TEMAS DE MATEMÁTICAS
(Oposiciones de Secundaria)

TEMA 45

POLIEDROS. TEOREMA DE EULER. SÓLIDOS PLATÓNICOS Y ARQUIMEDIANOS.

TEMA 45

POLIEDROS. TEOREMA DE EULER. SÓLIDOS PLATÓNICOS Y ARQUIMEDIANOS.

1. PRIMERAS DEFINICIONES.

DEF Dados dos semiplanos en el espacio α y β con un borde común r y situados en planos distintos, llamaremos Diedro Convexo al conjunto de puntos comunes a los semiespacios limitados por los planos de α y β, que contienen a β y α respectivamente. La recta r es la arista del diedro y α y β las caras del diedro.

DEF Diremos que dos diedros son Adyacentes si tienen una cara común y las otras opuestas.

DEF Un diedro convexo y sus dos adyacentes forman un Diedro Cóncavo.

DEF Dos diedros Adyacentes forman un semiespacio llamado Diedro Llano.

Como resultados inmediatos a partir de estas definiciones tenemos los siguientes:

PROP Se verifica:

1) Dos planos secantes dividen al espacio en cuatro diedros convexos.
2) El semiplano determinado por la arista del diedro y un punto interior tiene todos sus puntos pertenecientes al diedro.
3) El segmento que une dos puntos situados cada uno en una cara del diedro, corta a todo semiplano interior al mismo.
4) Cada semiplano interior a un diedro convexo lo divide en dos diedros situados en dos semiespacios distintos respecto de dicho semiplano.

DEF Dadas tres semirrectas *r*, *s* y *t* no coplanarias y con origen común en el punto O, llamaremos Triedro al conjunto de puntos comunes a los semiespacios limitados, respectivamente, por los semiplanos *rs*, *st* y *tr* que contienen cada uno de ellos a la semirrecta restante. Los ángulos convexos determinados por *Ors*, *Ost* y *Otr* reciben el nombre de caras del triedro y el punto O es el vértice del Triedro.

Podemos generalizar la definición a n semirrectas con un origen común como sigue:

DEF Sean n semirrectas $r_1, r_2, ..., r_n$ no coplanarias y con origen común en el punto O, verificando que el plano determinado por cada dos rectas consecutivas deja a las demás en un mismo semiespacio. Llamaremos Ángulo Poliedro Convexo o Anguloide Convexo al conjunto de puntos comunes a todos los semiespacios. Las semirrectas reciben el nombre de aristas del ángulo poliedro, los ángulos convexos determinan las caras y los diedros convexos definidos por cada dos caras consecutivas se llaman diedros del ángulo poliedro.

DEF Llamaremos Superficie Poliédrica al conjunto de un número finito de polígonos, llamados caras, que verifican:

- Cada lado de una cara pertenece a otra y sólo a otra. Ambas caras se dirán que son contiguas y tienen una arista en común.
- Dos caras contiguas están en distinto plano.

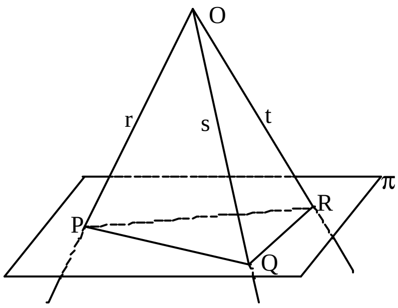
La superficie poliédrica es convexa si además verifica:

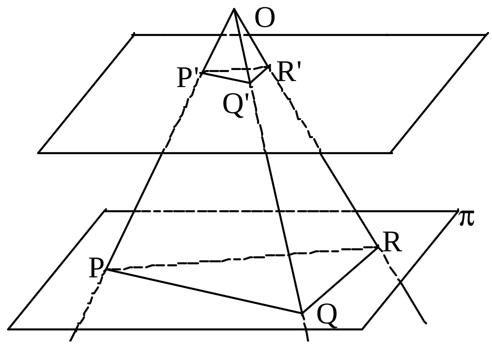
- El plano de cada cara deja a las demás caras en el mismo semiespacio.

DEF Llamaremos Poliedro Convexo al conjunto de puntos comunes a todos los semiespacios que determinados por los planos de las caras contienen a todos los demás.

El conjunto de los ángulos poliedros de las caras forman la superficie del poliedro. Los puntos de éste no situados en la superficie reciben el nombre de ángulos interiores. El resto de puntos del espacio se llaman exteriores.

Veamos la existencia de poliedros. Tomemos un punto O origen de tres semirrectas *r*, *s* y *t*. Las tres semirrectas cortarán a un plano ***p*** en los puntos P, Q, y R. Sabemos que las tres semirrectas junto con el punto O determinan un triedro. Entonces, los puntos comunes al triedro y al semiespacio determinado por el plano ***p*** y el punto O forman un poliedro de cuatro caras, siendo cada cara un triángulo. El poliedro recibe el nombre de Tetraedro.





En la segunda figura, el plano ***p’*** corta a las rectas *r*, *s* y *t* en los puntos P’, Q’ y R’ respectivamente determinando dos poliedros convexos. El superior es de cuatro caras y el inferior, situado entre ambos planos, es de cinco caras.

Aplicando secciones análogas al plano ***p’*** pero por los vértices P, Q ó R podemos probar la existencia de poliedros convexos con un número mayor de caras.

En cada operación como la anterior, el plano secante sólo puede tener en común con la superficie del poliedro cortado los lados del triángulo en que corta al triedro elegido. Si hubiese otro punto común, podríamos trazar una secante al triángulo, recta que tendría al menos tres puntos comunes con la superficie del poliedro, con lo cual, el plano de la cara por uno de ellos separaría los otros dos, contradiciendo así la definición de convexidad. Como el plano no puede tener ningún punto común con las restantes aristas del poliedro, entonces todos los vértices de éste, excepto el del triedro cortado, están a un mismo lado del plano. Esto demuestra que el plano secante limita, junto con las caras del poliedro de partida, un nuevo poliedro convexo, con una cara más, y nuevos vértices triedros para poder repetir este proceso.

Así pues, demostramos que el número mínimo de caras de un poliedro es cuatro y que existen poliedros con cualquier número de caras, siempre que sea superior.

DEF Llamaremos Sección Plana de un poliedro al polígono cuyos lados son las intersecciones de las caras del poliedro con un plano secante.

DEF Llamaremos Diagonal de un poliedro a la recta que une dos vértices del mismo no situados en la misma cara.

DEF Llamaremos Plano Diagonal de un poliedro a todo plano que pasa por tres vértices del poliedro no situados en la misma cara.

A partir de este momento, y salvo que se diga lo contrario, los poliedros serán convexos.

Como consecuencias inmediatas de la definición de poliedro convexo podemos deducir las siguientes:

PROP Los semiplanos de dos caras contiguas limitados por una arista común definen un diedro convexo, en cuyo interior está el poliedro.

PROP Cada vértice del poliedro es vértice de un ángulo poliedro convexo, siendo éste como mínimo un triedro.

Dem.

Basta tener en cuenta que como en cada arista concurren dos caras del poliedro, entonces en cada vértice concurren al menos tres aristas.

PROP Cada poliedro convexo divide al espacio en dos regiones. Una de ellas es convexa, el poliedro, y la otra no.

Dem.

La demostración se basa en que toda semirrecta con origen en un punto interior del poliedro corta a la superficie del poliedro en un único punto. Demostrémoslo:

Sea r una semirrecta que tiene origen en un punto P interior al poliedro.. Cortamos el poliedro por el plano determinado por la recta r y un punto de una arista que se cruce con ella. La intersección es un polígono convexo que contiene en su interior a P. La semirrecta r corta, por tanto, al contorno en un punto Q que pertenece a la superficie del poliedro.

No existe otro punto Q' de intersección ya que si no uno de los dos puntos separaría al otro de P, contradiciendo el hecho de que el poliedro sea convexo.

PROP La superficie poliédrica divide al espacio en dos regiones conexas, la interior y la exterior. Es decir, podemos unir cualesquiera dos puntos por medio de poligonales que no cortan a la superficie.

OBS Es fácil construir un poliedro no convexo. Si partimos de un ortoedro, obtenemos uno sin más que tomar un punto P interior al mismo y eliminar de él el poliedro formado por el punto P y una cara cualquiera del ortoedro.

2. TEOREMA DE EULER.

TEOREMA. Teorema de Euler.

Dado un poliedro convexo, la suma del número C de caras más el número V de vértices excede en dos unidades al número A de aristas.

$$C+V = A+2$$

Dem.

Vamos a ver tres demostraciones del resultado. Todas se basan en la descomposición del poliedro o en su deformación continua sobre un plano, suponiendo en ambos casos que se conserva la conexión en cada uno de los pasos intermedios.

Demostración 1)

Dibujemos sobre el poliedro una línea poligonal cerrada formada por aristas, dividiendo a la superficie en dos regiones. La poligonal tiene v_1 vértices y a_1 aristas, siendo $v_1=a_1$, y el número de regiones $r_1=2$. Entonces:

$$r_1 + v_1 = a_1 + 2$$

Tracemos sobre una de las dos regiones una línea poligonal abierta cuyos extremos estén sobre la poligonal anterior. Entonces, ahora, el número de regiones es $r_2=3$, pero el número de aristas introducidas excede en una unidad al de vértices intermedios, siendo

$$r_2 + v_2 = a_2 + 2$$

El proceso continúa hasta que cada región sea una cara, con lo que al final tenemos que:

$$C+V = A+2$$

Demostración 2)

Eliminando una de las caras del poliedro y deformando la superficie hasta extenderla sobre un plano, tenemos que las áreas de las caras y los ángulos varían, pero la red plana de vértices y aristas contendrá el mismo número de unos y otros que el poliedro inicial. El número de caras habrá disminuido en una unidad. Si probamos que en esa red plana se verifica la igualdad

$$V – A + C = 1$$

obtendremos la demostración del teorema.

Comenzaremos triangulando la red plana obtenida por extensión de la superficie poliedrica. En cualquier polígono de la red que no sea triángulo trazamos una diagonal. Esta operación incrementará A y C en uno, manteniéndose invariante la relación V – A + C. Repetiremos el proceso hasta que sólo tengamos triángulos.

Algunos de los triángulos tienen sus lados dispuestos en la frontera de la red plana (algunos sólo uno de los lados y otros dos de ellos). Eliminemos en esos triángulos todos los lados que no sean comunes con otro triángulo.

Si el triángulo sólo tiene un lado en la frontera, al suprimirlo disminuye A y C en una unidad, permaneciendo V igual. Por tanto V – A + C se conserva.

Si el triángulo tiene dos lados en la frontera, A disminuye en dos y V y C en uno, conservándose igualmente la expresión V – A + C.

Al final de todo este proceso quedará un solo triángulo, verificando V – A + C = 1. Por tanto la igualdad se verifica en todos los pasos.

Demostración 3)

Vamos a realizar la demostración por inducción en el número de aristas.

El poliedro más sencillo es un tetraedro y, eliminando una de sus caras, su red plana verifica que C=3, V=4 y A=6, por tanto V – A + C = 1.

Supongamos la expresión V – A + C = 1 cierta para A = n – 1.

Sea ahora una red plana con A=n aristas, teniendo además C caras y V vértices. Si eliminamos una arista de la red plana que sea frontera (no siendo común a ninguna otra cara) la nueva red tiene A – 1 aristas, V vértices y C – 1 caras.

Por hipótesis de inducción tenemos que V – (A – 1) + (C – 1) = 1

y de aquí obtenemos que V – A + C = 1

Por tanto el poliedro verifica que C + V = A +2

Consecuencias al teorema de Euler.

1) Como cada cara contiene tres o más aristas y cada arista está en dos caras tenemos:

$$a \geq 3\frac{c}{2} \quad \Rightarrow \quad 3c \leq 2a$$

2) En cada vértice concurren tres o más aristas, y cada una de ellas tiene dos vértices:

$$a \geq 3\frac{v}{2} \quad \Rightarrow \quad 3v \leq 2a$$

Corolario.

No existe un poliedro convexo con menos de seis aristas, cuatro caras y cuatro vértices.

Dem.

Como

$$a \geq 3\frac{c}{2} \quad \Rightarrow \quad 3c \leq 2a \qquad (1)$$

y

$$a \geq 3\frac{v}{2} \quad \Rightarrow \quad 3v \leq 2a \qquad (2)$$

sumando obtenemos

$$3v + 3c \leq 4a \qquad (3)$$

Y aplicando el teorema de Euler

$$3v + 3c = 3a + 6 \qquad (4)$$

Restando ambas expresiones

$$a \geq 6$$

De (1) y (4)

$$3a + 6 = 3c + 3v \leq 2a + 3v \quad \Rightarrow \quad a + 6 \leq 3v \qquad (5)$$

De (2) y (4)

$$3a + 6 = 3c + 3v \leq 3c + 2a \quad \Rightarrow \quad a + 6 \leq 3c \qquad (6)$$

De (2) y (5) deducimos

$$v \geq 4$$

De (1) y (6) deducimos

$$c \geq 4$$

OBS No existe ningún poliedro euleriano con siete aristas, pues debería verificarse que

$$13 \leq 3c \leq 14 \quad y \quad 13 \leq 3v \leq 14$$

lo cual es imposible.

3. SÓLIDOS PLATÓNICOS.

TEOREMA.

Existen únicamente cinco poliedros convexos cuyas caras son polígonos de igual número de lados, n, y cuyos ángulos poliédricos tienen entre sí el mismo número de aristas, r.

Dem.

Supongamos que el poliedro tiene C caras, siendo cada cara un polígono regular de n lados, concurriendo en cada vértice r aristas. Entonces:

nC = 2A ya que cada arista es común a dos caras

rV = 2A   ya que cada arista es común a dos vértices.

Teniendo en cuenta el Teorema de Euler   C + V = A + 2

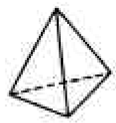
obtenemos que $$\frac{2A}{n}+\frac{2A}{r}=A+2 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{n}+\frac{1}{r}=\frac{1}{A}+\frac{1}{2} \quad (n \geq 3 \quad y \quad r \geq 3) \quad (7)$$

Simultáneamente n y r no pueden ser mayores de 3, pues la igualdad anterior no tendría sentido.

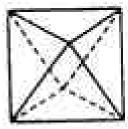
a) Para n=3 veamos que valores puede tomar r.

   La expresión (7) se convierte en $\frac{1}{r}-\frac{1}{6}=\frac{1}{A}$ y de aquí obtenemos que r=3,4,5, excluyendo r≥6

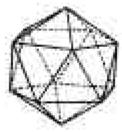
   a.1) n=3, r=3 ⇒ A=6, V=4 y C=4
   TETRAEDRO REGULAR



   a.2) n=3, r=4 ⇒ A=12, V=6 y C=8
   OCTAEDRO REGULAR



   a.3) n=3, r=5 ⇒ A=30, V=12 y C=20
   ICOSAEDRO REGULAR

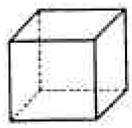


b) Para r=3 veamos que valores puede tomar n

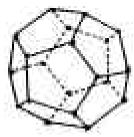
   La expresión (7) se convierte en $\frac{1}{n}-\frac{1}{6}=\frac{1}{A}$ y de aquí obtenemos que n=3,4,5 excluyendo valores iguales o superiores a 6.

   b.1) r=3, n=3 ⇒ A=6, V=4 y C=4 TETRAEDRO REGULAR

   b.2) r=3, n=4 ⇒ A=12, V=8 y C=6
   HEXAEDRO REGULAR (cubo)



   b.3) r=3, n=5 ⇒ A=30, V=20 y C=12
   DODECAEDRO REGULAR.



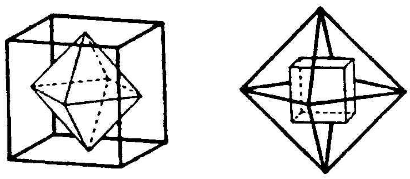
DEF Llamaremos Sólidos Platónicos a estos cinco poliedros regulares, que además son los únicos que existen.

El nombre de Sólidos Platónicos es debido a que Platón los citó en el Timeo. Y Durero (Renacimiento) los utilizó como modelo en sus estudios de perspectivas.

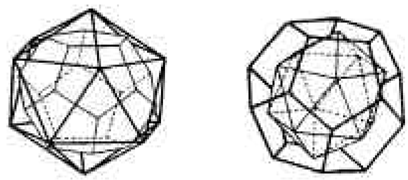
En los sólidos platónicos tenemos tres que sus caras son triángulos equiláteros iguales: tetraedro, octaedro e icosaedro. Estos poliedros forman parte de otra familia llamada deltaedros.

Entre los cinco sólidos platónicos existe una interrelación de manera que podemos situar uno dentro de otro de forma que las simetrías comunes coincidan. Aquellas parejas que verifican esta relación se llaman Conjugados. Aquellos que podemos introducir en otros son:

- El cubo en el dodecaedro y en el icosaedro.
- El cubo, octaedro, dodecaedro e icosaedro en el tetraedro.
- El cubo en el octaedro y al revés.
- El tetraedro en el cubo y en el octaedro.
- El tetraedro y el octaedro en el dodecaedro y en el icosaedro.
- El dodecaedro y el icosaedro en el cubo y en el octaedro.
- El dodecaedro en el icosaedro y al revés.



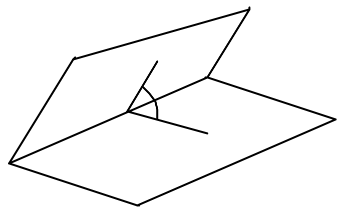
Octaedro en Cubo y al revés



Dodecaedro en Icosaedro y al revés.

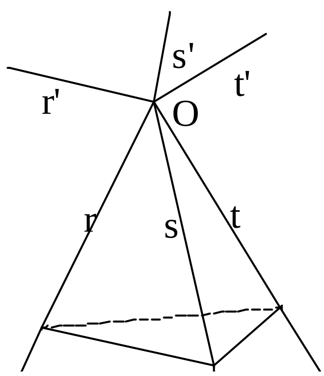
4. RELACIONES MÉTRICAS EN LOS POLIEDROS.

DEF Llamaremos Medida de un Diedro al ángulo determinado por dos semirrectas contenidas cada una en cada cara del diedro y perpendiculares al borde del mismo. Dicho ángulo también recibe el nombre de ángulo rectilíneo del diedro o sección recta.



DEF Llamaremos Ángulo Poliedro Polar de un ángulo poliedro de vértice O al ángulo determinado por el mismo vértice O y cuyas aristas son perpendiculares a las caras del ángulo poliedro dado.

Por tanto, dado un ángulo poliedro $Or_1r_2r_3...$ obtenemos como ángulo polar el ángulo $Os_1s_2s_3...$ siendo s_1 una recta perpendicular a r_2r_3, s_2 perpendicular a r_3r_4, etc.

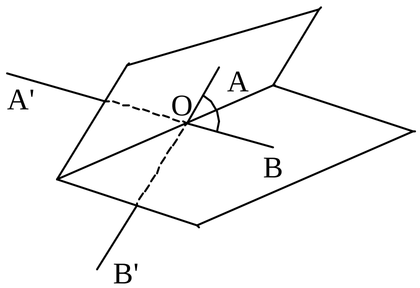


OBS El ángulo polar de $Os_1s_2s_3....$ es precisamente $Or_1r_2r_3...$

PROP Dado un ángulo diedro, si por un punto de su borde trazamos rectas perpendiculares a sus caras, obtenemos un ángulo suplementario del diedro.

Dem.

Vamos a demostrar que ∠AOB + ∠B’OA’ = 180º



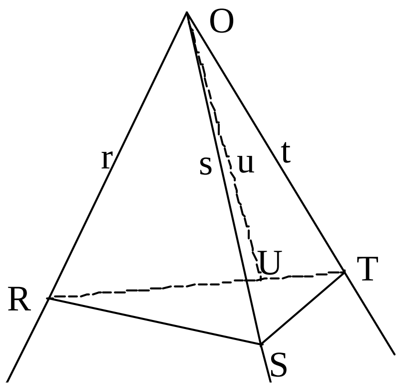
Como ∠AOA’ = 90º y ∠BOB’ = 90º

deducimos que ∠AOB + ∠B’OA’ = 180º

OBS A partir de la proposición anterior obtenemos que cualquier propiedad sobre los diedros de un ángulo poliedro se puede convertir en una propiedad sobre las caras del ángulo poliedro polar, y viceversa.

PROP Cualquier cara de un triedro es menor que la suma de las otras dos.

Dem.



Sea Orst un triedro, y sea rt la cara mayor. Consideremos sobre las aristas puntos R, S y T. Tracemos sobre la cara rt una semirrecta u tal que el ángulo rs coincida con el ángulo ru. La semirrecta u corta a RT en un punto U.

Se verifica que $\overline{TS} > \overline{RT} - \overline{RS} = \overline{RT} - \overline{RU} = \overline{TU}$.

Los triángulos OTS y OTU tienen dos lados iguales y el tercero distinto,

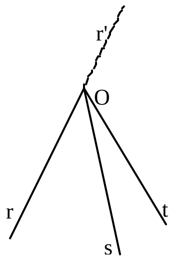
luego ts > tu = rt – ts

Entonces ts + rs > rt

Observación: Si existieran dos caras iguales mayores que la tercera, o las tres fueran iguales, la demostración anterior no serviría, pero entonces el resultado es trivial.

PROP La suma de las caras de un triedro es menor que cuatro rectos.

Dem.



Si aplicamos la propiedad anterior al triedro Or'st siendo r' la semirrecta opuesta a r obtenemos que:

$$st < sr' + tr' = (2\cdot R - rs) + (2R - rt) = rt + rs$$

$$\Rightarrow \quad rs + st + rt < 4R$$

donde R representa la medida de un ángulo recto.

PROP La suma de los diedros de un triedro está comprendida entre 2 y 6 rectos.

<u>Dem.</u>

Consideremos el triedro anterior dado por Orst. Sean α, β y γ los diedros del triedro. Si aplicamos la propiedad anterior a las caras del triedro polar obtenemos:

$$0 < (2R - \alpha) + (2R - \beta) + (2R - \gamma) < 4R$$

$$2R < \alpha + \beta + \gamma < 6R$$

PROP Cada Cara de un ángulo poliedro es menor que la suma de todas las demás.

<u>Dem.</u>

Sea el poliedro $Or_1r_2r_3...r_n$

Vamos a aplicar la propiedad "*Cualquier cara de un triedro es menor que la suma de las otras dos*" ya demostrada, a los triedros siguientes:

$Or_1r_2r_3 \Rightarrow \quad r_1r_2 < r_2r_3 + r_1r_3$
$Or_1r_3r_4 \Rightarrow \quad r_1r_3 < r_3r_4 + r_1r_4$
$Or_1r_4r_5 \Rightarrow \quad r_1r_4 < r_4r_5 + r_1r_5$
....

Sumando las desigualdades anteriores y simplificando obtenemos que:

$r_1r_2 < r_2r_3 + r_3r_4 + r_4r_5 + ... + r_nr_1$

PROP La suma de las caras de un ángulo poliedro es menor que cuatro rectos.

<u>Dem.</u>

Sea el poliedro $Or_1r_2r_3....r_n$. Elijamos una cara cualquiera, por ejemplo, la cara r_1r_2. Prolonguemos las caras contiguas r_nr_1 y r_2r_3 hasta que se corten, determinando un diedro de arista s.

El ángulo poliedro que obtenemos de eliminar las aristas r_1 y r_2 sustituyéndolas por s tiene una cara menos, pero la suma de sus caras es mayor que la suma de las caras del poliedro inicial, pues la cara r_1r_2 ha sido sustituida por r_ns y sr_3, verificándose:

$$r_ns + sr_3 > r_nr_1 + r_2r_3 > r_1r_2$$

Reiterando este proceso hasta que sólo quede un triedro, por una propiedad anterior, la suma de sus caras no será mayor que cuatro rectos, y como las caras del triedro suman más que las del poliedro inicial, se verifica que en un poliedro la suma de sus caras no supera el valor de 4 rectos.

PROP La suma de los diedros de un ángulo poliedro convexo está comprendida entre 2n-4 y 2n rectos, siendo n el número de aristas o diedros.

Dem.

Sean $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, ..., \alpha_n$ las medidas de los diedros del poliedro convexo $Or_1r_2r_3....r_n$.

Si aplicamos la propiedad anterior a las caras del ángulo poliedro polar tenemos:

$$(2R - \alpha_1) + (2R - \alpha_2) + (2R - \alpha_3) +...+ (2R - \alpha_n) < 4R$$

$$0 < 2nR - (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + ...+ \alpha_n) < 4R$$

$$(2n-4)R < \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + ...+ \alpha_n < 2nR$$

PROP La suma de los ángulos de las caras de un poliedro convexo es igual al producto del número de vértices menos dos por la medida de 4 rectos.

Dem.

Sabemos que la suma de los ángulos interiores de un polígono de n lados es 2R(n-2).

Llamemos $n_1, n_2, ..., n_C$ al número de lados de las C caras que tiene el poliedro. Aplicando el resultado conocido, tenemos:

$$S = 2R(n_1 - 2) + 2R(n_2 - 2) + 2R(n_3 - 2) +...+ 2R(n_C - 2) = 2R(n_1 + n_2 + ...+ n_C - 2C)$$

Como cada arista pertenece a dos caras adyacentes, tenemos que $n_1 + n_2 + ...+ n_C = 2A$

Sustituyendo $S = 2R(2A - 2C) = 4R(A - C)$

Y aplicando el Teorema de Euler $S = 4R(V - 2)$

5. TIPOS DE POLIEDROS.

5.1. Poliedros Regulares.

DEF Llamaremos poliedro regular convexo a todo poliedro convexo cuyas caras son polígonos regulares iguales y en cuyos vértices concurren el mismo número de aristas.

TEOREMA

Sólo existen cinco poliedros regulares.

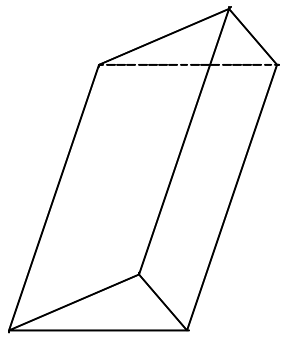
Dem.

Como son poliedros convexos han de verificar el teorema de Euler, y ya vimos que los únicos poliedros con todas las caras con el mismo número de lados son los Sólidos Platónicos.

5.2. Prisma.

DEF Dado un polígono convexo y una recta *r* no situada en el mismo plano, llamaremos Superficie Prismática al lugar geométrico de los homólogos de los puntos del polígono por traslaciones de la misma dirección que la recta *r*.

DEF Llamaremos Prisma al poliedro convexo que se obtiene de cortar una superficie prismática por dos planos paralelos entre sí y que no contengan a la recta *r*. Las caras del poliedro pertenecientes a ambos planos reciben el nombre de Bases del Prisma. El resto de caras se llaman caras laterales del Prisma. La distancia entre las dos bases es la altura del Prisma.



DEF Diremos que el Prisma es Triangular si las bases son triángulos, cuadrangular si es un cuadrado, etc.

DEF Diremos que el prisma es Recto si la recta *r* es perpendicular a las bases. En caso contrario se dice Oblicuo.

De todos los tipos de prisma que nos podemos encontrar vamos a destacar dos:

1) Paralelepípedos. Son prismas en los que las bases son paralelogramos, pudiendo ser tanto rectos como oblicuos.
2) Ortoedros. Son paralelepípedos rectos de base rectangular.

Para determinar de forma completa un ortoedro, sólo es necesario dar las longitudes de tres aristas concurrentes en un vértice. Estas tres aristas verifican que la suma de sus cuadrados es el cuadrado de la diagonal del ortoedro.

Podemos destacar que el poliedro regular determinado por seis caras cuadradas llamado hexaedro regular (ya visto en la sección de Sólidos Platónicos) es un ortoedro con todas sus aristas iguales.

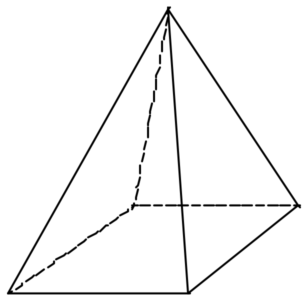
5.3. Pirámides.

DEF Llamaremos Pirámide al poliedro convexo que se obtiene a partir de un ángulo poliedro al ser cortado por un plano que no contiene al vértice.

DEF Llamaremos base de la pirámide a la única cara que no contiene al vértice del ángulo poliedro. Dicho vértice recibe el nombre de vértice de la pirámide.

DEF Llamaremos aristas laterales a las aristas de la pirámide que contienen al vértice, y las caras que determinan estas aristas son las caras laterales de la pirámide.

DEF La distancia del vértice de la pirámide a la base de la misma (su cara opuesta) es la Altura de la pirámide.



DEF Diremos que la pirámide es regular cuando la base es un polígono regular de n lados y el vértice V está situado en la perpendicular a la base, trazada por su centro. Dicha recta recibe el nombre de eje de la pirámide regular y las caras laterales son triángulos isósceles iguales.

El sólido platónico llamado Tetraedro Regular es un caso particular de pirámide, donde la base (y cualquier otra cara) es un polígono regular de tres lados (triángulo isósceles)

DEF Llamaremos Tronco de Pirámide al poliedro convexo que se obtiene al cortar una pirámide por un plano paralelo a la base que no contenga al vértice. Dicho poliedro convexo contiene a la base de la pirámide pero no su vértice.

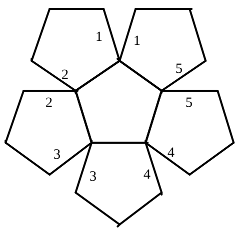
Las dos bases del tronco de pirámide son polígonos semejantes, siendo su razón de semejanza la misma que existe entre la altura de la pirámide y la del tronco de pirámide.

5.4. Construcción de algunos Poliedros Regulares.

En los dos apartados anteriores hemos visto como construir el hexaedro y el tetraedro regular a partir de un prisma y de una pirámide, respectivamente. Ahora vamos a ver métodos para construir los otros tres poliedros regulares convexos que quedan de los sólidos platónicos. En la construcción de los dos últimos nos apoyaremos en la propiedad ya descrita de los sólidos platónicos de poder introducir uno en otro siempre que las simetrías comunes coincidan.

a) Dodecaedro.

Dado un pentágono regular, construimos por simetría otros cinco pentágonos iguales, coincidiendo cada uno de ellos con el inicial en una arista. En un segundo paso, comenzamos a plegar la figura hasta unir las aristas con el mismo número. Obtenemos un casquete formado por seis pentágonos que nos determinan cinco triedros.



Los planos bisectrices de todos los diedros de los triedros se cortan en un punto O. Para obtener el dodecaedro sólo nos queda obtener el simétrico de la figura respecto del punto O.

b) Icosaedro.

Para obtener el icosaedro, nos apoyamos en el dodecaedro construido en el apartado anterior. Para cada tres caras concurrentes en un vértice, unimos sus centros, obteniendo triángulos equiláteros. Como el dodecaedro tiene 20 vértices, obtendremos 20 triángulos equiláteros, concurriendo cinco de ellos en cada vértice. Tendremos entonces 12 vértices y por tanto 30 aristas.

c) Octaedro.

Para obtener el octaedro, vamos a repetir el proceso anterior pero partiendo del hexaedro regular (cubo). Al unir los centros de las tres caras concurrentes por cada vértice, obtenemos 8 triángulos equiláteros (uno por cada vértice). El poliedro obtenido de 8 caras tendrá 6 vértices (uno por cada cara del cubo) y por tanto 12 aristas.

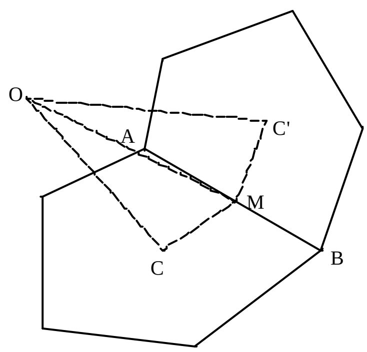
5.5. Propiedades de los Poliedros Regulares.

TEOREMA

Dado un poliedro regular, existe un punto O que equidista de las caras, vértices y aristas del poliedro.

Dem.

Sean dos caras contiguas del poliedro regular, con AB la arista común. Consideremos el plano perpendicular en el punto medio de la arista común, M. El plano considerado contiene las mediatrices de AB en cada cara y, por tanto, los centros C y C' de cada una de ellas. También contiene las perpendiculares a cada cara por los centros de las mismas, que se cortarán en un punto O. Si trazamos el segmento OM, acabamos de dibujar dos triángulos rectángulos OCM y OC'M, los cuales son iguales ya que MC=MC' y OM=OM. Entonces OC=OC' y $\angle$OMC = $\angle$OMC'.



Por tanto, dado uno cualquiera de estos dos ángulos, tendrá como medida la mitad del diedro determinado por ambas caras, por ser CMC' su sección normal.

Al ser este diedro constante, cualquier par de caras contiguas considerado, los triángulos rectángulos que formaríamos al tomar otro par serían iguales a éstos, por tener también constante un cateto. Y además OM es la distancia de O a una arista y OC es la distancia de O a una cara.

Así pues, obtenemos que el punto O equidista de todas las aristas y equidista de todas las caras, y por tanto, equidistará de todos los vértices.

DEF El punto O obtenido el en teorema anterior recibe el nombre de Centro del poliedro regular.

Otras propiedades que podemos ver de los poliedros es calcular el área del poliedro y su volumen.

DEF El área de un poliedro regular es igual al área de una de sus caras por el número de caras que tenga.

Para calcular el volumen de un poliedro tendremos que descomponerlo en pirámides, sin más que trazar planos por cada una de las aristas que pasen por el centro O. El poliedro quedará descompuesto en tantas pirámides como caras tenga.

Entonces, para calcular el volumen sólo tenemos que multiplicar el número de caras por el volumen de una de estas pirámides.

6. POLIEDROS ARQUIMEDIANOS.

DEF Llamaremos Poliedros Arquimedianos o Semirregulares a los poliedros convexos formados por caras regulares, no necesariamente del mismo número de lados, y ángulos poliedros iguales o simétricos.

Las caras sólo pueden ser de dos o tres tipos diferentes, ya que si hubiese más, no verificarían la propiedad de sumar cuatro rectos. Análogamente, los ángulos poliedros estarán formados por 3, 4 ó 5 caras a lo sumo.

El nombre de este tipo de poliedros se lo debemos a Arquímedes, que fur el promero que los estudió, dando a conocer el número de caras y de aristas que concurren en cada vértice.

Mucho tiempo después, fue Kepler quien dio nombre a estos poliedros, probando que había 13. Pero si tenemos en cuenta las limitaciones para el número de caras y aristas y que además deben verificar el Teorema de Euler, realmente son 15 los poliedros.

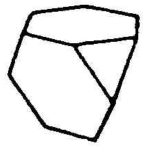
6.1. Formas de Clasificación.

Tenemos dos formas de clasificar los trece poliedros arquimedianos, según tengamos en cuenta los ángulos poliedros o el sólido platónico que lo genera a partir del truncamiento de sus vértices. Independientemente de ambas clasificaciones, a cada familia de poliedros se le asigna un número romano que varía del I al XIII.

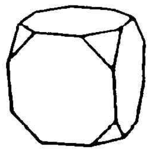
6.1.1. Según los ángulos poliedros.

La clasificación se realiza en función de las caras que componen los ángulos poliedros, teniendo:

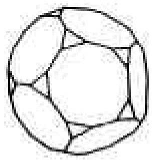
- I. Un triángulo y dos exágonos. Es el Troncotetraedro.



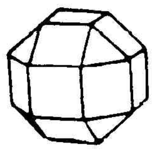
- II. Un triángulo y dos octógonos. Es el Troncocubo.



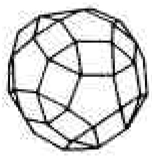
- VIII. Un triángulo y dos decágonos. Es el Troncododecaedro.



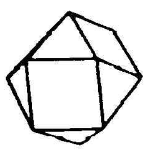
- V. Un triángulo y tres cuadrados. Es el Rombi-cubooctaedro.



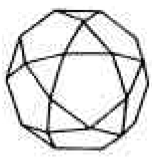
- XI. Un triángulo, dos cuadrados y un pentágono. Es el Robicosododecaedro.



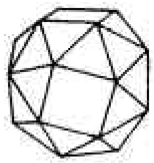
- III. Dos triángulos y dos cuadrados. Es el Cuboctaedro.



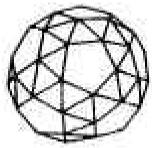
- IX. Dos triángulos y dos pentágonos. Es el Icosi-dodecaedro.



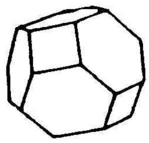
- VII. Cuatro triángulos y un cuadrado. Es el Cubo Romo.



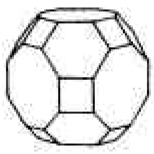
- XIII. Cuatro triángulos y un pentágono. Es el Dodecaedro Romo.



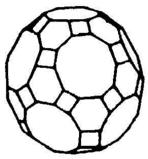
- IV. Un cuadrado y dos exágonos. Es el Troncoctaedro.



- XII. Un cuadrado, un exágono y un decágono. Es el Tronco-cuboctaedro.



- VI. Un cuadrado, un exágono y un decágono. Es el Tronco-icosidodecaedro.



- X. Un pentágono y dos exágonos. Es el Troncoicosaedro.

6.1.2. Truncamiento de Sólidos Platónicos.

Entendemos por truncamiento la operación de cortar las esquinas a los poliedros regulares de forma que obtengamos poliedros con todas las caras regulares. Se consigue si los cortes en torno a los vértices son perpendiculares al eje de rotación que pasa por los mismos. Además, todos los cortes han de ser equidistantes a los vértices.

Podemos distinguir dos tipos de truncamiento:

a) Tipo I.

El corte lo realizamos por planos que pasan por los puntos medios de las aristas que concurren en cada vértice.

b) Tipo II.

El corte lo realizamos a una distancia determinada para que el polígono regular resultante tenga el doble número de lados que el inicial.

Bibliografía Recomendada.

Curso de Geometría, Vol I. Aut. Puig Adam.

¿Qué es la Matemática? Aut. Courant-Robins. Ed. Aguilar.

Enciclopedia Salvat Universal.

Exercices de GEOMETRIE, Cours de Mathèmatiques Élémentaires. Autor: F.G.M. Edición de 1912 por MALSON A MAME ET FILS. PARIS

Exercices de TRIGONOMETRIE. Autor: F.G.M. Edición de 1915 por MALSON A MAME ET FILS. PARIS.