplica polinomios.
j.1. Identifica y utiliza las igualdades notables.
k.1. Realizar mentalmente la descomposición factorial de un polinomio sencillo.
l.1. Conoce los números poligonales.
m.1. Identifica fórmula, ecuación e identidad y conoce su diferencia.
n.1. Resuelve problemas de polinomios.

Matemáticas 2.º ESO | Unidad 7 | Ficha 1
Lenguaje algebraico

Bruño

Nombre ______________________ Curso ________ Fecha ____________

Una **expresión algebraica** es una combinación de números, letras y paréntesis, relacionados con operaciones.

1. En la expresión algebraica: $4xy - 5x + 6x - 3$, halla los términos, el término independiente, las variables y los coeficientes.

Términos: $4xy$, $-5x$, $6x$, -3

Variables: x, y

Término independiente: -3

Coeficientes: 4, – 5, 6, – 3

2. Completa la siguiente tabla:

- El **coeficiente de un monomio** es el número que está generalmente delante y multiplica a la parte literal.
- El **grado de un monomio** es el exponente de la variable. Si tiene más de una variable, se suman los exponentes.

Monomio	Coeficiente	Grado
$9x^3$	9	3
$-7x^2yz^5$	–7	7
$8x$	8	1
–3	–3	0

Monomios semejantes son los que tienen la misma parte literal.

3. Halla cuáles de los siguientes monomios son semejantes: $5x^3$, $7x$, $-7x^2$, $-9x^3$, $8x^2$, x^3, $9x$

a) $5x^3$, $-9x^3$, x^3

b) $-7x^2$, $8x^2$

c) $7x$, $9x$

Un **polinomio** es una suma de monomios. El **valor numérico** de un polinomio es el valor que se obtiene al sustituir la variable por un número y efectuar las operaciones.

4. Completa la siguiente tabla:

$P(x) = -9x^4 + 5x^2 - 17$				
Términos	**Grado**	**Coeficientes**	**Coeficiente principal**	**Término independiente**
$-9x^4$, $5x^2$, -17	4	–9, 5, –17	–9	–17

5. Halla el valor numérico del siguiente polinomio: $P(x) = -x^3 + 5x - 1$ para los valores que se indican:

a) $x = 0$ b) $x = 1$ c) $x = 3$ d) $x = -3$

a) $P(0) = -1$ b) $P(1) = 3$ c) $P(3) = -13$ d) $P(-3) = 11$

Matemáticas 2.º ESO ▮ Unidad 7 ▮ Ficha 2
Operaciones con monomios I

Bruño

Nombre ______________________ Curso ________ Fecha ____________

Para **sumar y restar monomios**:

Si los monomios son **semejantes**, se suman o restan los coeficientes y se pone la misma parte literal. Si los monomios **no son semejantes**, el resultado es un polinomio cuyos términos son los monomios dados.

1. Realiza la siguiente operación: $-7x^2 + 12x^2 + 6x^2 - x^2$

$10x^2$

El **producto** de dos o más **monomios** es otro monomio que tiene:

a) Por coeficiente, el producto de los coeficientes.

b) Por parte literal, la misma, con exponente la suma de los exponentes.

2. Realiza las siguientes operaciones de monomios:

a) $4x^5 - x^5 + 8x^5$ — a) $11x^5$

b) $-9x^3 \cdot x^3$ — b) $-9x^6$

El **cociente** de dos **monomios** tiene:

a) Por coeficiente, el cociente de los coeficientes.

b) Por parte literal, la misma, con exponente la diferencia de los exponentes. Para que el resultado sea un monomio, el grado del numerador tiene que ser mayor o igual que el grado del denominador.

Para elevar un monomio a una potencia, se eleva el coeficiente a la potencia y se multiplican los exponentes.

3. Realiza las operaciones de monomios que se indican a continuación:

a) $7x^5 - 4x^5 + 9x^5$	b) $-5x^2 \cdot x$	c) $(-2x^5)^3$	d) $-6x^3 : (-3x)$
a) $12x^5$	b) $-5x^3$	c) $-8x^{15}$	d) $2x^2$

4. Realiza las siguientes operaciones de monomios:

a) $(7x^5)^2$	b) $-9x^3 + x^3 + 5x^3$	c) $-15x^4 : (-3x)$	d) $-7x^2 \cdot (-5x) \cdot x^2$
a) $49x^2$	b) $-3x^3$	c) $5x^3$	d) $35x^5$

5. Realiza las siguientes operaciones de monomios:

a) $5x^5 \cdot (-3x)$	b) $(-2x^3)^5$	c) $2x - 7x + x - 15x$	d) $-7x^3 : 2x$
a) $-15x^6$	b) $-32x^5$	c) $-19x$	d) $\frac{7}{2}x^2$

Operaciones con monomios II

Bruño

Nombre ______________________ Curso ________ Fecha ________

Para **multiplicar un polinomio por un monomio**, se multiplica cada término del polinomio por el monomio.

1. Elimina los paréntesis y reduce la siguiente expresión: $5x - 3(8x^2 - 4x - 7) - 9x - 2$

$5x - 3(8x^2 - 4x - 7) - 9x - 2 = 5x - 24x^2 + 12x + 21 - 9x - 2 = -24x^2 + 8x + 19$

2. Elimina los paréntesis y reduce las siguientes expresiones:

a) $6x - (5x^2 - 3 + 4x^2) - 9x - 8$

b) $5x^2 - 6x - 2(3x + 8x^2 - 9x - 4)$

c) $-(5x - 7 + 2x - 4x^2 + 8) + 9x^2$

d) $9(3x^2 - 5x + 7) - 5(4x - 8x^2 + 1)$

a) $-9x^2 - 3x - 5$

b) $-11x^2 + 6x + 8$

c) $13x^2 - 7x - 1$

d) $67x^2 - 65x + 58$

3. Multiplica los siguientes polinomios por monomios:

a) $(x^5 - 7x^3 + 6x - 1) \cdot 8x^2$

b) $(2x^4 - 8x^2 + 7x - 9) \cdot 7x^3$

c) $(6x^4 + 5x^3 - 8x + 7) \cdot (-9x)$

d) $(x^4 - 9x^3 + 7x - 6) \cdot (-6x^4)$

a) $8x^7 - 56x^5 + 48x^3 - 8x^2$

b) $14x^7 - 56x^5 + 49x^4 - 63x^3$

c) $-54x^5 - 45x^4 + 72x^2 - 63x$

d) $-6x^8 + 54x^7 - 42x^5 + 36x^4$

Extracción de factores comunes consiste en aplicar la propiedad distributiva en su forma inversa: $pa + pb + pc + \ldots = p(a + b + c + \ldots)$

El **monomio que se extrae** tiene como coeficiente el M.C.D. de los coeficientes, y como parte literal, las variables comunes elevadas al menor exponente.

4. Extrae todos los factores que puedas como factor común:

a) $8x - 12y$

b) $4x^5 - 6x^3$

c) $3x^4 + 15x^2 - 6x$

d) $4x^2y + 6xy^2 - 2xy$

a) $4(2x - 3y)$

b) $2x^3(2x^2 - 3)$

c) $3x(x^3 + 5x - 2)$

d) $2xy(2x + 3y - 1)$

Operacopmes con polinomios I

Nombre ______________________ Curso ________ Fecha ________

Para **sumar polinomios**:

a) Se colocan los polinomios, ordenados uno debajo del otro, de manera que coincidan los monomios semejantes.

b) Se suman los coeficientes de los monomios semejantes y se pone la misma parte literal.

1. Dados los siguientes polinomios:

$P(x) = 5x^3 - 6x + 9$

$Q(x) = -7x^4 + 5x^3 + 6x - 12$

calcula:

$P(x) + Q(x)$

$-7x^4 + 10x^3 - 3$

2. Dados los siguientes polinomios:

$P(x) = 7x^4 - 5x^2 + 2$

$Q(x) = -5x^4 + 9x^2 + 4x - 10$

calcula:

$P(x) + Q(x)$

$2x^4 + 4x^2 + 4x - 8$

El **opuesto de un polinomio** es el que se obtiene al cambiar de signo todos sus monomios. Al sumar un polinomio y su opuesto se obtiene el polinomio nulo.

3. Dado el siguiente polinomio:

$P(x) = -8x^5 + 5x^4 - 9x^2 + 2$

a) halla su opuesto: $-P(x)$

b) suma $P(x)$ con $-P(x)$. ¿Qué polinomio se obtiene?

a) $-P(x) = 8x^5 - 5x^4 + 9x^2 - 2$

b) $P(x) - P(x) = 0$

Para **restar dos polinomios**, se suma al primero el opuesto del segundo.

4. Dados los siguientes polinomios:

$P(x) = 5x^3 - 6x + 9$

$Q(x) = -7x^4 + 5x^3 + 6x - 12$

calcula:

$P(x) - Q(x)$

$7x^4 - 12x + 21$

5. Dados los siguientes polinomios:

$P(x) = 7x^4 - 5x^2 + 2$

$Q(x) = -5x^4 + 9x^2 + 4x - 10$

calcula:

$P(x) + Q(x)$

$2x^4 + 4x^2 + 4x - 8$

Operaciones con polinomios II

Bruño

Nombre ____________________ Curso ________ Fecha ____________

Para **multiplicar polinomios**:

a) Se colocan los polinomios, ordenados uno debajo del otro, de manera que coincidan los monomios semejantes. Si falta un grado, se deja un hueco, para que sea más fácil colocar los productos parciales.

b) Para multiplicar polinomios, se empieza por la izquierda y se multiplica el 1.er monomio del 2.º polinomio por todos los monomios del 1.er polinomio; los coeficientes se multiplican, y los exponentes se suman. Si falta el término de algún grado, se deja un hueco.

c) Se continúa multiplicando los demás monomios del 2.º polinomio.

d) Se suman todos los polinomios obtenidos.

1. Completa la multiplicación de los siguientes polinomios:

$$
\begin{array}{rrrrrr}
 & & 2x^3 & -\ 3x^2 & & +\ 5 \\
 & & & x^2 & -\ 4x & +\ 6 \\
\hline
\boxed{2x^5} & -\ 3x^4 & & +\ 5x^2 & & \\
 & -\ 8x^4 & +\ \boxed{12x^3} & & -\ 20x & \\
 & & 12x^3 & -\ 18x^2 & & +\ \boxed{30} \\
\hline
\boxed{2x^5} & -\ 11x^4 & +\ 24x^3 & -\ \boxed{13x^2} & -\ \boxed{20x} & +\ 30
\end{array}
$$

2. Multiplica los siguientes polinomios:

$P(x) = x^2 - 7x + 2$ $\qquad$ $Q(x) = 3x + 1$

Halla el grado del producto.

$3x^3 - 20x^2 - x + 2$

El grado del producto es 2 + 1 = 3

3. Multiplica los siguientes polinomios:

$P(x) = x^4 - 5x^3 + 3x + 1$ $\qquad$ $Q(x) = 2x^2 - x + 7$

Halla el grado del producto.

$2x^6 - 11x^5 + 12x^4 - 41x^3 + 5x^2 - 22x + 7$

El grado del producto es 4 + 2 = 6

4. Multiplica los siguientes polinomios:

$P(x) = x^2 - 4x - 3$ $\qquad$ $Q(x) = 5x + 2$

Halla el grado del producto.

$5x^3 - 22x^2 - 7x - 6$

El grado del producto es 2 + 1 = 6

Igualdades notables

Nombre ______________________ Curso ________ Fecha ________

El **cuadrado de una suma** es igual al cuadrado del primero, más el doble del primero por el segundo, más el cuadrado del segundo: $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

El **cuadrado de una diferencia** es igual al cuadrado del primero, menos el doble del primero por el segundo, más el cuadrado del segundo: $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

1. Sustituye los recuadros por el signo de igualdad = o de desigualdad ≠

a) $(3 + 4)^2 \square 3^2 + 4^2$

b) $(3 + 4)^2 \square 49$

c) $(5 - 3)^2 \square 4$

d) $(5 - 3)^2 \square 5^2 + 3^2$

a) $(3 + 4)^2 \neq 3^2 + 4^2$

b) $(3 + 4)^2 = 49$

c) $(5 - 3)^2 = 4$

d) $(5 - 3)^2 \neq 5^2 + 3^2$

Una **suma por una diferencia** es igual al cuadrado del primero menos el cuadrado del segundo: $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$

2. Calcula mentalmente:

a) $(x + 2)^2$

b) $(x - 2)^2$

c) $(x + 2)(x - 2)$

a) $x^2 + 4x + 4$

b) $x^2 - 4x + 4$

c) $x^2 - 4$

3. Calcula:

a) $(2x + 3)^2$

b) $(2x - 3)^2$

c) $(2x + 3)(2x - 3)$

a) $4x^2 + 12x + 9$

b) $4x^2 - 12x + 9$

c) $4x^2 - 9$

La **descomposición factorial** de un polinomio es su expresión como producto de factores irreducibles. Cuando la descomposición factorial es sencilla, se puede hacer mentalmente, observando si es posible extraer un factor común y aplicando las igualdades notables.

4. Halla mentalmente la descomposición factorial de:

a) $3x^4 + 6x^2$

b) $6x^3 - 8x$

c) $x^2 - 5$

d) $x^2 - 2x + 1$

e) $x^3 + 2x^2 + x$

a) $3x^2(x^2 + 2)$

b) $2x(3x^2 - 4)$

c) $(x + \sqrt{5})(x - \sqrt{5})$

d) $(x - 1)^2$

e) $x(x + 1)^2$

Nombre ______________________ Curso ________ Fecha ____________

1. Halla el valor numérico de los siguientes polinomios para los valores que se indican:

a) $P(x) = -x^3 + 5x - 4$ para $x = -2$

b) $P(x) = x^3 + 7x - 12$ para $x = 3$

c) $P(x) = 2x^5 - 8x^3 + 5x + 3$ para $x = 1$

d) $P(x) = -3x^5 + 7x^3 - 8x + 5$ para $x = -1$

a) $P(-2) = -6$ b) $P(3) = 90$ c) $P(1) = 2$ d) $P(-1) = 9$

2. Realiza las operaciones de monomios que se indican a continuación:

a) $(3x^4)^3$ b) $-5x^3 + 2x^3 + 4x^3$

c) $-12x^2 : (-4x)$ d) $-6x^2 \cdot (-9x) \cdot x^3$

a) $27x^{12}$ b) x^3 c) $3x$ d) $54x^6$

3. Elimina los paréntesis y reduce las siguientes expresiones:

a) $7x - (8x^2 + 9 + 5x^2) - 7x - 2$

b) $2x^2 - 5x - 3(2x^2 + 4x^2 - 5x - 6)$

c) $-(3x - 5 + 9x - 7x^2 + 4) + 10x^2$

d) $7(x^2 - 6x + 9) - 7(3x - 7x^2 + 9)$

a) $-13x^{12} - 11$ b) $-16x^2 + 10x + 18$ c) $17x^2 - 12x + 1$ d) $56x^2 - 63x$

4. Multiplica los siguientes polinomios:

$P(x) = -2x^4 + 3x^2 - 5x + 7$

$Q(x) = 4x^2 - 2x + 6$

Halla el grado del producto.

$-8x^6 + 4x^5 - 26x^3 + 56x^2 - 44x + 42$

El grado del producto es $4 + 2 = 6$

5. Halla mentalmente la descomposición factorial de los siguientes polinomios:

a) $x^2 + 5x$ b) $x^2 - 5x$ c) $x^2 - 25$

a) $x(x + 5)$ b) $x(x - 5)$ c) $(x + 5)(x - 5)$

OBJETIVOS

a. Identificar y resolver ecuaciones de 1.er grado.
b. Identificar y resolver ecuaciones de 2.º grado incompletas y completas.
c. Resolver ecuaciones de 1.er grado con paréntesis y con denominadores.
d. Resolver ecuaciones de 2.º grado incompletas y completas.
e. Determinar el número de soluciones de una ecuación de 2.º grado utilizando el discriminante de la ecuación.
f. Descomponer factorialmente una ecuación de 2.º grado.
g. Calcular una ecuación de 2.º grado conociendo sus raíces.
h. Calcular la suma y el producto de las soluciones de una ecuación de 2.º grado sin resolverla.
i. Resolver problemas de ecuaciones de 1.er y 2.º grado aplicando una estrategia conveniente y escogiendo adecuadamente el método más apropiado para la realización de un determinado cálculo: mentalmente, por escrito, con calculadora o con ordenador.

COMPETENCIAS BÁSICAS

Competencia en el conocimiento y la interacción con el mundo físico

- Adoptar una actitud investigadora en el planteamiento y resolución de problemas susceptibles de ser tratados algebraicamente.

Competencia para aprender a aprender

- Resolver problemas de ecuaciones escogiendo el método más conveniente para la realización del cálculo: mentalmente, por escrito, con calculadora o con ordenador.

Autonomía e iniciativa personal

- Adaptarse a usar distintas técnicas, instrumentos y métodos para el aprendizaje de los contenidos algebraicos y de ecuaciones de 1.er y 2.º grado.

CONTENIDOS

Conceptos

- Ecuación de 1.er grado.
- Solución de una ecuación de 1.er grado.
- Ecuaciones equivalentes. Transformaciones que mantienen la equivalencia.
- Ecuación de segundo grado incompleta y completa.
- Discriminante.
- Descomposición factorial.

Procedimientos

- Interpretación y utilización del lenguaje algebraico y de las ecuaciones en diferentes contextos, eligiendo la notación más adecuada para cada caso.
- Utilización de los procedimientos tradicionales para la resolución de ecuaciones de 1.er y 2.º grado.
- Identificación de problemas de ecuaciones diferenciando los elementos conocidos de los que se pretende conocer y los relevantes de los irrelevantes.
- Decisión sobre qué ecuaciones y operaciones son adecuadas en la resolución de problemas algebraicos.

Actitudes

- Valoración de la utilidad de las expresiones algebraicas para representar, comunicar o resolver diferentes situaciones de la vida cotidiana.
- Confianza en las propias capacidades para afrontar problemas de álgebra y realizar cálculos.
- Interés y respeto por las estrategias y soluciones a problemas algebraicos distintas de las propias.

CRITERIOS DE EVALUACIÓN

a.1. Expresa oralmente y por escrito los conceptos, procedimientos y terminología de las ecuaciones de 1.er grado con propiedad.
b.1. Expresa oralmente y por escrito los conceptos, procedimientos y terminología de las ecuaciones de 2.º grado con propiedad.
c.1. Resuelve ecuaciones de 1.er grado con paréntesis y con denominadores.
d.1. Resuelve ecuaciones de 2.º grado incompletas y completas.
e.1. Calcula el número de soluciones de una ecuación de 2.º grado utilizando el discriminante de la ecuación.
f.1. Factoriza una ecuación de 2.º grado.
g.1. Escribe una ecuación de 2.º grado con las dos raíces conocidas.
h.1. Calcula la suma y el producto de las soluciones de una ecuación de 2.º grado sin resolverla.
i.1. Aplica las ecuaciones de 1.er y 2.º grado a la resolución de problemas aplicando una estrategia conveniente y escogiendo adecuadamente el método más apropiado para la realización de un determinado cálculo: mentalmente, por escrito, con calculadora o con ordenador.

Ecuaciones de 1.er grado

Nombre ______________________ Curso ________ Fecha ____________

Una **ecuación de 1.er grado con una incógnita** es una ecuación que solo tiene una incógnita y en la que el mayor exponente de la variable es 1.

La **solución** es el valor de la incógnita que verifica la ecuación.

1. Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $\frac{x}{6} + 5 + x = \frac{1}{3}$

b) $\frac{x}{6} - \frac{3x-1}{4} = 2x + \frac{33}{9}$

c) $\frac{1}{5} + \frac{3x}{2} = \frac{2x}{3}$

a) $x = 4$

b) $x = \frac{3}{2}$

c) $x = -\frac{6}{25}$

Mediante la regla de la suma y la del producto transformamos la ecuación en otra equivalente más sencilla.

2. Resuelve la siguiente ecuación multiplicando previamente cada término por 30:

$$\frac{x-1}{2} = \frac{3x-10}{5} + \frac{x-2}{3}$$

$x = 5$

3. Transforma las siguientes ecuaciones en otras más sencillas y resuelve.

a) $3 - \frac{7x+2}{8} = 2x + \frac{5x+1}{4}$

b) $\frac{x-3}{4} = \frac{x-5}{6} + \frac{x-1}{9}$

c) $\frac{x-2}{3} - \frac{x-4}{5} + \frac{x-3}{4}$

a) $x = \frac{10}{13}$

b) $x = 7$

c) $x = \frac{53}{7}$

4. Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $2x - 3(x + 2) = 2(x - 1) - 1$

b) $3(2x + 1) - (x + 2) = 2x - 3(x - 1)$

c) $x - (x + 3) - 2(x + 5) = 5 - 4(x + 3)$

d) $3 + 2(x - 1) = 4x - 5$

a) $x = -1$

b) $x = \frac{1}{3}$

c) $x = 3$

d) $x = 3$

Ecuaciones de 2.° grado

Nombre ______________________ Curso ________ Fecha ____________

Las soluciones de una ecuación de 2.° grado son los valores de la incógnita que verifican la ecuación. La ecuación de 2.° grado puede estar completa: $ax^2 + bx + c$ o incompleta: $ax^2 + bx$; $ax^2 + c$ o $\boldsymbol{ax^2}$. El término que no puede faltar es el de segundo grado.

1. Resuelve mentalmente, si es posible:

a) $x^2 = 0$ b) $x^2 = 9$ c) $x^2 = -16$ d) $x^2=121$

a) $x_1 = x_2 = 0$ b) $x_1 = 3$; $x_2 = -3$ c) No tiene solución d) $x_1 = 11$; $x_2 = -11$

2. Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $x^2 - 4 = 0$ b) $x^2 - 36 = 0$ c) $x^2 - 9 = 0$ d) $x^2 - 100 = 0$

a) $x_1 = 2$, $x_2 = -2$ b) $x_1 = 6$, $x_2 = -6$ c) $x_1 = 3$, $x_2 = -3$ d) $x_1 = 10$, $x_2 = -10$

La ecuación de 2.° grado incompleta $ax^2 + bx$, se resuelve sacando factor común **x.** Una solución es $x = 0$.

3. Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $2x + 5x^2 = 0$ b) $4x^2 - x = 0$ c) $3x^2 - 4x = 0$ d) $x^2 - 3x = 0$

a) $x_1 = 0$, $x_2 = -2/5$ b) $x_1 = 0$, $x_2 = ¼$ c) $x_1 = 0$, $x_2 = 4/3$ d) $x_1 = 0$, $x_2 = 3$

Las soluciones de la ecuación completa de 2.° grado se obtienen aplicando la fórmula:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

4. Resuelve las siguientes ecuaciones aplicando la fórmula:

a) $x^2 + 3x - 4 = 0$ b) $x^2 - 3x - 10 = 0$ c) $x^2 + x - 6 = 0$ d) $2x^2 + 3x - 2 = 0$

a) $x_1 = 1$, $x_2 = -4$ b) $x_1 = 5$, $x_2 = -2$ c) $x_1 = 2$, $x_2 = -3$ d) $x_1 = 1/2$, $x_2 = -2$

Número de soluciones y factorización I

Nombre ______________________ Curso ________ Fecha ____________

Se llama **discriminante** de la ecuación de 2.° grado, y se representa por Δ, al valor: $\Delta = b^2 - 4ac$

Si $\Delta > 0$, la ecuación tiene dos raíces reales y distintas. Si $\Delta = 0$, la ecuación tiene una solución real. Se dice que es doble. Y si $\Delta < 0$, la ecuación no tiene soluciones reales.

1. Sin resolver las siguientes ecuaciones, determina cuántas soluciones tienen:

a) $x^2 + 5x - 7 = 0$ b) $2x^2 - 3x + 5 = 0$

c) $x^2 + 4x + 4 = 0$ d) $4x^2 - 4x + 1 = 0$

a) $\Delta = 53 > 0 \Rightarrow$ Tiene dos soluciones. b) $\Delta = -31 < 0 \Rightarrow$ No tiene soluciones.

c) $\Delta = 0 \Rightarrow$ Tiene una solución doble. d) $\Delta = 0 \Rightarrow$ Tiene una solución doble.

2. Calcula Δ e indica cuantas soluciones tienen las siguientes ecuaciones:

a) $4x^2 - 13x + 3 = 0$ b) $2x^2 - 3x + 1 = 0$ c) $5x^2 - 14x - 3 = 0$

a) $x_1 = 1/4$, $x_2 = 3$ b) $x_1 = 1/2$, $x_2 = 1$ c) $x_1 = 3$, $x_2 = -1/5$

3. Calcula las raíces de las siguientes ecuaciones y exprésalas en forma factorial:

a) $x^2 - x - 12 = 0$ b) $2x^2 - x - 3 = 0$ c) $3x^2 + 5x - 12 = 0$ d) $5x^2 - 2x = 0$

a) $(x - 4)(x + 3)$ b) $2(x - 3/2)(x + 1)$ c) $3(x - 4/3)(x + x)$ d) $5x(x - 2/5)$

4. Halla la descomposición factorial de los siguientes polinomios de segundo grado:

a) $3x^2 - 7x + 2 = 0$ b) $4x^2 - x - 3 = 0$ c) $2x^2 - 13x + 15 = 0$ d) $4x^2 + 7x - 2 = 0$

a) $3(x - 1/3)(x - 2)$ b) $4(x + 3/4)(x - 1)$ c) $2(x - 3/2)(x - 5)$ d) $4(x - 1/4)(x + 2)$

Un trinomio de 2.° grado $ax^2 + bx + c$ con las raíces x_1 y x_2 se descompone factorialmente de la siguiente forma:

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$$

Matemáticas 2.º ESO ▮ Unidad 8 ▮ Ficha 4
Número de soluciones y factorización II

Nombre ______________________ Curso ________ Fecha ____________

Para hallar una ecuación de 2.º grado conociendo las raíces o soluciones x_1 y x_2, basta multiplicar los binomios:

$$(x - x_1)(x - x_2) = 0$$

1. Escribe en cada caso una ecuación de segundo grado cuyas soluciones sean:

a) $x_1 = 3, x_2 = -5$ b) $x_1 = 2, x_2 = -3$ c) $x_1 = -1, x_2 =$ d) $x_1 =, x_2 =$

a) $x_2 + 2x - 15 = 0$ b) $x_2 + x - 6 = 0$ c) $5x_2 + 7x + 2 = 0$ d) $8x_2 - 10x - 3 = 0$

2. Halla una ecuación de 2.º grado que tenga las raíces siguientes:

a) $x_1 = 4, x_2 = -5$ b) $x_1 = 3, x_2 = 6$

a) $x_2 + x - 20 = 0$ b) $x_2 - 9x + 18 = 0$

Las raíces o soluciones x_1 y x_2 de la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$ cumplen las siguientes relaciones:

a) $S = -\frac{b}{a}$ b) $P = \frac{c}{d}$

3. Sin resolver las siguientes ecuaciones, calcula la suma y el producto de sus soluciones:

a) $2x^2 + 5x + 2 = 0$ b) $x^2 - 7x + 12 = 0$ c) $4x^2 - 12x - 7 = 0$ d) $6x^2 - 7x + 2 = 0$

a) $S = -5/2, P = 1$ b) $S = 7, P = 12$ c) $S = 3, P = -7/4$ d) $S = 7/6, P = 1/3$

4. Calcula la suma y el producto de sus soluciones:

a) $2x^2 - 14x - 5 = 0$ b) $x^2 - 7x + 4 = 0$ c) $2x^2 - 5x + 2 = 0$ d) $2x^2 - 3x + 6 = 0$

a) $S = 7, P = -5/2$ b) $S = 7, P = 4$ c) $S = 5/2, P = 1$ d) $S = 3/2, P = 3$

Matemáticas 2.° ESO ▮ Unidad 8 ▮ Ficha 5
Problemas de ecuaciones I

Nombre ______________________ Curso ________ Fecha ____________

En los problemas numéricos conviene recordar: Intenta asociar la incógnita con el número menor. Un número par es $2x$. Un número impar es $2x + 1$. El consecutivo de un número es $x + 1$.

1. Plantea la ecuación y resuelve los siguientes problemas numéricos:

Calcula un número cuya cuarta parte más la sexta parte sumen 15 unidades.

Número: x

$$\frac{x}{5} = \frac{x}{6} = 15 \Rightarrow x = 36$$

2. La suma de tres números pares consecutivos es 60. Calcula dichos números.

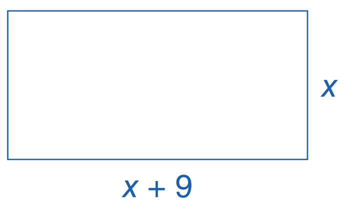
Primer número: $2x$, segundo número: $2x + 2$, tercer número: $2x + 4$.

$2x + 2x + 2 + 2x + 4 = 60 \Rightarrow x = 9$ Los números son: 18, 20 y 22

En los problemas geométricos recuerda hacer siempre un dibujo en el que se escriban los datos y las incógnitas.

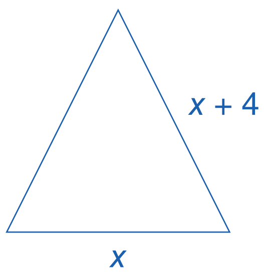
3. Resuelve los siguientes problemas.

a) La base de un rectángulo mide 9 cm más que la altura. Si su perímetro mide 74 cm, ¿cuáles serán las dimensiones del rectángulo?



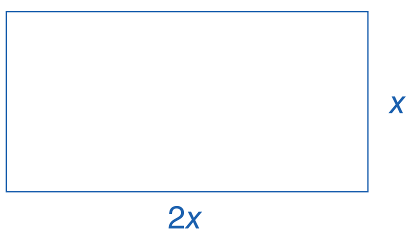
$2(x + 9 + x) = 74 \Rightarrow x = 14$
La altura mide: 14 cm
La base mide: 23 cm

b) En un triángulo isósceles, cada uno de los lados iguales es 4 cm más largo que el lado desigual. Si el perímetro del triángulo mide 44 cm, ¿cuál es la longitud de cada lado?



$x + 2(x + 4) = 44 \Rightarrow x = 12$
Los lados miden:
Lado desigual: 12 cm
Lados iguales: 16 cm

c) En un rectángulo la base es el doble que la altura. Calcula la longitud de sus lados si su perímetro mide 72 cm



$2(x + 2x) = 72 \Rightarrow x = 12$
La altura mide 12 cm
La base mide 24 cm

Problemas de ecuaciones II

Bruño

Nombre ______________________ Curso ________ Fecha ____________

En los problemas de edades es conveniente hacer una tabla:

	Hoy	Dentro de 20 años
Hijo	x	$x + 20$
Madre	$3x$	$3x + 20$

Plantea y resuelve los siguientes problemas:

1. La edad de un padre es cinco veces la del hijo. Si dentro de dos años la edad del padre será cuatro veces la del hijo, ¿cuál es la edad actual de cada uno?

	Hoy	Dentro de 2 años
Edad del hijo	x	$x + 2$
Edad del padre	$5x$	$5x + 2$

$5x + 2 = 4(x + 2) \Rightarrow x = 6$
La edad del hijo es 6 años.
La edad del padre es 30 años.

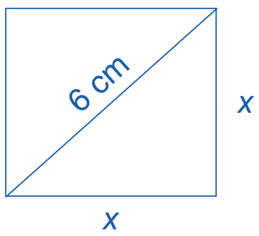
2. Una madre tiene 35 años más que su hijo, y dentro de 15 años su edad será el doble de la del hijo. ¿Cuántos años tienen en la actualidad?

	Hoy	Dentro de 15 años
Edad del hijo	x	$x + 15$
Edad de la madre	$35 + x$	$x + 35 + 15$

$x + 35 + 15 = 2(x + 15) \Rightarrow x = 20$
La edad del hijo: 20 años.
La edad de la madre: 55 años.

En los problemas de ecuaciones de 2.º grado, comprueba las soluciones. Rechaza las soluciones de la ecuación que no lo sean del problema.

3. La diagonal de un cuadrado mide 6 cm. Calcula la longitud del lado del cuadrado.



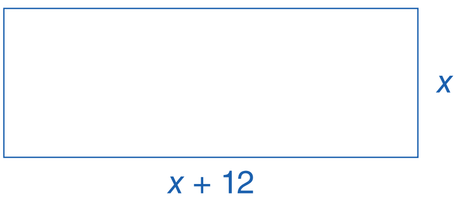
Lado del cuadrado: x
$x^2 + x^2 = 36 \Rightarrow x_1\ 3\sqrt{2}=;\ \ x_2 = -3\sqrt{2}$
La solución negativa no tiene sentido.
El lado del cuadrado es $3\sqrt{2}$ cm

4. Halla dos números enteros consecutivos tales que la suma de sus cuadrados sea 313.

Primer número: x
$x^2 + (x + 1)^2 = 313 \Rightarrow x_1 = 12,\ \ x_2 = -13$

Segundo número: $x + 1$
Los números son: 12 y 13 o bien –13 y –12

5. Calcula las dimensiones de una finca rectangular que tiene 12 dam más de largo que de ancho, y una superficie de 640 dam^2.



$(x + 12)x = 640 \Rightarrow x_1 = 20,\ \ x_2 = -32$
La solución negativa no es válida.
La finca tiene 32 dam por 20 dam.

Nombre ______________________ Curso ________ Fecha ____________

1. Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $2(3x - 5) - 4(x - 2) = 13 - x$

b) $\dfrac{x-1}{2} - \dfrac{x+1}{3} = x - \dfrac{5}{2}$

a) $x = 5$

b) $x = 2$

2. Resuelve las siguientes ecuaciones de 2.º grado aplicando la fórmula.

a) $5x^2 - 28x + 15 = 0$

b) $x^2 - 9x + 18 = 0$

a) $x_1 = 3/5$, $x_2 = 5$

b) $x_1 = 3$, $x_2 = 6$

3. Halla la descomposición factorial de los siguientes polinomios de segundo grado:

a) $x^2 + 4x - 12 = 0$

b) $x^2 - x - 6 = 0$

a) $x_1 = 2$, $x_2 = -6$

$(x - 2) \cdot (x + 6)$

b) $x_1 = 3$, $x_2 = -2$

$(x - 3) \cdot (x + 2)$

4. Sin resolver las siguientes ecuaciones, calcula la suma y el producto de sus soluciones:

a) $3x^2 - 21x - 4 = 0$

b) $2x^2 - 5x + 4 = 0$

c) $3x^2 + 6x - 8 = 0$

a) $S = 7$, $P = -4/3$

b) $S = 5/2$, $P = 2$

c) $S = -2$, $P = -8/3$

Plantea y resuelve los siguientes problemas:

5. Cada uno de los lados iguales de un triángulo isósceles mide el triple que el lado desigual. Si su perímetro mide 56 cm, calcula la longitud de los lados del triángulo.

$3x + 3x + x = 56 \Rightarrow x = 8$ cm

Lado desigual = 8 cm

Lados iguales: 24 cm

6. El triple del cuadrado de un número natural es el doble del número más 645. Calcula dicho número.

Número: x

$3x^2 = 2x + 645 \Rightarrow x_1 = 15$, $x_2 = -43/3$

Como el número es natural, la solución fraccionaria no es válida.

El número es 15.

OBJETIVOS

a. Identificar y representar las soluciones de una ecuación lineal con dos incógnitas.
b. Identificar un sistema lineal de dos ecuaciones con dos incógnitas.
c. Resolver gráficamente un sistema lineal de dos ecuaciones con dos incógnitas.
d. Clasificar un sistema lineal de dos ecuaciones con dos incógnitas en compatible e incompatible e interpretarlo gráficamente.
e. Resolver un sistema lineal de dos ecuaciones con dos incógnitas utilizando el método de sustitución, el de igualación y el de reducción.
f. Determinar el mejor método para resolver un sistema.
g. Resolver problemas de sistemas lineales de dos ecuaciones con dos incógnitas aplicando una estrategia conveniente y escogiendo adecuadamente el método más apropiado para la realización de un determinado cálculo: mentalmente, por escrito, con calculadora o con ordenador.

COMPETENCIAS BÁSICAS

Competencia en el conocimiento y la interacción con el mundo físico

- Adoptar una actitud investigadora en el planteamiento y resolución de problemas susceptibles de ser tratados algebraicamente.

Competencia para aprender a aprender

- Resolver problemas de sistemas de ecuaciones lineales escogiendo el método más conveniente para la realización del cálculo: mentalmente, por escrito, con calculadora o con ordenador.

Autonomía e iniciativa personal

- Adaptarse a usar distintas técnicas, instrumentos y métodos para el aprendizaje de los contenidos algebraicos y de sistemas de ecuaciones lineales.

CONTENIDOS

Conceptos

- Ecuación lineal de dos incógnitas.
- Solución de una ecuación lineal con dos incógnitas.
- Sistema lineal de dos ecuaciones con dos incógnitas.
- Solución de un sistema. Sistemas equivalentes.
- Sistema compatible e incompatible.
- Método de resolución: gráfico, sustitución, reducción e igualación.

Procedimientos

- Interpretación y utilización del lenguaje algebraico, de las ecuaciones lineales y de los sistemas lineales en diferentes contextos, eligiendo la notación más adecuada para cada caso.
- Utilización de los procedimientos tradicionales de resolución de sistemas lineales de dos ecuaciones con dos incógnitas: gráfico, sustitución, reducción e igualación.
- Identificación de problemas de sistemas de ecuaciones diferenciando los elementos conocidos de los que se pretende conocer y los relevantes de los irrelevantes.
- Decisión sobre qué sistemas y métodos son adecuados en la resolución de problemas de sistemas de ecuaciones.

Actitudes

- Valoración de la utilidad de las expresiones algebraicas para representar, comunicar o resolver diferentes situaciones de la vida cotidiana.
- Curiosidad e interés por enfrentarse a problemas algebraicos e investigar las regularidades y relaciones que aparecen en las estructuras algebraicas.
- Confianza en las propias capacidades para afrontar problemas de álgebra y realizar cálculos.
- Disposición favorable a la revisión y mejora del resultado de cualquier cálculo o problema algebraico.
- Interés y respeto por las estrategias y soluciones a problemas algebraicos distintas de las propias.

CRITERIOS DE EVALUACIÓN

a.1. Identifica y representa una ecuación lineal con dos incógnitas.
b.1. Identifica un sistema lineal de dos ecuaciones con dos incógnitas.
c.1. Resuelve gráficamente un sistema lineal de dos ecuaciones con dos incógnitas.
d.1. Clasifica un sistema lineal de dos ecuaciones con dos incógnitas en compatible e incompatible e interpreta gráficamente.
e.1. Resuelve un sistema lineal de dos ecuaciones con dos incógnitas utilizando el método de sustitución, el de igualación y el de reducción.
f.1. Determina el mejor método para resolver un sistema.
g.1. Resuelve problemas de sistemas lineales de dos ecuaciones con dos incógnitas.

Matemáticas 2.º ESO ▮ Unidad 9 ▮ Ficha 1
Sistemas lineales. Resolución gráfica

Bruño

Nombre ______________________ Curso ________ Fecha ________

La **interpretación gráfica** de las soluciones de una ecuación lineal con dos incógnitas es una recta.
Procedimiento para representar una recta:

a) Se despeja la incógnita que resulte más fácil de despejar.

b) Se construye una tabla con dos valores.

c) Se representan los dos puntos obtenidos en unos ejes coordenados.

d) Se unen mediante una recta.

1. La suma de dos números x e y es 5. Escribe una ecuación que exprese dicha condición y calcula cinco parejas de números que la verifiquen. Representa gráficamente el conjunto de todas las soluciones.

$x + y = 5$

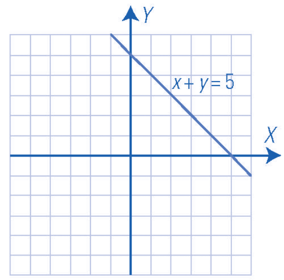
$A(1, 4)$

$B(2, 3)$

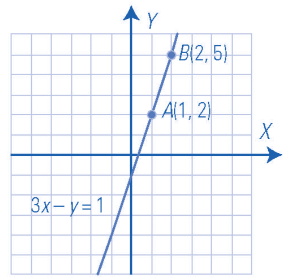
$C(3, 2)$

$D(4, 1)$

$E(5, 0)$



2. Haz la representación gráfica de las soluciones de la siguiente ecuación: $3x - y = 1$.



Resolución gráfica de un sistema lineal:

a) Se representa la recta correspondiente a la 1.ª ecuación.

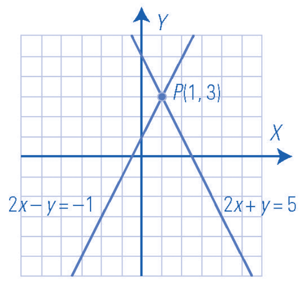
b) Se representa la recta correspondiente a la 2.ª ecuación.

c) La solución es el punto de corte de ambas rectas.

3. Resuelve el siguiente sistema gráficamente:

$$\left.\begin{aligned} 2x + x &= 5 \\ 2x - x &= -1 \end{aligned}\right\}$$

x = 1, y = 3



Los sistemas lineales se clasifican por el número de soluciones en:

a) **Compatibles:** si tienen solución. Las dos rectas se cortan.

b) **Incompatibles:** si no tienen solución. Las dos rectas son paralelas.

4. ¿Es el anterior sistema lineal compatible o incompatible:

Es compatible porque tiene solución.

Matemáticas 2.º ESO ▮ Unidad 9 ▮ Ficha 2
Métodos de sustitución e igualación

Bruño

Nombre ______________________ Curso ________ Fecha ____________

Se resuelven fácilmente por **sustitución** los sistemas en los que **una de las incógnitas** ya esté despejada.

a) Se sustituye el valor de la incógnita despejada en la otra ecuación.

b) Se resuelve la ecuación resultante.

c) El valor obtenido se sustituye en la ecuación donde estaba despejada la 1.ª incógnita.

1. Un número x es 2 unidades mayor que otro número y. Además, el doble del primero más el triple del segundo es 19. Halla el valor de ambos números.

x = 1.er número

y = 2.º número

$$\left.\begin{array}{r} x = y + 2 \\ 2x + 3y = 19 \end{array}\right\} \Rightarrow x = 5,\ y = 3$$

Se resuelven fácilmente por **igualación** los sistemas en los que una de las incógnitas ya está despejada **en las dos ecuaciones**.

2. Resuelve el siguiente sistema por el método más apropiado: $\left.\begin{array}{r} y = 2x + 7 \\ y = 3x + 9 \end{array}\right\}$

Se resuelve por igualación.

$x = -2,\ y = 3$

3. Resuelve el siguiente sistema por el método más apropiado: $\left.\begin{array}{r} 3x + 2y = 5 \\ y = 5x + 9 \end{array}\right\}$

Se resuelve por sustitución.

$x = -1,\ y = 4$

4. La diferencia de dos números x e y es 3, y el triple del primero más el doble del segundo es 19. Halla el valor de ambos números.

x = 1.er número

y = 2.º número

$$\left.\begin{array}{r} x - y = 3 \\ 3x + 2y = 19 \end{array}\right\} \Rightarrow x = 5,\ y = 2$$

5. La suma de dos números x e y es 15, y uno es el doble del otro. Halla el valor de ambos números.

x = 1.er número

y = 2.º número

$$\left.\begin{array}{r} x + y = 15 \\ y = 19 \end{array}\right\} 2x \Rightarrow x = 5,\ y = 10$$

Método de reducción y qué método utilizar I

Nombre ______________________ Curso ________ Fecha ____________

Se resuelven fácilmente por **reducción** los sistemas en los que los coeficientes de una incógnita son: **iguales, opuestos, uno múltiplo del otro**.
a) Mediante multiplicaciones apropiadas, se obtiene un sistema equivalente con los coeficientes de una misma incógnita opuestos.
b) Se suman las dos ecuaciones.
c) Se resuelve la ecuación resultante.
d) El valor obtenido se sustituye en la ecuación más sencilla y se halla el valor de la otra incógnita.

1. Resuelve el siguiente sistema por reducción:

$$\left.\begin{aligned} 3x + 2y &= 23 \\ 5x - 2y &= 17 \end{aligned}\right\}$$

Se resuelve por reducción; sumando las dos ecuaciones se obtiene *x*.
$x = 5,\ y = 4$

2. Resuelve el siguiente sistema por reducción:

$$\left.\begin{aligned} 5x + 3y &= 7 \\ 4x + 3y &= 5 \end{aligned}\right\}$$

Se resuelve por reducción; restando las dos ecuaciones se obtiene *x*.
$x = 2,\ y = -1$

3. Resuelve el siguiente sistema por reducción:

$$\left.\begin{aligned} 2x + 3y &= -4 \\ 5x - 6y &= 17 \end{aligned}\right\}$$

Se resuelve por reducción; multiplicando la 1.ª ecuación por 2 y sumando se obtiene *x*.
$x = 1,\ y = -2$

4. El triple de un número más el doble de otro es igual a 17, y cinco veces el primero menos el doble del segundo es igual a 7. Halla ambos números.

x = 1.er número
y = 2.º número

$$\left.\begin{aligned} 3x + 2y &= 17 \\ 5x - 2y &= 7 \end{aligned}\right\} \Rightarrow x = 3,\ y = 4$$

5. Tres kilos de manzanas y dos kilos de naranjas cuestan 9 €. Dos kilos de manzanas y 2 kilos de naranjas cuestan 7 €. ¿Cuánto vale el kilo de manzanas y el kilo de naranjas?

x = precio de un kilo de manzanas.
y = precio de un kilo de naranjas.

$$\left.\begin{aligned} 3x + 2y &= 9 \\ 2x + 2y &= 7 \end{aligned}\right\}$$

x = 2 € el kilo de manzanas.
y = 1,5 € el kilo de naranjas.

Método de reducción y qué método utilizar II

Nombre ______________________ Curso ________ Fecha ____________

Para elegir un **método para resolver un sistema** se debe tener en cuenta que:

a) Se resuelven fácilmente por sustitución los sistemas en los que una de las incógnitas ya esté despejada.

b) Se resuelven fácilmente por **igualación** los sistemas en los que una de las incógnitas ya esté despejada en las dos ecuaciones.

c) Se resuelven por **reducción** los sistemas en los que no parezca fácil aplicar sustitución o igualación.

1. Resuelve el siguiente sistema por el método más apropiado:

$$\left.\begin{aligned} y &= -5x + 13 \\ y &= -4x + 10 \end{aligned}\right\}$$

Se resuelve por igualación. También se resuelve bien por reducción; restando las dos ecuaciones se obtiene *x*.

$x = 3$, $y = -2$

2. Resuelve el siguiente sistema por el método más apropiado:

$$\left.\begin{aligned} x + 2y &= 4 \\ x &= 3y - 11 \end{aligned}\right\}$$

Se resuelve por sustitución.

$x = -2$, $y = 3$

3. Resuelve el siguiente sistema por el método más apropiado:

$$\left.\begin{aligned} 5x + 3y &= 12 \\ 7x - 6y &= 27 \end{aligned}\right\}$$

Se resuelve por reducción; multiplicando la 1.ª ecuación por 2 y sumando se obtiene *x*.

$x = 3$, $y = -1$

4. El doble de un número más el triple de otro es igual a 16, y seis veces el primero menos cinco veces el segundo es igual a 20. Calcula ambos números.

x = 1.er número

y = 2.º número

$$\left.\begin{aligned} 2x + 3y &= 16 \\ 6x - 5y &= 20 \end{aligned}\right\} \Rightarrow x = 5,\ y = 2$$

Bruño

Resolución de problemas de sistemas I

Nombre ______________________ Curso ________ Fecha ________

El **procedimiento de resolución de problemas** se puede dividir en los siguientes pasos:

a) **Entérate**: se escriben las **incógnitas**, los **datos** y las **preguntas**.

b) **Manos a la obra**: se plantean las relaciones, se transforman en un sistema y se resuelve este sistema.

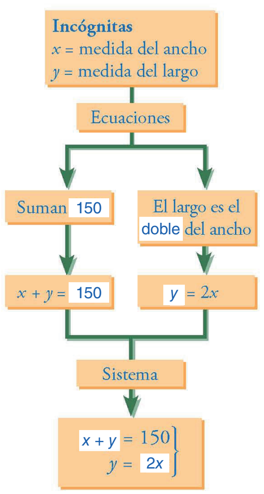
c) **Solución y comprobación**: se escriben las respuestas a las preguntas que hace el problema y se comprueba que cumplen las relaciones dadas.

1. Resuelve mentalmente el siguiente problema: Entre Sonia y Ana tienen 30 €. Si Sonia tiene el doble que Ana, ¿cuánto dinero tiene cada una?

Sonia tiene 20 €, y Ana, 10 €

2. Rellena los huecos en el siguiente esquema de transformación de los datos en un sistema. A continuación resuelve el problema.

Un campo de fútbol tiene forma rectangular. El largo más el ancho mide 150 m, y el largo es el doble del ancho. ¿Cuánto mide cada lado?



a) Entérate:

x = medida del ancho.
y = medida del largo.
La suma del ancho y del largo es 150 m
El largo es el doble del ancho.
¿Cuánto miden el largo y el ancho?

b) Manos a la obra:

Ancho + largo = 150 $\Rightarrow x + y = 150$
Largo = 2 · ancho $\Rightarrow y = 2x$

Sistema: $\left.\begin{array}{r} x + y = 150 \\ y = 2x \end{array}\right\} \Rightarrow$ Se resuelve por sustitución:

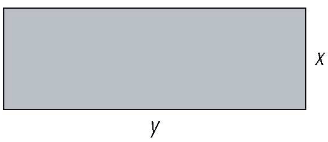
$x + 2x = 150 \Rightarrow 3x = 150 \Rightarrow x = 50$
Sustituyendo $x = 50$ en $y = 2x \Rightarrow y = 2 \cdot 50 = 100$

c) Solución

El ancho mide: 50 m
El largo mide: 100 m
Suma del ancho y del largo: 50 + 100 = 150 m
El largo es el doble del ancho: 2 · 50 m = 100 m

3. Halla los lados de un rectángulo sabiendo que uno es el triple del otro y que el perímetro mide 40 m.

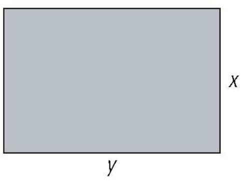
$$\left.\begin{array}{r} y = 3x \\ 2x + 2y = 40 \end{array}\right\} \Rightarrow x = 5 \text{ m},\ y = 15 \text{ m}$$



4. Un aula tiene forma rectangular, mide 2 metros más de largo que de ancho y la suma del largo y del ancho es 14 m. Halla el área del aula.

$$\left.\begin{array}{r} y = x + 2 \\ x + y = 14 \end{array}\right\} \Rightarrow x = 6 \text{ m},\ y = 8 \text{ m}$$

Área = $8 \cdot 6 = 48$ m^2



Matemáticas 2.º ESO ▮ Unidad 9 ▮ Ficha 6
Resolución de problemas de sistemas I

Nombre ______________________ Curso ________ Fecha ____________

1. La suma de dos números es 3, y su diferencia es 11. Halla el valor de ambos números.

x = el 1.er número

y = el 2.º número

$$\left.\begin{array}{r} x + y = 3 \\ x - y = 11 \end{array}\right\} \Rightarrow x = 7,\ y = -4$$

2. En una tienda 5 bocadillos de jamón y dos refrescos de cola cuestan 17 €, y 3 bocadillos de jamón y 7 refrescos de cola, 16 €. ¿Cuánto cuesta cada bocadillo de jamón y cada refresco de cola?

x = precio del bocadillo de jamón.

y = precio del refresco de cola.

$$\left.\begin{array}{r} 5x + 2y = 17 \\ 3x - 7y = 16 \end{array}\right\}$$

x = 3 € el bocadillo de jamón.

y = 1 € el refresco de cola.

3. Hoy la edad de Ana es el triple de la de su hija, y hace 5 años era cinco veces mayor. ¿Cuántos años tiene actualmente cada una?

	Edad hoy	Edad hace 5 años
Hija	x	$x - 5$
Ana	y	$y - 5$

$$\left.\begin{array}{r} y = 3x \\ y - 5 = 5(x - 5) \end{array}\right\}$$

Edad de la hija hoy: x = 10 años.

Edad de Ana hoy: y = 30 años.

4. Dos kilos de gambas y tres kilos de pulpo cuestan 51 €, y tres kilos de gambas y dos kilos de pulpo cuestan 54 €. ¿Cuánto cuesta cada kilo de gambas y cada kilo de pulpo?

x = precio del kilo de gambas.

y = precio del kilo de pulpo.

$$\left.\begin{array}{r} 2x + 3y = 51 \\ 3x + 2y = 54 \end{array}\right\}$$

x = 12 € el kilo de gambas.

y = 9 € el kilo de pulpo.

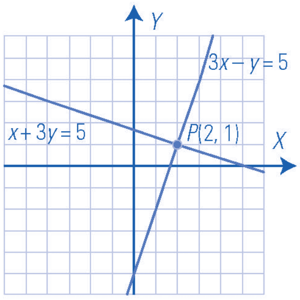
Nombre ______________________ Curso ________ Fecha ____________

1. Comprueba si $x = 2$, $y = 3$ es solución del siguiente sistema: $\left.\begin{array}{r} x + 4y = 14 \\ 5x + y = 13 \end{array}\right\}$

$\left.\begin{array}{r} 2 + 4 \cdot 3 = 14 \\ 5 \cdot 2 + 3 = 13 \end{array}\right\}$ Verifica las dos ecuaciones, luego es solución del sistema.

2. Resuelve el siguiente sistema gráficamente:

$\left.\begin{array}{r} 3x - y = 5 \\ x + 3y = 5 \end{array}\right\}$ ¿Es compatible o incompatible?



$x = 2$, $y = 1$

Es compatible porque tiene solución.

3. Resuelve el siguiente sistema por el método más apropiado:

$\left.\begin{array}{r} 2x + 3y = 7 \\ -2x + 5y = 1 \end{array}\right\}$

Se resuelve por reducción; sumando las dos ecuaciones se obtiene y $x = 2$, $y = 1$

4. Un número x es 11 unidades mayor que otro número y. Además, el primero menos el doble del segundo es 9. Halla el valor de ambos números.

x = 1.er número

y = 2.º número

$\left.\begin{array}{r} x = y + 11 \\ x - 2y = 91 \end{array}\right\} \Rightarrow x = 13,\ y = 2$

5. Hoy la edad de Miguel es el doble de la edad de María. Dentro de 10 años la suma de sus edades será 65. ¿Cuántos años tiene actualmente cada uno?

	Edad hoy	Edad dentro de 10 años
Marta	x	$x + 10$
Miguel	y	$y + 10$

$\left.\begin{array}{r} y = 2x \\ x - 2y = 9 \end{array}\right\}$

Edad de María hoy: $x = 15$ años.

Edad de Miguel hoy: $y = 30$ años.

Bruño

OBJETIVOS

a. Utilizar los conceptos, procedimientos y terminología de las funciones constantes, lineales, afines y de proporcionalidad inversa con propiedad.
b. Identificar las fórmulas que corresponden a una función constante, lineal o afín y calcula la pendiente en los casos correspondientes.
c. Identificar una función por su gráfica.
d. Identificar una función lineal o de proporcionalidad directa por una tabla, una gráfica y por la fórmula.
e. Calcular la pendiente de una función lineal en una tabla, en una gráfica y en la fórmula.
f. Escribir la ecuación de una recta que pasa por dos puntos.
g. Determinar la fórmula de una función afín a partir de su gráfica.
h. Identificar rectas horizontales y verticales y determinar si son funciones.
i. Identificar una función de proporcionalidad inversa por una tabla, una gráfica y por la fórmula.
j. Calcular la constante de proporcionalidad de una función de proporcionalidad inversa en una tabla, en una gráfica o en la fórmula.
k. Determinar la fórmula de una función de proporcionalidad inversa a partir de su gráfica.

COMPETENCIAS BÁSICAS

Competencia en el conocimiento y la interacción con el mundo físico

- Aplicar conocimientos básicos de rectas e hipérbolas para interpretar fenómenos observables en el mundo físico y natural.

Competencia social y ciudadana

- Tomar decisiones desde el análisis funcional de datos de rectas e hipérbolas.

Competencia para aprender a aprender

- Valorar la regularidad y constancia del trabajo diario dedicado al estudio y a la realización de actividades de aprendizaje.

CONTENIDOS

Conceptos

- Ejes de coordenadas.
- Función. Variable independiente. Variable dependiente.
- Variable discreta y continua.
- Función constante.
- Función lineal o de proporcionalidad directa.
- Función afín.
- Pendiente de una recta.
- Función de proporcionalidad inversa. Constante de proporcionalidad.
- Hipérbola.

Procedimientos

- Utilización e interpretación del lenguaje gráfico teniendo en cuenta la situación que se representa y utilizando el vocabulario y los símbolos adecuados.
- Construcción de gráficas a partir de tablas o de fórmulas y de descripciones verbales de un problema, eligiendo en cada caso el tipo de gráfica y medio de representación más adecuado.
- Determinación de fórmulas de funciones constantes, lineales, afines y de proporcionalidad inversa a partir de sus gráficas.

Actitudes

- Valoración de la utilidad del lenguaje gráfico para representar y resolver problemas de la vida cotidiana y del conocimiento científico.
- Curiosidad por investigar relaciones entre magnitudes o fenómenos.

CRITERIOS DE EVALUACIÓN

a.1. Utiliza los conceptos, procedimientos y terminología de las funciones constantes, lineales, afines y de proporcionalidad inversa con propiedad.
b.1. Identifica las fórmulas que corresponden a una función constante, lineal o afín y calcula la pendiente en los casos correspondientes.
c.1. Identifica una función por su gráfica.
d.1. Identifica una función lineal o de proporcionalidad directa por una tabla, una gráfica y por la fórmula.
e.1. Calcula la pendiente de una función lineal en una tabla, en una gráfica y en la fórmula.
f.1. Escribe la ecuación de una recta que pasa por dos puntos.
g.1. Determina la fórmula de una función afín a partir de su gráfica.
h.1. Identifica rectas horizontales y verticales y determinar si son funciones.
i.1. Identifica una función de proporcionalidad inversa por una tabla, una gráfica y por la fórmula.
j.1. Calcula la constante de proporcionalidad de una función de proporcionalidad inversa en una tabla, en una gráfica o en la fórmula.
k.1. Determina la fórmula de una función de proporcionalidad inversa a partir de su gráfica.

Bruño

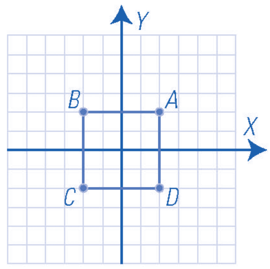
Nombre ______________________________ Curso ________ Fecha ____________

Una **función** es una relación entre dos variables *x* e *y*, de forma que a cada valor de *x* le corresponde un único valor de *y*. A *x* se le llama **variable independiente**. A *y* se le llama **variable dependiente**, y su valor se calcula a partir del valor de *x*.

La **gráfica** de una función es la representación de los pares de valores (*x*, *y*) en los ejes de coordenadas.

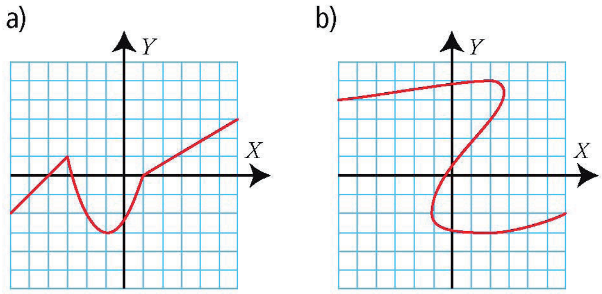
1. Representa en unos ejes coordenados los siguientes puntos y únelos en orden alfabético. Une también el último con el primero. ¿Qué figura se obtiene?

$A(2, 2)$, $B(-2, 2)$, $C(-2, -2)$ y $D(2, -2)$



Se obtiene un cuadrado

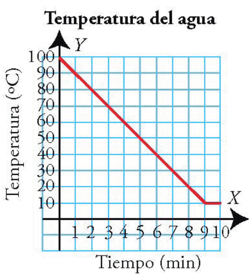
2. Indica cuáles de las siguientes gráficas son funciones y por qué:



a) Sí es función, porque para cada valor de la variable independiente, *x*, solo existe un único valor de la variable dependiente.

b) No es función, porque hay valores de la variable independiente, *x*, a los que les corresponden dos valores de la variable dependiente, *x*. Por ejemplo, para *x* = 5 la variable y vale 1 *y* – 1.

3. En la siguiente gráfica, indica: a) qué magnitudes se relacionan b) cuál es la variable independiente y cuál es la variable dependiente.



a) Se relacionan el tiempo en minutos y la temperatura en °C.

b) La variable independiente es el tiempo y La variable dependiente es la temperatura.

Función lineal o de proporcionalidad directa I

Nombre ______________________ Curso ________ Fecha ____________

Una **tabla de valores es de una función de proporcionalidad directa** si los valores son directamente proporcionales. La **constante de proporcionalidad directa** se calcula al dividir una cantidad cualquiera de la 2ª magnitud entre la cantidad correspondiente de la 1ª.

1. Indica si la siguiente tabla es de proporcionalidad y calcula la constante de proporcionalidad.

Masa (kg)	1	2	3	4
Dinero (€)	3	6	9	12

Es de proporcionalidad directa.

La constante es: $m = 3/1 = 6/2 = 9/3 = 12/4 = 3$

2. Completa la siguiente tabla para que sea de proporcionalidad directa y calcula la constante de proporcionalidad:

x	1	2	3	4
y	1,5	3	4,5	6

La constante es $m = 3/2 = 1,5$

Una **gráfica es de una función de proporcionalidad directa** si todos los puntos están sobre una recta que pasa por el origen de coordenadas y que no es horizontal ni vertical.

La **pendiente** de la recta es la **constante de proporcionalidad directa**, y se calcula al dividir un valor cualquiera de las ordenadas entre su correspondiente valor de las abscisas. Da la inclinación de la recta respecto del eje *X*.

3. Indica si la siguiente gráfica es de proporcionalidad directa y, si lo es, calcula la constante de proporcionalidad:

La gráfica pasa por el origen $O = (0, 0)$ y su pendiente es 0,04. Por tanto, la constante de proporcionalidad directa es $m = 0,04$. Es una gráfica de proporcionalidad directa.

Matemáticas 2.° ESO ▮ Unidad 10 ▮ Ficha 3
Función lineal o de proporcionalidad directa II

Nombre ______________________ Curso ________ Fecha ____________

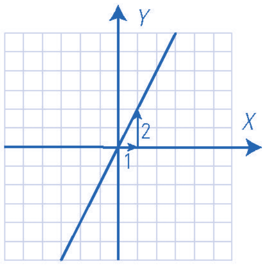
La **ecuación de una función de proporcionalidad directa** es: $\boldsymbol{y = mx}$ con $\boldsymbol{m \neq 0}$ donde m es la **pendiente** de la recta que coincide con la **constante de proporcionalidad directa**.
Constante de proporcionalidad directa = pendiente = $\boldsymbol{m}$.
Si la **pendiente es positiva ($m > 0$)**, la recta es **creciente**.
Si la **pendiente es negativa ($m < 0$)**, la recta es **decreciente**.

1. Halla la pendiente, estudia el crecimiento y dibuja la gráfica de las funciones siguientes:

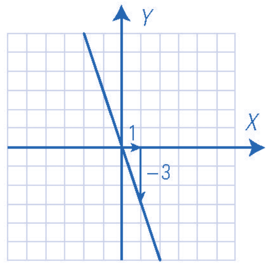
a) $y = 2x$

b) $y = -3x$

a) $m = 2 > 0$. Es creciente

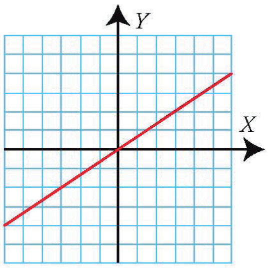


b) $= -3 < 0$. Es decreciente

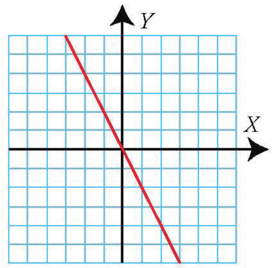


2. Halla la ecuación de las rectas siguientes:

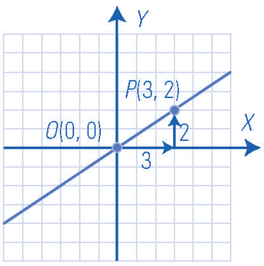
a)



b)

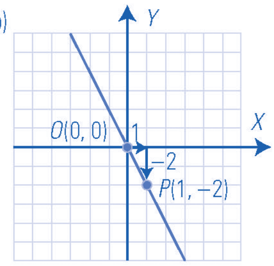


a)



$$m = \frac{2}{3} \Rightarrow = y\ \frac{2}{3}\ x$$

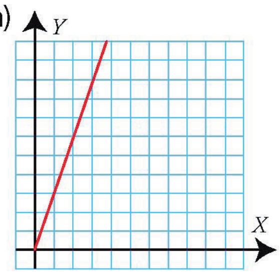
b)



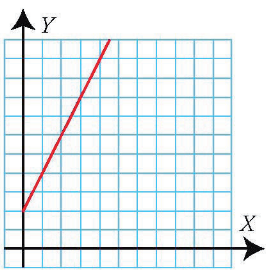
$$m = -\frac{2}{1} = -2 \Rightarrow = y = -2x$$

3. Indica si las gráficas son de proporcionalidad directa y calcula la constante de proporcionalidad

a)



b)



a) Pasa por el origen $O(0, 0)$ y su pendiente es 3; y, por lo tanto, la constante de proporcionalidad directa es $m = 3$. Es una gráfica de una función de proporcionalidad directa.

b) No pasa por el origen $O(0, 0)$ y, por lo tanto, no es una gráfica de una función de proporcionalidad directa

Función afín. Estudio de rectas I

Nombre ______________________________ Curso ________ Fecha ____________

Una **función es afín** si su ecuación es del tipo: $\boldsymbol{y = mx + b}$, siendo m y b números reales, $m \neq 0$, $b \neq 0$

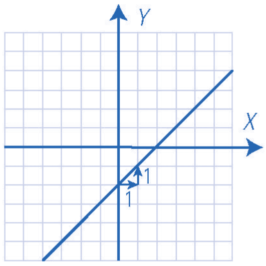
Su representación gráfica es una **recta** que tiene de pendiente m y pasa por el punto $P(0, b)$. A b se le llama valor de la ordenada en el origen.

1. Halla la pendiente, el valor de la ordenada en el origen y dibuja la gráfica de las funciones siguientes:

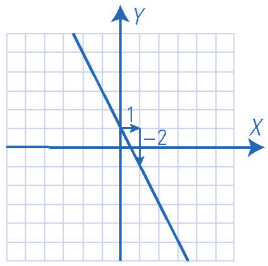
a) $y = x - 2$

b) $y = -2x + 1$

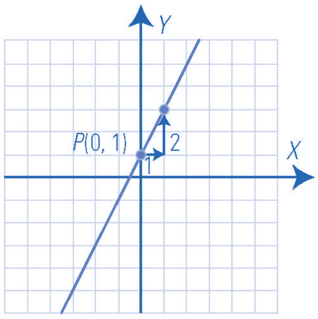
a) $m = 1$, $b = -2$



b) $m = -2$, $b = 1$

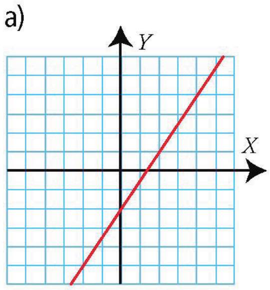


2. Dibuja una recta que pase por el punto $P(0, 1)$ y que tenga de pendiente $m = 2$.

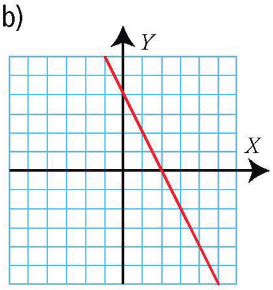


3. Halla la ecuación de las rectas siguientes:

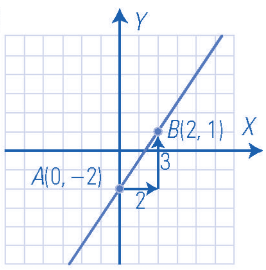
a)



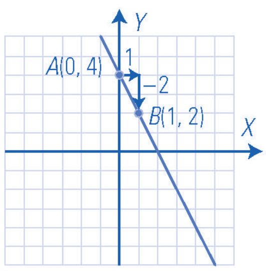
b)



a)



b)



a) $m = 3/2$, $b = -2$

La ecuación es: $y = (3/2)x - 2$

b) $m = -2$, $b = 4$

La ecuación es: $y = -2x + 4$

Nombre ______________________ Curso ________ Fecha ____________

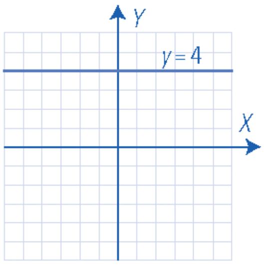
La ecuación de una **recta horizontal** es: ***y* = *k*** (siendo ***k*** la ordenada del punto en el que la recta corta al eje *Y*). Corresponde a una **función constante**, porque para cualquier valor de la variable independiente, ***x***, la variable dependiente, ***y***, es siempre la misma.

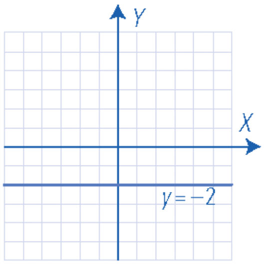
La ecuación de una **recta vertical** es: ***x* = *k*** (siendo ***k*** la abscisa del punto en el que la recta corta al eje *X*). No es una función, porque para el valor de ***x* = *k*** hay infinitos valores de y.

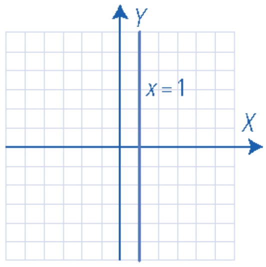
1. Representa las siguientes rectas y di cuáles son funciones:

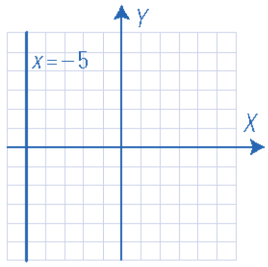
a) $y = 4$ b) $y = -2$ c) $x = 1$ d) $x = -5$

a) Es función b) Es función c) No es función d) No es función

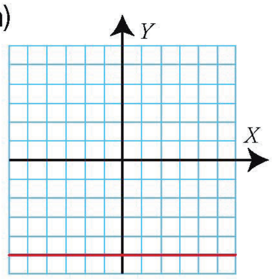
a) 

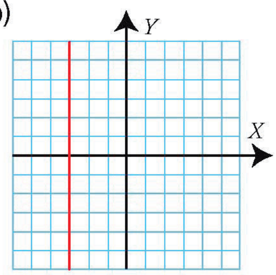
b) 

c) 

d) 

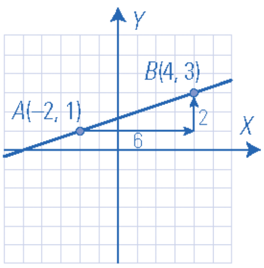
2. Halla la ecuación de las siguientes rectas:

a) 

b) 

a) $y = -5$ b) $x = -3$

3. Halla la fórmula de la recta que pasa por los puntos A(– 2, 1) y B(4, 3)



Se calcula la pendiente: $m = \dfrac{3-1}{4-(-2)} = \dfrac{2}{6} = \dfrac{1}{3}$

En la fórmula $y = 1/3x + b$ se sustituyen las coordenadas del punto $A\,(-2, 1)$

$$y = \frac{1}{3}x + b \rightarrow \frac{1}{3} \cdot (-2) + b = 1 \rightarrow b = \frac{5}{3}$$

La recta es: $y = \dfrac{1}{3}x + \dfrac{5}{3}$

Función de proporcionalidad inversa

Bruño

Nombre ______________________ Curso ________ Fecha ____________

Una **tabla de valores es de una función de proporcionalidad inversa** si el producto de una cantidad de la 1.ª magnitud multiplicada por la cantidad correspondiente de la 2.ª magnitud es constante. La **constante de proporcionalidad inversa, *k***, es ese producto constante.

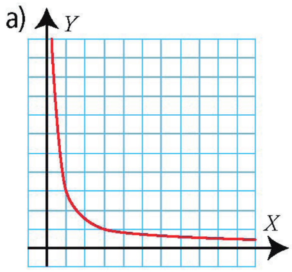
1. Indica si la siguiente tabla es de proporcionalidad inversa y calcula la constante de proporcionalidad:

x	1	2	3	4	5
y	12	6	4	3	2,4

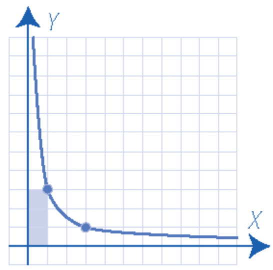
Sí es de proporcionalidad inversa.

La constante es: $k = 1 \times 12 = 2 \times 6 = 3 \times 4 = 4 \times 3 = 5 \times 2{,}4 = 12$

2. Indica si la siguiente gráfica es de proporcionalidad inversa:



Sí es de proporcionalidad inversa. Es una curva en la que se cumple siempre que el producto que se obtiene al multiplicar un valor cualquiera de las abscisas por el correspondiente valor de las ordenadas es la constante de proporcionalidad, $k = 3$.

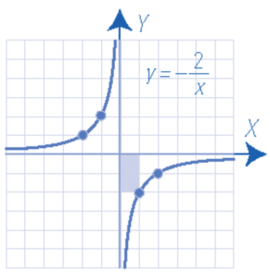


La ecuación de la función de **proporcionalidad inversa** es: $y = k/x$, donde ***k*** es la constante de proporcionalidad inversa, $\boldsymbol{k \neq 0}$.

Si la **constante de proporcionalidad inversa es positiva (*k* > 0)**, la hipérbola está en el 1.er y 3.er cuadrantes y es decreciente.

Si la **constante de proporcionalidad inversa es negativa (*k* < 0)**, la hipérbola está en el 2.º y 4.º cuadrantes y es creciente.

3. Halla la constante de proporcionalidad, estudia el crecimiento y dibuja la gráfica de la siguiente función: $y = (-2)/x$.

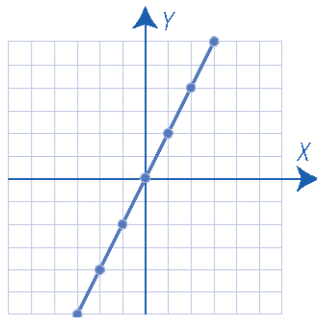


$k = -2 < 0$. Es creciente.

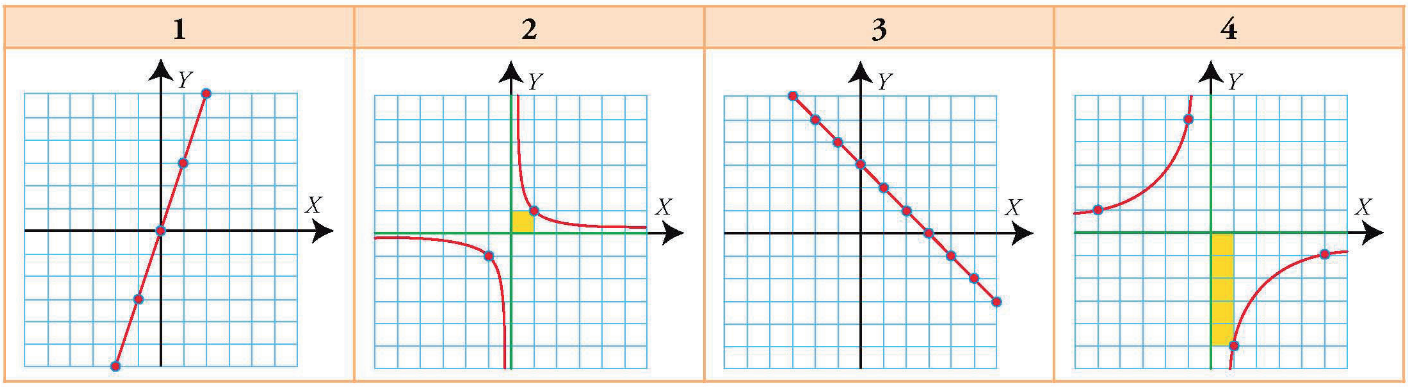
Bruño

Nombre ______________________ Curso ________ Fecha ____________

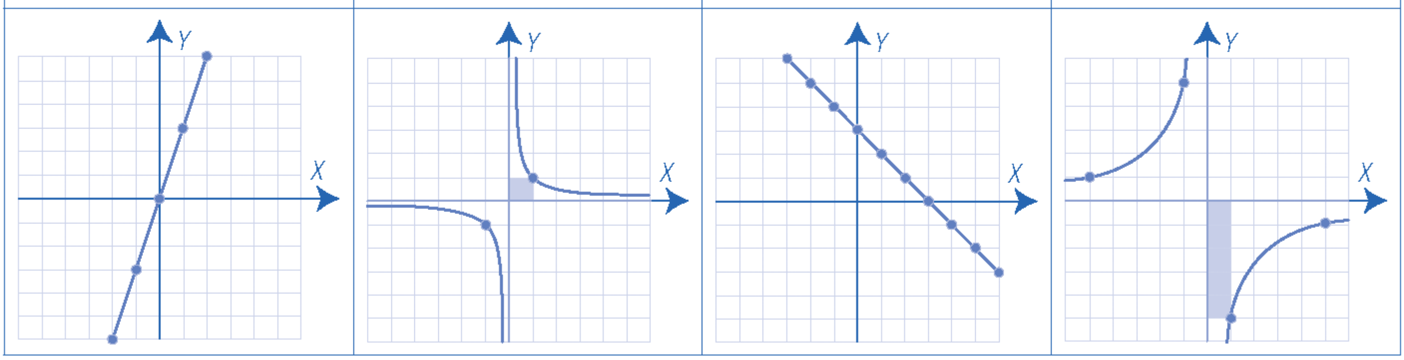
1. Representa en unos ejes de coordenadas todos los puntos en que la ordenada sea el doble de la abscisa.



2. Halla el tipo de cada una de las siguientes funciones y calcula mentalmente su ecuación:



1. Función lineal o de proporcionalidad directa $y = 3x$	**2.** Función de proporcionalidad inversa $y = \frac{1}{x}$	**3.** Función afín $y = -x + 3$	**4.** Función de proporcionalidad inversa $y = -\frac{5}{x}$



3. Dadas las siguientes ecuaciones, indica si corresponden a funciones lineales, afines, constantes, de proporcionalidad inversa o no son funciones:

a) $y = 4x - 3$ b) $y = 4$ c) $y = (1/3)x$

a) Función afín b) Función constante c) Función lineal

OBJETIVOS

a. Identificar figuras semejantes.
b. Conocer y usar la razón de semejanza.
c. Identificar ampliaciones y reducciones de una figura.
d. Construir figuras semejantes.
e. Conocer y usar el teorema de Thales.
f. Dividir un segmento en partes proporcionales.
g. Identificar triángulos en posición de Thales.
h. Identificar triángulos semejantes.
i. Identificar planos y mapas.
j. Conocer y usar los teoremas de la altura, del cateto y de Pitágoras.
k. Resolver problemas geométricos aplicando una estrategia conveniente y escogiendo adecuadamente el método más apropiado para la resolución: usando instrumentos de dibujo tradicionales o con ordenador.

COMPETENCIAS BÁSICAS

Competencia en el conocimiento y la interacción con el mundo físico

- Aplicar conocimientos básicos sobre la semejanza y los teoremas de Thales y Pitágoras para interpretar formas sencillas observables en el mundo natural.

Competencia cultural y artística

- Valorar el conocimiento geométrico como instrumento artístico.

Competencia para aprender a aprender

- Resolver problemas de semejanza aplicando una estrategia conveniente y escogiendo adecuadamente el método más apropiado para la resolución: usando instrumentos de dibujo tradicionales o con ordenador.

Autonomía e iniciativa personal

- Adaptarse a usar distintas técnicas, instrumentos y métodos para el aprendizaje de los contenidos geométricos.

CONTENIDOS

Conceptos

- Figuras semejantes.
- Razón de semejanza. Ampliación. Reducción.
- Teorema de Thales.
- Triángulos en posición de Thales.
- Triángulos semejantes.
- Escalas.
- Planos. Mapas. Maquetas.
- Teorema de la altura.
- Teorema del cateto.
- Teorema de Pitágoras.

Procedimientos

- Utilización del vocabulario adecuado para interpretar y transmitir informaciones sobre elementos geométricos.
- Búsqueda de propiedades, regularidades y relaciones en figuras semejantes.
- Identificación de problemas geométricos diferenciando los elementos conocidos de los que se pretende conocer y los relevantes de los irrelevantes.
- Formulación y comprobación de conjeturas acerca de propiedades geométricas en figuras y de la solución de problemas geométricos en general.
- Utilización de métodos inductivos y deductivos para la obtención de propiedades geométricas de las figuras planas.

Actitudes

- Valoración de la utilidad de los elementos geométricos para transmitir informaciones precisas relativas al entorno.
- Interés y gusto por la descripción verbal precisa de formas y características geométricas.
- Confianza en las propias capacidades para percibir el plano y resolver problemas geométricos.
- Perseverancia en la búsqueda de soluciones a los problemas geométricos y en la mejora de las ya encontradas.
- Interés y respeto por las estrategias y soluciones a problemas geométricos distintas de las propias.

CRITERIOS DE EVALUACIÓN

a.1. Identifica figuras semejantes.
b.1. Conoce y usa la razón de semejanza.
c.1. Hace ampliaciones y reducciones de una figura.
d.1. Construye figuras semejantes.
e.1. Conoce y usa el teorema de Thales.
f.1. Divide un segmento en partes proporcionales.
g.1. Identifica triángulos en posición de Thales.
h.1. Identifica triángulos semejantes.
i.1. Identifica planos y mapas.
j.1. Conoce y usa los teoremas de la altura, del cateto y de Pitágoras.
k.1. Resuelve problemas geométricos aplicando la semejanza y los teoremas de Thales, de la altura, del cateto y de Pitágoras.

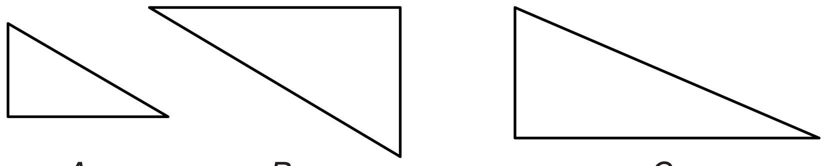
Matemáticas 2.º ESO ▮ Unidad 11 ▮ Ficha 1
Figuras semejantes

Bruño

Nombre ______________________ Curso ________ Fecha ____________

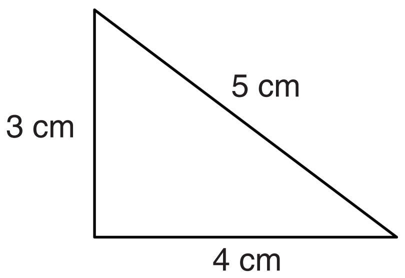
Dos **figuras son semejantes** si tienen la misma forma, aunque el tamaño sea distinto. En dos figuras semejantes las longitudes de segmentos correspondientes son proporcionales.
Se llama **razón de semejanza o escala** al cociente entre dos longitudes correspondientes: $r = \dfrac{a'}{a}$.

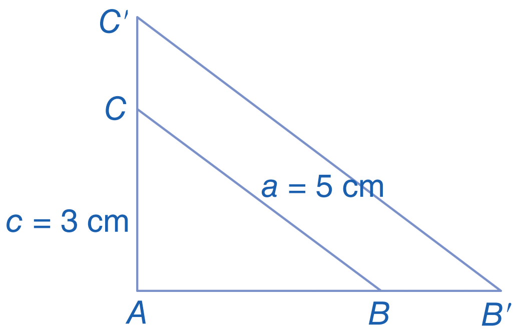
1. De las figuras siguientes, hay dos semejantes. ¿Cuáles son? Justifica tu respuesta.



Son semejantes las figuras *A* y *B* porque sus lados son proporcionales.

2. Mediante una proyección que tenga como centro el vértice *A*, dibuja otro triángulo rectángulo que sea una ampliación al 150 %. ¿Cuánto mide cada uno de los lados?





$a' = 1{,}5 \cdot 5 = 7{,}5$
$b' = 1{,}5 \cdot 4 = 6$ cm
$c' = 1{,}5 \cdot 3 = 4{,}5$ cm

3. Los lados de un triángulo miden $a = 7$ cm, $b = 8{,}5$ cm y $c = 12$ cm. Halla la medida de los lados a', b' y c' de un triángulo semejante en el que $r = 1{,}75$.

$a' = 1{,}75 \cdot a \Rightarrow a' = 1{,}75 \cdot 7 = 12{,}25$ cm

$b' = 1{,}75 \cdot b \Rightarrow b' = 1{,}75 \cdot 8{,}5 = 14{,}875$ cm

$c' = 1{,}75 \cdot c \Rightarrow c' = 1{,}75 \cdot 12 = 21$ cm

4. Los lados de un triángulo miden $a = 4$ cm, $b = 5$ cm y $c = 7$ cm. Sabiendo que en otro triángulo semejante $a' = 6$ cm, halla la medida de los lados b' y c'.

Razón de semejanza: $r = \dfrac{a}{a} \Rightarrow r = \dfrac{6}{4} = 1{,}5$

$b' = 5 \cdot 1{,}5 = 7{,}5$ cm

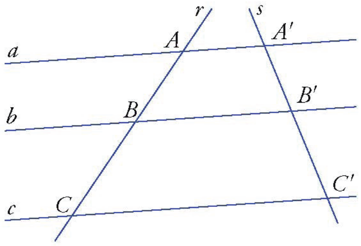
$c' = 7 \cdot 1{,}5 = 10{,}5$ cm

Teorema de Thales (I)

Nombre ______________________ Curso ________ Fecha __________

El **teorema de Thales** dice que si se traza un conjunto de rectas paralelas entre sí, *a*, *b*, *c*..., que cortan a otras dos rectas, *r* y *s*, los segmentos que se determinan sobre las rectas *r* y *s* son proporcionales: $\frac{A'B'}{AB} = \frac{B'C'}{BC}$.

1. Si $AB = 9$ cm, $BC = 12$ cm y $A'B' = 7{,}5$ cm, ¿cuál es la longitud del segmento $B'C'$? ¿Qué teorema has aplicado?



$$\frac{A'B'}{AB} = \frac{B'C'}{BC} \Rightarrow \frac{7{,}5}{9} = \frac{B'C'}{12}$$

$B'C' = 10$ cm

Hemos aplicado el teorema de Thales.

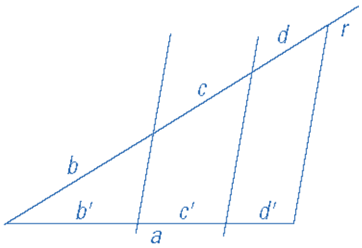
2. Divide el segmento ***a*** en partes proporcionales a los segmentos ***b***, ***c*** y ***d***.

a ____________________

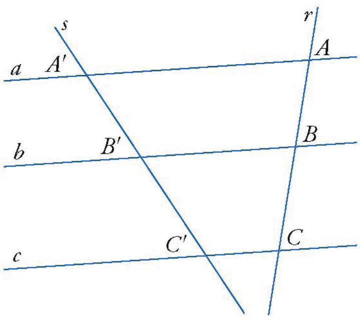
b _________________

c ______________

d ____________



3. Sabiendo que $AB = 15$ cm, $BC = 20$ cm y $B'C' = 24$ cm, halla la longitud del segmento $A'B'$. ¿Qué teorema has aplicado?



$$\frac{A'B'}{AB} = \frac{B'C'}{BC} \Rightarrow \frac{A'B'}{15} = \frac{24}{20}$$

$A'B' = 18$ cm

Se ha aplicado el teorema de Thales.

Teorema de Thales (II)

Bruño

Nombre ______________ Curso ______ Fecha ______

Criterios de semejanza de triángulos:
1. Dos triángulos son semejantes si tienen dos ángulos iguales.
2. Dos triángulos son semejantes si tienen un ángulo igual y los lados que los forman son proporcionales.
3. Dos triángulos son semejantes si tienen sus tres lados proporcionales.

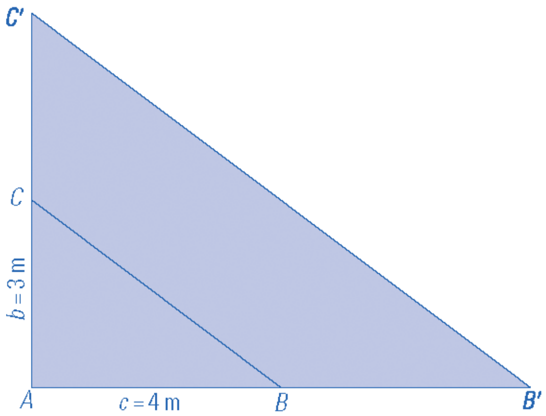
1. Un ángulo de un triángulo mide 47°, y los lados que lo forman, *a* = 5 cm y *b* = 7 cm. En otro triángulo semejante, se sabe que un ángulo mide 47° y que uno de los lados que lo forman mide *a′* = 12 cm. ¿Cuánto mide el otro lado del ángulo de 47°?

$$\frac{a'}{a} = \frac{b'}{b} \Rightarrow \frac{12}{5} = \frac{b'}{7} \Rightarrow b' = 16{,}8 \text{ cm}$$

2. Un árbol de 1,5 m proyecta una sombra de 1 m. En el mismo lugar, el mismo día y a la misma hora, la sombra de un edificio mide 12 m. ¿Cuánto mide de alto el edificio?

$$\frac{1}{1{,}5} = \frac{12}{x} \Rightarrow x = 18 \text{ cm}$$

3. Dibuja un triángulo rectángulo cuyos catetos midan 3 cm y 4 cm. Dibuja otro triángulo rectángulo en posición de Thales, de forma que el cateto menor mida 6 cm. ¿Cuánto mide el otro cateto? ¿Los dos triángulos son semejante? Justifica la respuesta.



$r = 6 : 3 = 2$

$c' = 2 \cdot 4 = 8$ cm

Los triángulos son semejantes, los lados que forman al ángulo recto son proporcionales (criterio de semejanza 2)

Función afín. Estudio de rectas I

Nombre ______________ Curso ______ Fecha ______

Razón de las longitudes	Razón de las áreas	Razón de los volúmenes
La razón de las longitudes de dos figuras semejantes es igual a la razón de semejanza.	**La razón de las áreas** de dos figuras semejantes es igual al cuadrado de la razón de semejanza.	**La razón de los volúmenes** de dos cuerpos semejantes es igual al cubo de la razón de semejanza.

1. Un lado de un triángulo mide 3,5 m, y el lado correspondiente de otro triángulo semejante mide 8,75 cm. Si el perímetro del primer triángulo mide 12 m y el área mide 4,6 m^2:

a) ¿cuánto mide el perímetro del triángulo semejante?

b) ¿cuánto mide el área del triángulo semejante?

$r = \dfrac{8{,}75}{3{,}5} = 2{,}5$

a) $\dfrac{p'}{p} = 2{,}5 \Rightarrow p' = 2{,}5 \cdot 12 = 30$ m

b) $\dfrac{A'}{A} = 2{,}5^2 = 6{,}25 \Rightarrow A' = 6{,}25 \cdot 4{,}6 = 28{,}75$ m^2

2. El perímetro de un pentágono regular mide 12 m, y el de otro pentágono regular mide 42 m.

a) Calcula la razón de semejanza.

b) Si el área del primero es de 9,91 m^2, ¿cuál es el área del segundo?

a) $r = \dfrac{42}{12} = 3{,}5$

b) $\dfrac{A'}{A} = 3{,}5^2 = 12{,}25 \Rightarrow A' = 12{,}25 \cdot 9{,}91 = 121{,}40$ m^2

3. La arista de un cubo mide *x* metros, y la arista de otro cubo mide 5*x* metros. Calcula cuántas veces son mayores el área y el volumen del segundo cubo respecto al primero.

Área: $\dfrac{A'}{A} = 5^2 = 25 \Rightarrow A' = 25A \Rightarrow$ El área es 25 veces mayor

Volumen: $\dfrac{V'}{V} = 5^3 = 125 \Rightarrow V' = 125V \Rightarrow$ El volumen es 125 veces mayor

4. Una arista de un ortoedro mide 2,5 m, y la arista correspondiente de otro ortoedro semejante mide 3,75 m. El área del primer ortoedro mide 71,5 m^2, y el volumen, 39,375 m^3. Halla en el ortoedro semejante: a) el área. b) el volumen.

$r = \dfrac{3{,}75}{2{,}5} = 1{,}5$

a) $\dfrac{A'}{A} = 1{,}5^2 = 2{,}25 \Rightarrow A' = 2{,}25 \cdot 7{,}15 = 160{,}875$ m^2

b) $\dfrac{V'}{V} = 1{,}5^3 = 3{,}375 \Rightarrow V' = 3{,}375 \cdot 39{,}375 = 132{,}89$ m^3

Matemáticas 2.º ESO ▮ Unidad 11 ▮ Ficha 5
Relaciones entre figuras semejantes (II)

Bruño

Nombre ______________________ Curso ______ Fecha ________

La **escala** de un objeto es el cociente entre una longitud medida en el dibujo y la medida de la longitud correspondiente en el objeto, es decir, es la razón de semejanza. Siempre se escribe en un cociente en el que el dividendo es uno; por ejemplo, 1:200, y se lee «uno es a doscientos».

1. Un terreno tiene forma rectangular y mide 3 km de largo. Se dibuja un rectángulo semejante de 6 cm de longitud.

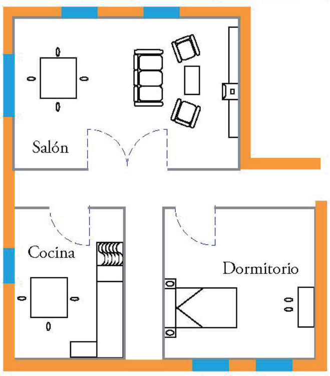
a) Halla la escala.

b) ¿El objeto dibujado es un plano o un mapa?

a) 6 cm : 3 km = 6 : 300 000 = 1 : 50 000

b) Es un mapa.

2. En el plano siguiente, el salón mide 3 cm × 2 cm. Calcula sus dimensiones y el área en la realidad.



Escala 1:200

Largo: 3 · 200 = 600 cm = 6 m

Ancho: 2 · 200 = 400 cm = 4 m

Área: 6 · 4 = 24 m^2

3. Las dimensiones de la maqueta de un vagón de un tren a escala 1:50 son 24 cm × 5 cm × 6 cm. Calcula sus dimensiones en la realidad.

Largo: 24 · 50 = 1 200 cm = 12 m

Ancho: 5 · 50 = 250 cm = 2,5 m

Alto: 6 · 50 = 300 cm = 3 m

4. ¿Qué escala es mayor, 1 : 500 o 1 : 5 000 000? Di cuál corresponde a un mapa y cuál a un plano.

1 : 500 = 0,002

1 : 5 000 000 = 0,0000002

La 1.^{ra} es mayor.

La 1.^{ra} corresponde a un plano.

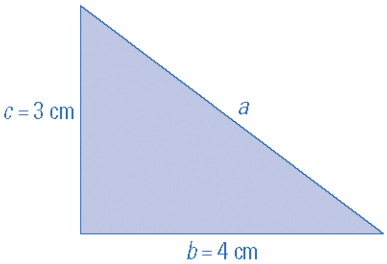
La 2.^{a} corresponde a un mapa.

Teorema de Pitágoras

Nombre ______________________ Curso ________ Fecha __________

El **teorema de Pitágoras** dice que, en un triángulo rectángulo, el cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de los catetos: $\boldsymbol{a^2 = b^2 + c^2}$.

1. En un triángulo rectángulo los catetos miden 4 cm y 3 cm. Haz el dibujo y halla la longitud de la hipotenusa.

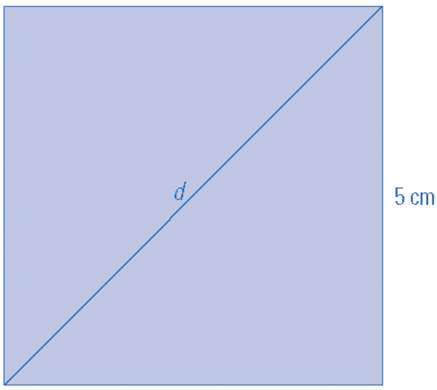


$a^2 = b^2 + c^2$

$a^2 = 4^2 + 3^2$

$a = 5$ cm

2. Dibuja un cuadrado de 5 cm de lado y su diagonal. Halla la longitud de la diagonal, redondea el resultado a un decimal y comprueba el resultado midiendo con una regla.



$d^2 = 5^2 + 5^2$

$d = 7{,}1$ cm

3. De los siguientes triángulos, ¿cuáles son rectángulos?

a) $a = 1$ cm, $b = 1{,}5$ cm, $c = 2$ cm

a) $1^2 + 1{,}5^2 \neq 2^2 \Rightarrow$ No.

b) $a = 1{,}5$ cm, $b = 2$ cm, $c = 2{,}5$ cm

b) $1{,}5^2 + 2^2 = 2{,}5^2 \Rightarrow$ Sí.

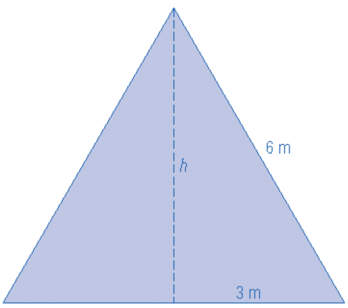
c) $a = 2$ cm, $b = 2{,}5$ cm, $c = 3$ cm

c) $2^2 + 2{,}5^2 \neq 3^2 \Rightarrow$ No.

d) $a = 2{,}5$ cm, $b = 6$ cm, $c = 6{,}5$ cm

d) $2{,}5^2 + 6^2 = 6{,}5^2 \Rightarrow$ Sí.

4. Halla la altura de un triángulo equilátero de 6 m de lado. Redondea el resultado a dos decimales.



$h^2 + 3^2 = 6^2$

$h = 5{,}20$ m

Nombre ______________________ Curso ________ Fecha ______________

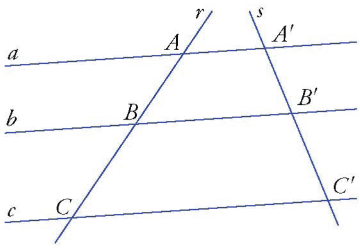
1. Los lados de un triángulo miden $a = 6$ cm, $b = 8$ cm y $c = 10$ cm. Halla la medida de los lados a', b' y c' de un triángulo semejante en el que $r = 2{,}25$.

$a' = 2{,}25 \cdot 6 \Rightarrow a' = 13{,}5$ cm

$b' = 2{,}25 \cdot 8 \Rightarrow b' = 18$ cm

$c' = 2{,}25 \cdot 10 \Rightarrow c' = 22{,}5$ cm

2. Sabiendo que $AB = 18$ cm, $BC = 24$ cm y $A'B' = 15$ cm, halla la longitud del segmento $B'C'$. ¿Qué teorema has aplicado?



$$\frac{A'B'}{AB} = \frac{B'C'}{BC} \Rightarrow \frac{15}{18} = \frac{B'C'}{24}$$

$B'C' = 15 \cdot 24 : 18 = 20$ cm

Se ha aplicado el teorema de Thales.

3. Un faro proyecta una sombra de 53 m. El mismo día, a la misma hora y en el mismo lugar, un árbol de 1,5 m proyecta una sombra de 2,05 m. Calcula la altura del faro.

$$\frac{2{,}05}{1{,}5} = \frac{53}{x} \Rightarrow x = 38{,}78 \text{ m}$$

4. Una esfera cuyo radio es $r = x$ m tiene un área de 314,16 m^2 y un volumen de 523,60 m^3. Halla el área y el volumen de otra esfera cuyo radio es $R = 2{,}5x$.

La razón es 2,5

$$\frac{A'}{A} = 2{,}5^2 = 6{,}25 \Rightarrow A' = 6{,}25 \cdot 314{,}16 = 1\,963{,}5 \text{ m}^2$$

$$\frac{V'}{V} = 2{,}5^3 = 15{,}625 \Rightarrow V' = 15{,}625 \cdot 523{,}60 = 8\,181{,}25 \text{ m}^3$$

5. Las dimensiones de una maqueta de un coche a escala 1:50 son 9 cm × 3,6 cm × 3 cm. Calcula sus dimensiones en la realidad.

Largo: $9 \cdot 50 = 450$ cm $= 4{,}5$ m

Ancho: $3{,}6 \cdot 50 = 180$ cm $= 1{,}8$ m

Alto: $3 \cdot 50 = 150$ cm $= 1{,}5$ m

6. ¿Cuáles de las siguientes ternas son pitagóricas?

a) 5, 7 y 9 b) 6, 8 y 10 c) 7, 9 y 11 d) 10, 24 y 26

a) $5^2 + 7^2 \neq 9^2 \Rightarrow$ No. b) $6^2 + 8^2 = 10^2 \Rightarrow$ Sí. c) $7^2 + 9^2 \neq 11^2 \Rightarrow$ No. b) $10^2 + 24^2 = 26^2 \Rightarrow$ Sí.

OBJETIVOS

a. Identificar los elementos básicos del espacio: punto, recta y plano.
b. Conocer e identificar un ángulo diedro, y un ángulo poliedro.
c. Identificar en el espacio las posiciones de dos rectas, recta y plano y dos planos.
d. Identificar la distancia de un punto a un plano.
e. Identificar y clasificar un poliedro regular, irregular, cóncavo y convexo.
f. Conocer el teorema de Euler.
g. Identificar los cinco poliedros regulares y los duales correspondientes.
h. Identificar prismas y su desarrollo plano.
i. Identificar paralelepípedos y ortoedros.
j. Identificar cilindros y su desarrollo plano.
k. Identificar pirámides y su desarrollo plano.
l. Identificar conos y su desarrollo plano.
m. Identificar troncos de pirámide y su desarrollo plano.
n. Identificar troncos de cono y su desarrollo plano.

COMPETENCIAS BÁSICAS

Competencia en el conocimiento y la interacción con el mundo físico

- Aplicar conocimientos básicos sobre los cuerpos en el espacio para interpretar formas sencillas observables en el mundo natural.

Competencia social y ciudadana

- Trabajar en grupo y saber valorar el intercambio de puntos de vista.

Autonomía e iniciativa personal

- Adaptarse a usar distintas técnicas, instrumentos y métodos para el aprendizaje de los contenidos de la geometría del espacio.

CONTENIDOS

Conceptos

- Punto, recta y plano en el espacio.
- Ángulo diedro y ángulo poliedro.
- Rectas secantes, paralelas y que se cruzan en el espacio. Recta coplanaria. Recta y plano paralelos. Recta y plano secantes. Planos paralelos y secantes.
- Ángulo diedro. Plano bisector.
- Prisma recto y oblicuo. Prisma regular.
- Paralelepípedo. Ortoedro.
- Cilindro recto y oblicuo.
- Altura, generatriz y radio del cilindro.
- Pirámide recta. Pirámide regular.
- Apotema de la pirámide.
- Cono recto.
- Altura, generatriz y radio del cono.
- Tronco de pirámide. Tronco de cono.
- Altura y generatriz del tronco de cono.
- Desarrollo plano de un cuerpo en el espacio.

Procedimientos

- Utilización de los sistemas de referencia para situar y localizar un objeto.
- Utilización diestra de los instrumentos de dibujo habituales.
- Formulación y comprobación de conjeturas acerca de propiedades geométricas en cuerpos y figuras y de la solución de problemas geométricos en general.
- Utilización de métodos inductivos y deductivos para la obtención de propiedades geométricas de los cuerpos y de relaciones entre ellos.

Actitudes

- Valoración de la utilidad de los elementos geométricos para transmitir informaciones precisas relativas al entorno.
- Hábito de expresar los resultados numéricos de las mediciones manifestando las unidades de medida utilizadas.
- Perseverancia en la búsqueda de soluciones a los problemas geométricos y en la mejora de las ya encontradas.

CRITERIOS DE EVALUACIÓN

a.1. Expresa oralmente y por escrito los conceptos, procedimientos y terminología de los cuerpos en el espacio con propiedad.
b.1. Identifica un ángulo diedro, y un ángulo poliedro.
c.1. Determina rectas paralelas, secantes, planos que contienen a una recta, planos paralelos a una recta y planos secantes a una recta en el espacio.
d.1. Conoce la distancia de un punto a un plano.
e.1. Clasifica un poliedro en regular, irregular, cóncavo y convexo.
f.1. Comprueba el teorema de Euler en un poliedro.
g.1. Conoce los cinco poliedros regulares y los duales correspondientes.
h.1. Identifica los prismas y su desarrollo plano.
i.1. Reconoce paralelepípedos y ortoedros.
j.1. Identifica cilindros y su desarrollo plano.
k.1. Identifica pirámides y su desarrollo plano.
l.1. Identifica conos y su desarrollo plano.
m.1. Identifica troncos de pirámide y su desarrollo plano.
n.1. Identifica troncos de cono y su desarrollo plano.

Matemáticas 2.º ESO ▮ Unidad 12 ▮ Ficha 1
Elementos básicos en el espacio

Nombre ______________________ Curso ______ Fecha ________

Para hacerse una idea de lo que es una **recta**, se puede imaginar un hilo tenso sin curvatura, tan largo que no tenga principio ni fin, y que tampoco tenga grosor.

1. Escribe tres ejemplos reales que representen intuitivamente una recta.

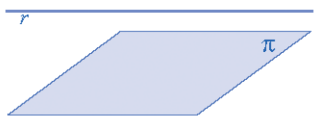
a) Un hilo de coser completamente estirado.

b) Una cuerda completamente estirada.

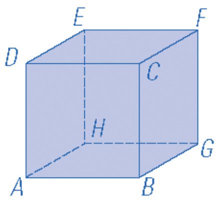
c) Un cable completamente estirado.

Una **recta** y un **plano** son **paralelos** si no tienen ningún punto en común.

2. Dibuja una recta paralela a un plano.



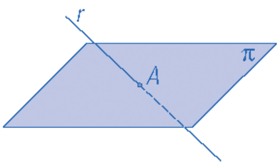
3. Dibuja un cubo, pon letras a los vértices y representa cada una de las caras por las cuatro letras de sus vértices.



ABCD, ADEH, EFGH, BCFG, ABGH, CDEF

Una recta y un plano son **secantes** si la recta corta al plano en un punto.

4. Dibuja una recta secante a un plano. ¿Qué tienen en común la recta y el plano?



Tienen en común un punto, *A*

5. Dada la recta *r* generada por la arista *AD* del siguiente tetraedro:

a) ¿qué aristas cortan a la recta *r*? a) *AB, AC, BD* y *CD*

b) ¿qué aristas son paralelas a la recta *r*? b) Ninguna.

c) ¿qué aristas se cruzan con la recta *r*? c) *BC*

d) ¿qué caras prolongadas contienen a la recta *r*? d) *ABD* y *ACD*

e) ¿qué caras prolongadas son paralelas a la recta r? e) Ninguna.

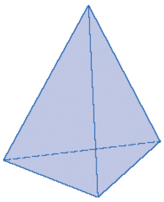
f) ¿qué caras prolongadas son secantes con la recta *r*? f) *ABC* y *BCD*

Poliedros I

Nombre ______________________ Curso ________ Fecha ____________

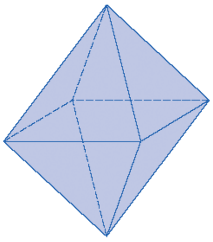
Un **poliedro** es un cuerpo geométrico limitado por polígonos. Sus elementos fundamentales son:
Caras: son los polígonos que lo limitan.
Aristas: son las intersecciones de dos caras.
Vértices: son los puntos de intersección de tres o más aristas.
El **orden de un vértice** es el número de caras que concurren en ese vértice.

1. Dibuja un tetraedro y halla el orden de cada vértice.



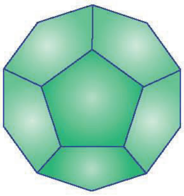
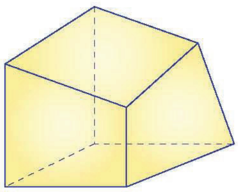
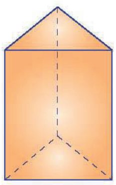
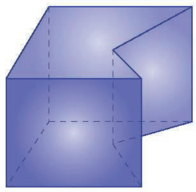
Cada vértice es de orden 3.

2. Dibuja un octaedro y halla el orden de cada vértice.



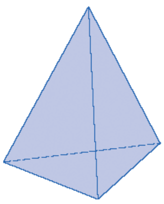
Cada vértice es de orden 4.

3. Completa la siguiente tabla de definiciones de los diferentes tipos de poliedros:

Clasificación	• Cóncavo: aquel en el que algún ángulo diedro es mayor de 180° • Convexo: aquel en el que todos los ángulos diedros son menores de 180° • Irregular: aquel que no es regular. • Regular: aquel en el que todas las caras son polígonos regulares iguales y los vértices son del mismo orden.
Poliedros	 Regular  Irregular  Convexo  Cóncavo

El **teorema de Euler** dice que, en un poliedro, el número de caras más el número de vértices es igual al número de aristas más 2. $\boldsymbol{C + V = A + 2}$.

4. Dibuja un tetraedro y comprueba el teorema de Euler en él.



$C + V = 4 + 4 = 8$

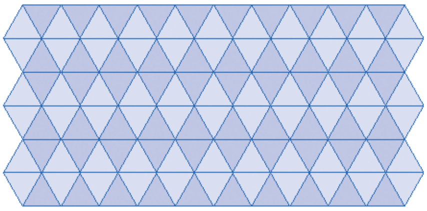
$A + 2 = 6 + 2 = 8$

Poliedros II

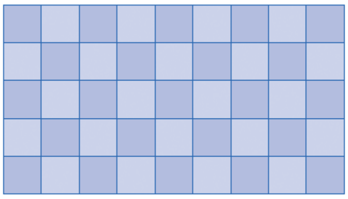
Nombre ______________________________ Curso ________ Fecha ____________

Un **mosaico regular** es el que está generado por un polígono regular. Los polígonos regulares que recubren el plano son el triángulo equilátero, el cuadrado y el hexágono regular.

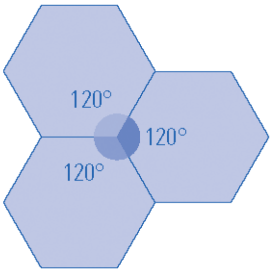
1. Dibuja un mosaico regular de triángulos equiláteros.



2. Dibuja un mosaico regular formado por cuadrados.



3. Comprueba que con hexágonos regulares se puede formar un mosaico regular.

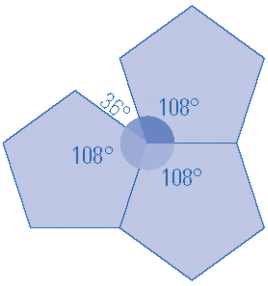


Si en el plano unimos 3 hexágonos regulares iguales con un vértice común, encajan perfectamente, luego, forman un mosaico.

En los **poliedros regulares** se verifican dos **condiciones**:

- El número mínimo de **caras** que concurren en un vértice es 3
- La suma de los **ángulos interiores** de las caras que concurren en un vértice deben sumar **menos de 360°**. Si sumaran 360°, formarían un mosaico.

4. ¿Se puede construir un poliedro regular con caras pentagonales? Justifica la respuesta.



Si unimos tres caras, el ángulo que se obtiene es $3 \times 108° = 324°$, que es menor de 360°, y sí se obtiene un poliedro regular, que es el dodecaedro.

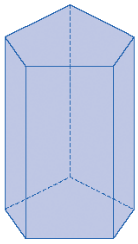
Matemáticas 2.º ESO ▮ Unidad 12 ▮ Ficha 4
Prismas y cilindros I

Nombre ______________________________ Curso ________ Fecha ____________

Un **prisma** es un poliedro que tiene por bases dos polígonos paralelos e iguales, y cuyas caras laterales son paralelogramos. La altura de un prisma es la distancia que hay entre las bases.

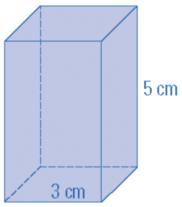
1. Dibuja un prisma pentagonal y comprueba el teorema de Euler en él.

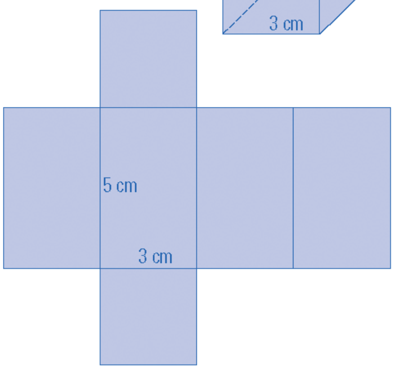
$C + V = 7 + 10 = 17$
$A + 2 = 15 + 2 = 17$



El **desarrollo plano de un prisma regular** está formado por dos polígonos regulares iguales que forman las bases, y tantos rectángulos iguales como aristas tenga la base.

2. Dibuja el desarrollo plano de un prisma recto cuadrangular en el que la arista de la base mide 3 cm, y la altura, 5 cm. Describe el desarrollo y calcula su área.





El desarrollo plano está formado por dos cuadrados iguales que son las bases y cuatro rectángulos iguales.

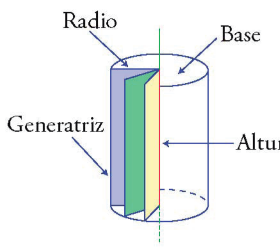
Área de las bases: $2 \cdot 32 = 2 \cdot 9 = 18$ cm^2

Área lateral: $4 \cdot 3 \cdot 5 = 60$ cm^2

Área total: $18 + 60 = 78$ cm^2

Un **cilindro recto** es un cuerpo de revolución que se obtiene haciendo girar un rectángulo alrededor de uno de sus lados.

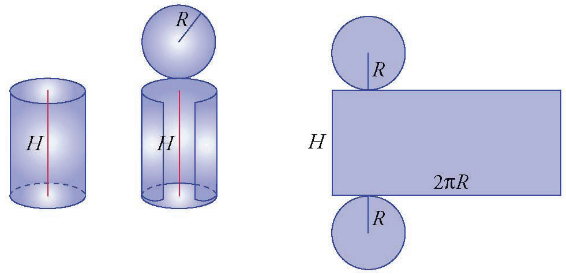
3. Completa la siguiente tabla sobre los componentes de un cilindro:

Componentes	Cilindro
La altura del cilindro es el lado del rectángulo que permanece fijo en el giro. Es el eje de giro.	
La generatriz es el lado del rectángulo opuesto al eje de giro.	
Los radios son los lados del rectángulo perpendiculares al eje de giro.	

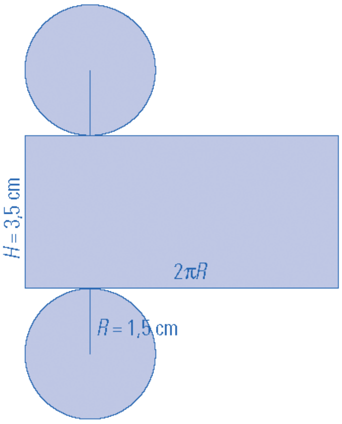
Prismas y cilindros II

Nombre ______________________ Curso ________ Fecha ________

Desarrollo plano de un cilindro recto



1. Dibuja el desarrollo plano de un cilindro recto en el que el radio de la base mide 1,5 cm, y la altura, 3,5 cm. Describe el desarrollo y calcula su área.



El desarrollo plano está formado por dos círculos iguales, que son las bases, y un rectángulo.

Área de las bases: $2 \cdot \pi \cdot 1{,}5^2 = 14{,}14$ cm²

Área lateral: $2\pi \cdot 1{,}5 \cdot 3{,}5 = 32{,}99$ cm²

Área total: $14{,}14 + 32{,}99 = 47{,}13$ cm²

El **teorema de Pitágoras en el espacio** dice que, en un ortoedro, la diagonal al cuadrado es igual a la suma de los cuadrados de las aristas: $D^2 = a^2 + b^2 + c^2$.

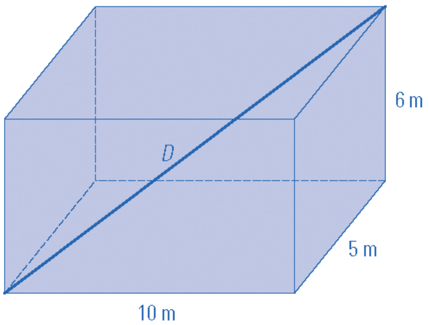
2. Completa el procedimiento. La diagonal del ortoedro se calcula aplicando dos veces el teorema de Pitágoras:

a) La diagonal de una cara: $d^2 = a^2 + b^2$

b) La diagonal del ortoedro: $D^2 = d^2 + c^2$

Sustituyendo d^2 en la segunda igualdad, se obtiene la fórmula del teorema de Pitágoras en el espacio:
$D^2 = a^2 + b^2 + c^2$

3. Las dimensiones de una caja son 10 cm, 5 cm y 6 cm. Calcula si un lápiz de 12,5 cm cabe en su interior.



Tenemos que ver si la diagonal es mayor o menor.

Aplicando el teorema de Pitágoras en el espacio:

$D^2 = 10^2 + 6^2 + 5^2 = 100 + 36 + 25 = 161$

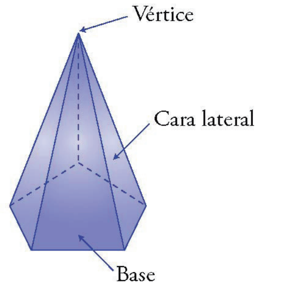
$D = \sqrt{161} = 12{,}69$ cm

Como: $D > 12{,}5$ cm, el lápiz sí cabe en la caja

Matemáticas 2.º ESO ▮ Unidad 12 ▮ Ficha 6
Pirámides y conos

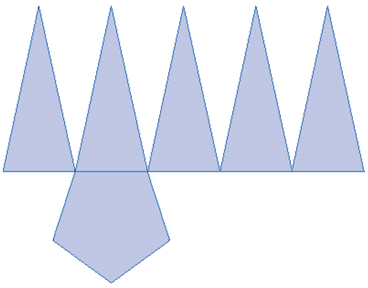
Nombre ______________________ Curso ________ Fecha ____________

1. Completa los datos que faltan en la definición de pirámide:

Definición	Pirámide
Una pirámide es un poliedro que tiene por base un polígono cualquiera, y cuyas caras laterales son triángulos con un vértice común que se llama vértice de la pirámide. La altura de una pirámide es la distancia que hay del vértice a la base.	

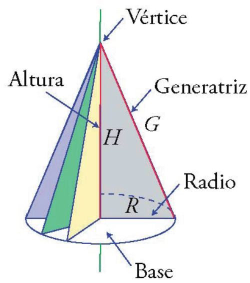
El **desarrollo plano de una pirámide regular** está formado por el polígono regular de la base y tantos triángulos isósceles iguales como lados tenga la base.

2. Dibuja el desarrollo plano de una pirámide regular pentagonal. Describe el desarrollo.

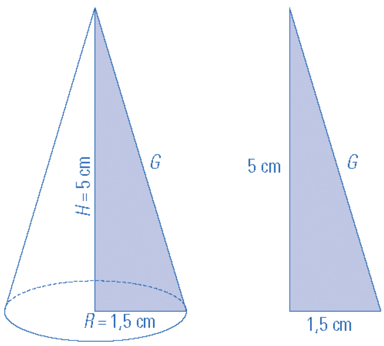


El desarrollo plano está formado por un pentágono regular y 5 triángulos isósceles iguales.

3. Completa los datos que faltan en la tabla sobre los componentes de un cono:

Definición	Cono
Un **cono recto** es el cuerpo de revolución que se obtiene haciendo girar un triángulo rectángulo alrededor de uno de sus catetos. • La altura del cono es el cateto sobre el que gira el triángulo. • El radio de la base es el otro cateto. • La generatriz del cono es la hipotenusa del triángulo rectángulo: $G^2 = R^2 + H^2$.	

4. Dibuja un cono recto en el que el radio de la base mida 1,5 cm, y la altura, 5 cm. Calcula su generatriz.



Se aplica el teorema de Pitágoras:

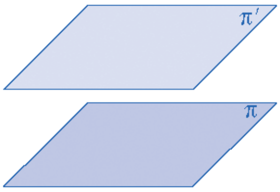
$G^2 = 1{,}5^2 + 5^2$

$G^2 = 2{,}25 + 25$

$G^2 = \sqrt{27{,}25} = 5{,}22$ cm

Nombre ______________________ Curso ________ Fecha ____________

1. Dibuja dos planos paralelos.

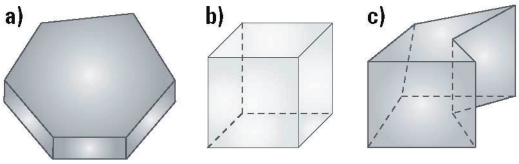


2. Define qué es un poliedro regular. Di cuántos hay y cómo se llaman.

Un poliedro es regular si todas sus caras son polígonos regulares iguales y los vértices son del mismo orden.

Son cinco: tetraedro, cubo o hexaedro, octaedro, dodecaedro e icosaedro.

3. Clasifica los siguientes poliedros:

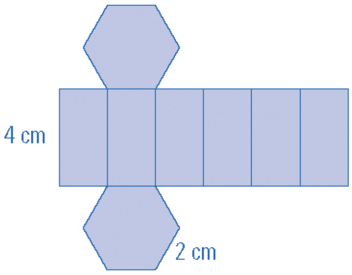


a) Poliedro irregular y convexo.

b) Poliedro regular y convexo.

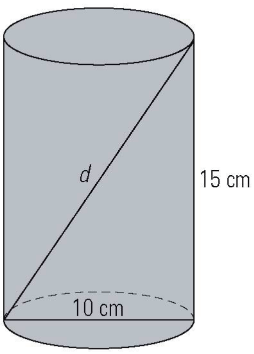
c) Poliedro irregular y cóncavo.

4. Dibuja el desarrollo plano de un prisma hexagonal regular de 4 cm de altura y 2 cm de arista de la base, y describe su desarrollo.



El desarrollo plano está formado por dos hexágonos regulares iguales que son las bases y de 6 rectángulos iguales.

5. Si tienes un bote de forma cilíndrica, que mide 5 cm de radio de la base y 15 cm de altura, ¿cuál será la longitud máxima de un lápiz que quieras introducir en su interior?



Se aplica el teorema de Pitágoras:

$d^2 = 10^2 + 15^2$

$d^2 = 100 + 225 = 325$

$d = \sqrt{325} = 18,03$ cm

OBJETIVOS

a. Conocer y utilizar el concepto de volumen de un cuerpo.
b. Conocer y utilizar el metro cúbico como unidad principal de volumen.
c. Conocer los múltiplos y submúltiplos del metro cúbico y hacer transformaciones entre ellos.
d. Conocer y utilizar la relación entre masa, capacidad y volumen.
e. Calcular el área y el volumen de los poliedros regulares.
f. Utilizar las fórmulas del área y volumen del ortoedro, del prisma, del cilindro, de la pirámide, del cono, del tronco de pirámide, del tronco de cono y de la esfera.

COMPETENCIAS BÁSICAS

Competencia en el conocimiento y la interacción con el mundo físico

- Aplicar los conocimientos de áreas y volúmenes para valorar las informaciones supuestamente científicas que puedan encontrar en los medios de comunicación y en muchos mensajes publicitarios.

Competencia cultural y artística

- Valorar el conocimiento geométrico como instrumento artístico.

Competencia para aprender a aprender

- Valorar la regularidad y constancia del trabajo diario dedicado al estudio y a la realización de actividades de aprendizaje.

CONTENIDOS

Conceptos

- Volumen de un cuerpo.
- Metro cúbico, decímetro cúbico, centímetro cúbico, milímetro cúbico, decámetro cúbico, hectómetro cúbico, kilómetro cúbico.
- Ortoedro, prisma, cilindro, pirámide, cono, tronco de pirámide, tronco de cono y esfera.
- Desarrollo plano de un cuerpo en el espacio.
- Área lateral de un cuerpo. Área total de un cuerpo.

Procedimientos

- Utilización de la terminología y notación adecuadas para describir con precisión situaciones, formas, propiedades y configuraciones geométricas.
- Utilización diestra de los instrumentos de dibujo habituales.
- Búsqueda de propiedades, regularidades y relaciones en cuerpos, figuras y configuraciones geométricas.
- Identificación de problemas geométricos diferenciando los elementos conocidos de los que se pretende conocer y los relevantes de los irrelevantes.
- Formulación y comprobación de conjeturas acerca de propiedades geométricas en cuerpos y figuras y de la solución de problemas geométricos en general.
- Utilización de métodos inductivos y deductivos para la obtención de propiedades geométricas de los cuerpos y de relaciones entre ellos.

Actitudes

- Valoración de la utilidad de los elementos geométricos para transmitir informaciones precisas relativas al entorno.
- Incorporación al lenguaje cotidiano de los elementos geométricos y de los términos de medida para describir objetos y espacios.
- Revisión sistemática del resultado de las medidas directas o indirectas, aceptándolas o rechazándolas según se adecuen o no a los valores esperados.
- Confianza en las propias capacidades para percibir el plano y resolver problemas geométricos.

CRITERIOS DE EVALUACIÓN

a.1. Conoce y utiliza el concepto de volumen de un cuerpo.
b.1. Conoce y utiliza el metro cúbico como unidad principal de volumen.
c.1. Conoce los múltiplos y submúltiplos del metro cúbico y hace transformaciones entre ellos.
d.1. Conoce y utilizar la relación entre masa, capacidad y volumen.
e.1. Calcula el área y el volumen de los poliedros regulares.
f.1. Utiliza las fórmulas del área y volumen del ortoedro, del prisma, del cilindro, de la pirámide, del cono, del tronco de pirámide, del tronco de cono y de la esfera.

Matemáticas 2.º ESO ▮ Unidad 13 ▮ Ficha 1
Unidades de volumen I

Bruño

Nombre ______________________ Curso ________ Fecha ____________

El **volumen** de un cuerpo es la cantidad de espacio que ocupa.

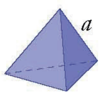
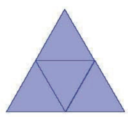
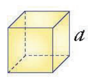
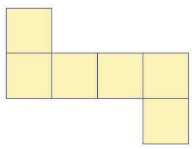
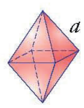
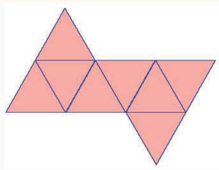
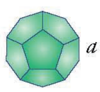
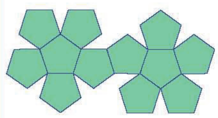
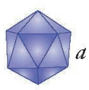
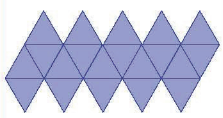
Un **metro cúbico** es el volumen de un cubo que tiene 1 m de arista. El metro cúbico es la unidad principal de volumen.

1. Completa esta tabla sobre los múltiplos y submúltiplos:

	Nombre	Abreviatura	Cantidad de metros
Múltiplos	kilómetro cúbico	**km³**	$1\,000\,000\,000 \text{ m}^3 = 10^9 \text{ m}^3$
	hectómetro cúbico	**hm³**	$1\,000\,000 \text{ m}^3 = 10^6 \text{ m}^3$
	decámetro cúbico	**dam³**	$1\,000 \text{ m}^3 = 10^3 \text{ m}^3$
	metro cúbico	**m³**	1 m^3
Submúltiplos	decímetro cúbico	**dm³**	$0{,}001 \text{ m}^3 = 10^{-3} \text{ m}^3$
	centímetro cúbico	**cm³**	$0{,}000001 \text{ m}^3 = 10^{-6} \text{ m}^3$
	milímetro cúbico	**mm³**	$0{,}000000001 \text{ m}^3 = 10^{-9} \text{ m}^3$

Al nivel del mar y a 4 °C, un litro de agua destilada pesa 1 kilo. 1 kilo = 1 litro = 1 dm^3.

2. Completa la tabla sobre las áreas y volúmenes de los poliedros regulares con las fórmulas que faltan.

Poliedro regular	Desarrollo	Área	Volumen
Tetraedro 		$A = a^2\sqrt{3}$	$V = \dfrac{a^3\sqrt{2}}{12}$
Cubo o hexaedro 		$A = 6a^2$	$V = a^3$
Octaedro 		$A = 2a^2\sqrt{3}$	$V = \dfrac{a^3\sqrt{2}}{3}$
Dodecaedro 		$A = 3a^2\sqrt{25 + 10\sqrt{5}}$	$V = \dfrac{a^3}{4}\left(15 + 7\sqrt{5}\right)$
Icosaedro 		$A = 5a^2\sqrt{3}$	$V = \dfrac{5a^3}{12}\left(3 + \sqrt{5}\right)$

Matemáticas 2.º ESO ▮ Unidad 13 ▮ Ficha 2
Unidades de volumen II

Bruño

Nombre ______________________ Curso ________ Fecha ____________

1. Transforma mentalmente en m³:

a) 25 dam³ = 25 × 1 000 m³ = 25 000 m³

b) 0,02 hm³ = 0,02 × 1 000 000 m³ = 20 000 m³

c) 2 560 dm³ = 2 560 : 1 000 m³ = 2,56 m³

d) 32 000 cm³ = 32 000 : 1 000 000 m³ = 0,032 m³

e) 45 km³ = 45 000 000 000 m³

f) 570 000 mm³ = 0,00057 m³

2. Expresa en litros las siguientes cantidades:

a) 5 m³ = 5 000 litros

b) 0,008 hm³ = 8 000 000 litros

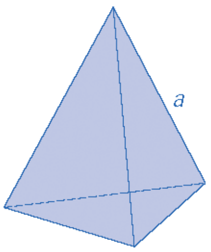
c) 250 dm³ = 250 litros

d) 12 000 cm³ = 12 litros

e) 10 km³ = 10 000 000 000 000 litros

f) 250 000 mm³ = 0,25 litros

3. Haz el dibujo y calcula el área y el volumen de un tetraedro de 6 cm de arista. Redondea el resultado a dos decimales.



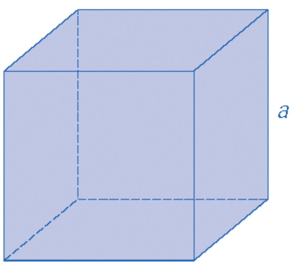
$A = a^2\sqrt{3}$

$A = 6^2\sqrt{3} = 62{,}35 \text{ cm}^2$

$V = \dfrac{a^3\sqrt{2}}{12}$

$V = \dfrac{6^2\sqrt{3}}{12} = 25{,}46 \text{ cm}^3$

4. Haz el dibujo y calcula mentalmente el área y el volumen de un cubo de 5 m de arista.



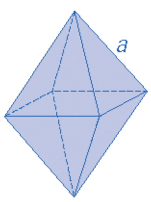
$A = 6a^2$

$A = 6 \cdot 5^2 = 150 \text{ m}^2$

$V = a^3$

$V = 5^3 = 125 \text{ m}^3$

5. Haz el dibujo y calcula el área y el volumen de un octaedro de 7 dm de arista. Redondea el resultado a dos decimales.



$A = 2a^2\sqrt{3}$

$A = 2 \cdot 7^2\sqrt{3} = 169{,}74 \text{ dm}^2$

$V = \dfrac{a^2\sqrt{2}}{3}$

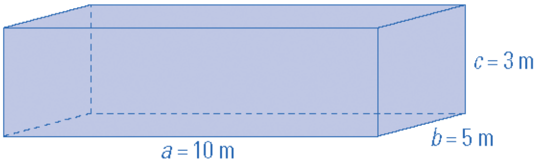
$V = \dfrac{7^3\sqrt{2}}{12} = 161{,}69 \text{ dm}^3$

Áreas y volúmenes del ortoedro, el prisma y el cilindro

Nombre ______________________ Curso ________ Fecha ____________

- El **área del ortoedro** se deduce de su desarrollo plano, que está formado por 6 rectángulos, iguales dos a dos. $A = 2(ab + ac + bc)$.
- El **volumen del ortoedro** se obtiene multiplicando el largo por el ancho y por el alto. $V = abc$.

1. Haz el dibujo y halla el área y el volumen de un ortoedro cuyas dimensiones son 10 m, 5 m y 3 m.



$A = 2(ab + ac + bc)$

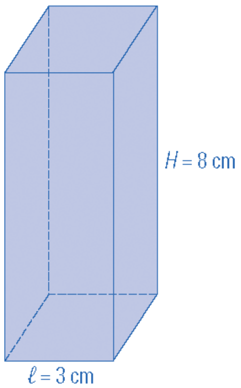
$A = 2(10 \cdot 5 + 10 \cdot 3 + 5 \cdot 3) = 190 \text{ m}^2$

$V = a \cdot b \cdot c$

$V = 10 \cdot 5 \cdot 3 = 150 \text{ m}^3$

- El **área total del prisma** se deduce de su desarrollo plano, que está formado por dos bases iguales, que son polígonos regulares, y tantos rectángulos iguales como aristas tenga la base.
$$A_T = 2A_B + A_L.$$
- El **volumen del prisma** se obtiene multiplicando el área de la base por la altura. $V = A_B \cdot H$.

2. Haz el dibujo y halla el área y el volumen de un prisma cuadrangular en el que la arista de la base mide 3 cm y la altura del prisma mide 8 cm.



$A_B = \ell^2 \Rightarrow A_B = 3^2 = 9 \text{ cm}^2$

$A_L = 4\ell H \Rightarrow$

$A_L = 4 \cdot 3 \cdot 8 = 96 \text{ cm}^2$

$A_T = 2A_B + A_L \Rightarrow$

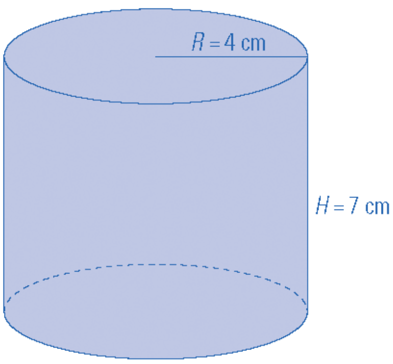
$A_T = 2 \cdot 9 + 96 = 114 \text{ cm}^2$

$V = A_B \cdot H \Rightarrow$

$V = 9 \cdot 8 = 72 \text{ cm}^3$

Una **raíz cuadrada** es **entera** cuando el radicando no es un cuadrado perfecto. En estos casos se puede hallar entre qué dos números enteros positivos se encuentra la raíz cuadrada. El menor de ellos se llama **raíz cuadrada por defecto**, y el mayor, **raíz cuadrada por exceso**.

3. Haz el dibujo y calcula el área y el volumen de un cilindro recto de 4 cm de radio de la base y 7 cm de altura. Aproxima el resultado a dos decimales.



$A_B = \pi R^2 \Rightarrow A_B = \pi \cdot 4^2 = 50,27 \text{ cm}^2$

$A_L = 2\pi RH \Rightarrow A_L = 2 \cdot \pi \cdot 4 \cdot 7 = 175,93 \text{ cm}^2$

$A_T = 2A_B + A_L \Rightarrow A_T = 2 \cdot 50,27 + 175,93 = 276,47 \text{ cm}^2$

$V = A_B \cdot H \Rightarrow V = 50,27 \cdot 7 = 351,89 \text{ cm}^3$

Área y volumen de la pirámide, el cono y la esfera I

Nombre ______________________________ Curso ________ Fecha ____________

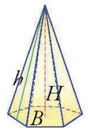
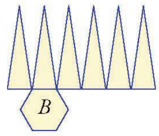
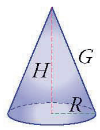
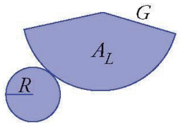
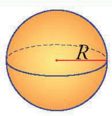
- El **área total de la pirámide** se deduce de su desarrollo plano, que está formado por un polígono regular y tantos triángulos isósceles iguales como aristas tenga la base:

$$A_T = A_B + A_L$$

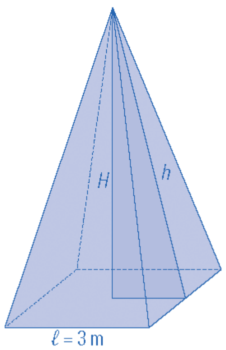
- El **volumen de la pirámide** se obtiene multiplicando un tercio por el área de la base y por la altura:

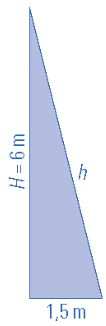
$$V = \frac{1}{3} A_B \cdot H$$

1. Completa la tabla con el área y volumen que falta.

Nombre	Dibujo	Desarrollo	Área	Volumen
Pirámide			$A_T = A_B + A_L$	$V = \frac{1}{3} A_B \cdot H$
Cono			$A_B = \pi R^2$ $A_L = \pi RG$ $A_T = A_B + A_L$	
Esfera		No tiene desarrollo plano	$A_B = 4\pi R^2$	$V = \frac{4}{3}\pi R^3$

2. Haz el dibujo y halla el área y el volumen de un cono recto en el que el radio de la base mide 2 m y la altura mide 8 m. Aproxima el resultado a dos decimales.





$A_B = \ell^2 \Rightarrow A_B = 3^2 = 9 \text{ m}^2$

$A_L = 4\ell \cdot h : 2$

Se calcula la apotema de la pirámide, h:

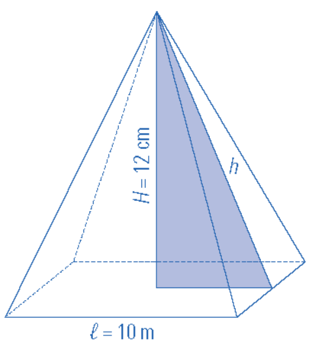
$h = \sqrt{1{,}5^2 + 6^2} = 6{,}18$ m

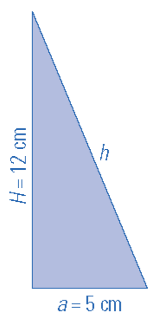
$A_L = 4 \cdot 3 \cdot 6{,}18 : 2 = 37{,}08 \text{ m}^2$

$A_T = A_B + A_L \Rightarrow A_T = 9 + 37{,}08 = 46{,}08 \text{ m}^2$

$V = \frac{1}{3} A_B \cdot H \Rightarrow V = \frac{1}{3} \cdot 9 \cdot 6 = 18 \text{ m}^3$

3. Haz el dibujo y calcula el área y el volumen de una pirámide cuadrangular en la que la arista de la base mide 10 cm y la altura de la pirámide mide 12 cm.





$A_B = \ell^2$

$A_B = 10^2 = 100 \text{ m}^2$

$A_L = 4 \cdot \ell \cdot h : 2$

Se calcula la apotema de la pirámide, h:

$h = \sqrt{5^2 + 12^2} = 13$ cm

$A_L = 4 \cdot 10 \cdot 13 : 2 = 260 \text{ cm}^2$

$A_T = A_B + A_L \Rightarrow A_T = 100 + 260 = 360 \text{ cm}^2$

$V = \frac{1}{3} A_B \cdot H$

$V = \frac{1}{3} \cdot 100 \cdot 12 = 400 \text{ cm}^3$

Área y volumen de la pirámide, el cono y la esfera II

Nombre ______________________ Curso ________ Fecha ____________

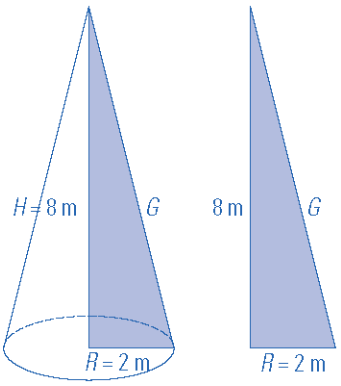
- El **área total del cono** se deduce de su desarrollo plano, que está formado por una base, que es un círculo, y un sector circular:

$$A_B = \pi R^2 \qquad A_L = \pi RG \qquad A_T = A_B + A_L$$

- El **volumen del cono** se obtiene multiplicando por un tercio el área de la base por la altura:

$$V = \frac{1}{3} A_B \cdot H$$

1. Haz el dibujo y halla el área y el volumen de un cono recto en el que el radio de la base mide 2 m y la altura mide 8 m. Aproxima el resultado a dos decimales.



$A_B = \pi R^2 \Rightarrow A_B = \pi \cdot 2^2 = 12{,}57\ m^2$

$A_L = \pi RG$

Se calcula la generatriz G:

$G = \sqrt{2^2 + 8^2} = 8{,}25\ m$

$A_L = \pi \cdot 2 \cdot 8{,}25 = 51{,}84\ m^2$

$A_T = A_B + A_L \Rightarrow A_T = 12{,}57 + 51{,}84 = 64{,}41\ m^2$

$V = \frac{1}{3} A_B \cdot H \Rightarrow V = \frac{1}{3} \cdot 12{,}57 \cdot 8 = 33{,}52\ m^3$

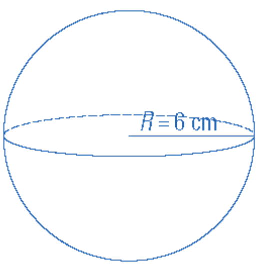
- El **área de la esfera** es igual a la de cuatro círculos máximos:

$$A = 4\pi R^2$$

- El **volumen de la esfera** se obtiene multiplicando cuatro tercios por π y por el radio al cubo:

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3$$

2. Haz el dibujo y calcula el área y el volumen de una esfera cuyo radio mide 6 cm. Aproxima el resultado a dos decimales.



$A = 4\pi R^2 \Rightarrow$

$A = 4\pi \cdot 6^2 = 452{,}39\ cm^2$

$V = \frac{4}{3}\pi R^3 \Rightarrow$

$V = \frac{4}{3}\pi \cdot 6^3 = 904{,}78\ cm^3$

Matemáticas 2.º ESO ▮ Unidad 13 ▮ Ficha 6
Área y volumen del tronco de pirámide y tronco de cono

Bruño

Nombre ______________________ Curso ________ Fecha ____________

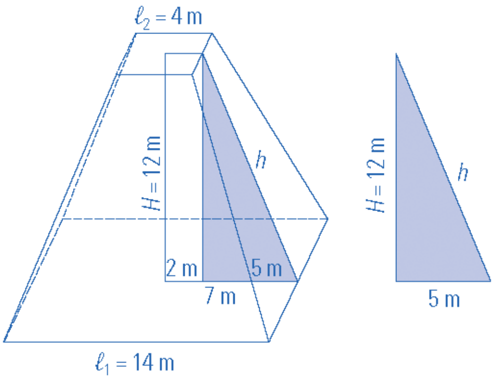
- El **área total de un tronco** de pirámide se deduce de su desarrollo plano, que está formado por dos bases que son polígonos regulares desiguales, y tantos trapecios isósceles iguales como aristas tenga la base.

$$A_T = A_{B_1} + A_{B_2} + A_L$$

- El **volumen de un tronco** de pirámide se obtiene multiplicando un tercio por la suma de las áreas de las bases más la raíz cuadrada del producto de las áreas, y multiplicando todo por altura.

$$V = \frac{1}{3}\left(A_{B_1} + A_{B_2} + \sqrt{A_{B_1} \cdot A_{B_2}}\right) \cdot H$$

1. Haz el dibujo y halla el área y el volumen de un tronco de pirámide cuadrada en el que la arista de la base mayor mide 14 m; la arista de la base menor, 4 m, y la altura, 12 m. Aproxima el resultado a dos decimales.



$A_{B_1} = \ell_1^2 \Rightarrow A_{B_1} = 14^2 = 196\ \text{m}^2$

$A_{B_2} = \ell_2^2 \Rightarrow A_{B_2} = 4^2 = 16\ \text{m}^2$

$A_L = 4 \cdot \dfrac{\ell_1 + \ell_2}{2} \cdot h$

Se calcula la apotema del tronco de pirámide, h:

$h = \sqrt{5^2 + 12^2} = 13$ m

$A_L = 4 \cdot \dfrac{14 + 4}{2} \cdot 13 = 468\ \text{m}^2$

$A_T = A_{B_1} + A_{B_2} + A_L \Rightarrow A_T = 196 + 16 + 468 = 680\ \text{m}^2$

$V = \dfrac{1}{3}\left(A_{B_1} + A_{B_2} + \sqrt{A_{B_1} \cdot A_{B_2}}\right) \cdot H$

$V = \dfrac{1}{3}\left(9 + 16 + \sqrt{196 \cdot 16}\right) \cdot 12 = 1\,072\ \text{m}^3$

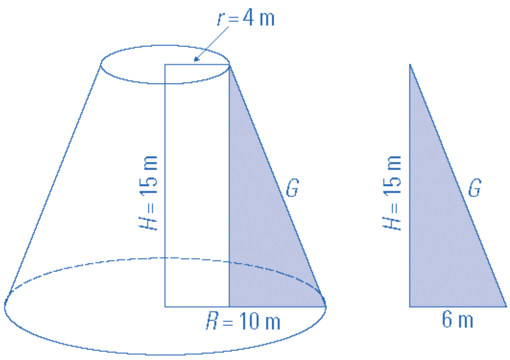
- El área total de un tronco de cono se deduce de su desarrollo plano, que está formado por dos bases que son dos círculos desiguales, y un trapecio circular:

$$A_T = A_{B_1} + A_{B_2} + A_L \qquad A_{B_1} = \pi R^2 \qquad A_{B_1} = \pi r^2 \qquad A_L = \pi(R + r)G$$

- El volumen de un tronco de cono se obtiene multiplicando un tercio por la suma de las áreas de las bases más la raíz cuadrada del producto de las áreas de las bases, y multiplicando todo por la altura:

$$V = \frac{1}{3}\left(A_{B_1} + A_{B_2} + \sqrt{A_{B_1} \cdot A_{B_2}}\right) \cdot H$$

2. Haz el dibujo y halla el área y el volumen de un tronco de cono en el que el radio de la base mayor mide 10 m; el radio de la base menor, 4 m, y la altura, 15 m. Aproxima el resultado a dos decimales.



$A_{B_1} = \pi R^2 \Rightarrow A_{B_1} = \pi \cdot 10^2 = 314{,}16\ \text{m}^2$

$A_{B_2} = \pi r^2 \Rightarrow A_{B_2} = \pi \cdot 4^2 = 50{,}27\ \text{m}^2$

$A_L = \pi(R + r)G$

Se calcula la generatriz, G:

$G = \sqrt{6^2 + 15^2} = 16{,}16$ m

$A_L = \pi \cdot (10 + 4) \cdot 16{,}16 = 710{,}75\ \text{m}^2$

$A_T = A_{B_1} + A_{B_2} + A_L$

$A_T = 314{,}16 + 50{,}27 + 710{,}75 = 1\,075{,}18\ \text{m}^2$

$V = \dfrac{1}{3}\left(A_{B_1} + A_{B_2} + \sqrt{A_{B_1} \cdot A_{B_2}}\right) \cdot H$

$V = \dfrac{1}{3}\left(314{,}16 + 50{,}27 + \sqrt{314{,}16 \cdot 50{,}27}\right) \cdot 15 =$

$= 2\,450{,}50\ \text{m}^3$

Nombre ______________________ Curso ________ Fecha ____________

1. Completa:

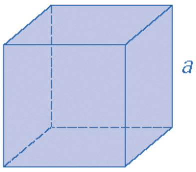
a) 15 dm³ = 15 000 cm³

b) 0,05 dam³ = 50 m³

c) 250 dm³ = 0,25 m³

d) 32 500 000 cm³ = 0,0325 dam³

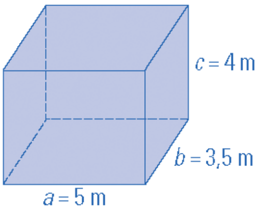
2. Haz el dibujo y calcula el área y el volumen de un cubo de 4 m de arista.



$A = 6a^2 \Rightarrow A = 6 \cdot 4^2 = 96\ \text{m}^2$

$V = a^3 \Rightarrow V = 4^3 = 64\ \text{m}^3$

3. Haz el dibujo y halla el área y el volumen de un ortoedro cuyas dimensiones son 5 m, 3,5 m y 4 m.



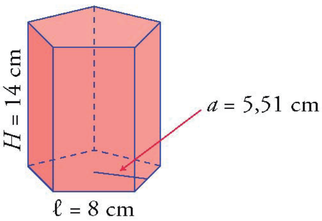
$A = 2(ab + ac + bc)$

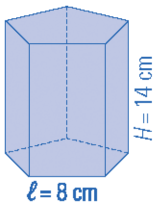
$A = 2(5 \cdot 3{,}5 + 5 \cdot 4 + 3{,}5 \cdot 4) = 103\ \text{m}^2$

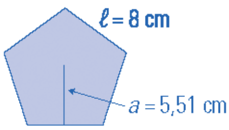
$V = a \cdot b \cdot c$

$V = 5 \cdot 3{,}5 \cdot 4 = 70\ \text{m}^3$

4. Calcula el área y el volumen de un prisma pentagonal en el que la arista de la base mide 8 cm, la apotema de la base mide 5,51 cm y la altura del prisma mide 14 cm. Redondea el resultado a dos decimales.







$A_B = \dfrac{P \cdot a}{2}$

$A_B = \dfrac{5 \cdot 8 \cdot 5{,}51}{2} = 110{,}2\ \text{cm}^2$

$A_L = 5 \cdot \ell \cdot H$

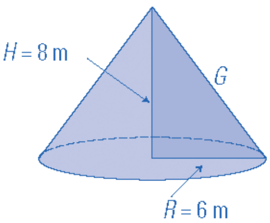
$A_L = 5 \cdot 8 \cdot 14 = 560\ \text{cm}^2$

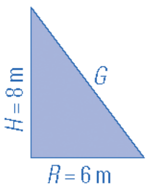
$A_T = 2A_B + A_L \Rightarrow A_T = 2 \cdot 110{,}2 + 560 = 780{,}4\ \text{cm}^2$

$V = A_B \cdot H$

$V = 110{,}2 \cdot 14 = 1\,542{,}8\ \text{cm}^3$

5. Haz el dibujo y halla el área y el volumen de un cono recto de 6 m de radio de la base y 8 m de altura.





$A_B = \pi R^2$

$A_B = \pi \cdot 6^2 = 113{,}10\ \text{m}^2$

$A_L = \pi R G$

Se calcula la generatriz, G:

$G = \sqrt{6^2 + 8^2} = 10\ \text{m}$

$A_L = \pi \cdot 6 \cdot 10 = 188{,}50\ \text{m}^2$

$A_T = A_B + A_L$

$A_T = 113{,}10 + 188{,}50 = 301{,}6\ \text{m}^2$

$V = \dfrac{1}{3} A_B \cdot H$

$V = \dfrac{1}{3} \cdot 113{,}10 \cdot 8 = 301{,}6\ \text{m}^3$

OBJETIVOS

a. Identificar la población y la muestra de un estudio estadístico.
b. Identificar y clasificar el carácter estadístico observado en un estudio estadístico.
c. Hacer tablas de frecuencias absolutas y relativas con datos discretos.
d. Dibujar e interpretar diagramas de barras, polígono de frecuencias y diagramas de sectores.
e. Trabajar con tablas de datos agrupados.
f. Calcular media, moda y mediana e interpretar sus resultados.
g. Resolver problemas estadísticos aplicando una estrategia conveniente y escogiendo el método más conveniente para la realización de los cálculos y representaciones gráficas según su complejidad: con lápiz y papel o con ordenador.

COMPETENCIAS BÁSICAS

Competencia en el conocimiento y la interacción con el mundo físico

- Aplicar conocimientos básicos de la estadística para interpretar fenómenos sencillos observables en el mundo físico y natural.
- Utilizar los conocimientos básicos de estadística para valorar las informaciones que puedan encontrar en los medios de comunicación y en muchos mensajes publicitarios.

Competencia para aprender a aprender

- Valorar la regularidad y constancia del trabajo diario dedicado al estudio y a la realización de actividades de aprendizaje.

Autonomía e iniciativa personal

- Adaptarse a usar distintas técnicas, instrumentos y métodos para el aprendizaje de los contenidos matemáticos de estadística.

CONTENIDOS

Conceptos

- Población y muestra.
- Carácter estadístico cualitativo, cuantitativo, cuantitativo discreto y cuantitativo continuo.
- Frecuencia: absoluta y relativa.
- Marca de clase.
- Diagrama de barras, diagrama de sectores e histograma.
- Parámetro de centralización: moda, mediana y media.

Procedimientos

- Utilización e interpretación del lenguaje gráfico teniendo en cuenta la situación que se representa y utilizando el vocabulario y los símbolos adecuados.
- Interpretación y elaboración de tablas numéricas a partir de conjuntos de datos, de gráficas, teniendo en cuenta el fenómeno al que se refieren.
- Detección de falacias en la formulación de proposiciones que utilizan el lenguaje estadístico.
- Planificación y realización individual y colectiva de tomas de datos utilizando técnicas de encuesta, muestreo, recuento y construcción de tablas estadísticas.
- Formulación de conjeturas sobre el comportamiento de una población de acuerdo con los resultados relativos a una muestra de la misma.
- Formulación de conjeturas sobre el comportamiento de una gráfica teniendo en cuenta el fenómeno que representa.

Actitudes

- Sensibilidad, interés y valoración crítica del uso de los lenguajes gráfico y estadístico en informaciones y argumentaciones sociales, políticas y económicas.
- Sensibilidad y gusto por la precisión, el orden y la claridad en el tratamiento y presentación de datos y resultados relativos a observaciones, experiencias y encuestas.
- Interés y respeto por las estrategias, e interpretaciones a problemas estadísticos distintas de las propias.

CRITERIOS DE EVALUACIÓN

a.1. Utiliza los conceptos, procedimientos y terminología de estadística unidimensional con propiedad.
b.1. Reconoce y clasifica un carácter estadístico.
c.1. Haz una tabla de frecuencias absolutas y relativas con datos discretos.
d.1. Haz una representación gráfica que recoge los datos de un estudio estadístico con un carácter cualitativo y cuantitativo.
e.1. Trabaja con datos agrupados en intervalos.
f.1. Calcula la moda, la mediana y la media e interpreta sus resultados.
g.1. Resuelve problemas estadísticos y toma decisiones con el análisis de los parámetros obtenidos.

Tabla de frecuencias

Bruño

Nombre ______________________ Curso ________ Fecha ________

La **frecuencia absoluta** de un valor es el número de veces que se repite. Se representa por n_i.
La suma de todas las frecuencias absolutas es igual al total de datos. Se representa por N.

La **frecuencia relativa** de un valor es el cociente entre la frecuencia absoluta y el número total de datos. Se representa por $f_i = \dfrac{n_i}{N}$.
La suma de todas las frecuencias relativas es 1.

1. Se desea hacer un estudio sobre el número de personas que hacen deporte en una localidad. Para ello se entrevista a 300 personas al azar. Indica la población, la muestra y el carácter estadístico que se estudia, y clasifica este último.

Población: Todas las personas que viven en esa localidad.

Muestra: 300 personas de la localidad.

Carácter estadístico: Hacer deporte. Es cualitativo.

2. Clasifica los siguientes caracteres estadísticos:

a) Color del cabello.

b) N.º de libros leídos.

c) Peso de un paquete.

d) La estatura.

a) Cualitativo.

b) Cuantitativo discreto.

c) Cuantitativo continuo.

3. Se ha lanzado un dado numerado con seis caras y se han anotado los resultados siguientes:

1	3	1	4	2	2	5	3	6	2	4	5	4
6	2	3	5	3	6	3	4	1	6	3	4	

Clasifica el carácter estudiado y haz una tabla de frecuencias absoluta y relativa.

El carácter es cuantitativo discreto.

x_i	n_i	f_i
1	3	0.12
2	4	0.16
3	6	0.24
4	5	0.20
5	3	0.12
6	4	0.16
Total	**25**	**1.00**

Representación gráfica I

Bruño

Nombre ______________________ Curso ________ Fecha ____________

Un **polígono de frecuencias** o **lineal** es un gráfico que se realiza uniendo con una línea poligonal los puntos medios de los extremos superiores de las barras en un diagrama de barras. En el eje de abscisas se representan los valores del carácter estadístico, y en el eje de ordenadas, las frecuencias absolutas. Se utiliza con datos cuantitativos.

Un **diagrama de barras** es un gráfico que está formado por barras separadas de altura proporcional a la frecuencia absoluta de cada valor. En el eje de abscisas se representan los valores del carácter estadístico, y en el de ordenadas, las frecuencias absolutas. Se utiliza con datos cualitativos.

1. Se ha realizado un estudio en una heladería preguntando a 40 personas sobre los sabores más solicitados, y se han obtenido los resultados de la tabla siguiente:

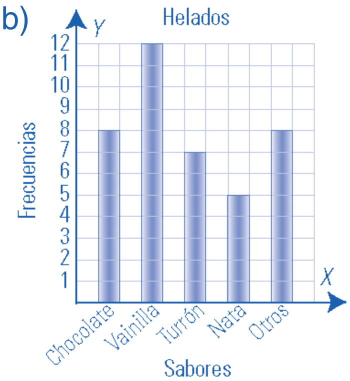
x_i	Chocolate	Vainilla	Turrón	Nata	Otro
n_i	8	12	7	5	8

a) Representa los datos en un diagrama de barras e interpreta el gráfico obtenido.

b) Representa el polígono lineal.

El sabor más frecuente es la vainilla, y entre el chocolate y la vainilla suponen la mitad de las elecciones.

a) y b)



2. Se ha realizado un estudio sobre el color del coche de un grupo de familias, y se ha obtenido la siguiente tabla de frecuencias:

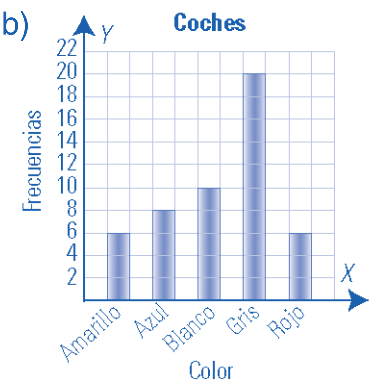
x_i	Amarillo	Azul	Blanco	Gris	Rojo
n_i	6	8	10	20	6

a) Representa los datos mediante un diagrama de barras, e interpreta el gráfico obtenido.

b) Representa el polígono lineal.

Claramente el color gris es el color de moda. También se observa que los colores más llamativos (amarillo y rojo) son los menos frecuentes. Son colores más juveniles y los jóvenes tienen normalmente menos dinero para comprar un coche.

a) y b)



Representación gráfica II

Nombre ______________________ Curso ________ Fecha ____________

Un **diagrama de sectores** es un gráfico que consiste en un círculo dividido en sectores de amplitud proporcional a la frecuencia de cada valor. Se utiliza con datos cualitativos y cuantitativos. Para dibujarlo se sigue este procedimiento:

a) Se calcula la amplitud correspondiente a la frecuencia 1 dividiendo 360° entre el número total de datos, N:

$$\text{Amplitud de una unidad} = \frac{360°}{N}$$

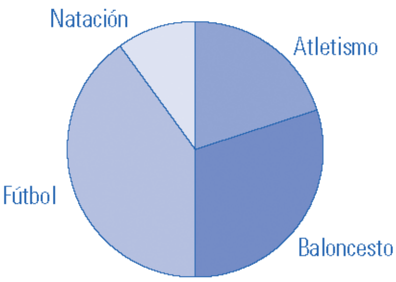
b) Se calcula la amplitud de cada valor multiplicando la amplitud de una unidad por cada frecuencia:

$$\text{Amplitud de } x_i = \frac{360°}{N} \cdot n_i.$$

1. Se ha realizado una encuesta sobre el tipo de deporte preferido entre los estudiantes de un centro escolar, y se han obtenido los siguientes resultados:

Deporte	Atletismo	Baloncesto	Fútbol	Natación
Frecuencia	20	30	40	10

Representa en un diagrama de sectores los datos e interpreta el gráfico obtenido.

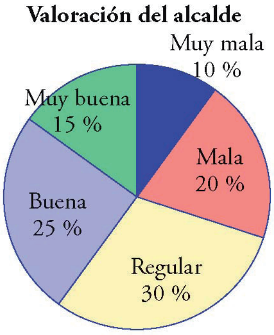


Deporte	n_i	**Amplitud**
Atletismo	20	3,6° · 20 = 72°
Baloncesto	30	3,6° · 30 = 108°
Fútbol	40	3,6° · 40 = 144°
Natación	10	3,6° · 10 = 36°
Total	**100**	**360°**

Deportes preferidos

El fútbol y el baloncesto son elegidos por la mayor parte de los encuestados. Son claramente los deportes preferidos.

2. El siguiente diagrama representa la opinión de 60 vecinos sobre la actuación de su alcalde. Haz la tabla de frecuencias absolutas y da la amplitud de los ángulos de los sectores.



360 : 60 = 6°

x_i	n_i	**Amplitud**
Muy mala	60 · 0,10 = 6	6° · 6 = 36°
Mala	60 · 0,20 = 12	6° · 12 = 72°
Regular	60 · 0,30 = 18	6° · 18 = 108°
Buena	60 · 0,25 = 15	6° · 15 = 90°
Muy buena	60 · 0,15 = 9	6° · 9 = 54°
Total	**60**	**360°**

Representación gráfica de caracteres continuos

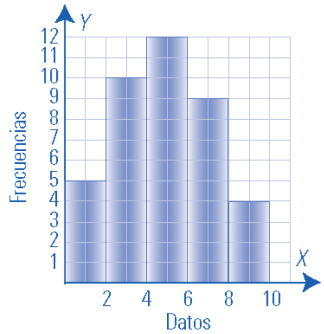
Bruño

Nombre ______________________ Curso ________ Fecha ____________

Un **histograma** es una representación gráfica mediante rectángulos adosados de altura igual a su frecuencia. En el eje de abscisas se representan los valores del carácter estadístico agrupados en intervalos, y en el eje de ordenadas, las frecuencias absolutas. Se utiliza cuando los datos son cuantitativos discretos y se toman muchos valores diferentes, o cuando son cuantitativos continuos.

1. Representa en un histograma la siguiente tabla de frecuencias:

Intervalo	Frecuencias
0-2	5
20-4	10
4-6	12
6-8	9
8-10	4
Total	**40**

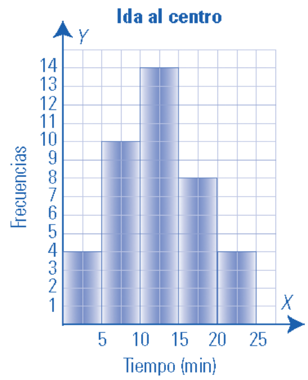


2. El tiempo en minutos que tardan un grupo de escolares en llegar al centro es:

2	5	3	10	6	11	14	7
16	18	8	12	15	10	20	11
10	13	10	18	4	20	6	22
8	15	7	10	24	13	18	15
12	5	16	7	10	12	4	7

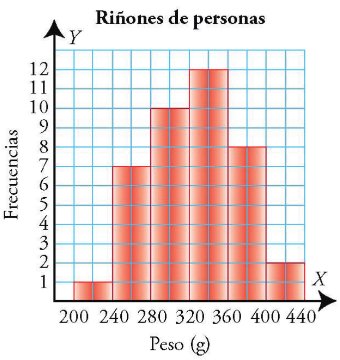
Completa la siguiente tabla de frecuencias, representa los datos en un histograma e interpreta los datos.

Intervalo	n_i	f_i
0-2	4	0.10
20-4	10	0.25
4-6	14	0.35
6-8	8	0.20
8-10	4	0.10
Total	**40**	**1.00**



El tiempo empleado más frecuente está entre 10 y 15 minutos.
Hay muy pocos alumnos que vivan al lado del centro o muy lejos.

3. El siguiente histograma recoge el peso de los riñones, redondeados en gramos, de personas normales de 40 años. Haz la tabla de frecuencias e interpreta el resultado.



Peso	n_i
200-240	1
240-280	7
280-320	10
320-360	12
360-400	8
400-440	2
Total	**40**

Matemáticas 2.º ESO ▮ Unidad 14 ▮ Ficha 5
Medidas de centralización I

Bruño

Nombre ______________________ Curso ________ Fecha ____________

La **media** de un conjunto de datos es el resultado que se obtiene al dividir la suma de todos los datos entre el número total de ellos. Se representa por $\bar{x}$.

La media solo se puede calcular si los datos son cuantitativos.

La **mediana** de una distribución es el valor que está en el centro al ordenar los datos; es decir, el número de datos menores que él es igual al número de datos mayores que él. Para poder calcular la mediana, los datos se tienen que poder ordenar.

1. Calcula la media aritmética, la moda y la mediana de la siguiente tabla de datos:

x_i	3	4	5	6	7	8
n_i	1	4	10	5	4	1

x_i	n_i	$n_i \cdot x_i$
3	1	3
4	4	16
5	10	50
6	5	30
7	4	28
8	1	8
Total	**25**	**135**

Media $\bar{x} = \dfrac{135}{25} = 5{,}4$; Moda: 5; Mediana: 5

2. Los goles que ha marcado un equipo de fútbol en los últimos 20 partidos han sido:

N.º de goles x_i	0	1	2	3	4	5
Frecuencia n_i	2	5	8	2	2	1

Calcula los parámetros de centralización que tengan sentido, e interpreta el resultado.

x_i	n_i	$n_i \cdot x_i$
0	2	0
1	5	5
2	8	16
3	2	6
4	2	8
5	1	5
Total	**20**	**40**

Como el carácter es cuantitativo, se pueden calcular los tres parámetros.

Media $\bar{x} = \dfrac{40}{20} = 2$; Moda: 2; Mediana: 2

La media de dos goles es el valor alrededor del cual se distribuyen los datos. Además, en este caso, la mediana, que es el valor central, coincide con la media y la moda.

Matemáticas 2.º ESO ▮ Unidad 14 ▮ Ficha 6
Medidas de centralización II

Bruño

Nombre ______________________ Curso ________ Fecha ____________

1. Los días que en una ciudad se han dado distintos factores climáticos han sido:

x_i	Lluvia	Soleado	Nubes y claros	Nublado
n_i	9	12	5	4

Calcula los parámetros de centralización que tengan sentido, e interpreta el resultado.

Como el carácter es cualitativo no ordenable, el único parámetro que tiene sentido es la moda.
Moda: Soleado.

2. Calcula la media en la tabla de frecuencias:

x_i	3-7	7-11	11-15	15-19
n_i	4	10	3	3

Intervalo	x_i	n_i	$x_i \cdot n_i$
3-7	5	4	20
7-11	9	10	90
11-15	13	3	39
15-19	17	3	56
Total		**20**	**200**

3. Las notas que un grupo de estudiantes ha obtenido en un examen de Lengua han sido:

Notas: x_i	3	4	5	6	7	8	10
Frecuencia: n_i	2	3	9	5	3	2	1

Calcula los parámetros de centralización que tengan sentido, e interpreta el resultado.

Notas	n_i	$n_i \cdot x_i$
3	2	6
4	3	12
5	9	45
6	5	30
7	3	21
8	2	16
10	1	10
Total	**25**	**140**

Como el carácter es cuantitativo, se pueden calcular los tres parámetros.

Media $\overline{x} = \dfrac{140}{25} = 5{,}6$; Moda: 5; Mediana: 5.

El valor de la nota media, 5,6, es el valor alrededor del cual se distribuyen los datos. En este caso, además, la mediana, que es el valor central, está en 5, próxima a la media. La mayoría de las notas están próximas al 5.

 Bruño

Nombre ______ Curso ______ Fecha ______

1. Se ha realizado una encuesta sobre las preferencias de lectura de un grupo de personas, y se han recogido los siguientes datos:

Novela	Aventuras	C. ficción	Aventuras	Novelas
Aventuras	C.ficción	Novela	Aventuras	C. ficción
Poesía	C.ficción	Poesía	Novela	Aventuras
Aventuras	Novela	Aventuras	C.ficción	Aventuras
C. ficción	Aventuras	C. ficción	C. ficción	Novelas
Novela	C.ficción	Poesía	Aventuras	C. ficción
C. ficción	Aventuras	Novelas	C.ficción	Novela
Novela	Poesía	Aventuras	Aventuras	Aventuras

Clasifica el carácter y haz una tabla de frecuencias absoluta y relativa. Interpreta el resultado.

x_i	n_i	f_i
Novelas	10	0,25
Aventuras	14	0,35
C. ficción	12	0,30
Poesía	4	0,10
Total	**40**	**1,00**

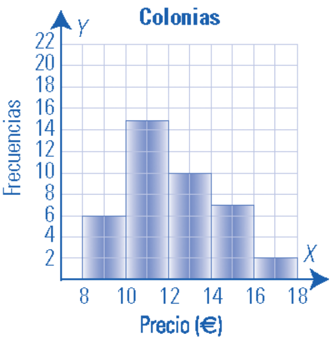
Carácter cualitativo.

Claramente, la poesía es el género menos leído, mientras que los otros tres géneros se reparten de forma parecida.

2. Los precios de varias colonias que hay en una tienda se recogen en la siguiente tabla:

Precio(€)	8-10	10-12	12-14	14-16	16-18	**Total**
N.º frascos	6	15	10	7	2	**40**

Representa los datos en un histograma e interpreta los resultados.



Aproximadamente la mitad de las colonias son de un precio menor de 12 €, repartidos en dos intervalos. La otra mitad se reparte en tres intervalos, y en el último, que es el más caro, hay poca frecuencia.

3. Calcula la media en la siguiente tabla de frecuencias:

x_i	5-10	10-15	15-20	20-25
n_i	8	12	14	6

Representa los datos en un diagrama de barras. Calcula los parámetros de centralización que tengan sentido, e interpreta el resultado.

Intervalo	x_i	n_i	$x_i \cdot n_i$
5-10	7,5	8	60
10-15	12,5	12	150
15-20	17,5	14	245
20-25	22,5	6	130
Total		**40**	**590**

Media $\bar{x} = \frac{590}{40} = 14,75$