Desigualdades y ecuaciones

(22/10/2015) Juan Manuel Conde

En su charla, presenta tres desigualdades que usa para resolver con mucha rapidez varios enunciados de una dificultad aparente alta.

Desigualdades presentadas:

1.- Desigualdad de Bernoulli

Para cualquier valor $x \geqslant -1$, si el exponente $0 \leqslant p \leqslant 1$, entonces $(1+x)^p \leqslant 1+px$, y si el exponente no está en ese intervalo, entonces $(1+x)^p \geqslant 1+px$.

Además, la igualdad sólo se da en los casos triviales $x=0, p=1$.

La demostración de esta desigualdad se apoya, por ejemplo, en el estudio de los intervalos de monotonía de la función $f(x)=(1+x)^p-(1+px)$

2.- Desigualdad de Cauchy-Bunyakovsky-Schwarz

Como, vectores, podemos exprearla de la siguiente forma: si tenemos dos vectores a y b, entonces $(a \cdot b)^2 \leqslant \|a\|^2 \|b\|^2$. Si lo expresamos por componentes, en el caso de dos dimensiones, tendríamos que $(ac+bd)^2 \leqslant (a^2+b^2)(c^2+d^2)$.

Además, la igualdad se da únicamente en el caso de que ambos vectores tengan la misma dirección, es decir, que sus componentes serían proporcionales.

3.- Desigualdad de las medias aritmética y geométrica.

Para un conjunto de números reales positivos $x_{1,} x_{2,} \ldots, x_n$, $\frac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{n} \geqslant \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n}$.

Además, la igualdad se da únicamente en el caso de que todos los valores del conjunto sean iguales.

Aplicación a los ejercicios

1.- $\sqrt[4]{1+\sqrt{1-x^2}}+\sqrt[4]{1-\sqrt{1-x^2}}=2$

En este caso, aplicamos la desigualdad de Bernoulli a la potencia 1/4, de forma que

$$\sqrt[4]{1+\sqrt{1-x^2}}+\sqrt[4]{1-\sqrt{1-x^2}}=\left(1+\sqrt{1-x^2}\right)^{1/4}+\left(1-\sqrt{1-x^2}\right)^{1/4} \leqslant 1+\frac{\sqrt{1-x^2}}{4}+1-\frac{\sqrt{1-x^2}}{4}=2$$

Además, sólo puede ser igual a 2 en el caso en que $\sqrt{1-x^2}=0$, por lo que sólo tenemos las soluciones 1 y -1.

2.- $\sqrt{1-x}+\sqrt{1+x}+\sqrt[4]{1-x^2}+\sqrt[4]{1+x^2}=4$

Muy similar al anterior.

3.- $\sqrt{1-\frac{x}{3}}+\sqrt[6]{1+x}=\left(1-\frac{x}{24}\right)^4+\left(1+\frac{x}{36}\right)^6$

Aplicamos a cada uno de los lados la desigualdad de Bernoulli.

Por un lado, $\sqrt{1-\frac{x}{3}}+\sqrt[6]{1+x}\leqslant 1-\frac{x}{6}+1+\frac{x}{6}=2$.

Por otro lado, $\left(1-\frac{x}{24}\right)^4+\left(1+\frac{x}{36}\right)^6\geqslant 1-\frac{x}{6}+1+\frac{x}{6}=2$.

Para que ambos extremos de la igualdad coincidan, tiene que darse que x valga 0. Será, entonces, la única solución.

4.- $x\sqrt{x+1}+\sqrt{3-x}=2\sqrt{x^2+1}$

Tratamos de aplicar la desigualdad de Cauchy-Bunyakovsky-Schwarz, buscando el vector adecuado.

Consideramos $x\sqrt{x+1}+\sqrt{3-x}=(x,1)\cdot(\sqrt{x+1},\sqrt{3-x})$.

El producto de las normas sería $\sqrt{x^2+1}\cdot\sqrt{3-x+x+1}=2\sqrt{x^2+1}$

Por tanto, está claro por dicha desigualdad que $x\sqrt{x+1}+\sqrt{3-x}\leqslant 2\sqrt{x^2+1}$ y que la igualdad sólo puede darse si los vectores son proporcionales, esto es, $\frac{\sqrt{x+1}}{x}=\sqrt{3-x}$. esto simplifica mucho la igualdad, y obtenemos los valores $1,1+\sqrt{2},1-\sqrt{2}$.

La primera solución es fácil de comprobar en la ecuación inicial, pero las otras dos también sirven pese a su dificultad.

6.- $\sqrt[3]{25x^4(2x^2+9)}=4x^2+3$

A cualquier estudiante se le ocurriría eliminar la raíz, pero el polinomio resultante tendría grado 6 y si las soluciones no son enteras no ofrece un buen método para su resolución.

Tratemos de encontrar una factorización del contenido de la raíz que permita transformarlo en una desigualdad de las medias aritmética y geométrica. Así, $\sqrt[3]{25x^4(2x^2+9)}=\sqrt[3]{5x^2\cdot 5x^2\cdot(2x^2+9)}$ y por tanto, siempre es menor o igual que $\frac{5x^2+5x^2+(2x^2+9)}{3}=\frac{12x^2+9}{3}=4x^2+3$.

Por último, sólo se puede tener la igualdad si $5x^2=2x^2+9$, porque en ese caso son los tres factores (o sumandos) iguales, y eso significa que $x=\pm\sqrt{3}$.

7.- $\sqrt[5]{5-\sqrt[5]{a}}+\sqrt[5]{5-\sqrt[5]{a}}=2\sqrt[5]{5}$

Esta ecuación recuerda mucho a 1. Hay que transformarla en $\frac{\sqrt[5]{5-\sqrt[5]{a}}}{\sqrt[5]{5}}+\frac{\sqrt[5]{5-\sqrt[5]{a}}}{\sqrt[5]{5}}=2$, y de ahí llegamos a $\sqrt[5]{1-\frac{\sqrt[5]{a}}{5}}+\sqrt[5]{1-\frac{\sqrt[5]{a}}{5}}=2$, a la que podemos aplicarle el mismo método.

8.- $(16x^{200}+1)(y^{200}+1)=16(xy)^{100}$

Convirtiendo las sumas en una media, obtenemos que $\frac{16x^{200}+1}{2} \geqslant \sqrt{16x^{200} \cdot 1}=4x^{100}$, es decir, que $16x^{200}+1 \geqslant 8x^{100}$. De manera similar, $y^{200}+1 \geqslant 2y^{100}$. Por tanto, el producto de ambos será $(16x^{200}+1)(y^{200}+1) \geqslant 8x^{100} \cdot 2y^{100}=16(xy)^{100}$, y la igualdad sólo se da en el caso en que y sea 1 ó -1, y además x tome uno de los valores $\pm\sqrt[200]{\frac{1}{16}}=\pm\sqrt[50]{\frac{1}{2}}=\frac{\pm\sqrt[50]{2^{49}}}{2}$

9.- Demuestra que $5^{10}+6^{10}<7^{10}$

La clave fue acotar $5^{10}+6^{10}<2 \cdot 6^{10}$, pero el razonamiento posterior no lo recuerdo en detalle.

13.- $\sqrt{x^3+x^2+4x+4}=x\sqrt{x}+2$

Si factorizamos el polinomio de grado 3 en el interior, $(x^2+4)(x+1)$, podemos intuir que es similar a una desigualdad de Cauchy-Bunyakovsky-Schwarz, en la que los vectores serían $(x,2),(\sqrt{x},1)$. Así, $\sqrt{x^3+x^2+4x+4}=\sqrt{\|(x,2)\| \cdot \|(\sqrt{x},1)\|}$ es mayor que $(x,2) \cdot (\sqrt{x},1)=x\sqrt{x}+2$.

Además, la igualdad sólo se da si los vectores son proporcionales, lo que transforma la igualdad en $\frac{x}{\sqrt{x}}=2$, por lo que la única solución es 4.

15.- $\sqrt{10+3\sqrt{x^2-1}}+x^4\sqrt{5-x}=3$

Es una “ecuación con trampa”, ya que se puede analizar rápidamente que no tiene raíces reales, pues la raíz de 10 es mayor que 3, y todos los demás elementos no hacen más que aumentar su tamaño.

17.- Hallar los enteros positivos $n, k_{1,} k_{2,} \ldots, k_n$ tales que $k_1+k_2+\ldots+k_n=5n-4$ y $\frac{1}{k_1}+\frac{1}{k_2}+\ldots+\frac{1}{k_n}=1$

La aplicación más sorprendente es multiplicar ambos resultados, ya que la expresión que se obtiene, $(k_1+k_2+\ldots+k_n)(\frac{1}{k_1}+\frac{1}{k_2}+\ldots+\frac{1}{k_n})$ es idéntica al producto (al cuadrado) de las normas de los vectores $(\sqrt{k_1}, \sqrt{k_2}, \ldots, \sqrt{k_n}),(\sqrt{\frac{1}{k_1}}+\sqrt{\frac{1}{k_2}}+\ldots+\sqrt{\frac{1}{k_n}})$ y es, según la desigualdad de Cauchy-Bunyakovsky-Schwarz, mayor o igual que el producto al cuadrado $((\sqrt{k_1}, \sqrt{k_2}, \ldots, \sqrt{k_n}) \cdot (\sqrt{\frac{1}{k_1}}+\sqrt{\frac{1}{k_2}}+\ldots+\sqrt{\frac{1}{k_n}}))^2=n^2$. De esta forma, $n^2 \leqslant 5n-4$ y esto sólo es válido para valores de n entre 1 y 4.

Ahora, tanteamos para esos valores enteros.

Para n = 1, el único k es 1.

Para n= 2, debemos tener dos enteros que sumen 8 y cuyos inversos sumen 1, lo cual no nos aporta ninguna solución.

Para n = 3, los tres enteros deben sumar 11, y sus inversos sumarán 1, lo que sólo sucede para 2, 3, y 6.

Por último, para n = 4, deben sumar 16 y sus inversos sumar 1, y sólo sucede si todos ellos son 4.

Ejercicio extra (triángulos)

Para terminar, nos ofrece un enunciado muy curioso.

Supongamos un triángulo genérico, de área la unidad. Si elegimos una cierta cantidad de puntos en su interior ¿para qué cantidades podemos garantizar que tres de esos puntos sean los vértices de un triángulo de área ¼?

El caso de nueve puntos es muy sencillo de ver que es cierto, debido a una cómoda aplicación del principio del palomar.

Para ocho puntos, también, cambiando una de las zonas por un paralelogramo.

Para siete y para seis, desplazando las zonas, también es relativamente sencillo ver que es cierto.

Para tres y para cuatro, hay contraejemplos muy fáciles de construir, luego la respuesta es no.

El problema se vuelve tremendamente interesante para cinco puntos, donde se llega a la conclusión de que es cierto, por reducción al absurdo. Así, usando una banda móvil de ancho adecuado, en el que se prohibe que hayan puntos debido a que si hubiese, garantizas área. Al final, los puntos restantes quedan acoralados en una pequeña zona donde, efectivamente, forman el triángulo de área adecuada.