GENERALITAT VALENCIANA
CONSELLERIA D'EDUCACIÓ, INVESTIGACIÓ, CULTURA I ESPORT

COMISSIÓ GESTORA DE LES PROVES D'ACCÉS A LA UNIVERSITAT
COMISIÓN GESTORA DE LAS PRUEBAS DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD

SISTEMA UNIVERSITARI VALENCIÀ
SISTEMA UNIVERSITARIO VALENCIANO

PROVES D'ACCÉS A LA UNIVERSITAT	PRUEBAS DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD
CONVOCATÒRIA: JUNY 2016	CONVOCATORIA: JUNIO 2016
Assignatura: MATEMÀTIQUES APLICADES A LES CIÈNCIES SOCIALS II	Asignatura: MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II

BAREM DE L'EXAMEN:
Cal elegir sols UNA de les dues OPCIONS, A o B, i s'han de fer els tres problemes d'aquesta opció.
Cada problema es valorarà de 0 a 10 punts i la nota final serà la mitjana aritmètica dels tres.
Es permet l'ús de calculadores sempre que no siguen gràfiques o programables, i que no puguen realitzar càlcul simbòlic ni emmagatzemar text o fórmules en memòria. S'use o no la calculadora, els resultats analítics, numèrics i gràfics han d'estar sempre degudament justificats.

OPCIÓN A

Problema A.1 . En una empresa trabajan empleados de las categorías A, B y C. El salario mensual de cada trabajador es de 1200, 1700 y 2200 euros, según que pertenezca a la categoría A, B y C, respectivamente. Todos los trabajadores destinan el 5 % de su salario a un plan de pensiones, lo que asciende en un mes a un total de 4930 euros. El número de trabajadores de la categoría A es el 150 % de los de la categoría B. El número de trabajadores de la categoría B más el de la C supera en 3 al número de trabajadores de la categoría A. Hallar el número de trabajadores de cada categoría que tiene la empresa. *(10 puntos).*

x: número de trabajadores de categoría A

y: número de trabajadores de categoría B

z: número de trabajadores de categoría C

$$\begin{cases} \frac{5}{100}1200x + \frac{5}{100}1700y + \frac{5}{100}2200z = 4930 \\ x = \frac{150}{100}y \\ y + z = x + 3 \end{cases} \quad \begin{cases} x - y - z = -3 \\ x - 1,5y = 0 \\ 60x + 85y + 110z = 4930 \end{cases}$$

La matriz asociada es: $\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & -3 \\ 1 & -1,5 & 0 & 0 \\ 60 & 85 & 110 & 4930 \end{pmatrix}$

Triangulando: $\begin{matrix} 2^a \cdot 1 + 1^a \cdot -1 \\ 3^a \cdot 1 + 1^a \cdot -60 \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & -3 \\ 0 & -0,5 & 1 & 3 \\ 0 & 145 & 170 & 5110 \end{pmatrix} \; 3^a \cdot -0,5 + 2^a \cdot -145 \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & -3 \\ 0 & -0,5 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -230 & -2990 \end{pmatrix}$

$$\begin{cases} x - y - z = -3 \\ -0,5y + z = 3 \\ -230z = -2990 \end{cases} \qquad x = 30; \quad y = 20; \quad z = 13$$

Problema A.2. Sean las matrices $A=\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -2 & -4 & 1 \end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 2 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$

a) Calcula $B^t + 2\cdot C$ *(5 puntos)*.

b) Halla la matriz, tal que $A\cdot X = B^t + 2C$ *(5 puntos)*.

selcs Jun 2015 Solución:

a) $B^t + 2C = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 2 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 0 \\ 2 & -5 \end{pmatrix}$

b) $AX = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a-c & 2b-d \\ 0 & 0 \\ -a & -b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 0 \\ 2 & -5 \end{pmatrix}$

Igualando los elementos: $\begin{cases} 2a-c=3 \\ 2b-d=2 \\ -a=2 \\ -b=-5 \end{cases}$ que tiene como soluciones $a=-2, \quad b=5, \quad c=-7, \quad d=8$

$X=\begin{pmatrix} -2 & 5 \\ -7 & 8 \end{pmatrix}$

Problema A.3. Resuelve el siguiente sistema de ecuaciones. (10 puntos)

$$\left.\begin{array}{r} x+y-2z=-4 \\ 2x+3y-z=-5 \\ x-5z=-7 \end{array}\right\}$$

Podemos prescindir de la 3ª ecuación, que es combinación lineal de las dos primeras. Pasamos la *z* al 2º miembro y aplicamos la regla de Cramer:

$$\left.\begin{array}{r} x+y=-4+2z \\ 2x+3y=-5+z \end{array}\right\} \quad \text{Hacemos } z=\lambda.$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & -4+2\lambda \\ 2 & 3 & -5+\lambda \end{array}\right); \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 1$$

$$x=\frac{\begin{vmatrix} -4+2\lambda & 1 \\ -5+\lambda & 3 \end{vmatrix}}{1} = -7+5\lambda; \quad y=\frac{\begin{vmatrix} 1 & -4+2\lambda \\ 2 & -5+\lambda \end{vmatrix}}{1} = \frac{3-3\lambda}{1} = 3-3\lambda$$

Las soluciones son: $x = -€7 + 5\lambda$; $y = 3 -€3\lambda$; $z = \lambda$, con $\lambda \in R$

PROVES D'ACCÉS A LA UNIVERSITAT	PRUEBAS DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD
CONVOCATÒRIA: JUNY 2016	CONVOCATORIA: JUNIO 2016
Assignatura: MATEMÀTIQUES APLICADES A LES CIÈNCIES SOCIALS II	Asignatura: MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II

BAREMO DEL EXAMEN:
Se elegirá solo UNA de las dos OPCIONES, A o B, y se han de hacer los tres problemas de esa opción.
Cada problema se valorará de 0 a 10 puntos y la nota final será la media aritmética de los tres.
Se permite el uso de calculadoras siempre que no sean gráficas o programables y que no puedan realizar cálculo simbólico ni almacenar texto o fórmulas en memoria. Se utilice o no la calculadora, los resultados analíticos, numéricos y gráficos deberán estar siempre debidamente justificados.

OPCIÓN B

Problema B.1 . En un avión viajan un total de 360 pasajeros, el número de hombres duplica al de la suma de las mujeres y los niños. El número de adultos menos el de niños duplica al número de hombres menos el de mujeres. Determinar el número de hombres, mujeres y niños que viajan en el avión. *(10 puntos)*

selcs Sep 2013 Solución:

x: número de hombres

y: número de mujeres

z: número de niños

$$\begin{cases} x+y+z=360 \\ x=2(y+z) \\ x+y-z=2(x-y) \end{cases} \qquad \begin{cases} x+y+z=360 \\ x-2y-2z=0 \\ x-3y+z=0 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 360 \\ 1 & -2 & -2 & 0 \\ 1 & -3 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{array}{c} 2^a \cdot -1^a \\ 3^a \cdot -1^a \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 360 \\ 0 & -3 & -3 & -360 \\ 0 & -4 & 0 & -360 \end{pmatrix}$$

$$\text{queda} \begin{cases} x+y+z=360 \\ -3y-3z=-360 \\ -4y=-360 \end{cases} \quad \text{resulta: } z=240, y=90, x=30$$

Problema B.2 Resuelve las siguientes cuestiones:

a) Dada la matriz $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, encontrar una matriz B tal que $A\cdot B=\begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$ *(3 puntos).*

selcs Sept 2008 Solución:

Primero resolvemos la ecuación matricial:

$$A.B=\begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}; \qquad B=A^{-1}.\begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$$

Calculemos ahora la inversa de A:

$$|A|=-3; \quad ,adj(A)=\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}; \quad A^{-1}=\begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

Luego

$$B=A^{-1}.\begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

b) Obtén la inversa de la matriz $A=\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$ (3 puntos).

$$A=\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow |A|=\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 2 \end{vmatrix}=6-4=2\neq 0, \textit{ por lo que existe } A^{-1}$$

Calculemos A^{-1}

$$A=\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\textit{menores}} \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{\textit{adjuntos}} \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{\textit{traspuesta}} \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\textit{Finalmente} \quad A^{-1}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 3/2 \end{pmatrix}$$

c) Calcula las matrices X e Y sabiendo que $\begin{aligned} X+Y &= \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \\ 2X-Y &= \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ -7 & -3 \end{pmatrix} \end{aligned}$ (4 puntos).

Hay que resolver el sistema

$$\begin{cases} X+Y = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \\ 2X-Y = \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ -7 & -3 \end{pmatrix} \end{cases}$$

Por reducción, sumando ambas ecuaciones,

$$3X = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ -3 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow X = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 3 & 6 \\ -3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Sustituyendo el valor de la matriz X *en la primera ecuación:* $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} + Y = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$

$$Y = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$$

Solución: $X = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ *e* $Y = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$

Problema A.3. Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 2 & -6 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$, obtén todas las matrices de la forma $X = \begin{pmatrix} x & 0 \\ y & z \end{pmatrix}$ que satisfacen la relación $AX - XA = B$ *(10 puntos)*.

Solución:

$A\,X - X\,A = B$, sustituyendo cada letra por su matriz,

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & 0 \\ y & z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x & 0 \\ y & z \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -6 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \quad \textit{operando}$$

$$\begin{pmatrix} x+2y & 2z \\ -x+3y & 3z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x & 2x \\ y-z & 2y+3z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -6 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2y & 2z-2x \\ -x+2y+z & -2y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -6 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$$

Esta igualdad de matrices da lugar al siguiente sistema,

$$\begin{cases} 2y = 2 \\ 2z - 2x = -6 \\ -x + 2y + z = -1 \\ -2y = -2 \end{cases}$$

De la 1ª ecuación obtenemos: $2\,y = 2;\ \ y = 1$ y de la 3ª, $-\,2\,y = -\,2\,;\ \ y = 1$. Como hemos obtenido el mismo valor, sabemos que $y = 1$. Sustituyendo el valor de y en las otras dos ecuaciones,

$$\begin{cases} 2z - 2x = -6 \\ -x + 2 + z = -1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 2z - 2x = -6 \\ -x + z = -3 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} z - x = -3 \\ -x + z = -3 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} -x + z = -3 \\ -x + z = -3 \end{cases}$$

Luego, sólo tenemos una ecuación: $-\,x + z = -\,3;\ \ z = x - 3$

Hemos obtenido que el sistema es compatible indeterminado y sus soluciones son:

$$\begin{cases} x = \lambda \\ y = 1 \qquad \lambda \in \Re \\ z = \lambda - 3 \end{cases}$$

Por lo que las matrices pedidas serán: $X(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 1 & \lambda - 3 \end{pmatrix} \quad \forall\, \lambda \in \Re$