PROBABILIDAD

Actividad

La siguiente tabla muestra los resultados obtenidos tras efectuar diversas realizaciones del experimento consistente en extraer una bola de una urna que contiene ocho bolas blancas y dos bolas negras.

— Completa la tabla y comprueba la definición axiomática de la probabilidad a partir de dichos resultados.

Suceso		Realizaciones del experimento (N)							
		50	100	150	200	250	300	350	400
Blanca	n_A	34	73	113		191		275	
	f_A	0,680			0,720	0,764	0,773		0,795
Negra	n_B		27	37	56		68	75	82
	f_B	0,320	0,270			0,236	0,227		

Solución

Con los datos de la tabla completamos en negrita la tabla del enunciado.

		Realizaciones del experimento (N)							
Suceso		50	100	150	200	250	300	350	400
Blanca	n_A	34	73	113	**144**	191	**232**	275	**318**
	f_A	0,680	**0,730**	**0,753**	0,720	0,764	0,773	**0,786**	0,795
Negra	n_B	**16**	27	37	56	**59**	68	75	82
	f_B	0,320	0,270	**0,247**	**0,280**	0,236	0,227	**0,214**	**0,205**

Actividad

En una rifa de 100000 números (del 0 al 99999) se sortea un coche.

a) ¿Cuál es la probabilidad de ganar el premio comprando 4 números?
b) ¿Cuál es la probabilidad de que la papeleta premiada acabe en 2?
c) ¿Cuál es la probabilidad de que la papeleta premiada no acabe en 24?

Solución

El espacio muestral son los 100000 números, así el número de casos posibles es 100000.

a) Sea A: ganar el premio comprando 4 números.
El número de casos favorables al suceso A son 4.
Aplicando la regla de Laplace se tiene:

$$P(A) = \frac{4}{100\,000} = \frac{1}{25\,000}$$

b) Sea A: la papeleta premiada acaba en 2.
Casos favorables a A: 10 000.
Por la regla de Laplace:

$$P(A) = \frac{10\,000}{100\,000} = \frac{1}{10} = 0{,}1$$

c) Sea A: la papeleta premiada acaba en 24.
Casos favorables al suceso A: 1 000.
Por la regla de Laplace:

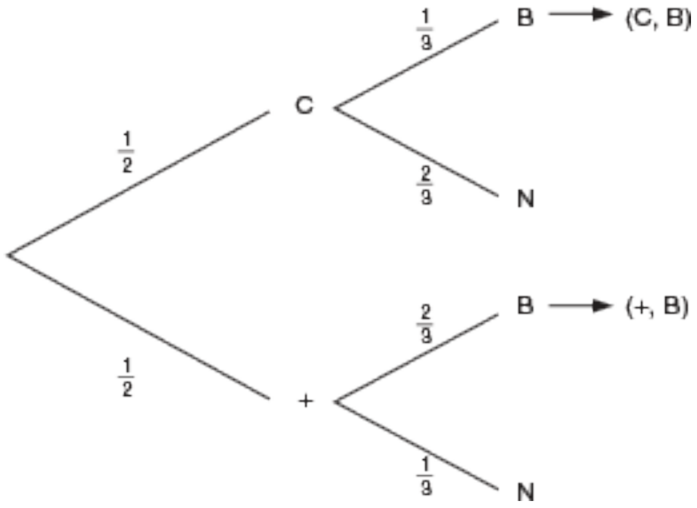
$$P(A) = \frac{1000}{100\,000} = \frac{1}{100} = 0{,}01 \Rightarrow P(\bar{A}) = 0{,}99$$

Actividad

Sean dos urnas U_1 y U_2 .U_1 contiene una bola blanca y dos negras, y U_2, dos bolas blancas y una negra. Se lanza una moneda y, si sale cara, se extrae una bola de la urna U_1 y, si sale cruz, se extrae una bola de la urna U_2 . Halla la probabilidad del suceso *A: obtener una bola blanca.*

Solución

Elaboramos un diagrama:



Para calcular la probabilidad de cada rama utilizaremos la regla de Laplace. Según D1, la probabilidad de cada camino es:

$$P(\{C, B\}) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$$

$$P(\{+, B\}) = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$$

Finalmente, según D2, si sumamos las dos probabilidades, obtenemos la probabilidad de A:

$$P(\{C, B\}) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$$

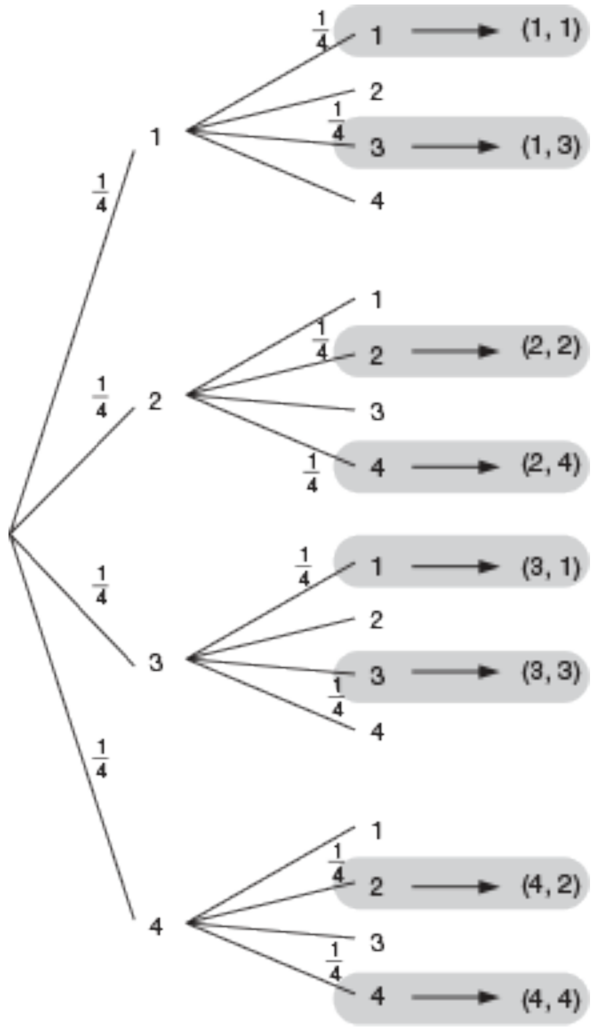
$$P(\{+, B\}) = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$$

Actividad

Lanzamos dos veces un dado con forma de tetraedro. ¿Cuál es la probabilidad del suceso *A: la suma de los puntos de las caras ocultas es un múltiplo de dos*?

Solución

Elaboramos un diagrama en árbol:



Para calcular la probabilidad de cada rama utilizamos la propiedad D1, juntamente con la regla de Laplace:

$$P(\{1, 1\}) = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{16}$$

$$P(\{1, 3\}) = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{16}$$

$$P(\{2, 2\}) = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{16}$$

$$P(\{2, 4\}) = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{16}$$

$$P(\{3, 1\}) = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{16}$$

$$P(\{3, 3\}) = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{16}$$

$$P(\{4, 2\}) = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{16}$$

$$P(\{4, 4\}) = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{16}$$

Finalmente, según D2, se tiene:

$$P(A) = \frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} =$$

$$= \frac{8}{16} = \frac{1}{2}$$

Actividad

Disponemos de dos dados trucados D_1 y D_2 . El primero tiene una cara con un «1», dos caras con un «2» y tres caras con un «3» y el segundo, dos caras con un «1», dos caras con un «2» y dos caras con un «3». Se elige un dado al azar. Elabora la tabla de contingencia y el diagrama en árbol correspondientes.

a) Determina la probabilidad de obtener un «2».
b) Si se ha obtenido un «3», ¿qué probabilidad hay de que hayamos elegido el dado D_1?

Solución

Creamos la tabla de contingencia con los datos del enunciado:

	"1"	"2"	"3"	Total
D_1	1	2	3	6
D_2	2	2	2	6
Total	3	4	5	12

a) Para determinar la probabilidad de obtener un "2", tenemos que observa el total de la columna del "2", con lo que tenemos:

$$P(2) = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$$

b) Para determinar la probabilidad de saber si ha sido del D_1, el "3" que hemos sacado, basta mirar la fila del D_1, y se corresponde con

$$\frac{3}{5}.$$

Actividad

Disponemos de cuatro urnas con bolas, de tal manera que:

— En la primera urna hay cuatro bolas rojas y cinco blancas.
— En la segunda urna hay tres bolas rojas y ocho blancas.
— En la tercera urna hay cinco bolas rojas y dos blancas.
— En la cuarta urna hay dos bolas rojas.

Si elegimos una urna al azar y extraemos de ella una bola, ¿cuál es la probabilidad de que ésta sea roja?

Solución

Consideramos los sucesos:

A_1: elegir la primera urna
A_2: elegir la segunda urna
A_3: elegir la tercera urna
A_4: elegir la cuarta urna
B: extraer una bola roja

Se cumple que A_1, A_2, A_3 y A_4 forman un sistema completo de sucesos. Como

$$P(A_1) = P(A_2) = P(A_3) = P(A_4) = \frac{1}{4} \neq 0,$$

aplicamos el teorema de la probabilidad total:

$$P(B) = P(A_1) \cdot P(B/A_1) + P(A_2) \cdot P(B/A_2) + \\ + P(A_3) \cdot P(B/A_3) + P(A_4) \cdot P(B/A_4) = \\ = \frac{1}{4} \cdot \frac{4}{9} + \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{11} + \frac{1}{4} \cdot \frac{5}{7} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} = 0,4829$$

Actividad

En un congreso se reúnen 250 médicos del Benelux, de los cuales 115 son holandeses; 65, belgas, y 70, luxemburgueses. De ellos, el 75 % de los holandeses, el 60 % de los belgas y el 65 % de los luxemburgueses están a favor de la utilización de determinada vacuna. Seleccionamos al azar uno de los médicos y resulta estar a favor del uso de la vacuna. ¿Cuál es la probabilidad de que sea de Luxemburgo?

Solución

Consideramos los siguientes sucesos:

A_1: ser médico holandés
A_2: ser médico belga
A_3: ser médico luxemburgués
B: estar a favor de la vacuna

Se tiene que A_1, A_2 y A_3 forman un sistema completo de sucesos y que:

$$P(A_1) = \frac{115}{250} \neq 0 \quad P(A_2) = \frac{65}{250} \neq 0$$

$$P(A_3) = \frac{70}{250} \neq 0$$

Así, podemos aplicar la fórmula del teorema de Bayes:

$$P(A_3/B) =$$

$$= \frac{P(A_3) \cdot P(B/A_3)}{P(A_1) \cdot P(B/A_1) + P(A_2) \cdot P(B/A_2) + P(A_3) \cdot P(B/A3)} =$$

$$= \frac{0,28 \cdot 0,65}{0,46 \cdot 0,75 + 0,26 \cdot 0,60 + 0,28 \cdot 0,65} = 0,266\,5$$

Actividad

El servicio de guardacostas alerta de que la probabilidad de que se produzca una tormenta de gran magnitud en las próximas 24 horas es del 85 %. Se sabe que únicamente en un 3% de las ocasiones en que se producen tormentas de tal magnitud se generan olas de más de 4 metros. ¿Cuál es la probabilidad de que la tormenta anunciada se produzca y que las olas que se generen sean de más de 4 metros de altura?

Solución

Consideramos el suceso A: producirse una tormenta de gran magnitud en las próximas 24 horas y B: generarse olas de más de 4 metros.
Según el enunciado se tiene:

$P(A) = 0,85$, $P(B/A) = 0,03$

Nos piden hallar la probabilidad $P(A \cap B)$.
Por la fórmula de probabilidad condicionada se tiene:

$$P(B/A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P(A \cap B) = P(B/A) \cdot P(A) = 0,85 \cdot 0,03 = 0,025\,5$$

Actividad

El 55 % de los jóvenes que frecuentan cierta discoteca son menores de 20 años. Un 30 % de los menores de 20 años y un 25 % de los mayores de esa edad son chicas. Si se elige un joven al azar:

a) ¿Cuál es la probabilidad de que sea chica?
b) ¿Cuál es la probabilidad de que sea mayor de 20 años, sabiendo que es una chica?
c) ¿Cuál es la probabilidad de que sea menor de 20 años, sabiendo que es un chico?

Solución

Consideramos los siguientes sucesos:

M: frecuentar la discoteca teniendo menos de 20 años
N: frecuentar la discoteca teniendo 20 años o más
H: ser chica
V: ser chico

Según los datos del enunciado, se tiene:

$P(M) = 0,55$
$P(N) = 0,45$
$P(H/M) = 0,3 \Rightarrow P(V/M) = 1 – 0,3 = 0,7$
$P(H/N) = 0,25 \Rightarrow P(V/N) = 1 – 0,25 = 0,75$

a) Según el teorema de la probabilidad total:

$P(H) = P(M) \cdot P(H/M) + P(N) \cdot P(H/N) = 0,55 \cdot 0,3 + 0,45 \cdot 0,25 = 0,277\,5$

b) Según el teorema de Bayes:

$$P(N/H) = \frac{P(N) \cdot P(H/N)}{P(N) \cdot P(H/N) + P(M) \cdot P(H/M)} =$$

$$= \frac{0,45 \cdot 0,25}{0,45 \cdot 0,25 + 0,55 \cdot 0,3} = \frac{0,1125}{0,2775} = 0,4054$$

c) Por el teorema de Bayes:

$$P(M/V) = \frac{P(M) \cdot P(V/M)}{P(M) \cdot P(V/M) + P(N) \cdot P(V/N)} =$$

$$= \frac{0,55 \cdot 0,7}{0,55 \cdot 0,7 + 0,45 \cdot 0,75} = 0,5329$$

Actividad

El 25 % de los habitantes de un determinado país son rubios y los demás son morenos. Un 45 % de los rubios y un 20 % de los morenos tienen los ojos azules. Calcula la probabilidad de que al elegir un habitante:

a) Tenga los ojos azules.
b) No tenga los ojos azules.
c) Sea moreno, sabiendo que tiene los ojos azules.
d) Sea rubio, sabiendo que no tiene los ojos azules.

Solución

Consideramos los sucesos:

R: ser rubio
M: ser moreno
A: tener ojos azules

Según los datos del enunciado:

P(R) = 0,25
P(M) = 0,75
P(A/R) = 0,45
P(A/M) = 0,2

a) Según el teorema de la probabilidad total:

P(A) = P(M) · P(A/M) + P(R) · P(A/R) = 0,75 · 0,2 + 0,25 · 0,45 = 0,2625

b) $P(\bar{A}) = 1 - P(A) = 1 - 0,262\,5 = 0,737\,5$

c) Por el teorema de Bayes:

$$P(M/A) = \frac{P(M) \cdot P(A/M)}{P(M) \cdot P(A/M) + P(R) \cdot P(A/R)} =$$

$$= \frac{P(M) \cdot P(A/M)}{P(A)} = \frac{0,75 \cdot 0,2}{0,2625} = 0,5714$$

d) Por el teorema de Bayes:

$$P(R/\bar{A}) = \frac{P(R)\cdot P(\bar{A}/R)}{P(M)\cdot P(\bar{A}/R) + P(M)\cdot P(\bar{A}/M)} =$$

$$= \frac{P(R)\cdot(1 - P(A/R))}{P(R)\cdot(1 - P(A/R)) + P(M)(1 - P(A/M))} =$$

$$= \frac{0,25\cdot(1 - 0,45)}{0,25\ (1 - 0,45) + 0,75\ (1 - 0,2)} =$$

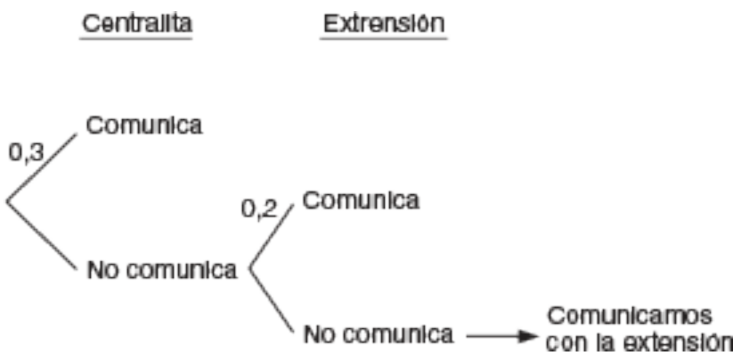
$$= \frac{0,25\cdot 0,55}{0,25\cdot 0,55 + 0,75\cdot 0,8} = 0,1864$$

Actividad

Al llamar a la centralita telefónica de una oficina, la probabilidad de que esté comunicando es 0,3 y la probabilidad de que el telefonista nos diga que la extensión que pedimos comunica es 0,2. Calcula la probabilidad de que consigamos comunicar con la extensión deseada.

Solución

Veremos claramente la respuesta si dibujamos un diagrama en árbol:



Sólo hay un camino que nos permite comunicar con la extensión, y el enunciado nos permite calcular las probabilidades de las dos ramas que lo forman:

P(la centralita no comunica) = 1 – P(la centralita comunica) = 1 – 0,3 = 0,7
P(la extensión no comunica) = 1 – P(la extensión comunica) = 1 – 0,2 = 0,8

Así,
P(comunicar con la extensión) = 0,7 · 0,8 = 0,56

Actividad

En un país se sabe que una de cada 145 personas tiene una determinada enfermedad. En este mismo país se dispone de una prueba para detectar la enfermedad, bastante fiable, pero no del todo segura. Concretamente, si un individuo tiene la enfermedad, la prueba da positiva en un 96 % de los casos, mientras que si no la tiene, la prueba da positiva en un 6% de los casos. Si un ciudadano se hace la prueba y el resultado es positivo, ¿cuál es la probabilidad de que el diagnóstico sea erróneo?

Solución

Sean E y P los sucesos «el individuo está enfermo» y «la prueba da positiva».
Como la probabilidad es el límite de las frecuencias relativas, los datos del enunciado nos dicen que:

$$P(E) = \frac{1}{145} = 0,0069$$

$$P(P/E) = 0,96 \qquad P(P/\bar{E}) = 0,06$$

Por la fórmula de Bayes tomando como sistema completo de sucesos E y $\bar{E}$:

$$P(\bar{E}/P) = \frac{P(\bar{E}) \cdot P(P/\bar{E})}{P(E) \cdot P(P/E) + P(\bar{E}) \cdot P(P/\bar{E})} =$$

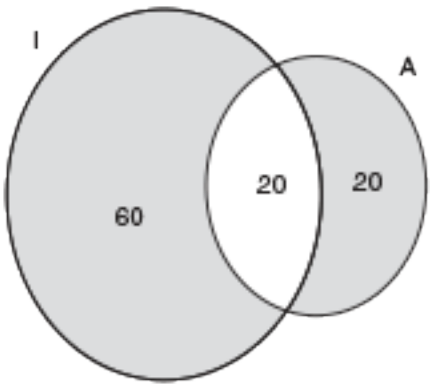
$$= \frac{(1 - 0,0069) \cdot 0,06}{0,0069 \cdot 0,96 + (1 - 0,0069) \cdot 0,06} = 0,9$$

Actividad

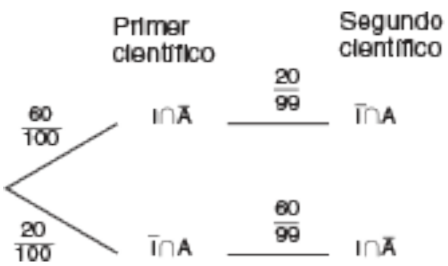
A unas jornadas científicas asisten 100 científicos, de los cuales, 80 hablan inglés y 40, alemán. ¿Cuál es la probabilidad de que elegidos dos científicos al azar no puedan entenderse sin intérprete?

Solución

Todo científico de la convención habla inglés o alemán (o ambos idiomas).
Por tanto, los 100 – 80 = 20 que no hablan inglés hablan sólo alemán.
Como hay 40 que hablan alemán y de ellos sólo 20 no entienden el inglés, habrá 40 – 20 = 20 que hablen inglés y alemán, y por tanto, 80 – 20 = 60 que sólo hablen inglés.
Nos encontramos, pues, en la situación de la figura, donde I indica «habla inglés» y A, «habla alemán».



Por otra parte, como suponemos que los científicos de la convención no se pueden entender en ningún otro idioma, dos científicos escogidos al azar no se entenderán sin ayuda de un intérprete si, y sólo si, uno de ellos habla inglés pero no alemán (o sea, pertenece a $I \cap \bar{A}$) y el otro habla alemán pero no inglés (o sea, pertenece a $\bar{I} \cap A$), es decir, cada uno debe pertenecer a una de las dos regiones sombreadas en el dibujo.
Las posibilidades de que hagamos una elección así son las que se muestran en el siguiente diagrama en árbol:



Las posibilidades de cada rama se pueden calcular usando la regla de Laplace, obteniendo las indicadas en el dibujo.
Por tanto, la probabilidad p buscada es:

$$p = \frac{60}{100} \cdot \frac{20}{99} + \frac{20}{100} \cdot \frac{60}{99} = \frac{8}{33} = 0,2424$$

Actividad

En un plato hay 20 cerezas, 4 de las cuales están picadas. Una de ellas se cae en otro plato que contenía 6 cerezas picadas y 18 sanas. Si cogemos, al azar, una cereza del segundo plato, calcula la probabilidad de que:

a) Haya caído una cereza picada, sabiendo que la que hemos cogido del segundo plato estaba picada.

b) Haya caído una cereza sana, sabiendo que la que hemos cogido del segundo plato estaba picada.

Solución

Sea S_1 el suceso «la cereza que ha caído del primer al segundo plato está sana» y S_2 el suceso «la cereza que hemos escogido del segundo plato está sana».
Puesto que todas las cerezas del primer plato tienen la misma probabilidad de caer y todas las del segundo plato, la misma probabilidad de ser escogidas:

$$P(S_1) = \frac{16}{20} = \frac{4}{5} \Rightarrow P(\overline{S}_1) = \frac{1}{5}$$

$$P(S_2/S_1) = \frac{19}{25} = \frac{4}{5} \Rightarrow P(\overline{S}_2/S_1) = \frac{6}{25}$$

$$P(S_2/\overline{S}_1) = \frac{18}{25} \Rightarrow P(\overline{S}_2/\overline{S}_1) = \frac{7}{25}$$

a) Aplicamos el teorema de Bayes tomando como sistema completo de sucesos S_1 y $\overline{S}_1$:

$$P(\overline{S}_1/\overline{S}_2) = \frac{P(\overline{S}_1)\cdot P(\overline{S}_2/\overline{S}_1)}{P(S_1)\cdot P(\overline{S}_2/S_1) + P(\overline{S}_1)\cdot P(\overline{S}_2/\overline{S}_1)} =$$

$$= \frac{\frac{1}{5}\cdot\frac{7}{25}}{\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{25} + \frac{1}{5}\cdot\frac{7}{25}} = \frac{7}{31} = 0,2258$$

b) $P(S_1/\overline{S}_2) = 1 - P(\overline{S}_1/\overline{S}_2) = 1 - 0,2258 = 0,7742$

Actividad

Un estudiante de Geografía busca una pirámide de población en tres manuales. La probabilidad de que la encuentre en el primero, el segundo o el tercer manual es, respectivamente, 0,5, 0,6 y 0,7. Halla la probabilidad de que la encuentre:

a) Sólo en un manual.
b) Exactamente en dos manuales.
c) En los tres manuales.

Solución

Sean A, B y C los sucesos «la encuentra en el primer manual», «la encuentra en el segundo» y «la encuentra en el tercero», respectivamente.
Los sucesos A, B y C son independientes, y por tanto también lo son cambiando cualquiera de ellos por su complementario.

a) P(la encuentra sólo en un manual) =

$$= P((A \cap \overline{B} \cap \overline{C}) \cup (\overline{A} \cap B \cap \overline{C}) \cup$$
$$\cup (\overline{A} \cap \overline{B} \cap C)) = P(A \cap \overline{B} \cap \overline{C}) +$$
$$+ P(\overline{A} \cap B \cap \overline{C}) + P(\overline{A} \cap \overline{B} \cap C) \overset{\text{Independencia}}{=}$$
$$= P(A)\cdot P(\overline{B})\cdot P(\overline{C}) + P(\overline{A})\cdot P(B)\cdot P(\overline{C}) +$$
$$+ P(\overline{A})\cdot P(\overline{B})\cdot P(C) = 0,5\cdot 0,4\cdot 0,3 +$$
$$+ 0,5\cdot 0,6\cdot 0,3 + 0,5\cdot 0,4\cdot 0,7 = 0,29$$

b) P(la encuentra exactamente en dos manuales) =

$$= P((A \cap B \cap \bar{C}) \cup (A \cap \bar{B} \cap C) \cup$$
$$\cup (\bar{A} \cap B \cap C)) = P(A \cap B \cap \bar{C}) +$$
$$+ P(A \cap \bar{B} \cap C) + P(\bar{A} \cap B \cap C) =$$
$$= P(A) \cdot P(B) \cdot P(\bar{C}) + P(A) \cdot P(\bar{B}) \cdot P(C) +$$
$$+ P(\bar{A}) \cdot P(B) \cdot P(C) = 0{,}5 \cdot 0{,}6 \cdot 0{,}3 +$$
$$+ 0{,}5 \cdot 0{,}4 \cdot 0{,}7 + 0{,}5 \cdot 0{,}6 \cdot 0{,}7 = 0{,}44$$

c) P(la encuentra en los tres manuales) =

$$= P(A \cap B \cap C) = P(A) \cdot P(B) \cdot P(C) =$$
$$= 0{,}5 \cdot 0{,}6 \cdot 0{,}7 = 0{,}21$$

Actividad

La probabilidad de que un hombre y una mujer de 18 años vivan 50 años más es 0,6 y 0,7, respectivamente. Calcula la probabilidad de que:

a) Ambos vivan 50 años más.
b) Viva sólo la mujer.
c) No viva ninguno de los dos más de 50 años.

Solución

Sean H y M los sucesos «el hombre vive 50 años más» y «la mujer vive 50 años más», respectivamente.
Consideramos que H y M son independientes, por lo que también lo son $\bar{H}$ y M, H y $\bar{M}$, $\bar{H}$ y $\bar{M}$

$$a)\ P(\text{ambos viven 50 años más}) = P(H \cap M) \overset{\substack{\text{Independientes}\\ \downarrow}}{=}$$
$$= P(H) \cdot P(M) = 0{,}6 \cdot 0{,}7 = 0{,}42$$

b) P(sólo la mujer vive 50 años más) = $P(\bar{H} \cap M) = P(\bar{H}) \cdot P(M) = (1 - P(H)) \cdot P(M) = (1 - 0{,}6) \cdot 0{,}7 = 0{,}28$

c) P(ninguno vive 50 años más) = $P(\bar{H} \cap \bar{M}) = P(\bar{H}) \cdot P(\bar{M}) = 0{,}4 \cdot 0{,}3 = 0{,}12$.

Actividad

Los datos de votantes en las últimas elecciones correspondientes a una determinada ciudad muestran que el 73,5 % de los hombres censados ejerció su derecho a voto, mientras que el porcentaje de mujeres censadas que no lo ejerció fue del 42,9 %. El censo de esta ciudad está compuesto por un 48% de hombres y un 52 % de mujeres.
De entre todas las personas censadas, escogemos una al azar. Calcula la probabilidad de que esta persona:

a) Haya votado.
b) Haya votado y sea hombre.
c) Sabiendo que ha votado, sea mujer.

Solución

Sean H, M y V los sucesos «es hombre», «es mujer» y «ha votado», respectivamente.
El enunciado nos dice que:

$P(V/H) = 0{,}735$
$P(\bar{V}/M) = 0{,}429$
$P(H) = 0{,}48$
$P(M) = 0{,}52$

pues las probabilidades son los límites de las frecuencias relativas.

a) Como H y M son un sistema completo de sucesos, el teorema de la probabilidad total nos dice que:

$P(V) = P(H) \cdot P(V/H) + P(M) \cdot P(V/M) = P(H) \cdot P(V/H) + P(M) \cdot (1 - P(\bar{V}/M)) = 0,48 \cdot 0,735 + 0,52(1 - 0,429) = 0,6497$

b) Por el principio de la probabilidad compuesta:

$P(V \cap H) = P(H) \cdot P(V/H) = 0,48 \cdot 0,735 = 0,3528$

c) Por la fórmula de Bayes:

$$P(M/V) = \frac{P(M) \cdot P(V/M)}{P(H) \cdot P(V/H) + P(M) \cdot P(V/M)} =$$

$$= \frac{P(M) \cdot (1 - P(\bar{V}/M))}{P(V)} = \frac{0,52 \cdot (1 - 0,429)}{0,6497} =$$

$$= 0,4570$$

Actividad

Un alumno tiene que elegir 7 de los 10 ejercicios de un examen. ¿De cuántas maneras puede elegirlos? ¿Y si los cuatro primeros son obligatorios?

Solución

a) No importa el orden en que elija los ejercicios y no pueden repetirse. Se trata pues de combinaciones de 10 elementos tomados de 7 en 7:

$$C_{10,7} = \frac{10!}{(10-7)!\,7!} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 120$$

Luego, puede escogerlos de 120 maneras diferentes.

b) En el caso que los cuatro primeros sean obligatorios, deberá escoger 3 ejercicios entre los 6 restantes, para completar los 7 ejercicios. Análogamente al apartado anterior, se trata de combinaciones de 6 elementos tomados de 3 en 3:

$$C_{6,3} = \frac{6!}{(6-3)!\,3!} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 20$$

Luego, en este caso, puede escogerlos de 20 maneras diferentes.

Actividad

En una ciudad hay dos equipos de fútbol. El 58% de los habitantes son del equipo *A*, el 35 % del *B* y un 12 % simpatiza con ambos. Si se elige un ciudadano al azar, calcula la probabilidad de que:

a) Sea seguidor de algún equipo de fútbol.
b) No sea aficionado de ningún equipo.
c) Sea seguidor sólo del equipo *A*.
d) Sea sólo seguidor de un equipo.

Solución

a) Ser seguidor de algún equipo significa ser seguidor de A o ser seguidor de B. Como los dos sucesos son compatibles, la probabilidad de su unión será:

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0,58 + 0,35 - 0,12 = 0,81$

b) No ser seguidor de ningún equipo, significa no ser aficionado. También es el suceso complementario de $A \cup B$. Por lo tanto:

$P(\bar{A} \cap \bar{B}) = 1 - P(A \cup B) = 1 - 0,81 = 0,19$

c) Para averiguar los que sólo son aficionados de A, debemos restar los seguidores de ambos equipos a los seguidores de A.

P(solo A) = 0, 58 – 0,12 = 0,46

d) Ser aficionado de un solo equipo es serlo sólo de A o serlo sólo de B. Los que solamente lo son de A se ha calculado en el apartado anterior (0,46). Calculamos de igual manera los que sólo lo son de B.

P(solo B) = 0,35 – 0,12 = 0,23

Por lo tanto:

P(solo A o solo B) = 0,46 + 0,23 = 0,69

Actividad

Tenemos una bolsa con nueve bolas iguales numeradas del 1 al 9, y consideramos el experimento aleatorio consistente en *Extraer una bola y observar su número*. Resuelve los apartados siguientes:

a) Determina el espacio muestral asociado al experimento aleatorio.
b) Define por extensión el suceso *A: sacar bola par* y el suceso *B: sacar bola impar*.

Solución

a) El espacio muestral es el conjunto de todos los posibles resultados. Así tenemos

Ω = {1, 2, 3,4, 5, 6, 7, 8, 9}

b) El espacio muestral números pares será:

A = {2, 4, 6, 8}

El de números impares será:

B = {1, 3, 5, 7, 9}

Actividad

En un concurso de televisión hay tres concursantes que van acumulando puntos hasta un máximo de 300 puntos cada uno. En un momento dado del concurso Carmen tiene 160 puntos, Juan tiene 80 y Pedro tiene 40.

a) Calcula la probabilidad que tiene cada uno de ganar.
b) Calcula la probabilidad de que gane Juan o Pedro.

Solución

a) $\mathrm{P(Carmen)} = \dfrac{160}{300} = \dfrac{8}{15}$

$$\mathrm{P(Juan)} = \frac{80}{300} = \frac{4}{15}$$

$$\mathrm{P(Pedro)} = \frac{40}{300} = \frac{2}{15}$$

b) Simplemente sumamos la probabilidad de cada uno:

Actividad

Considera el experimento aleatorio *Lanzar un dado* y define por extensión el suceso contrario de cada uno de los sucesos siguientes:

a) *A: sacar puntuación par.*
b) *B: sacar menos o igual que 3.*
c) *C: sacar un número primo.*

Solución

a) $\overline{A} = \{1, 3, 5\}$
a) $\overline{B} = \{4, 5, 6\}$
a) $\overline{C} = \{1, 4, 6\}$

Actividad

En una empresa de 40 empleados la probabilidad de que al elegir un empleado al azar, éste sea licenciado es de 3/4; la de que no sea licenciado y no tenga carné de conducir es de 1/8, y la probabilidad de que no cumpla alguna de las dos condiciones anteriores (ser licenciado o tener carné de conducir) es de 3/4.

a) ¿Cuántos empleados tienen carné de conducir?
b) Los sucesos *A: ser licenciado* y *B: tener carné de conducir*, ¿son sucesos dependientes o independientes?

Solución

a) Consideramos los sucesos:

L = «ser licenciado»
C = «tener carné de conducir»

Los datos del enunciado son:

$$P(L) = \frac{3}{4}\ ;\ P(\overline{L} \cap \overline{C}) = \frac{1}{8}\ ;\ P(\overline{L} \cup \overline{C}) = \frac{3}{4}$$

A partir de estos datos, obtenemos:

$$P(L \cap C) = 1 - P(\overline{L \cap C}) = 1 - P(\overline{L} \cup \overline{C}) =$$

$$= 1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$$

$$P(L \cup C) = 1 - P(\overline{L \cup C}) = 1 - P(\overline{L} \cap \overline{C}) =$$

$$= 1 - \frac{1}{8} = \frac{7}{8}$$

$$P(C) = P(L \cup C) - P(L) + P(L \cap C) =$$

$$= \frac{7}{8} - \frac{3}{4} + \frac{1}{4} = \frac{3}{8}$$

Si x es el número de empleados con carné:

$$P(C) = \frac{x}{40} = \frac{3}{8} \Rightarrow x = \frac{3 \cdot 40}{8} = 15$$

Por lo que hay 15 empleados con carné.

b) Para saber si L y C son independientes calculamos P(L ∩ C) y comparamos con P(L) · P(C):

$$P(L) \cdot P(C) = \frac{3}{4} \cdot \frac{3}{8} = \frac{9}{32} \neq \frac{1}{4} = P(L \cap C)$$

Por lo tanto, L y C son dependientes.
Actividad

Un matrimonio tiene dos hijos. Calcula la probabilidad de que ambos hijos sean niños si:

a) Al menos uno de los hijos es un niño.
b) El hijo mayor es un niño.

Solución

El espacio muestral de tener dos hijos sería:

Ω = {niño niño, niño niña, niña niño, niña niña}

a) Los casos posibles del espacio muestral en que al menos uno de los hijos es un niño son: {niño niño, niño niña, niña niño}. Como casos favorables sólo hay uno, la probabilidad es 1/3.

b) Los casos posibles del espacio muestral en que el hijo mayor es un niño son: {niño niño, niño niña}. Como casos favorables sólo hay uno, la probabilidad es 1/2.
Actividad

En una determinada población se ha declarado una epidemia de gripe. Uno de los síntomas que presenta es tener vómitos, aunque también se pueden tener vómitos con una indigestión o incluso sin padecer enfermedad alguna.
La probabilidad de tener vómitos padeciendo gripe, una indigestión o sin tener enfermedad alguna es 0,9; 0,3 y 0,01, respectivamente.
Se sabe además que el 2% de la población padece gripe, el 5% una indigestión y el 93 % no padece enfermedad alguna. Si un individuo presenta vómitos, ¿cuál es la probabilidad de que tenga gripe?

Solución

Podemos designar los sucesos con las siguientes letras:

V: tener vómitos
G: tener gripe
I: tener indigestión
N: no tener ninguna enfermedad.

Aplicamos el teorema de Bayes con la siguiente fórmula:

$$P(G/V) = \frac{P(V/G) \cdot P(G)}{P(V)}$$

Consideremos las distintas partes de la fórmula:

P(V/G) = 0,9
P(G) = 0,02
P(V) = 0,02 · 0,9 + 0,05 · 0,3 + 0,93 · 0,01 = 0,0423

Aplicando la fórmula:

$$P(G/V) = \frac{0,9 \cdot 0,02}{0,0423} = 0,43$$

Luego, si un individuo tiene vómitos, la probabilidad de que padezca la gripe es del 43%.
Actividad

Supongamos una lotería que sortea cada semana todos los billetes con números de tres cifras, del 000 al 999, y se premia uno.

a) Calcula la probabilidad de que salga premiado un número que termine en 32.
b) Sabiendo que la semana anterior salió premiado un número acabado en 32, calcula la probabilidad de que esta semana el número premiado también acabe en 32.

Solución

a) Los casos en que el número acaben en 32 son:

032, 132, 232,…932.

Por lo tanto, los casos favorables son 10 y los casos posibles son los mil números que entran en el sorteo. Utilizando la fórmula de Laplace tenemos:

$$P(\ldots 32) = \frac{10}{1000} = \frac{1}{100}$$

b) Los casos favorables y los casos posibles serán los mismos del apartado anterior. Por lo tanto, la probabilidad será de

$$\frac{1}{100}$$

Actividad

Un autobús recorre diariamente un trayecto de ida y vuelta entre dos ciudades. La probabilidad de que ocurra un incidente un día sin lluvia es de 0,004 y la probabilidad de que suceda un día de lluvia es de 0,08.
Una semana hubo 5 días sin lluvia y 2 de lluvia. Sabiendo que esa semana ocurrió un incidente, calcula la probabilidad de que sucediera un día sin lluvia.

Solución

Sean A y L los sucesos «ocurre un accidente» y «día con lluvia», en el experimento consistente en escoger un día de esa semana.
Como las probabilidades son los límites de las frecuencias relativas:

$$P(\bar{L}) = \frac{5}{7} \qquad P(L) = \frac{2}{7}$$

$$P(A/\bar{L}) = 0{,}004 \qquad P(A/L) = 0{,}08$$

Para calcular la probabilidad que pide, $P(\bar{L}/A)$, consideramos el sistema completo de sucesos $\{L, \bar{L}\}$ y aplicamos el teorema de Bayes:

$$P(\bar{L}/A) = \frac{P(\bar{L}) \cdot P(A/\bar{L})}{P(L) \cdot P(A/L) + P(\bar{L}) \cdot P(A/\bar{L})} =$$

$$= \frac{\frac{5}{7} \cdot 0{,}004}{\frac{2}{7} \cdot 0{,}08 + \frac{5}{7} \cdot 0{,}004} = 0{,}111\ 1$$

Actividad

En una reunión hay 8 hombres y 16 mujeres. La mitad de los hombres y la mitad de las mujeres son solteros. ¿Cuál es la probabilidad de que la primera persona que hable sea un hombre o esté soltero/a?

Solución

Ser hombre y estar soltero son dos sucesos compatibles, así pues:

$$P(\text{hombre}) = \frac{8}{24} = \frac{1}{3}$$

$$P\left(\text{soltero/a}\right) = \frac{15}{30} = \frac{1}{2}$$

$$P\left(\text{hombre} \cap \text{soltero}\right) = \frac{4}{24} = \frac{1}{6}$$

$$P(\text{hombre} \cup \text{soltero}) = \frac{1}{3} + \frac{1}{2} - \frac{1}{6} = \frac{2}{3}$$