1 Números enteros y racionales

Nombre y apellidos: ....

Curso: .... **Fecha:** ....

NÚMEROS ENTEROS

NÚMEROS ENTEROS $\mathbb{Z}$

El conjunto de los números enteros está formado por los naturales y ....
....

VALOR ABSOLUTO

El valor absoluto de un número entero x es:

- Si x es positivo ....
  ....
- Si x es negativo ....
  ....

EJEMPLOS:

$|-5| =$ $|4| =$ $|-3| =$

REGLAS PARA OPERAR CON NÚMEROS ENTEROS

- Para sumar o restar números enteros ....
  ....
- Si un paréntesis va precedido por un signo menos ....
- "Regla de los signos" para la multiplicación y la división:

  $+ \cdot + =$ .... $+ \cdot - =$ ....

  $+ : + =$ .... $+ : - =$ ....

NÚMEROS RACIONALES $\mathbb{Q}$

Los números racionales son todos los que se pueden poner ....

SIMPLIFICACIÓN

- Para simplificar una fracción ....
  ....
- Si una fracción no se puede simplificar, se dice que es ....
  ....
- Dos fracciones son equivalentes cuando ......
  ....
  ....

OPERACIONES CON FRACCIONES

- Para sumar o restar fracciones ....
  ....
- Para multiplicar dos fracciones ....

  La fracción inversa de $\frac{a}{b}$ es ....
- Para dividir dos fracciones ....
  ....
  ....

POTENCIACIÓN

POTENCIAS DE EXPONENTE ENTERO

Si n es un número entero y $a \neq 0$, a^n se define así:

- Si $n > 0$, $a^n =$ ....
- Si $n < 0$, $a^n =$ ....
- Si $n > 0$, $a^n =$ ....

PROPIEDADES DE LAS POTENCIAS

$a^m \cdot a^n =$ .... $\frac{a^m}{a^n} =$ ....

EJEMPLO: EJEMPLO:

$(a^n)^m =$ .... $(a \cdot b)^n =$ ....

EJEMPLO: EJEMPLO:

$\left(\frac{a}{b}\right)^n =$ .... $\left(\sqrt[n]{a}\right)^{np} =$ ....

EJEMPLO: EJEMPLO:

1 Números enteros y racionales

Nombre y apellidos: ....

Curso: .... **Fecha:** ....

PRACTICA

1 Reduce cada fracción a otra equivalente, de forma que todas tengan el mismo denominador y luego ordénalas de menor a mayor.

a) $\frac{2}{3}, \frac{5}{6}, \frac{1}{12}, \frac{3}{10}$

b) $\frac{8}{5}, \frac{3}{10}, \frac{1}{4}, \frac{3}{2}$

2 Calcula y simplifica el resultado.

a) $1 - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) : \left(\frac{2}{3} - \frac{1}{4}\right)$

b) $\frac{5}{2} - \left[1 - \left(\frac{2}{3} + \frac{1}{4}\right)\right] \cdot \frac{2}{3}$

3 ¿Cuántos capicúas hay en los números de tres cifras entre el 100 y el 999?

4 ¿Cuántos menús diferentes puedo elegir en un restaurante entre cuatro primeros platos (*A, B, C, D*), tres segundos (*a, b, c*) y cinco postres (*m, n, o, p, q*)? ¿Cuántos de ellos tienen *A* de primero y *p* ó *q* de segundo?

5 Aplica propiedades de las potencias y reduce a una sola potencia.

a) $\frac{2^6 \cdot 2^{-3}}{2^4}$

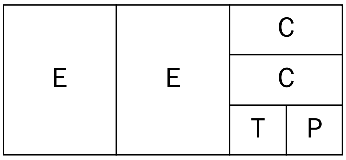
b) $\frac{(3^4)^{-3} \cdot 3^2}{3^2 : 3^{-4}}$

c) $\frac{(4^5)^2 \cdot 4^3}{4^{-2} : (4^{-3})^2}$

Nombre y apellidos: ....

APLICA. LA FINCA DEL ABUELO

Los padres de Carmen acaban de heredar una finca de 90 ha (900 000 m^2), distribuida del siguiente modo: 2/3 se utilizan para encinares, 2/3 del resto está sembrado de cereal, en la mitad del resto se cultivan tomates y lo que queda son pastizales para el ganado vacuno. Carmen ayuda a sus padres para ver en qué situación real está la finca.



E - ENCINAR
C - CEREAL
T - TOMATES
P - PASTOS

1 En primer lugar, quieren saber cuántos cerdos pueden mantener al año. Saben que en cada hectárea hay 100 encinas y que cada encina produce 30 kg de bellotas al año. Además, un vecino del pueblo les dice que cada cerdo consume 10 kg de bellotas al día. Ayuda a Carmen a calcular el número de cerdos que pueden mantener al año.

2 Unos amigos de los padres de Carmen les dicen que por cada hectárea pueden conseguir 20 toneladas de cereal. En la gestoría han averiguado que pueden recibir una subvención de 0,60 € por cada kilogramo de cereal. Además, les han dicho que pueden conseguir hasta 0,40 € por cada kilogramo. ¿Cuánto obtendrían por la cosecha de cereal?

3 Cuando hablan de los tomates con los vecinos, les dicen que cada hectárea produce 10 toneladas. Por cada kilogramo de tomate puesto en el mercado pueden conseguir entre 0,50 € y 0,80 €. ¿Qué beneficios pueden conseguir por los tomates?

4 Un ganadero del pueblo les asegura que 1 hectárea de pasto da para alimentar a 6 vacas anualmente. Los padres de Carmen se preguntan cuántas vacas pueden mantener al año. ¿Puedes ayudarles?

1 Números enteros y racionales

Nombre y apellidos: ....

Curso: .... **Fecha:** ....

PRACTICA

1 a) Qué fracción de hora son 20 minutos?

b) ¿Y 35 minutos?

c) ¿Y 75 minutos?

2 Representa, usando un procedimiento geométrico, los siguientes racionales en la recta real:

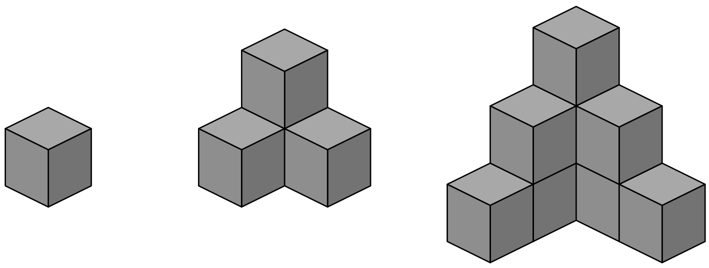
$\frac{2}{5}$, $\frac{7}{6}$ y $-\frac{3}{4}$

3 Aplica las propiedades de las potencias y reduce el resultado a una sola potencia.

a) $\dfrac{a^2 \cdot (b \cdot c)^2}{(a^3)^2 \cdot b^4 \cdot (c^2)^3}$ b) $\dfrac{(m^4 : m^2)^{-3}}{(m^{-2})^3}$ c) $\dfrac{(n^4 \cdot n^2)^2}{(n^3 : n^{-2})^3}$

d) $\left(\dfrac{1}{2}\right)^3 : \left(\dfrac{1}{4}\right)^2$ e) $\left(\dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{1}{27}\right)^4$ f) $\left[\left(\dfrac{3}{5}\right)^{-2}\right]^3 \cdot \left(\dfrac{3}{5}\right)^4$

4 ¿Cuántos cubos cuentas en cada estructura? Encuentra una pauta y saca conclusiones: ¿Cuántos cubos tendrá una estructura de 10 pisos?



Nombre y apellidos: ....

APLICA. FABRICACIÓN DE ACEITE DE OLIVA

La primera excursión de este año la hacéis a una cooperativa olivarera. Allí os explican todo el proceso de elaboración del aceite y sus derivados. Sin embargo, el guía os pone en algunos aprietos, porque no os da toda la información, sino que os pide que la obtengáis vosotros.

1 "Por cada kilogramo de aceitunas, al prensarlas en su primer molino, la mitad se transforma en aceite y del resto (residuos sólidos), se transforma el 80% en orujo", os dice el guía. Y os pregunta: "¿Cuál es el porcentaje que se obtiene de aceite y cuál de orujo?"

2 Os sigue contando: "La cantidad destinada a aceite se somete a una segunda prensa, obteniéndose 1/5 de aceite de oliva extra (calidad superior) y con el 75% del resto, se elabora aceite de calidad normal". Si iniciamos el proceso con 100 kg de aceitunas, ¿qué cantidad será aceite extra y cuál aceite normal?

3 "La densidad (masa dividido por volumen) de cada tipo de aceite es del 80% (0,8) para el aceite de oliva extra y del 60% (0,6) para el normal". ¿Qué volumen, en litros, se obtendría de cada tipo de aceite?

4 A una pregunta del profesor, el guía responde: "un agricultor aporta 1800 kg de aceitunas". Os pide que calculéis vosotros las cantidades de ORUJO (en kilogramos), ACEITE EXTRA (en litros) y ACEITE NORMAL (en litros) que obtendrá la cooperativa.

Ficha de trabajo A

PRACTICA

1 a) $\frac{40}{60}, \frac{50}{60}, \frac{5}{60}, \frac{18}{60}$

$\frac{1}{12} < \frac{3}{10} < \frac{2}{3} < \frac{5}{6}$

b) $\frac{32}{20}, \frac{6}{20}, \frac{5}{20}, \frac{30}{20}$

$\frac{1}{4} < \frac{3}{10} < \frac{3}{2} < \frac{8}{5}$

2 a) –1 b) $\frac{22}{9}$

3 90 capicúas.

4 $4 \cdot 3 \cdot 5 = 60$ menús. Con *A* de primero y *p* ó *q* de postre habrá $3 \cdot 2 = 6$ menús.

5 a) 2^{-1} b) 3^{-16} c) 4^9

APLICA

1 Tienen 60 ha dedicadas a encinares. Pueden mantener unos 50 cerdos (el resultado es 49,32).

2 Para el cereal tienen 20 ha. El beneficio por el cereal es de 400 000 €.

3 Dedicada a tomates, hay una superficie de 5 ha. Las ganancias están entre 25 000 € y 40 000 €.

4 Para pastizales tienen 5 ha. Podrán mantener 30 vacas al año.

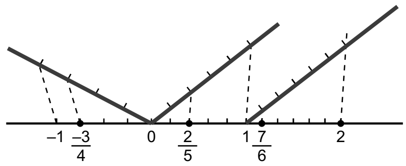
Ficha de trabajo B

PRACTICA

1 a) $\frac{20}{60} = \frac{1}{3}$ b) $\frac{35}{60} = \frac{7}{12}$

c) $\frac{75}{60} = \frac{5}{4}$

2



3 a) $a^{-4}\, b^{-2}\, c^{-4}$ b) 1 c) n^{-3}

d) $\left(\frac{1}{2}\right)^{-1} = 2$ e) $\frac{1}{3^{16}}$ f) $\left(\frac{3}{5}\right)^{-2}$

4 1 cubo - 4 cubos - 9 cubos

Para 10 pisos, habrá $10^2 = 100$ cubos.

APLICA

1 A aceite se destina el 50% y a orujo, el 40%.

2 10 kg para aceite extra y 30 kg para aceite normal.

3 12,5 *l* de aceite extra y 50 *l* de aceite normal.

4

ORUJO	ACEITE EXTRA	ACEITE NORMAL
720 kg	225 *l*	900 *l*

2 Números decimales

Nombre y apellidos: ....

Curso: .... **Fecha:** ....

NÚMEROS DECIMALES

EXPRESIÓN DECIMAL DE LOS NÚMEROS

DECIMALES EXACTOS

Tienen un número .... de cifras decimales.

EJEMPLO:

DECIMALES PERIÓDICOS

Tienen .... cifras decimales que se repiten periódicamente.

Periódico puro: ....

Periódico mixto: ....

....

DECIMALES NO PERIÓDICOS

Tienen .... cifras decimales no periódicas.

EJEMPLO:

CÓMO SE PASA DE DECIMAL PERIÓDICO A FRACCIÓN

- Si el decimal es **periódico puro**:
  - — Multiplicamos $\mathbb{N}$ por ....
  - — Restamos ....
  - — Despejamos ....

  EJEMPLO:

  $2,\overparen{34} =$

- Si el decimal es **periódico mixto**:
  - — Multiplicamos $\mathbb{N}$ por ....
  - — Restamos ....
  - — Despejamos ....

  EJEMPLO:

  $2,3\overparen{4} =$

APROXIMACIONES Y ERRORES

Se llaman **cifras significativas** a ....

....

....

EJEMPLO: El número 1 645 870 se expresa con tres cifras significativas así: ....

El **error absoluto** de una aproximación es

....

El **error relativo** de una aproximación es

....

EJEMPLO: Las cotas del error absoluto y del error relativo del ejemplo anterior son:

NOTACIÓN CIENTÍFICA

Un número puesto en notación científica consta de:

— ....

— ....

— ....

ÓRDENES DE MAGNITUD

kilo = ... mega = ... giga = ...

mili = ... micro = ... nano = ...

EJEMPLOS:

328 000 = ...

$6,3 \cdot 10^{-3}$ = ...

12 = ...

$84,32 \cdot 10^{-6}$ = ...

Nombre y apellidos: ....

Curso: .... **Fecha:** ....

PRACTICA

1 Expresa en forma de fracción los siguientes números decimales periódicos:

a) $1,\widehat{3}$ b) $1,3\widehat{5}$ c) $1,\widehat{35}$ d) $1,36\widehat{5}$

2 En una determinada muestra de sangre, la cantidad de glóbulos rojos de un paciente es 4 956 389 unidades. Redondea esta expresión a la decenas de millar y pon la expresión aproximada en notación científica.

3 Si tomo como medida 3,45 cm en vez de 3,448, ¿qué error absoluto cometo? ¿Cuál es el error relativo?

4 ¿Es $2,4\widehat{9}$ menor que 2,5? Transforma cada expresión en fracción y justifica tu respuesta.

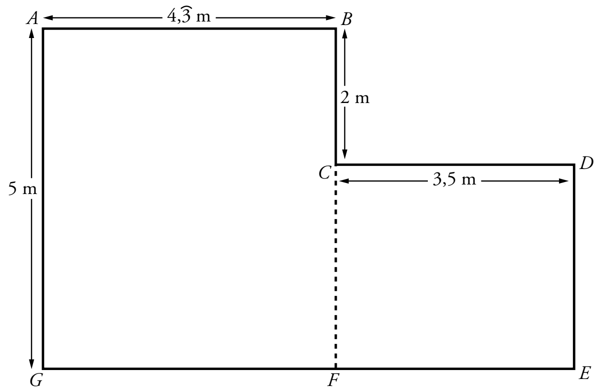
5 Completa esta tabla.

NÚMERO	NÚMERO EN NOTACIÓN CIENTÍFICA
	$6,25 \cdot 10^{-7}$
0,0000284	
	$3,26 \cdot 10^{-9}$
423 mil millones	

Nombre y apellidos: ....

APLICA. TRABAJOS EN LA PISCINA

Al lado de tu instituto hay una pequeña piscina que está en obras. Un día el profesor de matemáticas os lleva a verla y aprovecha para haceros muchas preguntas relativas a los trabajos de los operarios. El plano de la piscina es el siguiente:



1 En primer lugar, quieren vallar la piscina. En el almacén municipal hay rollos de alambre de 15 m, de 25 m y de 30 m. Por razones de presupuesto, solo quieren utilizar un rollo. El profesor quiere que le digáis qué rollo deben utilizar los obreros.

2 Luego quieren alicatar el fondo con baldosines esmaltados. Cada uno tiene una superficie de 400 cm^2 y se venden en cajas de 50 unidades, a 30 € la caja. "¿Cuántas cajas de baldosas necesitan y cuál será el coste?", os pregunta el profesor.

3 Tienen dividida la piscina en dos zonas: un rectángulo *ABFG* y otro *CDEF*. Uno de los operarios os cuenta que van a acotar la zona más pequeña para dedicarla a los niños. Esta zona tiene una profundidad de 1 m y la zona para los adultos, 3 m. El profesor aprovecha y os pide que calculéis el volumen de agua necesario para llenarla, en litros.

Nombre y apellidos: ....

Curso: .... **Fecha:** ....

PRACTICA

1 Opera y simplifica la expresión:

$[(2{,}3\overset{\frown}{6} - 1{,}\overset{\frown}{3}) : 0{,}\overset{\frown}{63}] : 3{,}1 \cdot 1{,}\overset{\frown}{9} =$

2 Opera estos números de menor a mayor:

$0{,}53 \qquad 0{,}5\overset{\frown}{32} \qquad 0532 \qquad 0{,}\overset{\frown}{532}$

3 Completa esta tabla:

NÚMERO	NÚMERO EN NOTACIÓN CIENTÍFICA
	$6{,}25 \cdot 10^{-7}$
0,0000284	
	$3{,}26 \cdot 10^{-9}$
423 mil millones	

4 ¿Es cierta esta desigualdad? Justifica la respuesta.

$1{,}\overset{\frown}{49} < 1{,}4\overset{\frown}{9} < 1{,}5$

5 Expresa con un número adecuado de cifras significativas y usando notación científica cuando se necesite.

a) 639 875 457 de estrellas se ven por el telescopio

b) El porcentaje de acierto es del 36,89 %.

Nombre y apellidos: ....

APLICA. EL CORTADOR DE CÉSPED

En tu barrio hay un jardinero que es un auténtico científico. Si no lo crees, fíjate en lo que es capaz de pensar sobre una tarea tan simple como cortar el césped. “Mira, en este jardín el césped crece a una velocidad de $2{,}5 \cdot 10^{-1}$ cm por día. Cuando lo corto, le dejo una altura media de 1,5 cm”, te dice el jardinero.

1 “¿Observas lo bien cortado que está el césped? Pues no siempre está así. Tiendo a tener épocas de contemplación y me olvido de cortarlo. Eso sí, jamás debe pasar de 3 cm de altura. ¿A que no sabes cada cuántos días tengo que cortarlo para que la altura no supere esos 3 cm?”

2 “Vamos a ver. El césped lo riego cada 4 días. Recuerdo que el 1 de mayo, a pesar de ser festivo, lo regué y lo corté. ¿En qué otros días de mayo tuve que hacer ambos trabajos?”

3 “Cada vez que siego el césped tardo 3 h 15 min, y cada vez que riego me ocupa 1 hora y media. A ver si eres capaz de calcular cuántas horas trabajé en mayo, regando y segando”.

4 “Oye, ¿y cuánto cobraste ese mes de mayo”, le preguntas. “Bien, veamos… Por cada día que tengo que venir me pagan 12,50 € por desplazamiento y, además, 20 € la hora de trabajo. Haz los cálculos tú mismo”.

Ficha de trabajo A

PRACTICA

1 a) $\frac{12}{9}$ b) $\frac{122}{90}$

c) $\frac{134}{99}$ d) $\frac{1\,229}{900}$

2 $4{,}96 \cdot 10^6$

3 $E_a = 0{,}002$ $E_r = 58 \cdot 10^{-4}$

4 Ambos están representados por la misma fracción, luego son distintas expresiones del mismo número.

5

NÚMERO	NC
0,000000625	$6{,}25 \cdot 10^{-7}$
0,0000284	$2{,}84 \cdot 10^{-5}$
0,00000000326	$3{,}26 \cdot 10^{-9}$
423 mil millones	$4{,}23 \cdot 10^{9}$

APLICA

1 El perímetro de la piscina es poco más de 25 m. Por tanto, deben usar un rollo de 30 m.

2 Se necesitan 17 cajas de baldosas, que cuestan 510 euros.

3 El volumen es 75 500 *l*.

Ficha de trabajo B

PRACTICA

1 $\frac{341}{1\,302}$

2 $0{,}53 < 0{,}532 < 0{,}5\overset{\frown}{32} < 0{,}\overset{\frown}{532}$

3

NÚMERO	NC
0,000000625	$6{,}25 \cdot 10^{-7}$
0,0000284	$2{,}84 \cdot 10^{-5}$
0,00000000326	$3{,}26 \cdot 10^{-9}$
423 mil millones	$4{,}23 \cdot 10^{9}$

4 $1{,}\overset{\frown}{49} = 1.494949$
$1{,}4\overset{\frown}{9} = 1.499999$ luego la primera parte de la desigualdad es cierta, pero el segundo y el tercer número tiene la misma fracción representativa, luego ambos son iguales.

5 a) $6{,}4 \cdot 10^8$ estrellas

b) 37%

APLICA

1 Cada 6 días.

2 Ambos trabajos se superponen cada 12 días. Volvió a regar y cortar el césped el 13 y el 25 de mayo.

3 Durante el mes de mayo segó el césped 6 veces y lo regó 8 veces. Trabajó en total, 31 horas y media.

4 En mayo va a segar los días 1, 7, 13, 19, 25 y 31; y a regar, los días 1, 5, 9, 13, 17, 21, 25, 29.

Se desplazó, en total, 11 días, por lo que cobró 137,5 €.

Por el trabajo cobró 630 €.

Cobró, en total, 767,5 €.

Nombre y apellidos: ....

Curso: .... **Fecha:** ....

NÚMEROS REALES

NÚMEROS RACIONALES

Son los que se pueden poner como ....
....

EJEMPLOS:

$2{,}5\widehat{3} = \frac{\quad}{\quad}$

NÚMEROS IRRACIONALES

La expresión decimal de un número irracional está formada por ....
....

EJEMPLOS:

INTERVALOS Y SEMIRRECTAS

Nombre	Expresión	Números que comprende	Representación	Ejemplo
	(a, b)			
	$[a, b]$			
	$(a, b]$			
	$[a, b)$			
	$(-\infty, b)$			
	$(-\infty, b]$			
	$(a, +\infty)$			
	$[a, +\infty)$			

RAÍCES

- $\sqrt[n]{a} = b$ si $b^n =$ ....
- Podemos expresar un radical en forma de potencia así: $\sqrt[n]{a} =$ ... $\sqrt[n]{a^m} =$ ......

EJEMPLOS: $\sqrt[5]{a} =$ ... $\sqrt[5]{3^2} =$ ... $8^{1/3} =$ ... $5^{3/4} =$ ...

PROPIEDADES DE LOS RADICALES

① $\sqrt[np]{a^p} =$

EJEMPLO: $\sqrt[6]{a^2} =$ ...

② $\sqrt[n]{a \cdot b}$

EJEMPLO: $\sqrt[3]{8 \cdot 64} =$ ...

③ $\sqrt[n]{\dfrac{a}{b}} =$

EJEMPLO: $\sqrt[4]{\dfrac{256}{81}} =$ ...

④ $\left(\sqrt[n]{a}\right)^p$

EJEMPLO: $\left(\sqrt[6]{2}\right)^8 =$ ...

⑤ $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} =$

EJEMPLO: $\sqrt[3]{\sqrt{64}} =$ ...

- **Racionalizar** denominadores consiste en ....
....

3 Números reales

Nombre y apellidos: ....

Curso: .... **Fecha:** ....

PRACTICA

1 Escribe como intervalo los números que verifican las condiciones siguientes:

a) Comprendidos entre –3 y 2, incluidos ambos.

b) $-3 \leq x < 2$

c) Mayores o iguales que –3.

2 Expresa en forma exponencial.

a) $\sqrt[3]{2^2}$ b) $\left(\sqrt[5]{3^2}\right)^2$ c) $\sqrt[3]{\sqrt{6}}$

3 Expresa como raíz y calcula.

a) $9^{1/2}$ b) $27^{1/3}$ c) $256^{1/4}$

4 Simplifica los radicales siguientes:

a) $\sqrt[5]{32^2}$ b) $\sqrt[6]{16}$ c) $\sqrt[8]{64}$

5 Saca factores de la raíz y simplifica:

a) $\dfrac{\sqrt{18}}{6}$ b) $\dfrac{\sqrt[3]{40}}{16}$ c) $\dfrac{\sqrt[4]{80}}{8}$

6 Suma los siguientes radicales:

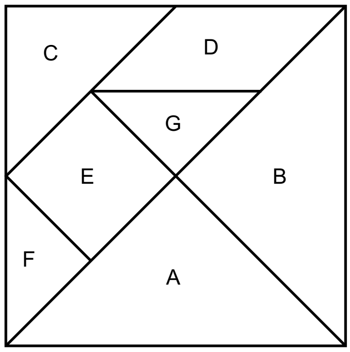
a) $3\sqrt{3} - 5\sqrt{3} + \sqrt{27}$

b) $2\sqrt{2} + \sqrt{50} - \sqrt{18}$

Nombre y apellidos: ....

APLICA. ACTIVIDADES CON TANGRAM

En clase de Luis el profesor les ha presentado el TANGRAM, famoso y milenario rompecabezas chino de 7 piezas:



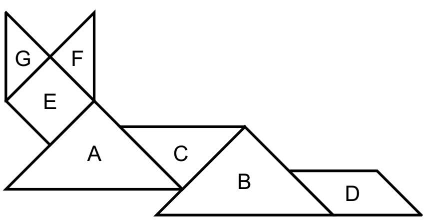
Antes de dejar que construyan figuras y siluetas con ellas, les plantea tres actividades:

1 “Si tomamos el lado del cuadrado E como unidad de medida, completad la siguiente tabla para las demás piezas”:

PIEZA	EXPRESIÓN EXACTA (RADICAL) DE LA MEDIDA DE SUS LADOS	PERÍMETRO DE LA PIEZA
E	1, 1, 1, 1	
A (Ó B)		
C		
D		
F (Ó G)		

2 ¿Cuántas veces es mayor el perímetro de B que el de E?

3 Cada alumno construye una figura elegida de un catálogo. El profesor pone como tarea calcular el perímetro de la figura elegida. Luis ha construido este gato. ¿Podrías ayudarle a calcular su perímetro?



Nombre y apellidos: ....

Curso: .... **Fecha:** ....

PRACTICA

1 Expresa como intervalo los conjuntos de puntos de la recta real siguientes:

a) $\{x/2 \le x < 6\}$ b) $\{x/-\infty < x \le 3\}$ c) $\{x/x \ge 2\}$

2 Expresa en forma exponencial:

a) $\left(\sqrt[3]{2^4}\right)^2$ b) $\left(\sqrt[5]{3^2}\right)^2$ c) $\sqrt{\sqrt{\sqrt{2^5}}}$

3 Expresa como raíz y calcula.

a) $9^{1/2}$ b) $81^{1/4}$ c) $(36^2)^{1/4}$ d) $(25^4)^{1/8}$

4 Simplifica las expresiones siguientes. Expresa el resultado final en forma de potencia:

a) $\dfrac{\sqrt[5]{32^2} : \sqrt[6]{16}}{\sqrt{64}}$ b) $\dfrac{\sqrt[4]{25} : \sqrt[3]{5}}{\sqrt{5}}$

5 Suma los siguientes radicales:

a) $2\sqrt{50} - 3\sqrt{18} + \sqrt{98}$ b) $5\sqrt{75} + \sqrt{27} - 4\sqrt{108}$

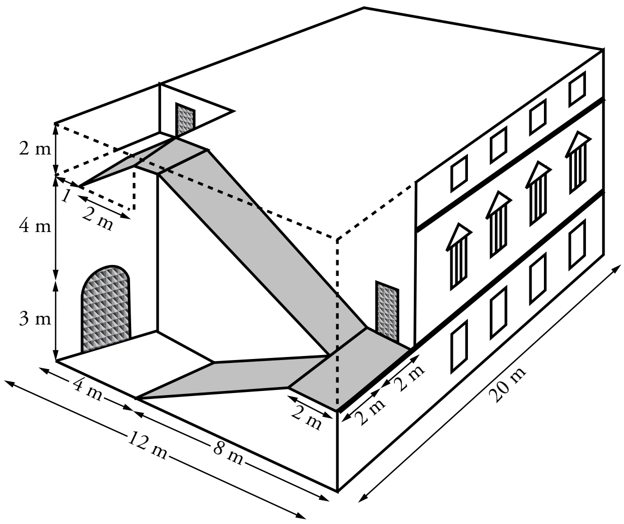
6 Racionaliza y simplifica:

a) $\dfrac{5}{2\sqrt{5}}$ b) $\dfrac{3\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$ c) $\dfrac{1+\sqrt{2}}{1-\sqrt{2}}$ (Multiplica y divide por $1+\sqrt{2}$)

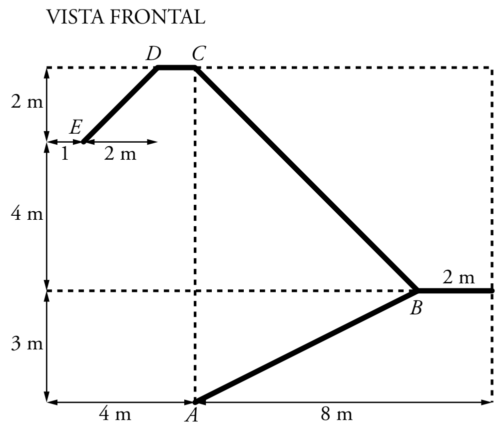
Nombre y apellidos: ....

APLICA. ARQUITECTURA DEL SIGLO XIX

En el Madrid de 1860 se construyeron casas de 3 plantas y ático (fueron las primeras con agua corriente), en el barrio proyectado por el marqués de Salamanca. Vamos a diseñar parte de una de esas casas tal como tuvieron que hacerlo entonces. Recuerda que ellos no tenían calculadora, así que no utilices la tuya. Nuestro objetivo es construir las escaleras, según el dibujo de la derecha:



1 ¿Qué longitud tendrán las rampas *AB*, *BC* y *DE* que representan las escaleras?



2 En el primer tramo de escalera, los escalones serán de 20 cm de altura y 40 cm de profundidad. En el segundo tramo, de 24 cm de altura y de profundidad y en el tercero, de 25 cm de altura y de profundidad. Se cubrirán, atendiendo a sus tamaños, con losas de 40 cm × 2 m, 20 cm × 2 m, 24 cm × 2 m y 25 cm × 2 m. Los dos rellanos se cubrirán con losas de 1 m × 1 m. ¿Cuántas losas de cada tamaño serán necesarios?

3 ¿Cuál sería el precio total de las losas si en aquella época se vendían a 5 reales el metro cuadrado?

FICHA DE TRABAJO A

1 a) $[-3, 2]$ b) $[-3, 2)$ c) $[-3, +\infty]$

2 a) $2^{2/3}$ b) $3^{4/5}$ c) $6^{1/6}$

3 a) 3 b) 3 c) 4

4 a) 2^2 b) $\sqrt[3]{2^2}$ c) $\sqrt[4]{2^3}$

5 a) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ b) $\frac{\sqrt[3]{5}}{8}$ c) $\frac{\sqrt[4]{5}}{4}$

6 a) $\sqrt{3}$ b) $4\sqrt{2}$

APLICA

1

PIEZA	LADOS	PERÍMETRO
E	1, 1, 1, 1	4
A (Ó B)	$2, 2, 2\sqrt{2}$	$4 + 2\sqrt{2}$
C	$\sqrt{2}, \sqrt{2}, 2$	$2 + 2\sqrt{2}$
D	$1, 1, \sqrt{2}, \sqrt{2}$	$2 + 2\sqrt{2}$
F (Ó G)	$1, 1, \sqrt{2}$	$2 + \sqrt{2}$

2 $1 + \frac{\sqrt{2}}{2}$ veces mayor.

3 $11 + 6\sqrt{2}$

FICHA DE TRABAJO B

1 a) $[2, 6)$ b) $(-\infty, -3]$ c) $[2, +\infty]$

2 a) $2^{8/3}$ b) $3^{4/5}$ c) $2^{5/8}$

3 a) 3 b) 3 c) 6 d) 5

4 a) $2^{-5/3}$ b) $5^{-1/3}$

5 a) $8\sqrt{2}$ b) $4\sqrt{3}$

6 a) $\frac{\sqrt{5}}{2}$ b) $\sqrt{6}$ c) $-3 - 2\sqrt{2}$

APLICA

1 $\overline{AB} = 3\sqrt{5}$ m $\approx 6{,}71$ m

$\overline{BC} = 6\sqrt{2}$ m $\approx 8{,}5$ m

$\overline{DE} = \sqrt{5}$ m $\approx 2{,}24$ m

2 Losas de 40 cm $\times$ 2 m $\rightarrow$ 15

Losas de 20 cm $\times$ 2 m $\rightarrow$ 30

Losas de 24 cm $\times$ 2 m $\rightarrow$ 50

Losas de 25 cm $\times$ 2 m $\rightarrow$ 16

Losas de 1 m $\times$ 1 m $\rightarrow$ 12

3 Se obtienen 68 m^2 de losas. El coste sería de 340 reales.

Nombre y apellidos: ....

Curso: .... **Fecha:** ....

PROBLEMAS

REGLA DE TRES DIRECTA

EJEMPLO:

2 —— 30
3 —— x

$x = \ldots$

REGLA DE TRES INVERSA

EJEMPLO:

12 —— 5
6 —— x

$x = \ldots$

REGLA DE TRES COMPUESTA

EJEMPLO:

p. inversa

80 —— 160 —— 2
120 —— 80 —— x

p. directa

$x = \ldots$

PORCENTAJES

- Cálculo del tanto por ciento de una cantidad:

  $P = \ldots$

EJEMPLO: El 5% de 1 000 es ...

- Cálculo de la cantidad total:

  $C = \ldots$

EJEMPLO: Si el 5% de C es 20, $C = \ldots$

- Cálculo del porcentaje que representa una parte:

  $Q\ \% = \ldots$

EJEMPLO: 30 es el ...% de 150.

AUMENTOS Y DISMINUCIONES PORCENTUALES

- Índice de variación de un aumento porcentual:

  Aumento = 15% $\rightarrow I_v =$

- Índice de variación de una disminución porcentual:

  Disminución = 15% $\rightarrow I_v =$

- Cálculo de la cantidad aumentada:

  $C = 100;\ I_v = 1{,}15 \rightarrow C_F =$

- Cálculo de la cantidad disminuida:

  $C = 100;\ I_v = 0{,}85 \rightarrow C_F =$

- Cálculo de la cantidad inicial:

  $C_F = 115;\ I_v = 0{,}85 \rightarrow C =$

DEPÓSITOS Y PRÉSTAMOS

INTERÉS SIMPLE

- Si el tiempo está expresado en años, el interés se calcula así:

  $I =$ ....

- Si el tiempo está expresado en meses, el interés se calcula así:

  $I =$ ....

INTERÉS COMPUESTO

Si los intereses se añaden al capital cada periodo de tiempo, el capital final se calcula así:

$C_F =$ ....

OTROS PROBLEMAS

MEZCLAS

El precio de la mezcla se calcula ....
....
....

MÓVILES

- Cuando dos móviles se acercan uno hacia el otro, las velocidades ....
- Cuando un móvil persigue a otro para alcanzarlo, las velocidades ....

Nombre y apellidos: ....

Curso: .... **Fecha:** ....

PRACTICA

1 Un coche va a 90 km/h. ¿Cuántos km recorrerá en 4 horas y media?

2 Cinco obreros pintan un garaje en 6 horas. ¿Cuánto tiempo tardará en hacerlo un obrero? ¿Y 10 obreros?

3 Cuatro camiones de una empresa de construcción mueven 1 000 m^3 de tierra en 6 horas. ¿Cuánto tiempo tardarán 6 camiones en mover 1 200 m^3 de tierra?

4 El 20% de una cantidad es 1 400 euros. ¿Cuál es esa cantidad?

5 Si compro un pantalón de 30 euros y un jersey de 50 euros en las rebajas del 20%, ¿cuánto pagaré finalmente?

6 ¿Cuál es el interés que produce un capital de 2 400 euros colocado al 10% anual durante 6 meses?

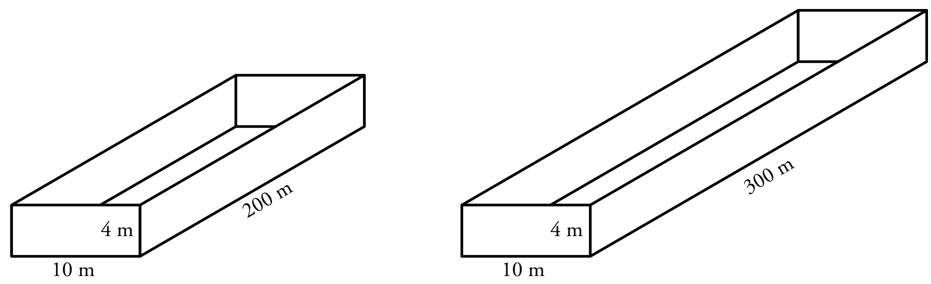
7 Mezclamos 6 kg de café A a 3 euros/kg con 3 kg de café B a 2 euros/kg. ¿Cuál es el precio final de la mezcla?

Nombre y apellidos: ....

APLICA. OBRAS EN LA AUTOPISTA

Tu vecino trabaja en un departamento del ministerio de Fomento. Les han pedido que hagan ciertos cálculos sobre unas obras que se están realizando en cierta autovía. Un día te pasas por su casa y le ayudas a realizarlos.

Una empresa A, que utiliza 15 camiones, tiene 15 obreros, trabaja en jornadas de 8 h y es capaz de vaciar y trasladar diariamente un volumen de tierra equivalente a la que contendría un ortoedro, de dimensiones 10 m × 200 m × 4 m. Otra empresa, B, con 18 camiones de gran tonelaje y 18 obreros, trabaja las mismas horas al día, pero vacía y traslada el volumen de la tierra que contendría un ortoedro de dimensiones 10 m × 300 m × 4 m.



1 Lo primero que te pide tu vecino, mientras él hace otros cálculos, es que le digas el volumen diario de tierra trasladado por cada empresa.

2 Después, te dice que la autopista tiene una longitud inicial de 180 km, contando desvíos y cambios de sentido. Se estima que por cada kilómetro hay que trasladar 40 000 m^3 de tierra. Para su informe, necesita que le digas en cuántos meses terminaría cada una de las dos empresas la parte de obra que se les pretende encargar.

3 Según el pliego de condiciones, el movimiento de tierras debe terminarse en un periodo máximo de 15 meses. ¿Cuántos obreros debería contratar cada empresa para poder cumplir con el plazo?

Nombre y apellidos: ....

Curso: .... **Fecha:** ....

PRACTICA

1 Un camión, a una velocidad de 90 km/h, tarda 2h 45 minutos en hacer un recorrido. ¿Cuánto tardará un automóvil en hacer el mismo trayecto a una velocidad de 120 km?

2 El índice del coste de la vida subió un 3% durante el primer semestre del año y luego un 2% durante el 2.º semestre. ¿Cuánto costará, al acabar el año, 1 kg de carne que costaba 10 euros el kilo al empezar el año?

3 ¿En qué cantidad se convertirá un capital de 1 000 euros colocado al 5% anual de interés compuesto, durante 2 años, si:

a) los intereses se abonan trimestralmente?

b) los intereses se abonan anualmente?

c) el capital se coloca a ese interés, pero simple durante el primer año y luego, en el segundo año, se coloca la cantidad total obtenida a interés compuesto del 7% anual, pero abonando los intereses al cabo de cada mes?

4 Una moto pasa por un pueblo a 90 km/h. Veinte minutos después pasa un coche por el pueblo a 120 km por hora.

a) ¿Qué distancia ha recorrido la moto en ese periodo de tiempo?

b) ¿Cuánto tiempo tardará el coche en dar alcance a la moto?

c) ¿A qué distancia estarán el pueblo cuando esto ocurra?

Nombre y apellidos: ....

APLICA. UNA DE BANCOS

Tus padres han ganado 6 000 € en un sorteo de lotería y quieren colocarlos en un banco durante 2 años para obtener beneficios. Después de visitar varios bancos y recoger sus ofertas, te piden que les ayudes a elegir la mejor opción.

1 BANCO A: Les ofrecen una cartilla de ahorros al 5% de interés compuesto; es decir, los abonos se ingresan en la cartilla cada vez que se abonan, lo cual incrementa el capital para la siguiente vez. El abono de intereses puede hacerse anual, semestral o trimestral. ¿Cuál de estas tres opciones les recomendarías a tus padres?

2 BANCO B: En este banco les ofrecen otra cartilla de ahorros al 6% de interés simple; es decir, los intereses producidos no se ingresan en la misma cartilla, con lo que el capital inicial es siempre el mismo. El abono de intereses se hace semestralmente. ¿Es más interesante esta oferta que la del banco A?

3 Una vez decidido un banco, tus padres vuelven al no elegido para tratar de negociar una mejor oferta. El banco contraoferta ofreciéndoles un interés compuesto del 5,8% y abono de intereses trimestrales. ¿Deben aceptar tus padres la oferta?

Ficha de trabajo A

PRACTICA

1 a) 405 km

2 1 obrero tardará 30 horas y 10 obreros tardarán 3 horas.

3 4,8 horas

4 7 000 euros

5 64 horas

6 120 euros

7 2,67 euros/kg

APLICA

1 Empresa A: 8 000 m^3
Empresa B: 12 000 m^3

2 Empresa A: 900 días = 30 meses
Empresa B: 600 días = 20 meses

3 La empresa A debería contratar a 15 obreros más (necesita 30 en total), y la empresa B a 6 obreros más (necesita 24 en total).

Ficha de trabajo B

PRACTICA

1 2 h 3’ 45”

2 10,51 euros

3 a) 1 104,49 euros
b) 1 102,5 euros
c) Después del primer año la cantidad obtenida son 1 050 euros. Esta cantidad después del 2.° año se convierte en 1 125,9 euros.

4 a) 30 km
b) 1 hora
c) A 120 km del pueblo

APLICA

1 Intereses con abono anual: 615 €
Intereses con abono semestral: 623 €
Intereses con abono trimestral: 627 €
Deberías recomendar el abono trimestral de intereses.

2 En el banco B conseguirían 720 € de beneficio. Por tanto, es mejor que la oferta del banco A.

3 Con la contraoferta del banco A conseguirían 732,36 €. Ahora sí que es mejor que el banco B.

Expresiones algebraicas

Nombre y apellidos: ....

Curso: .... **Fecha:** ....

POLINOMIOS

- Un **monomio** es una expresión algebraica donde ....
- En un monomio se distinguen la **parte literal** (formada por las ....), del **coeficiente** (parte ......).
- **Grado** de un monomio: Es la suma ....

POLINOMIOS

Un **polinomio** es la suma de .... El **grado** de un polinomio es ....

OPERACIONES CON POLINOMIOS

SUMA Y RESTA

Suma: Agrupamos monomios semejantes y los sumamos.

EJEMPLOS:

$A(x) = 3x^3 - 5x^2 + 2x - 6$

$B(x) = 2x^2 + 4x + 5$

Resta: Sumamos al minuendo el opuesto del sustraendo.

EJEMPLO:

- Calcula $A(x) - B(x)$ del ejemplo anterior.

PRODUCTO

Producto de monomio por polinomio: multiplicamos el monomio por ....
....

Producto de polinomios: Se multiplica cada monomio de uno de ellos ....
....
....

EJEMPLO:

$(3x^2 - 2x) \cdot (5x^3 - 4x + 6) =$

DIVISIÓN

Es similar a la división entera de números naturales.

– Se divide el primer termino del dividendo entre ....
....

– El resultado se multiplica ....
....
....
....

– El proceso se repite hasta
....

FACTORIZACIÓN DE POLINOMIOS

Es un procedimiento para convertir un polinomio en producto de polinomios. Se puede hacer de dos maneras, o combinado ambas: ....

SACAR FACTOR COMÚN

Se saca factor común cuando todos los términos ....
....

EJEMPLOS:

$2x^3 + 4x^2 - 2x = 2x\,(\quad + \quad - \quad)$

$4x^3 - 36x^2 =$

$1/2x^4 - 1/4x^3 =$

IDENTIDADES NOTABLES

$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

$(a + b)\,(a - b) = a^2 - b^2$

EJEMPLOS:

$4x^2 - 4x + 1 =$

$x^2 - 2x + 1 =$

$16x^2 - 1 =$

Nombre y apellidos: ....

Curso: .... **Fecha:** ....

PRACTICA

1 Reduce estas expresiones algebraicas:

a) $(2x^2 + 5x + 7) - (x^2 - 6x + 1)$

b) $7 - 2(x^2 + 3) - x(x - 3)$

c) $4 - \frac{3x}{2}(x^2 - 2) - \frac{x^2}{2}(x + 2)$

d) $\frac{x}{2}\left(x - \frac{2}{3}\right) + \frac{2x}{2}\left(5x - \frac{5}{2}\right) - \frac{3x}{4}\left(4x - \frac{4}{3}\right)$

2 Calcula directamente el resultado de estas identidades notables:

a) $\left(\frac{x}{2} - 2\right)^2$ b) $\left(\frac{x^2}{3} + 3x\right)^2$ c) $\left(\frac{x}{4} - 5\right)\left(\frac{x}{4} + 5\right)$

3 Transforma en forma de producto estas expresiones (saca factor común y luego usa las identidades notables):

a) $x^3 + 6x^2 + 9x$ b) $x^4 - 16x^2$ c) $3x^4 - 24x^3 + 48x^2$

4 Reduce estas expresiones haciendo lo que se te indica en cada una:

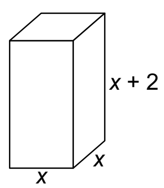
a) Multiplica por el mín.c.m. de los denominadores y simplifica:

$\frac{x^2}{3} - \frac{x^2 - 1}{2} - \frac{x^2 - 13}{9}$

b) Multiplica por $2x^2$ y simplifica: $\frac{5}{2x} - \frac{3}{x^2}$

c) Multiplica por x^2 y simplifica: $\frac{3 - x}{x} + \frac{x - 1}{x^2}$

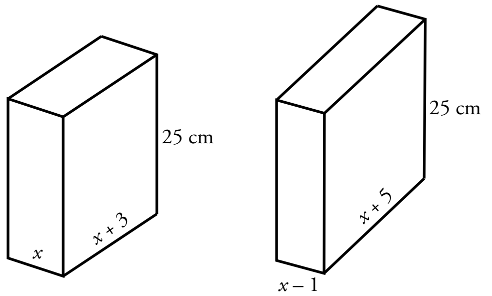
5 Expresa en función de x la superficie total y el volumen de esta figura.



Nombre y apellidos: ....

APLICA. CAJAS DE CEREALES

Un amigo de vuestra profesora de matemáticas le cuenta un problema que están teniendo en su empresa, para ver si podéis ayudarle. La empresa, que es de alimentación, ha decidido comercializar una marca de cereales y venderla en envases de cartón cuya altura no debe superar los 25 cm para facilitar su embalaje. Deben tomar la decisión entre dos tipos de cajas.



CAJA A: 3 cm más ancha que profunda.

CAJA B: 1 cm menos profunda, pero 2 cm más ancha, que la caja A.

1 Para poder elegir, lo primero que quieren saber es cuál de los dos modelos necesita menos superficie de cartón para fabricarlo. Ese modelo será el elegido. ¿Cuál es?

2 ¿Cuál es el volumen de cada uno de los dos modelos en función de la profundidad x?

3 Si la caja A tiene 5 cm de profundidad, ¿qué volumen, en centímetros cúbicos, puede envasarse en la caja A? ¿Y en la B?

4 La profesora os cuenta que, a pesar de saber ya qué modelo van a utilizar, quieren seguir haciendo pruebas con distintos tamaños, y os pregunta: ¿Qué superficie de cartón se requerirá para el modelo de caja elegido si la profundidad es de 5 cm?

Nombre y apellidos: ....

Curso: .... **Fecha:** ....

PRACTICA

1 Reduce estas expresiones:

a) $\left(x-\frac{1}{3}\right)\left(x+\frac{1}{3}\right)-\frac{1}{3}(x^2+1)$

b) $\frac{x(x-3)}{2}+\frac{x(x-2)}{4}-\frac{3(x-2)^2}{8}$

c) $\frac{3}{2}\left(\frac{x}{3}-3\right)^2+\frac{x+1}{8}-\frac{x-1}{2}$

2 Transforma en producto (saca factor común y/o usa las expresiones notables):

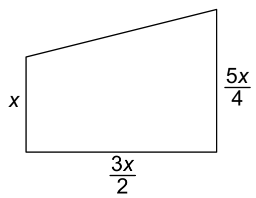
a) x^3-x b) $4x^3+4x^2+x$ c) $(x-1)(2x^2-9)-(x-1)(x^2+7)$

3 Reduce estas expresiones haciendo lo que se te indica en cada una.

a) $\frac{2}{x}-\frac{2}{x+3}$ (Multiplica toda la expresión por $x(x+3)$ y luego simplifica).

b) $\frac{3-x}{x}-\frac{3x+1}{x^2}$ (Multiplica toda la expresión por x^2 y luego simplifica).

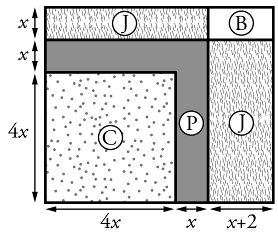
4 Calcula la superficie de este polígono en función de x. ¿Cuál será el valor numérico de esa superficie si $x = 12$ m?



Nombre y apellidos: ....

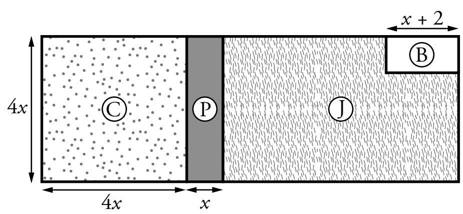
APLICA. PROYECTO DE CONSTRUCCIÓN

Un vecino tuyo está diseñando una casa de campo y necesita hacer unos cuantos cálculos para tomar una decisión sobre ciertas cuestiones. Sabiendo que estás en 4.° de ESO, te pide que le ayudes, asegurándote que podrás hacer todos los cálculos tú solo. El proyecto consta de una casa unifamiliar (C), un paseo alrededor de ella (P), un pequeño bungalow (B) y un jardín (J). Todo ello lo quiere construir en una parcela que tenga, exactamente, $36x^2 + 12x$ metros cuadrados, para una x que habrá que determinar. Este es el diseño:



1 En primer lugar quiere saber, en función de x, qué expresiones tiene que manejar para las superficies de C, P, B y J. Comprueba que su suma es la que te ha dicho.

2 Acaba de pensar que si la parcela tuviese otras dimensiones, podría distribuir los elementos de otra forma. Así, manteniendo la misma superficie para la casa y para el bungalow, y la misma superficie total, podría concederle menos al paseo y más al jardín. Ha pensado en esta forma y distribución:



¿Qué dimensiones debería tener la parcela para que se cumplan sus requisitos?

¿Qué superficie tendrán ahora el paseo, P, y el jardín, J?

Ficha de trabajo A

PRACTICA

1 a) $x^2 + 11x + 6$ b) $-3x^3 + 3x + 1$

c) $-2x^3 - x^2 + 3x + 4$ d) $\frac{x^2}{2} - \frac{x}{3}$

2 a) $\frac{x^2}{4} - 2x + 4$ b) $\frac{x^4}{9} + 2x^3 + 9x^2$

c) $\frac{x^2}{16} - 25$

3 a) $x(x + 3)^2$ b) $x^2(x + 4)(x - 4)$

c) $3x^2 (x - 4)^2$

4 a) $-5x^2 + 35$ b) $5x - 6$ c) $-x^2 + 4x - 1$

5 a) $S = 6x^2 + 8x$ $V = x^2(x + 2)$

APLICA

1 Superficie de A: $2x^2 + 106x + 150$

Superficie de B: $2x^2 + 108x + 190$

El modelo A necesita menos superficie.

2 $V_A = x(x + 3)25 = 25x^2 + 75x$

$V_B = (x - 1)(x + 5)25 = 25x^2 + 100x - 125$

3 Se pueden envasar 1 000 cm^3 en cada caja.

4 La superficie es de 730 cm^2.

Ficha de trabajo B

PRACTICA

1 a) $\frac{2x^2}{3} - \frac{4}{9}$ b) $\frac{3x^2}{8} - \frac{x}{2} - \frac{3}{2}$

c) $\frac{x^2}{6} - \frac{27x}{8} + \frac{113}{8}$

2 a) $x(x^2 - x)$ b) $x(2x + 1)^2$

c) $(x - 1)(x + 4)(x - 4)$

3 a) 6 b) $-x^2 - 1$

4 $\frac{27x^2}{16}$. Si $x = 12$ m, la superficie son 243 m^2.

APLICA

1 $S_C = 16x^2$

$S_P = 9x^2$

$S_B = x^2 + 2x$

$S_J = 10x^2 + 10x$

$S_C + S_P + S_B + S_J = 36x^2 + 12x$

2 $(36x^2 + 12x) : 4x = 9x + 3$

Nombre y apellidos: ....

Curso: .... **Fecha:** ....

ECUACIONES E INECUACIONES

ECUACIONES DE PRIMER GRADO

Para resolver una ecuación de primer grado:

① Quitar...

② Quitar ....

③ Pasar ....

④ Simplificar ....

⑤ Despejar ....

⑥ Comprobar ....

EJEMPLOS:

a) $3(x - 2) + 6(x + 4) = 3(x + 10)$

b) $\dfrac{3(x + 2)}{4} - \dfrac{x}{6} = x - 1$

INECUACIONES DE PRIMER GRADO

- Una **inecuación** es ....

- El procedimiento para resolver una inecuación de primer grado es ....

- Gráficamente, las soluciones de una inecuación de primer grado son ....

EJEMPLOS:

a) $2x + 1 < 8$

b) $x - 8 > \dfrac{x}{2} + 6$

c) $3x - 4 \leq x - \dfrac{x}{4}$

ECUACIONES DE SEGUNDO GRADO

COMPLETAS

$ax^2 + bx + c = 0$, con $a \neq 0$, se resuelve con la fórmula:

$x =$ ....

INCOMPLETAS

$ax^2 + c = 0$, con $a \neq 0$, se resuelve ....
....

EJEMPLO:

$ax^2 + bx = 0$, con $a \neq 0$, se resuelve ....
....

EJEMPLO:

OTRAS ECUACIONES

Con lo que ya sabemos, podemos resolver muchas otras ecuaciones.

$(x - 1)(x + 7) = 0$

SOLUCIONES:

$x^4 - 10x^2 + 9 = 0$

SOLUCIONES:

$\sqrt{x + 1} - 5 = 0$

SOLUCIONES:

$\dfrac{2}{x} + 2x = 5$

SOLUCIONES:

Nombre y apellidos: ....

Curso: .... **Fecha:** ....

PRACTICA

1 Reduce y resuelve las siguientes ecuaciones de primer grado:

a) $\frac{3x-2}{6} - \frac{4x+1}{10} = -\frac{2}{15} - \frac{2(x-3)}{4}$ b) $\frac{2(x+3)}{3} - \frac{3(x-1)}{4} = \frac{2(3-x)}{6} - \frac{5}{8}$

2 Reduce y resuelve estas ecuaciones:

a) $(x-3)^2 + 1 = (x+2)^2 - 4x - 3(x-1)$ b) $\frac{x^2-1}{3} - \frac{3x^2+6}{6} = (x+1)^2 - (x+3)$

3 Resuelve estas ecuaciones, directamente, sin reducirlas:

a) $(x^2-4) + (x+1) = 0$ b) $(x-3)(x+2)(x^2-1) = 0$ c) $(x-2)(x^2-7x+12) = 0$

4 Resuelve las inecuaciones:

a) $\frac{x-3}{2} \le x + 1$ b) $5x - 3 \ge 2 + \frac{5x}{2}$

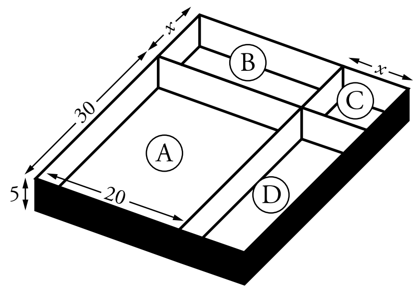
5 Un pintor debe pintar 50 metros de pared y la que hace esquina con ella, de longitud desconocida. El pintor sabe que su ritmo de trabajo es pintar 10 metros por hora. ¿Hasta qué longitud debe medir la pared desconocida para que pueda hacer el trabajo en 8 horas o menos?

$\left(\text{Si } x \text{ es la longitud desconocida, el número de horas que tardará será } \frac{50+x}{6}\right)$.

Nombre y apellidos: ....

APLICA. OBRAS DE AMPLIACIÓN

Tu abuelo tiene una finca con un depósito de agua de 30 m × 20 m × 5 m = 3 000 m^3 de capacidad. Ha conseguido comprar una tierra junto a la suya y quiere ampliar el depósito, añadiendo la misma cantidad de metros a lo largo y a lo ancho, para conseguir un depósito como el que puedes ver en el dibujo.



1 Quiere que la ampliación le dé otros 3 000 m^3 de capacidad, para tener un total de 6 000 m^3 de agua, y abuelo te pide que le calcules cuál debe ser esa longitud x en que tiene que aumentar su depósito actual.

2 Por otra parte, y sin importarle ya la capacidad del depósito, quiere que un albañil tarde menos de 9 días, o 9 días, en construirle las paredes. El albañil es capaz de levantar 10 metros lineales de pared cada día. ¿Qué medidas puede tener, en este caso, x?

3 "No sé qué cálculos hice yo", te dice ahora "pero para cubrir el suelo de las zonas A y C encargué 681 m^2 y para las zonas B y D, 450 m^2 de un suelo distinto. ¿Qué medida calculé para x?

Nombre y apellidos: ....

Curso: .... **Fecha:** ....

PRACTICA

1 Resuelve las ecuaciones de primer grado siguientes:

a) $2\left(\dfrac{2x-1}{3}-\dfrac{x+2}{2}\right)-2x=x+\dfrac{1}{2}$

b) $\dfrac{1}{2}-\dfrac{3}{2}\left(\dfrac{x+1}{2}-\dfrac{x+2}{3}+x\right)=1-2x$

2 Resuelve estas ecuaciones de segundo grado:

a) $(x+4)^2-(2x-1)^2=8x$

b) $\dfrac{x(x-1)}{3}-\dfrac{x(x+1)}{4}=-\dfrac{3x+4}{12}$

3 Resuelve estas inecuaciones:

a) $\dfrac{x-2}{3}-\dfrac{3x-1}{5}\leq\dfrac{17}{15}$

b) $\dfrac{2-x}{4}-\dfrac{2+x}{2}\geq\dfrac{2x-7}{4}-\dfrac{2x+5}{3}$

4 Una empresa paga a sus trabajadores 40 € por las 20 primeras horas de trabajo. A partir de ahí cobran 24 € por hora extraordinaria. ¿Cuántas horas extraordinarias deben trabajar para ganar más de 1 840 €?

5 Resuelve estas ecuaciones:

a) $\sqrt{3x+4}+2x=4$

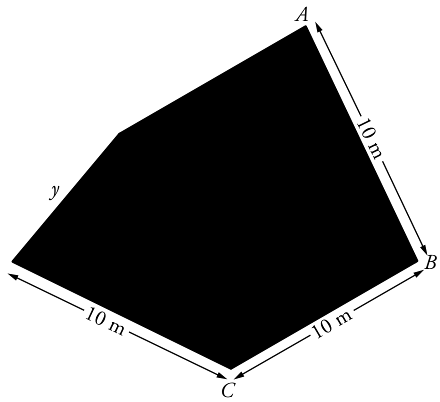
b) $x-\sqrt{2x-1}=1-x$

Nombre y apellidos: ....

APLICA. CONSTRUCCIÓN DE UNA BUHARDILLA

Tus vecinos quieren construir, sobre su casa de planta cuadrada, una buhardilla de 6 m de altura y con 10 m de vertiente *AB*, tal como se ve en el dibujo.

Como saben que estás en 4.° de ESO, te piden que les ayudes con los cálculos.



1 Lo primero que quieren saber es a qué distancias x y $10 - x$ caerá la vertical del vértice superior. Diles el dato que necesitan para empezar la construcción de su buhardilla.

2 Después del dato anterior, te preguntan cuál será la longitud de la vertiente más corta, y.

3 La parte frontal de la buhardilla la van a recubrir con piedra que, cuánto más cara es, más les gusta. Pero tienen para ello un precio ajustado: pueden gastarse entre 750 € y 900 €. ¿Entre qué precios deben buscar (el precio de la piedra se da en €/m^2)?

4 En el techo de la vertiente *AB* quieren poner una ventana de 2 m^2 de superficie que tendra 35 cm más de ancho que de alto. ¿Qué medidas deben encargar?

Ficha de trabajo A

PRACTICA

1 a) $x = 3$ b) $x = -\frac{19}{2}$

2 a) $x = 1$ b) $x_1 = 2,\ x_2 = -8$

3 a) $x_1 = -2,\ x_2 = 2,\ x_3 = -1$

b) $x_1 = 3,\ x_2 = -2,\ x_3 = 1,\ x_4 = -1$

c) $x_1 = 2,\ x_2 = 4,\ x_3 = 3$

4 a) $x \geq -5$

b) $x \geq 2$

5 $x \leq 30$ (la pared que hace esquina debe medir, como mucho, 30 metros).

APLICA

1 La ampliación debe ser de 10 m.

2 $5x + 50 \leq 90$

La medida de x debe estar entre 0 m y 8 m.

$0 \leq x \leq 8$

3 $x^2 + 600 = 681 \rightarrow x = 9$

$50x = 450 \rightarrow x = 9$ m

Ficha de trabajo B

PRACTICA

1 a) $x = -\frac{19}{16}$ b) $x = 1$

2 a) $x_1 = \frac{-5}{3};\ x_2 = 3;$ b) $x = 2$

3 a) $x \geq -6$ b) $x \leq -1$

4 $40 + 24x > 1\,840$. Deben trabajar más de 75 horas extraordinarias.

5 a) $x = \frac{3}{4}$ b) $x_1 = 1,\ x_2 = \frac{1}{2}$

APLICA

1 $x = 2$. El vértice superior caerá a 2 m de un extremo y a 8 m del otro.

2 La vertiente menor medirá $2\sqrt{10}$ m, unos 6,32 m, aproximadamente.

3 $0x \geq 750$ y $30x \leq 900$

Deben buscar precios entre 25 €/m^2 y 30 €/m^2.

4 Deben encargar una ventana de 160 cm de ancho y 125 cm de alto.

Nombre y apellidos: ....

Curso: .... **Fecha:** ....

SISTEMAS DE ECUACIONES

SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES

- El número de soluciones de cada ecuación de un sistema es ....

  Gráficamente, cada ecuación se representa mediante una ....

- Varias ecuaciones forman un sistema cuando ....

  Gráficamente, su solución es ....

NÚMERO DE SOLUCIONES DE UN SISTEMA LINEAL

El sistema puede tener **una solución.** En este caso, las dos rectas ....

Si el sistema es **incompatible**, es decir, ..., las rectas son ....

Si el sistema es **indeterminado,** es decir, con .... soluciones, las dos rectas ....

MÉTODOS DE RESOLUCIÓN DE SISTEMAS LINEALES

SUSTITUCIÓN

Consiste en ....

....

....

EJEMPLO: $\begin{cases} x - y = 5 \\ 2x + 2y = 22 \end{cases}$

IGUALACIÓN

Consiste en

EJEMPLO: $\begin{cases} x + y = 6 \\ x + 3y = 14 \end{cases}$

REDUCCIÓN

Consiste en

EJEMPLO: $\begin{cases} 5x - 4y = 9 \\ 3x + 2y = -1 \end{cases}$

SISTEMAS NO LINEALES

- Son aquellos en los que

- Para resolverlos,

EJEMPLOS:

a) $\begin{cases} x - y = 1 \\ x^2 - y = 13 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x - y = 15 \\ y = \dfrac{100}{x} \end{cases}$

c) $\begin{cases} \sqrt{x} - \sqrt{y} = 2 \\ \sqrt{x} + \sqrt{y} = 14 \end{cases}$

Nombre y apellidos: ....

Curso: .... **Fecha:** ....

PRACTICA

1 Resuelve estos sistemas por el método de reducción:

a) $\begin{cases} 3x + 2y = -1 \\ 4x - 2y = 8 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 5x - 4y = -9 \\ 3x + 2y = -1 \end{cases}$

2 Resuelve estos sistemas por el método de sustitución:

a) $\begin{cases} 2x - 3y = 12 \\ x + 5y = -7 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 3x + y = 1 \\ x - 2y = 5 \end{cases}$

3 Resuelve estos sistemas por el método de igualación:

a) $\begin{cases} 4x + y = 3 \\ -2x + y = 0 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x + 5y = 6 \\ x - 2y = -1 \end{cases}$

4 Reduce el sistema y luego resuélvelo por el método que prefieras:

$$\begin{cases} \dfrac{x+y}{3} - \dfrac{2(x-y)}{5} = \dfrac{11}{5} \\[2mm] \dfrac{3x+y}{2} + 2(x-y) = \dfrac{-9}{2} \end{cases}$$

5 Con dos tipos de vino de 3,50 €/*l* y de 1,50 €/*l* queremos obtener un vino de 2,50 €/*l*. ¿Cuántos litros de cada vino debemos mezclar para obtener 50 litros del nuevo vino?

Nombre y apellidos: ....

APLICA. DEGUSTACIÓN DE CAFÉ

Una cafetería propone una degustación de café acompañada de un concurso. El ganador podrá desayunar gratis todos los fines de semana durante medio año.

En primer lugar, os dicen que van a hacer mezclas con tres tipos de cafés: el tipo A cuesta 6 €/kg; el tipo B, 8 €/kg; y el C, 10 €/kg.

1 Lo primero que os muestran es la mezcla "Trópico". Esta consta de cafés del tipo A y del tipo B. Se han obtenido 20 kg de mezcla a un coste de 7 €/kg. Mientras lo probáis, tenéis que calcular cuánta cantidad de café A y de café B han utilizado en la mezcla.

2 La segunda prueba consiste, además de probar la mezcla "Caribeña", en calcular la cantidad de café de tipo A y de café de tipo C que han utilizado para ella. Os dicen que también han obtenido 20 kg de mezcla a un coste de 7 €/kg.

3 Para la tercera pregunta no tenéis que probar ningún café. Solo os piden que les digáis si pueden obtener 20 kg de mezcla con cafés de los tipos B y C a 7 €/kg. ¿Pueden conseguirlo?

4 Después de un buen rato, prosigue la degustación con la mezcla llamada "Sabrosso". En este caso también han obtenido 20 kg con un precio de 8,7 €/kg. Os vuelven a pedir las cantidades de B y C utilizadas en esta mezcla.

Nombre y apellidos: ....

Curso: .... **Fecha:** ....

PRACTICA

1 Resuelve los siguientes sistemas por el método que se indica:

a) Sustitución:

$$\begin{cases} \dfrac{x}{3} + \dfrac{y}{2} = 3 \\ 4x + \dfrac{y}{2} = 14 \end{cases}$$

b) Reducción:

$$\begin{cases} 15x + 16y = 14 \\ 30x - 8y = 68 \end{cases}$$

2 Reduce el siguiente sistema y luego resuélvelo por el método que consideres más adecuado:

$$\begin{cases} \dfrac{5(x+1)}{3} - \dfrac{x+y}{2} = \dfrac{7}{2} \\ 2(x - y + 5) - \dfrac{x+y}{3} = 11 \end{cases}$$

3 Resuelve los siguientes sistemas no lineales:

a) $\begin{cases} x^2 + y = 4 \\ x + y = -2 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x - y = 3 \\ xy = 54 \end{cases}$

4 Jorge tiene 27 años más que su hija Pilar. Dentro de 8 años, la edad de Jorge será el doble que la de Pilar. ¿Cuántos años tiene cada uno?

Nombre y apellidos: ....

APLICA. OFERTAS EN EL SUPERMERCADO

El supermercado de tu barrio quiere promocionar una marca de productos alimenticios. Los responsables del supermercado os cuentan las distintas promociones que tienen pensado hacer y os piden opinión.

1 *Pack de yogures a 3,6 €. Llevándose 3 unidades más, pagará 4,5 €, pero cada yogur sale 0,10 € menos que su precio inicial.* Quieren saber cuántos yogures deben colocar en cada pack y cuál debe ser el precio individual inicial y cuál será el precio de cada yogur si un cliente acepta la oferta.

2 *Por una tarrina de mantequilla y un tarro de mermelada, pague 4 €. Llevando 2 tarrinas y 3 tarros, pague 7,6 € y ahórrese un 20% en cada tarrina y en cada tarro.* Como antes, lo que quieren saber es cuál debe ser el precio inicial de cada tarrina de mantequilla y de cada tarro de mermelada, y cuáles serían los precios si un cliente se llevase la oferta.

3 *Por 2 bricks de zumo de naranja, un brick de zumo de manzana y un brick de zumo de melocotón, pague 6 €. Por 2 bricks de zumo de naranja y 2 de zumo de manzana, pague 5 €. Por 3 bricks de zumo de naranja y 2 de melocotón, pague 8 €.* ¿A cuánto deben poner el precio de cada brick de zumo?

4 *Pack de 4 flanes y 4 natillas, por 4 €. Llevándose un pack de 6 flanes y 6 natillas, pague 5,25 € y ahórrese unas natillas.* ¿Cuál es el precio inicial de un flan y de unas natillas?

Ficha de trabajo A

PRACTICA

1 a) (1, –2) b) (–1, 1)

2 a) (3, –2) b) (1, –2)

3 a) $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$ b) (1, 1)

4 (0, 3)

5 25 litros de cada uno.

APLICA

1 La mezcla tiene 10 kg del tipo A y 10 kg del tipo B.

2 La mezcla tiene 15 kg del tipo A y 5 kg del tipo C.

3 No pueden, porque una de las cantidades sale negativa (30 kg de B y –10 kg de C).

4 La mezcla tiene 13 kg del tipo B y 7 kg del tipo C.

Ficha de trabajo B

PRACTICA

1 a) (3, 4) b) (2, –1)

2 (2, 1)

3 a) (3, –5) b) (9, 6)

1 Jorge: 46 años
Pilar: 19 años

APLICA

1 Cada pack inicial debe tener 6 unidades y cada unidad debe costar 60 cent.

Si se llevan 9 unidades pagarán 50 céntimos por cada una.

2 La tarrina de mantequilla debe costar 2,5 € y el tarro de mermelada, 1,5 €.

Si se llevan 2 tarrinas y 3 tarros pagarán 2 € por cada tarrina de mantequilla y 1,2 € por cada tarro de mermelada.

3 El brick de zumo de naranja debe costar 1 €; el de manzana, 1,5 €; y el de melocotón, 2,5 €.

4 Un flan cuesta 25 cent. y unas natillas, 75 cent.

8 Funciones. Características

Nombre y apellidos: ....

Curso: ....   **Fecha:** ....

FUNCIONES

FORMAS DE DAR UNA FUNCIÓN

Una función puede darse mediante:

— una ....

— ....

— ....

— ....

GRÁFICA DE UNA FUNCIÓN

Una gráfica corresponde a una función si a cada valor de x ....

EJEMPLOS:

Función **No función**

RASGOS FUNDAMENTALES

DOMINIO DE DEFINICIÓN

Es el conjunto de valores de x ......

....

Causas que pueden limitar el dominio:

— ....

....

— ....

....

— ....

....

DISCONTINUIDADES. CONTINUIDAD

Razones por las que una función puede ser discontinua en un punto.

a) Tiene ramas .... b) ....

c) .... d) ....

Una función es **continua** cuando ....

....

CRECIMIENTO Y DECRECIMIENTO

Una función f es **creciente** en un tramo si ....

....

....

Una función f es **decreciente** en un tramo si ....

....

....

MÁXIMOS Y MÍNIMOS

Una función tiene un **máximo relativo** en un punto ....

....

....

Una función tiene un **mínimo relativo** en un punto ....

....

....

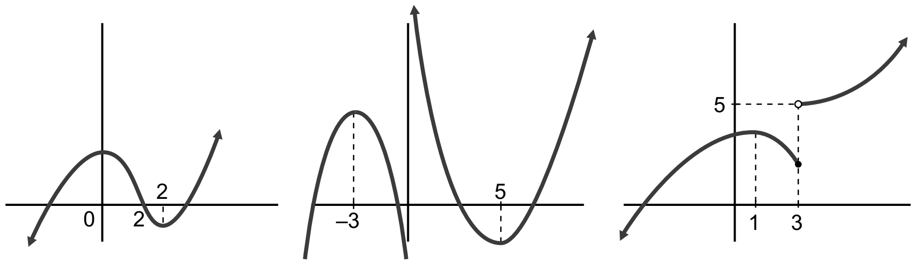
8 Funciones. Características

Nombre y apellidos: ....

Curso: .... **Fecha:** ....

PRACTICA

Observa la gráfica de estas funciones:



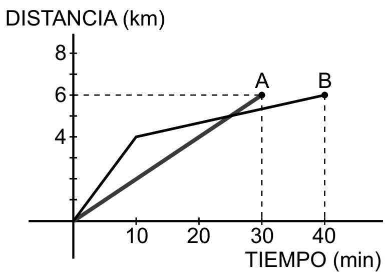
a) b) c)

1 ¿Cuál es el dominio de cada una?

2 Indica cuáles son continuas y que tipos de discontinuidad tienen las que no lo sean.

3 Expresa con lenguaje apropiado los intervalos de crecimiento y decrecimiento, y los máximos y mínimos relativos.

4 Las siguientes gráficas muestran las trayectorias de dos corredores A y B, durante una carrera de 6 km.



a) ¿Cuántos minutos por km emplea cada corredor en los primeros 10 minutos?

b) ¿Y entre los 10 y los 25 minutos?

c) ¿Cuántos km llevan recorridos ambos corredores cuando se encuentran?

d) ¿Cuántos minutos por km ha empleado cada corredor, por término medio, en toda la carrera?

Nombre y apellidos: ....

APLICA. EL MEDIO MARATÓN

Un entrenador de atletismo ha elaborado unas tablas sobre la última carrera en la que han participado tres miembros del equipo, para poder elaborar un plan de entrenamiento adaptado al grupo.

Corredor A	TIEMPO (min)	6'	30'	40'	60'	80'
	DISTANCIA (km)	1	5	10	15	20

Corredor B	TIEMPO (min)	4'	20'	40'	80'	90'
	DISTANCIA (km)	1	5	10	15	20

Corredor C	TIEMPO (min)	6'	30'	40'	75'	100'
	DISTANCIA (km)	1	5	10	15	20

1 Elabora una gráfica donde se vean representadas las tres tablas. Coloca el tiempo en el eje *X* y la distancia en el *Y*.

2 El entrenador desea comparar el ritmo de carrera medio (min/km) en cada tramo de 5 km. Construye una tabla de 4 filas con los intervalos de distancia ([0, 5], [5, 10], [10, 15] y [15, 20]) y 3 columnas (corredores A, B y C).

3 ¿Cuál ha sido el ritmo medio de carrera para los tres corredores?

4 El entrenador, que no vio la primera parte de la carrera, quiere que le contéis, si podéis, qué ocurrió en los primeros 40 minutos.

5 ¿Qué ocurre a partir del minuto 40 de carrera?

8 Funciones. Características

Nombre y apellidos: ....

Curso: .... Fecha: ....

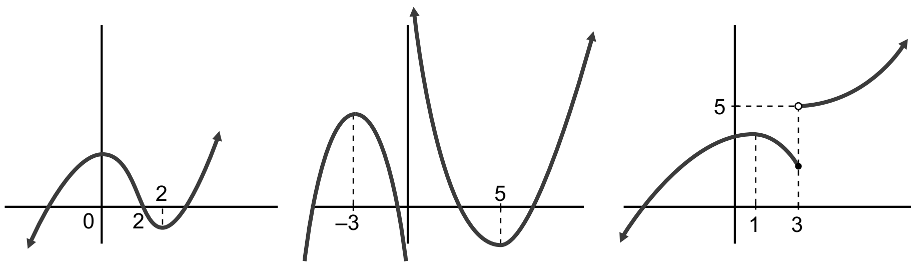
PRACTICA

1 Halla el domino de definición de estas funciones:

a) $f(x) = x^2 + 2x + 1$ b) $f(x) = \dfrac{1}{1 + x}$ c) $f(x) = \dfrac{x - 2}{x^2}$

d) $f(x) = \dfrac{1}{2x^2 - 7x + 5}$ e) $f(x) = \sqrt{x - 8}$ f) $f(x) = \sqrt{3 - x}$

2 Observa las gráficas de las funciones siguientes:



a) ¿Cuál es el dominio de cada una?

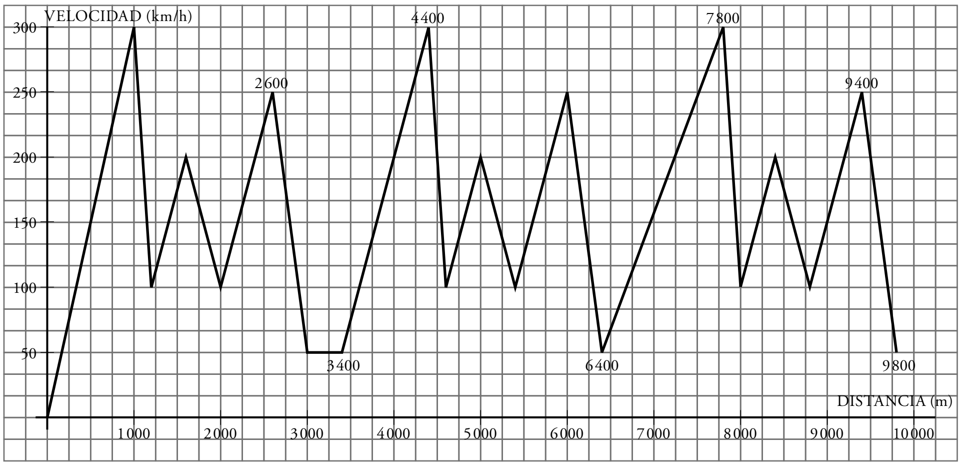
b) Indica cuáles son continuas y qué tipos de discontinuidad tienen las que no lo sean.

c) Expresa con lenguaje apropiado los intervalos de crecimiento y decrecimiento, y los máximos y mínimos relativos.

Nombre y apellidos: ....

APLICA. GRAN PREMIO DE FÓRMULA 1

Ángel quiere estudiar la última carrera de su corredor favorito. Para ello, se ha descargado de internet los datos de velocidad y ha elaborado la siguiente gráfica que representa tres vueltas del circuito:



1 ¿En qué momento alcanzó la velocidad máxima? ¿Y la mínima?

2 ¿En qué puntos del circuito hay curvas?

3 En un momento de la carrera pretendió pasar por boxes por una avería, pero se arregló antes de llegar a su zona de equipo. ¿Cuándo fue eso? Recuerda que en esta zona la velocidad está limitada. ¿A cuánto?

4 ¿Representa la gráfica a una función periódica? ¿Por qué?

Ficha de trabajo A

PRACTICA

1 Igual al 2-a de la ficha B.

2 Igual al 2-b de la ficha B.

3 Igual al 2-c de la ficha B.

4 a) A lleva 10 : 2 = 5 min/km.
B lleva 10 : 4 = 2,25 min/km.

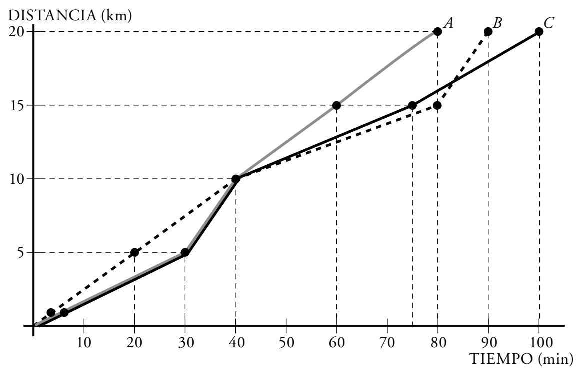
b) Entre los 10 y los 25 minutos, A ha recorrido 3 km, luego mantiene el ritmo de 5 min/km; en cambio B se derrumba: recorre 1 km en el mismo período, luego lleva un ritmo de 15 min/km.

c) Ambos se encuentran cuando llevan 5 km.

d) A realiza la carrera a un ritmo constante de 30 : 6 = 5 min/km; pero B ha sido más irregular y su promedio general ha sido 40 : 6 = 6,7 min/km.

APLICA

1



2

	A	B	C
[0, 5]	6 min/km	4 min/km	6 min/km
[5, 10]	2 min/km	4 min/km	2 min/km
[10, 15]	4 min/km	8 min/km	7 min/km
[15, 20]	4 min/km	2 min/km	5 min/km

3 Para el corredor A: 4 min/km

Para el corredor B: 4,5 min/km

Para el corredor C: 5 min/km

4 Hay dos partes: en la primera, B se destaca claramente de A y de C, que corren a la par. A partir del kilómetro 5, A y C aceleran hasta alcanzar a B al llegar al kilómetro 10.

5 A y C adelantan a B, momento que aprovecha A para despegarse de los otros dos corredores.

Ficha de trabajo B

PRACTICA

1 a) $\mathbb{R}$ b) $\mathbb{R} - \{-1\}$

c) $\mathbb{R} - \{0\}$ d) $\mathbb{R} - \left\{1, \frac{5}{2}\right\}$

e) $[8, +\infty)$

f) $(-\infty, 3]$

2 a) i) $\mathbb{R}$

ii) $\mathbb{R} - \{0\}$

iii) $\mathbb{R}$

b) i) Es continua en todo $\mathbb{R}$.

ii) Discontinuidad de ramas infinitas en $x = 0$.

iii) Discontinuidad de salto finito en $x = 3$.

c) i) Crece en $(-\infty, 0)$ y en $(3, +\infty)$.
Decrece en $(0, 3)$.
Máx. en $x = 0$ y mín. en $x = 3$.

ii) Crece en $(-\infty, -3)$ y en $(5, +\infty)$.
Decrece en $(-3, 0)$ y en $(0, 5)$.
Máx. en $x = -3$ y mín. en $x = 5$.

iii) Crece en $(-\infty, 1)$ y en $(3, +\infty)$.
Decrece en $(1, 3)$.
Máx en $x = 1$.

APLICA

1 La velocidad máxima, 300 km/h, la alcanzó a los 1 000 m, a los 4 400 m y a los 7 800 m. La velocidad mínima la alcanzó en la salida.

2 Hay una curva en los tramos donde la función es decreciente, que es donde la velocidad decrece.

3 Entró en el kilómetro 3 y la velocidad está limitada a 50 km/h.

4 No, porque la función no se repite exactamente.

9 Las funciones lineales

Nombre y apellidos: ....

Curso: .... **Fecha:** ....

LAS FUNCIONES LINEALES

PENDIENTE DE UNA RECTA

La **pendiente** de una recta es ....

Para obtener la pendiente de una recta, haremos lo siguiente:

- Si nos dan la recta gráficamente, señalaremos dos de sus puntos ....
- Si conocemos las coordenadas de dos de sus puntos

  $P(x_1, y_1)$ y $Q(x_2, y_2)$

  Entonces

  $m =$ ....
- Si conocemos la ecuación de la recta, despejaremos ....

TIPOS DE FUNCIONES LINEALES

FUNCIÓN DE PROPORCIONALIDAD

- Su ecuación es ....
- Su gráfica es una recta que pasa por ....

FUNCIÓN CONSTANTE

- Su ecuación es ....
- Su gráfica es una recta paralela ....

EXPRESIÓN GENERAL $y = mx + n$

- Su gráfica es una recta que pasa por ....
- m es ....
- n es ....

ECUACIONES DE UNA RECTA

ECUACIÓN PUNTO-PENDIENTE

Si de una recta conocemos un punto, (x_0, y_0), y la pendiente, m, su ecuación es

EJEMPLO: Ecuación de la recta que pasa por $A(-1, 3)$ y de pendiente $m = \frac{2}{3}$.

$y =$

FUNCIONES DEFINIDAS A TROZOS

Son funciones cuyas gráficas están formadas por ....

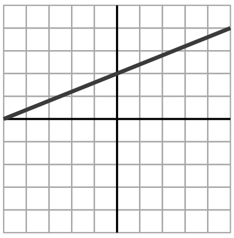
EJEMPLO: Representa $\begin{cases} x + 2, & \text{si } x < 0 \\ 2x - 2, & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$

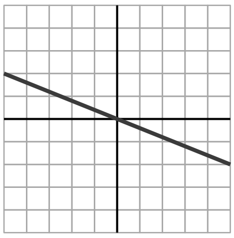
Nombre y apellidos: ....

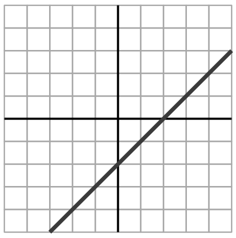
Curso: .... **Fecha:** ....

PRACTICA

1 Halla las pendientes de las siguientes rectas. ¿Cuál es la ordenada en el origen en cada caso?







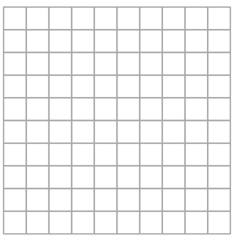
a) b) c)

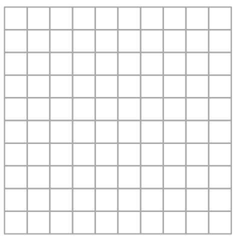
2 Halla la pendiente y la ordenada en el origen en las siguientes rectas:

a) $y = 3x + 2$ b) $\frac{2x - 3}{4}$ c) $2x + y = 5$

3 Representa gráficamente las rectas:

a) $y = 3x - 3$ b) $y = \frac{1}{2x - 1}$

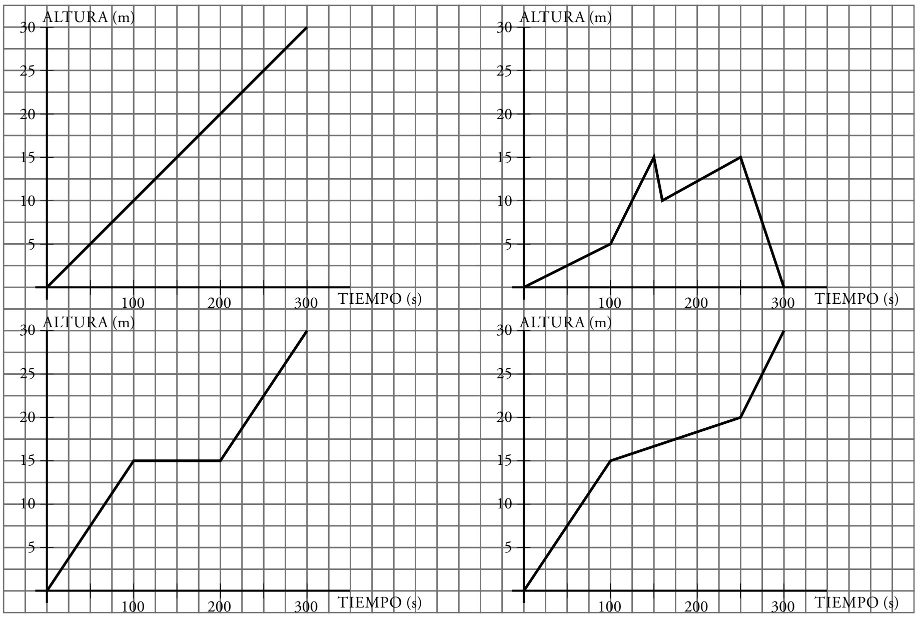




Nombre y apellidos: ....

APLICA. UN DÍA EN LA SIERRA

Tu hermana fue con unos amigos a escalar en la sierra. “¿Qué hicisteis cada uno?”, le preguntas. “Mira te he dibujado unas gráficas con los datos que fui recogiendo durante toda la mañana”.



1 “Puedes ver el comportamiento de Andrés, de Beatriz, de Carlos y de Dalia. Dalia fue la más regular en su escalada. A Andrés le dio un calambre y durante un tiempo tuvo que subir mucho más despacio. Beatriz, que acaba de empezar y es muy buena, perdió un apoyo y, del susto, estuvo un rato parada. Por último, Carlos no tuvo su día y se cayó. Dime tú cuál es la gráfica que corresponde a cada uno”.

2 “Pero Carlos es el que lleva mucho tiempo escalando, ¿no? Por lo menos al final llegaría hasta arriba”, le dices. “¿Tú que crees, viendo la gráfica?”, te responde.

3 “¿Quién fue el más rápido de todos?”, preguntas. “¿Por qué no dejas de hacer preguntas y miras las gráficas?” ¿Quién crees que fue el más rápido en subir?

9 Las funciones lineales

Nombre y apellidos: ....

Curso: .... **Fecha:** ....

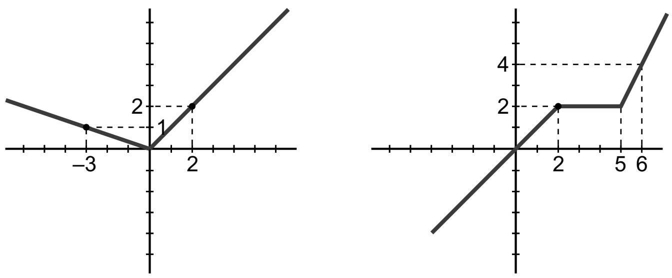
PRACTICA

1 Representa gráficamente:

a) $y = \begin{cases} 2x - 1 & \text{si } x \le 1 \\ 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$

b) $y = \begin{cases} -x - 1 & \text{si } x \le -1 \\ x + 1 & \text{si } x > -1 \end{cases}$

2 ¿Cuál es la expresión analítica de estas funciones lineales a trozos? (calcula la ecuación de cada rama, con su pendiente y su punto de paso).



3 Sin necesidad de representarlas, empareja las rectas que sean paralelas de entre todas éstas:

a) $2x - y + 4 = 0$ b) $y = x - 3$ c) $y = 2x - 1$

d) $x - y + 1 = 0$ e) $y = \dfrac{x}{3} - 1$ f) $x - 3y + 4 = 0$

4 Encuentra la ecuación de la recta que pasa por $A(1,3)$ y es paralela a la recta $2x + y - 1 = 0$.

Nombre y apellidos: ....

APLICA. ENVASANDO MIEL

El instituto os lleva de excursión a una empresa en la que envasan tarros de miel. Os acompaña una trabajadora, para contaros el proceso. Sin embargo, al poco de llegar le dicen que la dirección necesita unos datos sobre la producción y se tiene que encargar ella. Vuestro profesor le ofrece vuestra ayuda.

1 "Bueno chicos. Lo primero que me piden es una gráfica de la producción de ayer. Aquí tenéis los datos que me han dado. Son los kilogramos de miel que se han envasado al acabar cada hora. La jornada de trabajo empieza a las 8.00 h de la mañana. ¿Podríais ir haciendo la gráfica mientras hablo con mi jefe para ver cuándo quiere el informe? Tened en cuenta que se empieza a trabajar a las 8:00".

HORAS (h)	0	1	2	3	4	5	6	7	8
KILOGRAMOS	0	100	200	300	300	450	600	750	900

2 "Vaya datos más raros", dice uno de tus compañeros. "¿La máquina envasa a distintas velocidades y se para, y luego sigue?", pregunta. "No, no. El proceso tiene que ser muy regular. Lo que pasa es que tenemos dos máquinas. Normalmente tenemos en funcionamiento la más lenta, que nos da mejor calidad en el envasado, pero ayer creo que se rompió. ¿Podríais decirme la hora en que ocurrió para que lo ponga en el informe?"

3 Acabo de hablar con el jefe de planta y me ha dicho que intentaron arreglar la máquina pero que no fue posible; así que continuaron el envasado poniendo en funcionamiento la máquina más rápida. ¿Qué capacidad de envasado (kilogramos envasados por hora) tiene cada máquina?

Ficha de trabajo A

PRACTICA

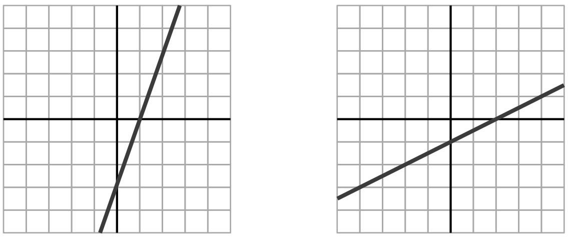
1 a) $m = \frac{2}{5}$; $n = 2$ b) $m = \frac{-1}{2}$; $n = 0$

c) $m = 1$; $n = -2$

2 a) $m = 3$; $n = 2$ b) $m = \frac{1}{2}$; $n = \frac{-3}{4}$

c) $m = -2$; $n = 5$

3



APLICA

1 Andrés $\longrightarrow$ Gráfica 4

Beatriz $\longrightarrow$ Gráfica 3

Carlos $\longrightarrow$ Gráfica 2

Dalia $\longrightarrow$ Gráfica 1

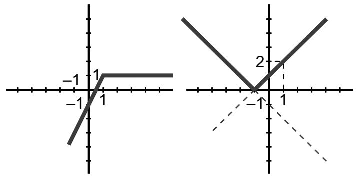
2 Carlos no llegó al final, porque la gráfica termina en la altura 0, la base de la vía.

3 Andrés, Beatriz y Dalia tardaron lo mismo, 300 s, en hacer la vía de 30 m.

Ficha de trabajo B

PRACTICA

1



2 a) $y = \begin{cases} -\frac{x}{3} & \text{si } x \le 0 \\ x & \text{si } x > 0 \end{cases}$

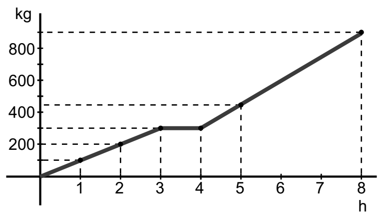
$y = \begin{cases} x & \text{si } x > 2 \\ 2 & \text{si } 2 \le x < 5 \\ 2x - 8 & \text{si } x \ge 5 \end{cases}$

3 Son paralelas a) y c) ; b) y d) ; e) y f).

4 $y = -2x + 5$

APLICA

1



2 La máquina se rompió a las 11:00 y se decidió dejar de usarla a las 12:00.

3 Lenta: 100 kg/h

Rápida: 150 kg/h

10 Otras funciones elementales

Nombre y apellidos: ....

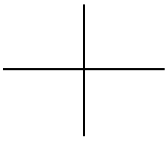
Curso: .... **Fecha:** ....

OTRAS FUNCIONES ELEMENTALES

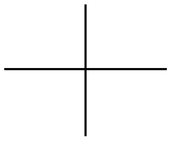
FUNCIONES CUADRÁTICAS

- Las funciones cuadráticas tienen por ecuación $y =$ ....
- Se representan mediante una ....
- Su eje es ....

— Si $a > 0$, las ramas van ....



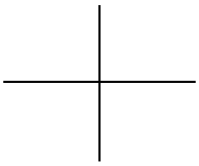
— Si $a < 0$, las ramas van ....



- La abscisa del vértice es $x =$ ....
- Cuanto mayor es $|a|$, la parábola es ....

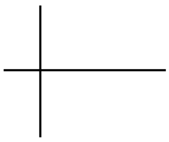
FUNCIONES DE PROPORCIONALIDAD INVERSA

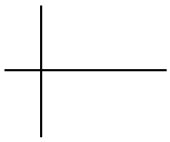
- Su ecuación es ....
- No está definida en ....
- GRÁFICA



FUNCIONES RADICALES

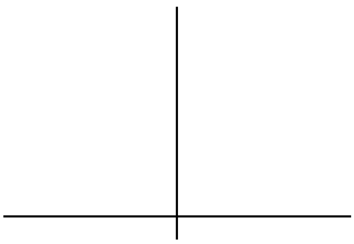
- Su ecuación es $y =$ ....
- No están definidas en ....
- GRÁFICA





FUNCIONES EXPONENCIALES

- Su ecuación es ....
- La base es un número ....
- Están definidas en ....
- Pasan por los puntos (0, ...) y (1, ...).
- Son crecientes y su mayor o menor crecimiento depende de ....
- GRÁFICA



Nombre y apellidos: ....

Curso: .... Fecha: ....

PRACTICA

1 Representa las parábolas siguientes, indicando en cada caso su orientación, vértice y puntos de corte con los ejes.

a) $y = x^2 - x - 2$ b) $y = x^2 - 4x$ c) $y = -\frac{1}{2}x^2 + 3x$

2 Representa las funciones de proporcionalidad inversa.

a) $y = \frac{3}{x}$ b) $y = \frac{-3}{x} + 1$

3 Representa estas funciones exponenciales:

a) $y = 3^x$ b) $y = (0,5)^x$

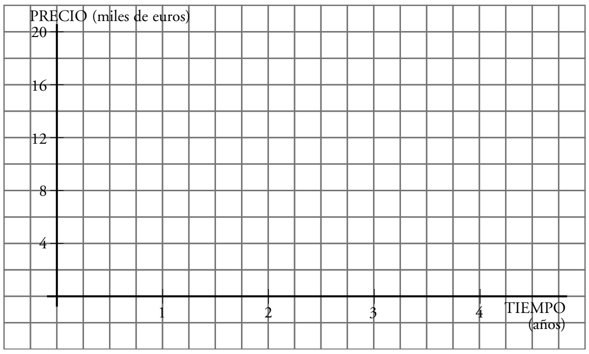
Nombre y apellidos: ....

APLICA. VEHÍCULOS DE EMPRESA

Una multinacional química que acaba de instalarse en tu ciudad destina 2 millones de euros para su flota automovilística. Quieren comprar coches (C) para los ejecutivos y los comerciales, furgonetas (F) para los repartos próximos, y camiones grandes (G) para las distancias largas.

1 Han estimado que por cada camión necesitan el doble de furgonetas y el triple de coches. ¿Cuántos camiones, furgonetas y coches podrán comprar si valen 80 000 €, 30 000 € y 20 000 €, respectivamente?

2 Las estadísticas dicen que, con el paso del tiempo, los coches pierden valor según la ecuación $C = \dfrac{-5t^2}{2} + 20$. Construye una tabla y una gráfica para la relación C = precio de un coche y t = años de antigüedad en un coche.



3 Han decidido que cambiarán la flota de coches cuando su precio llegue a la mitad de su valor inicial. A la vista de la gráfica, ¿cuándo ocurrirá esto, aproximadamente? Si no lo hicieran, ¿en qué año un coche no tendría ningún valor?

Nombre y apellidos: ....

Curso: .... **Fecha:** ....

PRACTICA

1 La parábola $y = x^2 + bx + c$ tiene el vértice en el punto $(4, 9)$. Calcula los valores b y c y representa la función.

2 Resuelve gráfica y analíticamente los sistemas:

a) $\begin{cases} y - 3x = -5 \\ x^2 + 1 = -y \end{cases}$

b) $\begin{cases} y = -x^2 + 4x + 5 \\ y = 9 + 8x \end{cases}$

3 Estas dos funciones, $y = 2^x$ e $y = 2^{2-x}$, se cortan en un punto. Represéntalas en los mismos ejes y encuentra el punto (x, y) de corte de ambas.

Nombre y apellidos: ....

APLICA. PREVISIONES SOBRE CRECIMIENTO Y NECESIDADES DE UNA POBLACIÓN

El profesor de Matemáticas os plantea un problema demográfico de cierta región europea. En esa región hay dos grandes grupos de población: el grupo A lo integran unos 7 millones de habitantes, y el B, unos 3 millones. Los demógrafos de ese país, estudiando el crecimiento de la población en periodos de 5 años, observan que ambas comunidades siguen distintas proyecciones matemáticas de crecimiento:

A sigue la función $P_A = 6 + 1{,}5^t$

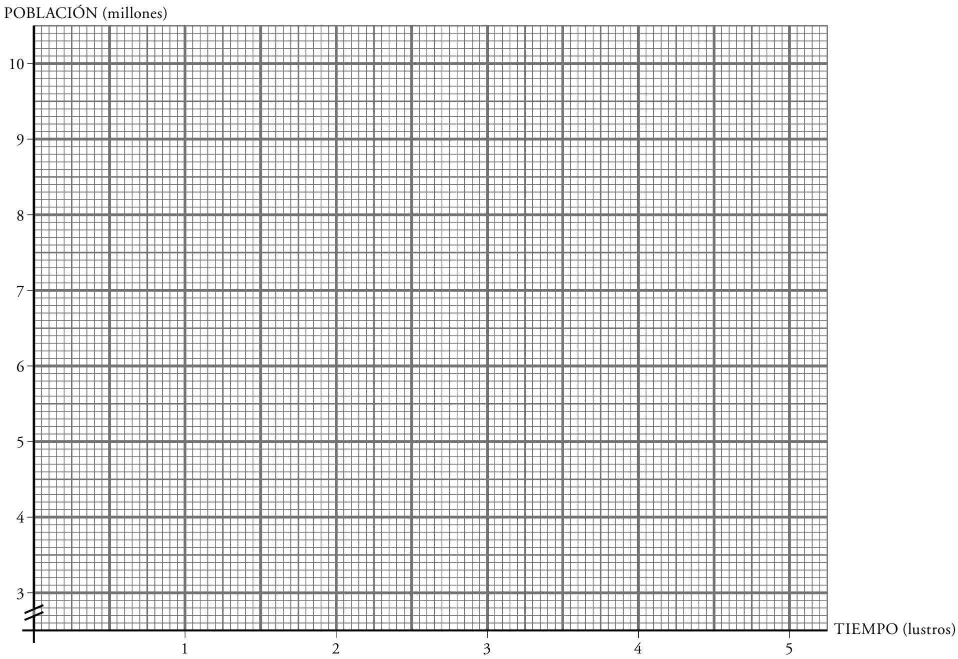
B sigue la función $P_B = 2 + 2^t$

donde t se mide en lustros (periodos de cinco años) y P son millones de habitantes.

1 Lo primero que os pide el profesor es que construyáis una tabla de crecimiento de población para cada uno de los dos grupos, desde $t = 0$ hasta $t = 5$ lustros. ¿Qué población crece más deprisa? ¿Llegará B a superar a A? ¿En qué periodo?

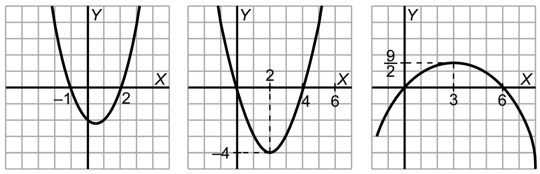
t	0	1	2	3	4	…	t
y							

2 Luego os pide que construyáis una gráfica aproximada de cada función. ¿Para qué valor de t ambas poblaciones serán iguales? El profesor os recomienda que dibujéis las dos gráficas sobre los mismos ejes coordenados.



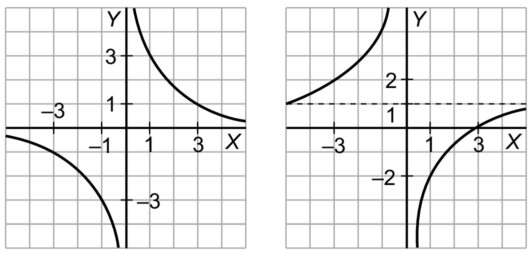
Ficha de trabajo A

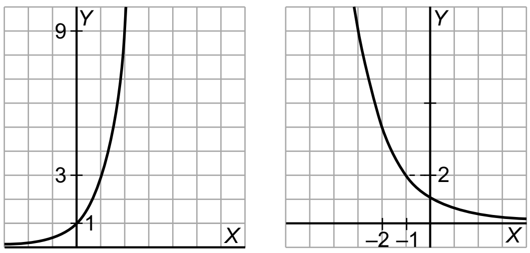
PRACTICA

1 

a) $V(1/2; -2{,}25)$ b) $V(3, -4)$ c) $V(3, 1/2)$

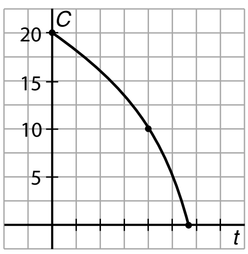
a)	b)	c)
Corte en:	Corte en:	Corte en:
$x = 0$; $y = -2$	$x = 0$; $y = 0$	$x = 0$; $y = 0$
$y = 0$; $x = -1$	$y = 0$; $x = 4$	$y = 0$; $x = 6$
$y = 0$; $x = 2$		

2 

3 

APLICA

1 10 camiones, 20 furgonetas y 30 coches.

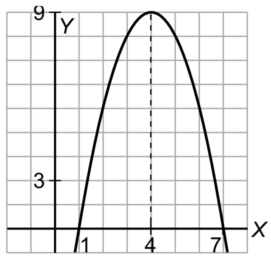
2 

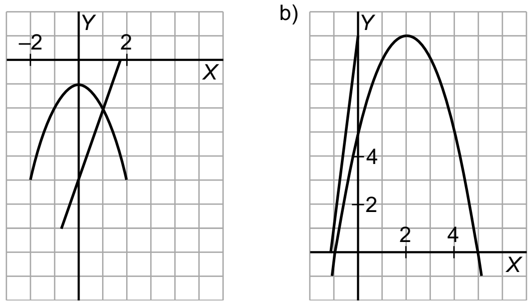
3 Cambiarán a los 4 años.

Pierden su valor ($C = 0$) a los 5,65 años.

Ficha de trabajo B

PRACTICA

1 

2 a) b) 

3 Se cortan en el punto (1, 2).

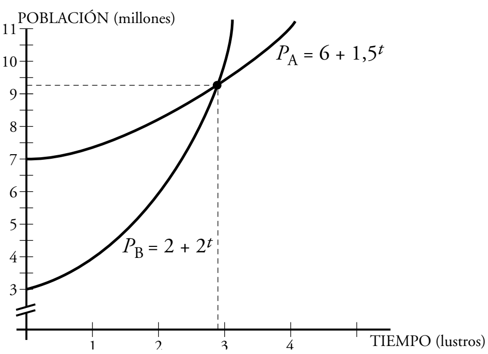
APLICA

1

t	0	1	2	3	4	5
P_A	7	7,5	8,25	9,375	11,06	13,6

t	0	1	2	3	4	5
P_B	3	4	6	10	18	34

Crece más deprisa la población B. En 3 lustros, será mayor que la A.

2 

Las poblaciones se igualan, aproximadamente, a los 2,8 lustros = 14 años.

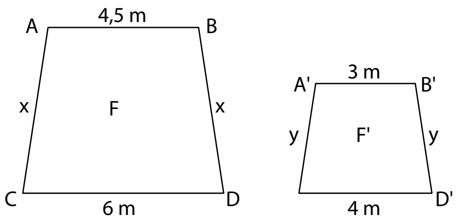
Nombre y apellidos: ....

Curso: .... **Fecha:** ....

FIGURAS SEMEJANTES

Dos figuras son **semejantes** si sus ángulos correspondientes son ....
y sus distancias ....

Por ejemplo, si las figuras *F* y *F'* son semejantes, entonces $\hat{A}$ = ..., $\hat{B}$ = ...

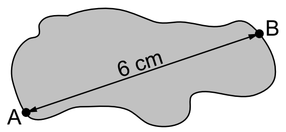


Además, si $\overline{AB} = 2 \cdot \overline{A'B'}$, entonces

$\overline{BC}$ = ... $\overline{CD}$ = ... $\overline{DA}$ = ... $\overline{AC}$ = ...

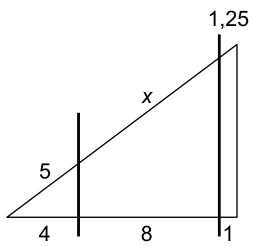
PLANOS Y ESCALAS

- La figura *S* es una representación a **escala 1 : 1 000 000** de una isla oceánica.
- Esto significa que cualquier medida sobre el plano es .... de veces más grande en la realidad.



- ¿Cuál será la distancia real en kilómetros, entre los puntos *A* y *B* del plano?

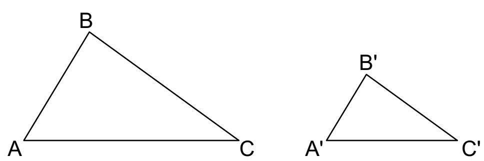
TEOREMA DE TALES



Si las rectas *a*, *b*, *c*, son ...., entonces:

$$\frac{\overline{AB}}{....} = \frac{....}{....}$$

SEMEJANZA DE TRIÁNGULOS



Los triángulos son semejantes si tienen dos ángulos respectivamente iguales:

En la figura, *A* = *A'* y *B* = *B'*, luego *C* = *C'*.

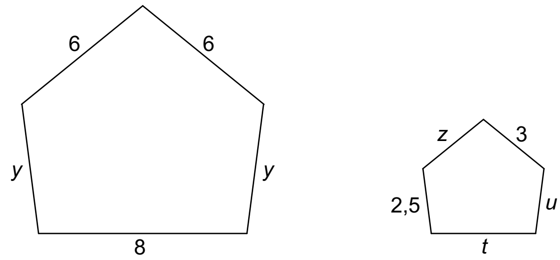
En este caso, $\hat{A}$ = ..., $\hat{B}$ = ..., $\hat{C}$ = ...

Nombre y apellidos: ....

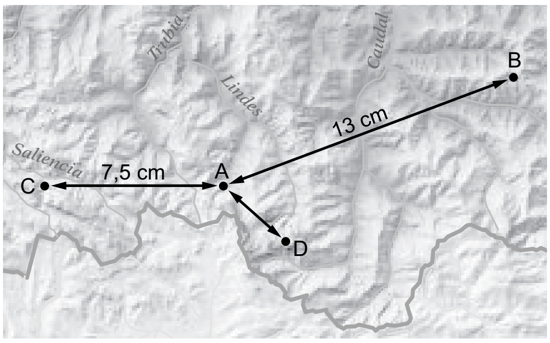
Curso: .... **Fecha:** ....

PRACTICA

1 Estas dos figuras son semejantes. Calcula los datos que faltan.



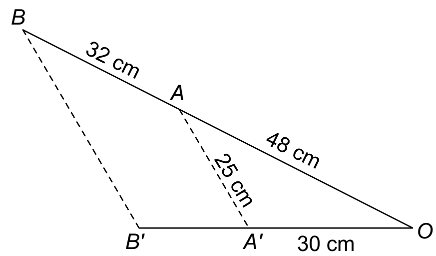
2 Luis es un guía de senderismo que prepara una próxima excursión por un paraje natural. Maneja el plano adjunto donde, midiendo con una regla, observa que 1 km de la realidad equivale a 2 cm en el plano.



a) ¿A qué escala está el plano?

b) Calcula la distancia real de las etapas *AC* y *AD* (la medida de *AD* en el plano es 3,5 cm).

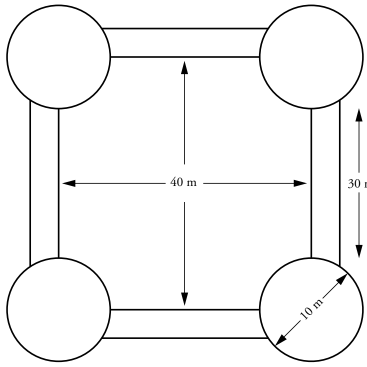
3 Aplica el teorema de Tales y la semejanza de triángulos para calcular los datos que faltan en la figura adjunta (*B'A'* y *BB'*).



Nombre y apellidos: ....

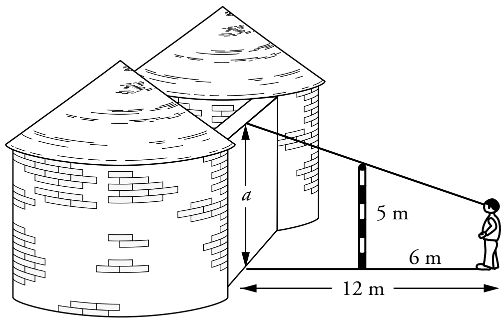
APLICA. REHABILITANDO EDIFICIOS ANTIGUOS

El ayuntamiento de tu localidad, junto al Ministerio de Cultura, decide rehabilitar y embellecer una construcción del siglo XVI, cuya planta es la que ves en el dibujo.

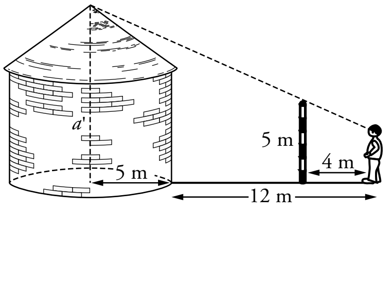


Aprovechando vuestros conocimientos de matemáticas, el ayuntamiento os pide ayuda con unos sencillos cálculos que les faciliten la labor de rehabilitación.

1 Los técnicos no han encontrado los planos originales de la construcción, por lo que les faltan algunas medidas. Lo primero que quieren saber es la altura de los muros que hay entre las torres. Para ello, un operario de 1,75 m de altura se ayuda de un listón de 5 m y toma las medidas que ves en el dibujo. ¿Cuál es la altura de los muros?



2 Para averiguar la altura de las torres vuelven a utilizar el mismo método, y es el mismo operario de 1,75 m de altura el que hace las mediciones. Di a los técnicos la altura de las torres.

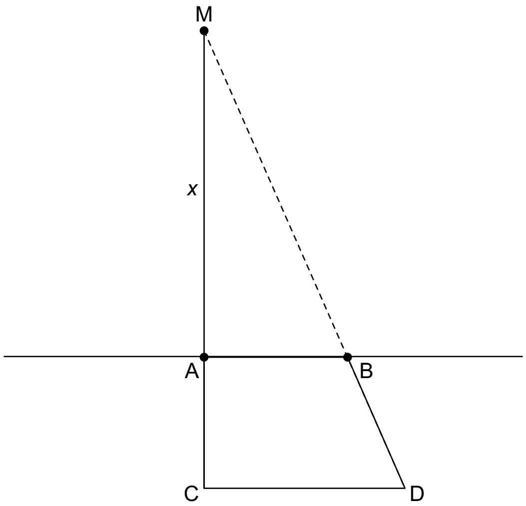


Nombre y apellidos: ....

Curso: .... **Fecha:** ....

PRACTICA

1 Para averiguar la distancia de un barco M a la orilla, Juan procede como en la figura adjunta:



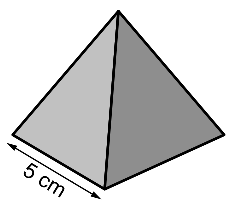
Con piedras *A, B, C, D* mide las distancias $AB = 50$ m, $AC = 50$ m y $CD = 70$ m. ¿Cuál será la distancia *X* de *M* a *A*?

2 Yolanda hace una foto a escala 1 : 500 de una pirámide de base cuadrada y caras equiláteras, que está construida en el parque de su barrio.

a) ¿Cuál será el volumen de la pirámide de la foto?

$$V = (A_{base} \, . \, \text{Altura}) : 3$$

b) Con este dato, ¿podrá calcular directamente el volumen de la pirámide del parque?

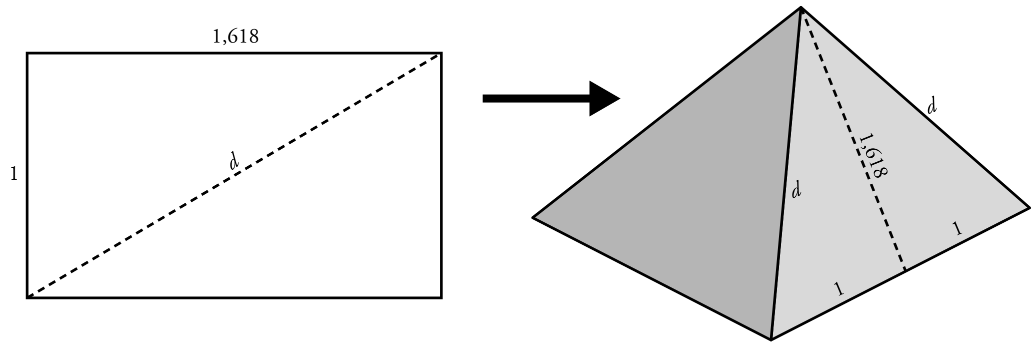


Nombre y apellidos: ....

APLICA. ESTUDIO DE LA GRAN PIRÁMIDE

Recuerda que un rectángulo áureo es aquel en el que la razón entre el lado mayor, b, y el menor, a, es $\frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1{,}618\ldots$ Este número irracional es el llamado número de oro por los antiguos, y era para ellos la razón de la divina proporción. Se le conoce, también, por Φ.

Vuestra profesora de Matemáticas, aficionada a las maquetas, ha decidido construir una reproducción a escala de la gran pirámide de Keops. En algún sitio ha leído que si corta por su diagonal un rectángulo áureo, con sus dos mitades puede formar un triángulo isósceles que reproduce a escala una de las caras laterales de la gran pirámide.



1 Para poder hacer la maqueta, os pide ayuda con unos sencillos cálculos. En primer lugar, quiere calcular la altura de la pirámide si hiciera la maqueta con las medidas del dibujo anterior, en metros. Además, le gustaría saber cuánto mediría la arista de la pirámide.

2 La profesora os sigue dando información: la altura de la pirámide original es de unos 148 m. Utilizando la proporcionalidad entre el modelo anterior y la pirámide real, os pide que calculéis cuánto mide la arista de la gran pirámide y el lado de su base.

Ficha de trabajo A

PRACTICA

1 $t = 4$; u = 2,5; $y = 5$; $z = 3$

2 a) 1 : 500 000

b) AB = 6,5 km

AC = 3,75 km

AD = 1,75 km

3 x = 20 cm; y = 41,66 cm

APLICA

1 La altura de los muros es de 8,25 m.

2 Las torres miden 15,56 m.

Ficha de trabajo B

PRACTICA

1 El barco está a 125 m.

2 La pirámide de la foto tendrá un volumen de 29,4625 cm^3.

Puesto que 1 cm de la foto equivale a 500 cm de la realidad, entonces el volumen real equivalente será 29,4625 · 500 = 3 682 812 500 cm^3, esto es, unos 3 682,81 m^3.

APLICA

1 La altura de la pirámide sería de 1,272 m.
La arista de la pirámide sería de 1,9 m.

2 La arista de la gran pirámide mide 221,07 m.

El lado de la base de la gran pirámide mide 232,7 m.

Nombre y apellidos: ....

Curso: .... **Fecha:** ....

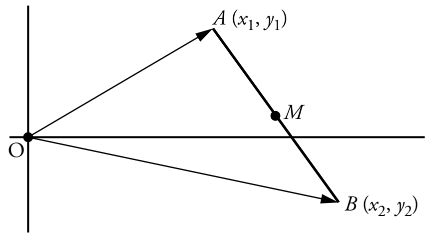
GEOMETRÍA ANALÍTICA

PUNTO MEDIO DE UN SEGMENTO

Las coordenadas del punto medio M de un segmento de extremos A y B son:

$A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ $\rightarrow$ M(.............. , ...)

Por ejemplo, si $A(3, -6)$ y $B(-1, 4)$, entonces las coordenadas del punto medio son ....



PUNTOS ALINEADOS

Los puntos $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ y $C(x_3, y_3)$ están alineados si los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{BC}$ son .... es decir, si sus coordenadas son ....

$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \text{.......................}$$

DISTANCIA ENTRE DOS PUNTOS

La distancia entre los puntos $A(x_1, y_1)$ y $B(x_2, y_2)$ es $d = |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{\text{...........}}$

Por ejemplo, si $A(3, -7)$ y $B(8, 5)$, entonces $d =$ ....

PARALELISMO Y PERPENDICULARIDAD DE RECTAS

Las pendientes de las rectas r_1 y r_2 son, respectivamente, m_1 y m_2.

– Si r_1 y r_2 son paralelas, entonces $m_2 =$

– Si r_1 y r_2 son perpendiculares, entonces $m_2 =$

Por ejemplo, si la pendiente de una recta r es 2, la pendiente de cualquier paralela a ella es .... y la pendiente de cualquier recta perpendicular a ella es ....

$Ax + By + C = 0$ es la ecuación de una recta r:

– Si $A = 0$, entonces r es paralela al eje ....

– Si $B = 0$, entonces r es paralela al eje ....

– Si $B \neq 0$, entonces la pendiente de r es ....

Nombre y apellidos: ....

Curso: .... **Fecha:** ....

PRACTICA

1 Halla las coordenadas del punto medio de los segmentos de extremos:

a) $A(-3, 6)$ y $B(5, -4)$ b) $A(-2, -6)$ y $B(6, 0)$ c) $A(-1, 4)$ y $B(1, -2)$

2 Comprueba si los puntos $A(2, 4)$, $B(4, 8)$ y $C(-1, -2)$ están alineados.

3 Calcula el perímetro del triángulo formado por los puntos $A(3, -6)$, $B(11, 9)$ y $C(11, 0)$.

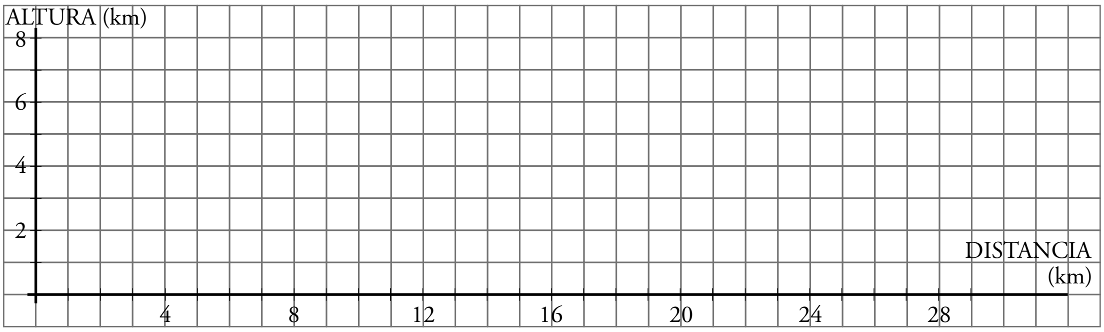
4 Halla el punto simétrico de $A(-2, 4)$ respecto de $B(4, -6)$.

5 La recta $mx + ny + 2 = 0$ pasa por el punto $P(1, 1)$ y es además paralela a la recta de ecuación $6x - 10y + 1 = 0$. Halla la ecuación de la recta dada.

Nombre y apellidos: ....

APLICA. CURSO DE VUELO

Tu hermana está haciendo un curso de piloto privado. Tiene que elaborar su propio plan de vuelo, que el profesor aprobará, y ajustarse a él. Te pide que lo hagáis juntos. El plan de vuelo se hace sobre unos ejes coordenados, cuyo origen es el aeródromo donde está la escuela de vuelo. Su profesor le ha dado una cuadrícula donde debe ir "dibujando" el plan de vuelo. Por primera vez, no volverán a aterrizar en el mismo aeródromo, sino en otro situado a 29 km de distancia. Ve dibujando en la cuadrícula las maniobras que va a hacer tu hermana. Utiliza vectores para ello.



1 "Lo primero que podrías hacer", le dices, "es llegar al punto (2, 5) de la cuadrícula, ¿no crees?". Tu hermana, asustada, te contesta: "No, no. Eso es imposible. No se puede hacer esa maniobra en el despegue. Según el protocolo, al despegar deben subirse 2 km de altura en 4 km de recorrido horizontal, hasta el punto *A*. ¿Cuántos kilómetros recorro en ese caso?"

2 "Como soy novata, es normal que tras un ascenso recorra unos kilómetros hasta que estabilice el aparato, en el punto *B*", te dice. "¿Qué te parecen 3 km?", le contestas. "Por mí está bien, dibújalo".

3 "Ahora, a partir del punto *B*, se me ocurre que podría seguir una recta de pendiente $\frac{1}{2}$, durante $\sqrt{6^2 + 3^2} = \sqrt{45}$ km.", te dice. "Oye, ¿qué significa eso?", le preguntas. "Pues el dato que te acabo de dar es el módulo del vector que debes dibujar".

Nombre y apellidos: ....

Curso: .... Fecha: ....

PRACTICA

1 El punto medio de un segmento es $M(-2, 4)$ y uno de sus extremos es $B(4, 5)$. ¿Cuáles son las coordenadas del otro extremo B'?

2 Los puntos $A(-2t, t)$, $B(2, 3)$ y $C(6, 5)$ están alineados. Calcula las coordenadas del punto A.

3 a) Calcula el perímetro del triángulo formado por los puntos $A(-4, 2)$, $B(1, 6)$ y $C(6, 2)$.

b) ¿Es un triángulo isósceles?

c) Encuentra las coordenadas del punto medio de la base (lado desigual) y la longitud de su altura (distancia del vértice superior al punto medio de la base).

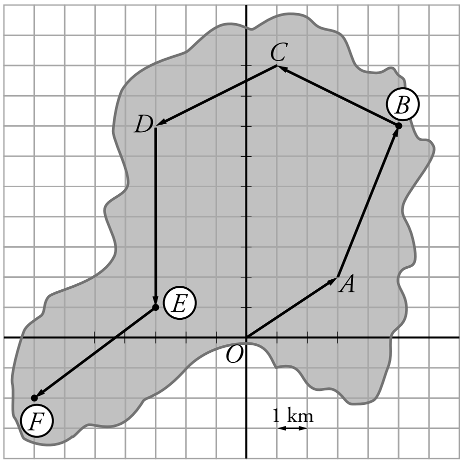
d) Calcula el área.

4 Se sabe que la recta $3x + ny + k = 0$ pasa por $P(0, 1)$ y es perpendicular a la recta $2x - 3y - 2 = 0$. ¿Cuál es la ecuación de la recta dada?

Nombre y apellidos: ....

APLICA. EL TESORO DE LA ISLA DEL DIABLO

El plano de la isla que ves abajo cayó en manos de un navegante aventurero del siglo XVIII. En él se indicaban los tres lugares donde se encontraba repartido y oculto el tesoro del capitán Kip. Los tres lugares son los puntos *B*, *E* y *F*.



1 El navegante se puso a estudiar la ruta. El mejor lugar de desembarco era el punto *O*. En él dibujó el origen de un sistema de coordenadas. ¿Cuántos kilómetros hay que recorrer para hacer la ruta desde *O* a *P*?

2 Mientras está mirando el mapa, le parece que los tramos *OA* y *EF* son paralelos. ¿Está en lo cierto nuestro aventurero?

3 Una vez en la isla, elige a un lugareño para que le guíe por la isla, que no conoce. Le enseña el mapa con la ruta que ha trazado. “No, no. Muy largo”, le dice el guía. “Se puede hacer de *B* a *D* directamente y se ahorra usted...”. ¿Cuánto?

Ficha de trabajo A

PRACTICA

1 a) (1, 1) b) (2, –3) c) (0, 1)

2 Puesto que $\frac{8-4}{4-2} = \frac{-2-8}{-1-4} = \frac{2}{1}$, sí están alineados.

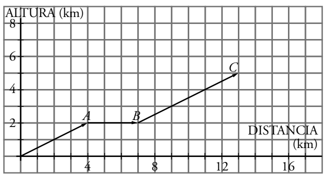
3 $P = d(A, B) + d(A, C) + d(B, C) =$
$= 17 + 10 + 9 = 36$

4 (6, –16)

5 $3x - 5y + 2 = 0$

APLICA

El plan de vuelo que ha diseñado tu hermana queda así:



1 La distancia recorrida hasta el punto A es de $\sqrt{20} \approx 4,47$ km.

2 El punto B está en (7, 2).

3 El punto C está en (13, 5).

Ficha de trabajo B

PRACTICA

1 (8, 3)

2 $t = 1$; $A(-2, 1)$

3 a) $d(AB) + d(AC) + d(BC) = \sqrt{41} + 10 + \sqrt{41} =$
$= 22,8$ u

b) Sí, porque $d(AB) = d(BC)$.

c) La base es el segmento AC y su punto medio es $M(1, 2)$.
La altura BM mide 4.

d) Área = 20 u^2

4 $n = 2 \quad k = -2$

APLICA

1 La ruta son unos 29 km.

2 No porque la pendiente de OA es $\frac{2}{3}$ y la pendiente de EF es $\frac{3}{4}$.

3 $d(BC) + d(CD) = 8,944$ km
$d(BD) = 8$ km
Se ahorra 0,944 km yendo por BD.

Nombre y apellidos: ....

Curso: .... **Fecha:** ....

ESTADÍSTICA

VARIABLES ESTADÍSTICAS

Variables cuantitativas son las que ....

Pueden ser de uno de estos dos tipos:

- cuantitativas **discretas** si ....
- cuantitativas **continuas** si ....

Variables cualitativas son las que ....

EJEMPLOS: "la profesión del padre" es ....
"el peso" es ....
"el número de coches que hay en cada familia" es ....

PARÁMETROS ESTADÍSTICOS

MEDIA: $\bar{x}$ = ...

VARIANZA: *Var* = ...

DESVIACIÓN TÍPICA: σ = ...

COEFICIENTE DE VARIACIÓN: C.V. = ...

EJEMPLO: Calcular $\bar{x}$, *Var*, σ y C.V. para los valores siguientes: 3, 4, 6, 6, 7, 7, 7, 8, 8, 9

MEDIDAS DE POSICIÓN

Cada una de las medidas de posición es un parámetro que divide a la población en dos trozos .... de tamaños previstos.

- La **mediana**, *Me*, parte a la población en dos trozos ....
  Es decir, el .... % de la población mide menos que *Me* y el .... % mide más.
- El cuartil inferior, Q_1, deja por debajo al .... % y por encima al .... %.
- El cuartil superior, Q_3, deja por debajo al .... % y por encima a .... %.

EJEMPLO: Di cuáles son la mediana y los cuartiles de la siguiente distribución:

2, 3, 4, 4, 6, 6, 7, 7, 8, 8, 9, 10

Nombre y apellidos: ....

Curso: .... **Fecha:** ....

PRACTICA

1 Durante una temporada futbolística se han contabilizado los signos de las quinielas registrándose los siguientes resultados:

x_i	f_i
1	304
X	152
2	44

Halla las frecuencias relativas y los porcentajes.

2 Las pulsaciones en reposo de 30 personas son:

84 83 65 72 62 86 65 72 69 73

83 74 79 76 87 71 70 74 75 80

65 74 86 78 66 72 69 75 77 73

a) Haz una tabla de frecuencias agrupando los datos en 7 intervalos de 4 unidades.

b) Represéntala gráficamente y halla las frecuencias relativas y los porcentajes.

c) Calcula los parámetros $\bar{x}$, σ^2, σ y C.V.

3 Calcula Q_1, Me y Q_3 en la siguiente distribución:

1,1,2,5,7 7,7,8,9,11 11, 13, 14, 17, 20

Nombre y apellidos: ....

APLICA. CONTROL DE LIMITACIÓN DE VELOCIDAD

En un punto conflictivo de una carretera existe un limitador de velocidad a 90 km/h. La Guardia Civil ha hecho un estudio estadístico, midiendo por radar la velocidad, en kilómetros por hora, de los vehículos que han pasado por allí durante una hora concreta. El resultado, correspondiente a 30 coches, ha sido el siguiente:

100	110	120	120	130	110	90	95
95	80	85	70	65	75	85	105
100	110	80	90	90	95	130	140
140	140	60	60	60	70		

1 El departamento de estudios estadísticos necesita agrupar los datos en una tabla para poder empezar con los cálculos. ¿Puedes ayudarles completando la siguiente tabla?

INTERVALO	MARCAS x_i	f_i	F_i	%	$x_i\, f_i$	$x_i^2 f_i$
[58, 72)						
[72, 86)						
[86, 100)						
[100, 114)						
[114, 128)						
[128, 142)						

2 Necesitan que calcules los parámetros $\bar{x}$, *Var*, σ y C.V.

3 ¿En qué intervalo está el dato $Q_2 = Me$? ¿Cómo se interpreta ese dato?

Nombre y apellidos: ....

Curso: .... **Fecha:** ....

PRACTICA

1 Después de una repoblación forestal de pinos en una comarca que sufrió un incendio años atrás, se han tomado las medidas de 50 pinos, las cuales expresadas en centímetros son las reflejadas en la tabla:

164	172	163	168	170	170	162	157	165	177
169	164	149	166	163	159	148	157	167	166
160	161	165	162	158	174	174	166	159	167
164	162	164	153	159	152	175	171	166	149
173	155	162	163	161	158	161	167	173	176

a) Represéntalas en una tabla de frecuencias de 6 intervalos con 5 unidades.

b) Represéntalas gráficamente y halla las frecuencias relativas y los porcentajes.

c) Calcula media, varianza, desviación típica y coeficiente de variación.

2 La siguiente distribución expresa los minutos de retraso de un autobús (variable x_i) durante 50 días. Calcula Q_1, Me, Q_3, p_{20} y p_{90}.

x_i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
f_i	2	1	5	2	8	7	5	7	4	7	2

Nombre y apellidos: ....

ESTADÍSTICA Y NEGOCIOS

Un empresario invierte 1 millón de euros en cada una de las tres tiendas de ropa *A, B* y *C,* que tiene abiertas en su ciudad. Los datos de beneficios o pérdidas (en miles de euros) que ha tenido cada mes, durante un año, están reflejados en la tabla adjunta:

	E	F	M	A	M	J	Jl	A	S	O	N	D
A	–10	–10	20	30	20	40	40	50	30	20	20	30
B	–20	–15	30	60	50	40	30	30	20	30	30	30
C	–30	0	10	10	–10	–20	–10	10	10	20	10	10

El empresario pretende hacer un estudio de mercado sobre la viabilidad económica de sus tiendas.

1 En primer lugar, calcula los parámetros $\overline{x}$, *Var,* σ y C.V. para la tienda A.

2 Calcula los mismos parámetros para la tienda B.

3 Haz lo mismo con los datos de la tienda C.

Ficha de trabajo A

PRACTICA

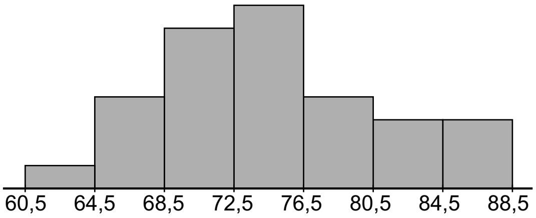
1

x_i	f_i	f_r	%
1	304	0,608	60,8
X	152	0,304	30,4
2	44	0,088	8,8

2 a)

INTERVALOS	f_i	fr_i	$\%_i$
60,5 - 64,5	1	0,033	3,3
64,5 - 68,5	4	0,133	13,3
68,5 - 72,5	7	0,233	23,3
72,5 - 76,5	8	0,267	26,7
76,5 - 80,5	4	0,133	13,3
80,5 - 84,5	3	0,100	10
84,5 - 88,5	3	0,100	10
	30	1	100

b)



$\bar{x} = 74{,}63$ $\sigma^2 = 39{,}94$

c) $\sigma^2 = 6{,}32$ CV = 8,46%

3 $Q_1 = 5$; $Me = 8$; $Q_3 = 13$

APLICA

1

INTERVALO	MARCAS x_i	f_i	F_i
[58, 72)	65	6	6
[72, 86)	79	5	11
[86, 100)	93	6	17
[100, 114)	107	6	23
[114, 128)	121	2	25
[128, 142)	135	5	30

INTERVALO	%	$x_i f_i$	$x_i^2 f_i$
[58, 72)	20	390	25 350
[72, 86)	36,7	395	31 205
[86, 100)	56,7	558	51 894
[100, 114)	76,7	642	68 694
[114, 128)	83,3	242	29 282
[128, 142)	100	675	91 125

2 $\bar{x} = 96{,}73$ km/h; $Var = 561{,}64$; $\sigma = 23{,}7$; C.V. = 0,25

3 La mediana está en el intervalo [86, 100), porque su F_i es mayor que 50%.

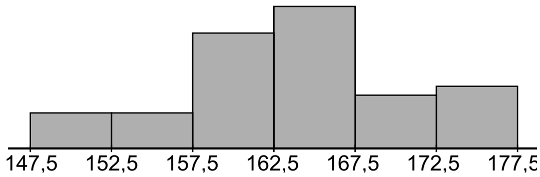
Ficha de trabajo B

PRACTICA

1 a)

INTERVALOS	f_i	fr_i	$\%_i$
147,5 - 152,5	4	0,080	8
152,5 - 157,5	4	0,080	8
157,5 - 162,5	13	0,260	26
162,5 - 167,5	16	0,320	32
167,5 - 172,5	6	0,120	12
172,5 - 177,5	7	0,140	14
	50	1,000	100

b)



$\bar{x} = 163{,}7$

$\sigma^2 = 47{,}75$

c) $\sigma^2 = 6{,}91$

CV = 11,15%

2 $Q_1 = 4$; $Me = 5{,}5$; $Q_3 = 8$; $p_{20} = 3{,}5$; $p_{90} = 9$.

APLICA

1 $\bar{x} = \dfrac{\sum x_i f_i}{N} = \dfrac{280}{12} = 23{,}33 \rightarrow 23\,330$ €

$Var = \dfrac{\sum x_i^2 f_i}{N} - x^2 = 305{,}7$

$\sigma = \sqrt{Var} = 17{,}5$

$C.V. = \dfrac{\sigma}{\bar{x}} = 0{,}75 \approx 75\%$

2 $\bar{x} = 26{,}25 \rightarrow 26\,250$ €

$Var = 488$

$\sigma = 22{,}1$

C.V. = 0,84 ≈ 84%

3 $\bar{x} = 0{,}83 \rightarrow 830$ €

$Var = 207{,}7$

$\sigma = 14{,}4$

C.V. = 17,36 ≈ 1 736%

Nombre y apellidos: ....

Curso: .... **Fecha:** ....

CÁLCULO DE PROBABILIDADES

EXPERIENCIAS ALEATORIAS

- **Experiencias aleatorias** son aquellas cuyo resultado depende .... Cada uno de los resultados posibles se llama ....
- Las experiencias aleatorias son .... con **probabilidades previsibles** o .... con **probabilidades imprevisibles.**
- En este último caso, experimentamos repetidamente (lanzar muchas veces) y **asignamos** como medida aproximada de $P[S]$ la frecuencia relativa de S:

$$f_r(S) = \frac{\textit{n.º de veces que ha ocurrido } S}{\textit{n.º de veces que se ha hecho la experiencia}} = \frac{f(S)}{N}$$

CLASES DE SUCESOS

Suceso elemental es ....
....

Suceso seguro: Es el suceso ....
....

Sucesos incompatibles. Los que no tienen ......
....

S' es contrario de S si entre ambos forman ....
....

Suceso unión de A y B, $A \cup B$, es el formado por ....

Suceso compuesto es el formado por varios ...
....

El conjunto de todos los sucesos elementales se llama ....
....

Suceso imposible es el que ....

Sucesos compatibles: tienen algún suceso .....
....

Suceso intersección de A y B, $A \cap B$, es el formado ....

PROBABILIDAD DE LOS SUCESOS. LEY DE LAPALACE

- La suma de las probabilidades de los sucesos elementales es ....
- Para cualquier suceso S, $P[S] = \dfrac{\textit{número de casos favorables}}{\textit{número de casos posibles}}$ **(Ley de Laplace)**

COMPOSICIÓN DE EXPERIENCIAS

INDEPENDIENTES

Si el resultado de una de ellas no ....

Ejemplo: Extraer una carta, devolverla y extraer otra. La probabilidad de salir dos copas es:

$$\frac{10}{40} \cdot \frac{10}{40} = \frac{1}{16}$$

DEPENDIENTES

Si el resultado de cada una ....

Ejemplo: Extraer una carta, no devolverla y extraer otra. La probabilidad de salir dos copas es:

$$\frac{10}{40} \cdot \frac{9}{39} = \frac{3}{52}$$

Nombre y apellidos: ....

Curso: .... Fecha: ....

PRACTICA

1 En los siguientes sucesos, di cuáles corresponden a experiencias aleatorias regulares y cuáles corresponden a experiencias irregulares. Calcula las probabilidades directamente en el primer caso, o asígnalas según la experimentación, en el segundo.

a) "Sacar un 3 al lanzar un dado".

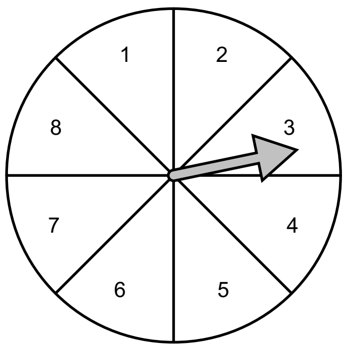
b) "Sacar un 3 al lanzar un dado trucado".
(Resultados de la experimentación después de 100 lanzamientos):

CARA	1	2	3	4	5	6
FRECUENCIA	45	34	12	3	2	4

c) "Obtener un rey al sacar una carta de una baraja española".

d) Nevar en febrero el próximo año, en una determinada localidad".
(En 20 de los últimos 100 años nevó en febrero, en dicha localidad).

2 Observa la siguiente ruleta, con los posibles resultados al girar la flecha.



a) Escribe el espacio muestral E de la experiencia "girar la flecha".

b) Escribe los elementos de los sucesos compuestos: A (par mayor que 4), B (par menor que 6), C (número primo), I (impar menor que 5).

c) ¿Cómo son entre sí los sucesos A y B? ¿Y B y C?

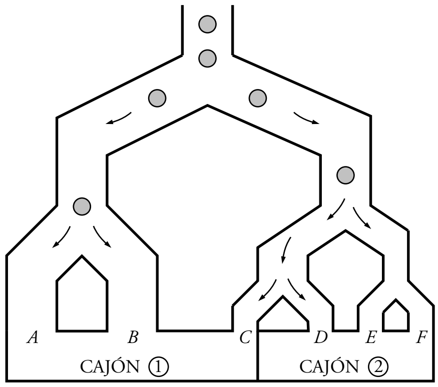
d) Escribe los elementos de $A \cup B$, $B \cup C$ y $C \cap I$.

3 Calcula las probabilidades de los sucesos A, B, C, AUB, BUC y $C \cap I$ del ejercicio anterior.

Nombre y apellidos: ....

APLICA. BOLAS CAPRICHOSAS

En tu instituto se celebra la Semana Matemática. Un alumno de Bachillerato presenta un artilugio como el que ves más abajo. Os propone el siguiente juego: "Podéis echar una bola por la entrada superior de mi máquina. Cada bola que echéis os costará 1 €. Si la bola cae en el cajón 1, perdéis vuestro dinero. Si la bola cae en el cajón 2, os doy 2 €. Yo creo que es un juego justo: de 6 posibles salidas, 3 están a mi favor y 3 al vuestro. ¿Jugáis, o qué?"



1 El juego parece equitativo, pero como estás estudiando probabilidad en clase, hay algo que te ronda por la cabeza y decides hacer unas cuantas cuentas. Lo primero que intentas es calcular las probabilidades de que la bola salga por *A, B, C, D, E* o *F*.

2 Con esos datos, ¿cuál es la probabilidad de ganar?

3 ¿Cuál es, por tanto, la probabilidad de perder?

4 Se te ocurre pensar que si lanzaras 1 000 bolas, en el cajón 1 caerían…

Nombre y apellidos: ....

Curso: .... **Fecha:** ....

PRACTICA

1 Lanzamos dos dados, uno rojo y otro verde.

a) ¿Cuántos elementos tiene el espacio muestral?

b) Escribe todos los elementos de los sucesos:

A = {el dado rojo obtiene 1}

B = {el dado verde obtiene 2}

C = {la suma de puntuaciones es 8}

c) Describe el suceso $A \cap B$.

d) Dos de los sucesos anteriores son incompatibles. ¿Cuáles son?

2 Lanzamos una moneda 3 veces.

a) Completa la tabla de posibles resultados.

Lanzamiento 1.°	Lanzamiento 2.°	Lanzamiento 3.°	Resultados
C	*C*	*C*	*CCC*
		+	
	+	*C*	
		+	
+	*C*		
	+		

b) ¿Son experiencias independientes? Justifica la respuesta.

c) Calcula la probabilidad de obtener solo dos caras.

3 Extraemos, sucesivamente, tres cartas de una baraja, pero no devolvemos la carta al mazo después de cada extracción.

a) ¿Son experiencias independientes? Justifica la respuesta.

b) Calcula la probabilidad de obtener tres ases.

Nombre y apellidos: ....

APLICA. JUEGO CON MONEDAS

En una reunión de amigos en tu casa, uno de los amigos de tus padres propone el siguiente juego: "Para jugar hay que apostar 1 €. Yo lanzaré una moneda 4 veces. Si sale cara 2 ó 3 veces, me quedo con el euro. Si sale cara 0, 1 ó 4 veces, le doy al apostante el euro más un 20%". Todos los reunidos están entusiasmados. Sin embargo, tú tienes la mosca detrás de la oreja y decides hablar con tu madre.

1 Antes de contarle tus sospechas, decides calcular cuántos resultados posibles se pueden dar si se lanza una moneda 4 veces. ¿Cuáles son?

2 Luego te pones a calcular de cuántas formas sale cara 0, 1, 2, 3 y 4 veces.

3 Cuando empiezas a contarle a tu madre los resultados, esta te pregunta: "¿Cuál es la probabilidad que tiene un jugador de perder? ¿Y de ganar?" Contéstale.

4 Por sugerencia de tu madre, calculas lo que se espera que ocurra si apuestas 1 €, 100 € o 1 000 €. Para ello tienes que analizar la función $E(x) = 1{,}20x \cdot \frac{3}{8} - x \cdot \frac{5}{8}$, siendo x el dinero que se apuesta.

Ficha de trabajo A

PRACTICA

1 a) Regular. $P = \frac{1}{6}$

e) Irregular. $P = \frac{12}{100}$

f) Regular. $P = \frac{4}{40}$

g) Irregular. $P = 20\%$

2 a) $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$

b) $A = \{6,8\}$, $B = \{2, 4\}$, $C = \{2, 3, 5.7\}$, $I = \{1,3\}$

c) A y B son incompatibles. B y C son compatibles.

d) $A \cup B = \{2, 4, 6, 8\}$; $B \cup C = \{2, 3, 4, 5, 7\}$
$C \cap I = \{3\}$

3 $P[A] = \frac{2}{8}$; $P[B] = \frac{2}{8}$; $P[A \cup B] = \frac{4}{8}$;

$P[B \cup C] = \frac{5}{8}$; $P[C \cap I] = \frac{1}{8}$

APLICA

1 $P[A] = P[B] = \frac{1}{4}$

$P[C] = P[D] = P[E] = P[F] = \frac{1}{8}$

2 $P[D \text{ o } E \text{ o } F] = \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{3}{8}$

3 La probabilidad de perder es $1 - \frac{3}{8} = \frac{5}{8}$.

4 En el cajón 1 caerán $\frac{5}{8}$ de 1 000 = 625 bolas.

Ficha de trabajo B

PRACTICA

1 a) 36 elementos

b) $A = \{(1, 1), (1, 2), ..., (1, 6)\}$
$B = \{(1, 2), (2, 2), (3, 2), ..., (6, 2)\}$
$C = \{(2, 6), (6, 2), (3, 5), (5, 3), (4, 4)\}$

c) $A \cap B = \{(1, 2)\}$

d) A y C

2

1.º	2.º	3.º	Resultados
C	*C*	*C*	(CCC)
		+	(CC+)
	+	*C*	(C+C)
		+	(C++)
+	*C*	*C*	(+CC)
		+	(+C+)
	+	*C*	(++C)
		+	(+++)

b) Son experiencias independientes, porque la probabilidad de que salga cara o cruz en un lanzamiento no depende del resultado anterior.

c) $P[\text{Dos caras}] = \frac{3}{8}$

3 a) No son independientes, porque no hay reemplazamiento.

b) $P[AAA] = \frac{4}{40} \cdot \frac{3}{39} \cdot \frac{2}{38} = \frac{1}{2\,470}$

APLICA

1 (c, c, c, c); (c, c, c, +); (c, c, +, c); (c, c, +, +); (c, +, c, c); (c, +, c, +); (c, +, +, c); (c, +, +, +); (+, c, c, c); (+, c, c, +); (+, c, +, c); (+, c, +, +); (+, +, c, c); (+, +, c, +); (+, +, +, c); (+, +, +, +)

2 0 caras: 1 caso; 1 cara: 4 casos
2 caras: 6 casos; 3 caras: 4 casos
4 caras: 1 caso

3 $P[\text{ganar}] = P[0 \text{ ó } 1 \text{ ó } 4] = \frac{3}{8}$

$P[\text{perder}] = P[2 \text{ ó } 3] = \frac{5}{8}$

4 $E(1) = -0{,}175$; $E(100) = -17{,}5$
$E(1\,000) = -175$
Cuanto más se apuesta, más se pierde.

Anotaciones

Anotaciones

Anotaciones