TEMAS DE MATEMÁTICAS
(Oposiciones de Secundaria)

TEMA 44

SEMEJANZAS Y MOVIMIENTOS EN EL ESPACIO

TEMA 44

SEMEJANZAS Y MOVIMIENTOS EN EL ESPACIO

1. GENERALIDADES.

Suponemos construido el espacio vectorial de los vectores libre del espacio V_3.

DEF Llamaremos espacio afín ordinario a una terna formada por un conjunto E_3 (el conjunto de puntos del espacio), el espacio vectorial V_3 y una aplicación:

$$\boldsymbol{j}: \begin{array}{c} E_3 \times E_3 \to V \\ (A,B) \to n = AB \end{array}$$ (el vector libre de representante de AB)

tal que se verifique: 1) $\boldsymbol{j}(A,B) + \boldsymbol{j}(B,C) = \boldsymbol{j}(A,C)$, esto es AC+AB=AC

$\forall$ A,B,C$\in$ E_3

2) Fijado A, la aplicación $\begin{array}{c} \boldsymbol{j}_A : E_3 \to V_3 \\ B \to AB = n \end{array}$ es biyectiva.

DEF Si sobre V_3 hay definido un producto escalar, entonces V_3 se dice que es el espacio vectorial euclídeo de los vectores libres del espacio E_3 (por abuso del lenguaje) el espacio afín euclídeo ordinario.

Dicho producto escalar permite introducir la distancia:

$$d(A,B) = \|AB\| = \sqrt{AB \cdot AB}$$

y los ángulos, a través de: $\cos(AB, AC) = \dfrac{AB \cdot AC}{|AB \cdot |AC\|}$

2. MOVIMIENTOS DE E_3.

DEF Se llama movimiento a toda aplicación biyectiva $f: E_3 \to E_3$ que conserve la distancia, esto es si A’=f(A), B’=f(B) se verifica:

d(A,B)=d(A´,B´)=d(f(A),f(B)).

Con esta definición se verifica que

PROP Los movimientos transforman puntos alineados en puntos alineados y en el mismo orden.

<u>Dem</u>

En efecto, dados A,B,C puntos alineados, uno de ellos pertenece al suplemento formado por los otros dos (p. ej. B entre A y C) luego

$$d(A,B)+d(B,C)=d(A,C)$$

También será: $$d(A',B')+d(B',C')=d(A',C')$$

luego A´,B´,C´ alineados y B´ entre A´ y C´.

COROLARIO

Con ello resulta obvio que los movimientos transforman rectas en rectas y también planos en planos (puesto que un plano esta determinado por 3 puntos no alineados)

PROP Los movimientos conservan los ángulos.

<u>Dem</u>

Si el ángulo $\boldsymbol{a}$ esta determinado por 2 semirrectas OA y OB los puntos O,A,B formaran un triángulo (si no es trivial) y sus transformados O, A´, B´ también.

En el primero se tiene: $d(A,B)^2 = d(OA)^2 + d(OB)^2 \rightarrow 2d(OA)d(OB)\cos \boldsymbol{a}$

y en el segmento: $d(A',B')^2 = d(O'A')^2 + d(O'B')^2 \rightarrow 2d(O'A')d(O'B')\cos \boldsymbol{a}'$

y por la igualdad de distancias $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}'$

<u>3. APLICACIÓN LINEAL ASOCIADA A UN MOVIMIENTO.</u>

DEF Dado un movimiento f, definiremos:

$$\begin{array}{l} \boldsymbol{j} : V_3 \rightarrow V_3 \\ |AB| \rightarrow |A'B'| \end{array}$$ siendo A´=f(A) B´=f(B).

PROP La aplicación $\boldsymbol{j}$ esta bien definida, pues si AB$\cap$CD también es A´B´$\cap$C´D´

<u>Dem</u>.

Si A,B,C,D están alineados, sus transformados también y en el mismo orden y como se conservan la distancia

$$AB \cap CD \Rightarrow A'B' \cap C'D'$$

Si AB y CD están situados en líneas paralelas, determinarán un paralelogramo, y sus transformadas verifican (al conservarse distancias y ángulos por f)

d(A´,B´)=d(C´,D´), d(A´,D´)=d(B´,C´), d (A´,C´)d=(B´,D´), luego A´,B´,C´,D´

determinan también un paralelogramo A´B´ $\approx$ C´D´

La aplicación $\boldsymbol{j}$ es lineal, pues eligiendo representantes adecuadas:

$$\boldsymbol{j}(AB + BC) = \boldsymbol{j}(AC) = A'C' = A'B' + B'C' = \boldsymbol{j}(AB) + \boldsymbol{j}(BC)$$

luego $\boldsymbol{j}(u+v) = \boldsymbol{j}(u) + \boldsymbol{j}(v) \qquad \forall u, v \in V_3$

$$\boldsymbol{j}(\boldsymbol{a} \cdot AB) = \boldsymbol{a} \cdot A'B' = \boldsymbol{a}\boldsymbol{j}(AB) \qquad \forall A, B \in E_3, \forall \boldsymbol{a} \in R$$

luego $\boldsymbol{j}(\boldsymbol{a}u) = \boldsymbol{a}\boldsymbol{j}(u) \qquad \forall \boldsymbol{a} \in R, \forall u \in V_3$

la aplicación $\boldsymbol{j}$ es biyectiva (por tanto un endomorfismo biyectivo =automorfismo de V_3)

<u>Dem.</u>

Pues por ser endomorfismo, basta probar que $Ker\,\boldsymbol{j} = \{o\}$

entonces si $\boldsymbol{j}(AB) = A'B' = O \Rightarrow d(A', B') = 0 = d(A, B) \Rightarrow A = B$ y por tanto AB=O

4. CARACTERIZACION DEL MOVIMIENTO

Si $\{O, u_1, u_2, u_3\}$ es una referencia ortonormal de E_3 se tiene que

$\forall x \in E_3$, X´=f(x) $\in E_3$ y OX´=OO´+O´X´=OO´+ $\boldsymbol{j}(OX)$.

Como los componentes de OX´ en la referencia son las coordenadas de X'=f(x)

f(x)=f(O)+ $\boldsymbol{j}$ (OX)

Si llamamos $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$, $X' = \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{pmatrix}$, $f(o) = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ y $M = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$

La matriz de $\boldsymbol{j}$ en la base de la referencia:

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

Ecuación del movimiento en la referencia considerada.

Hasta ahora nada distingue estas ecuaciones de las ecuaciones de una transformación afín a cualquiera, pero $\boldsymbol{j}$ tiene una particularidad: conserva el producto escalar, pues:

$$\boldsymbol{j}(u)\cdot\boldsymbol{j}(v)=\frac{\|\boldsymbol{j}(u)+\boldsymbol{j}(v)\|^2-\|\boldsymbol{j}(u)-\boldsymbol{j}(v)\|^2}{4}=\frac{\|\boldsymbol{j}(u+v)\|^2-\|\boldsymbol{j}(u-v)\|^2}{4}=$$

$$=\frac{\|u+v\|^2-\|u-v\|^2}{4}=u\cdot v \qquad \forall u,v\in V_3$$

Entonces: $\boldsymbol{j}(u)=M\cdot u$ (notación matricial)

$\boldsymbol{j}(v)=M\cdot v$ (natación matricial)

y como el producto escalar de dos vectores (en base ortonormal) (u_1,u_2,u_3), (v_1,v_2,v_3) es:

$$(u_1,u_2,u_3)\begin{pmatrix}v_1\\v_2\\v_3\end{pmatrix}=u_1v_1+u_2v_2+u_3v_3$$

se tiene: $(Mu)(Mv)^T=(u\cdot v^T)=M(u\cdot v^T)M^T\Rightarrow M\cdot M^T=I$

y también $M^T\cdot M=I$, luego M es un matriz ortogonal.

De aquí: $\det M\cdot\det M^T=1\Rightarrow\det M=\pm 1$

Aquellos movimientos en los que la aplicación lineal asociada tiene una matriz con determinante igual a 1, la llamaremos movimientos directos y los movimientos que lo tienen igual a –1, movimientos inversos o pseudomovimientos.

Vamos a estudiar los movimientos, clasificándolos en primer lugar en dos grupos: los que tienen algún punto doble y los que no.

5. MOVIMIENTOS CON ALGÚN PUNTO DOBLE.

Tomando una referencia ortonormal R= $\{O,u_1,u_2,u_3\}$ las ecuaciones de movimiento quedarían, en dicha referencia (al tener al menos un punto doble, tomamos como tal al O=f(o)

$$\begin{pmatrix}x_1'\\x_2'\\x_3'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix},$$

con lo que es totalmente análogo en este caso estudiar $\boldsymbol{j}$ que el movimiento f.

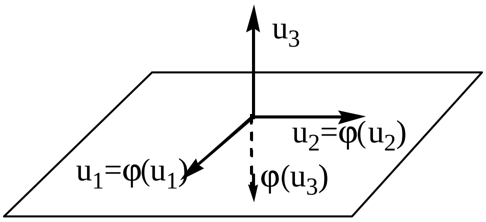
Estudiaremos ahora los vectores invariantes por j :

Un vector $\vec{u}$ invariante por j , cumplirá: $j(\vec{u})=\vec{u}=I\vec{u}$

luego (j -I)($\vec{u}$)= $\vec{O}$, y como j -I es también una aplicación lineal estudiar los vectores invariantes por j equivale a hallar Ker(j -I). Pueden suceder 3 casos:

a) dim ker(j -I)=3, y en este caso todos los vectores serian invariantes, luego todos los puntos serian dobles. El movimientos es la identidad.

b) dim Ker(j -I)=2. en este caso hay un subespecie V (plano vectorial) de vectores invariantes, luego el plano $\boldsymbol{p}$ determinado por A y V es todo de puntos dobles.



Elijamos ahora una referencia mejor: $\{A, u_1, u_2, u_3\}$ donde u_1, u_2 son una base ortonormal de V y u_3 un vector u_3 normal al plano, de modulo 1 y bien orientado.

Entonces
$$j(u_1)=u_1$$
$$j(u_2)=u_2$$
$$j(u_3)=\pm u_3$$

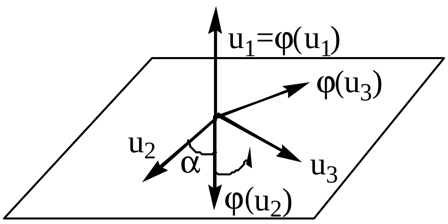
(recuerda que se conserva el producto escalar) como no puede ser $j(u_3)=u_3$ entonces $j(u_3)=-u_3$.

La matriz de f seria

$$\begin{pmatrix} x_1{\acute{}} \\ x_2{\acute{}} \\ x_3{\acute{}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix},$$

y el movimiento se llama simetría especular, o simetría respecto al plano A+V= $\boldsymbol{p}$. Obviamente es un movimiento inverso pues detM=-1 (además invierte el sentido de la referencia)

c) dim ker(j -I)=1. En este caso hay un subespacio V (resta vectorial de vectores invariantes), y la recta A+V=r es toda de puntos dobles.



Tomemos una referencia $\{A, u_1, u_2, u_3\}$ donde u_1 es un vector director normal de la recta V, u_2, u_3 dos vectores que sean ortogonales entre sí y ortogonales u_1 de módulo A.

Cualquier combinación lineal de u_2 y u_3 es ortogonal a u_1, luego también serán $j(u_2)$ y $j(u_3)$ ortogonales a $u_1 = j(u_1)$.

$$\left.\begin{array}{l}\varphi(u_2)=au_2+bu_3\\ \varphi(u_3)=cu_2+du_3\end{array}\right\} \qquad \begin{array}{c}\|\varphi(u_2)\|^2=a^2+b^2=\|\varphi(u_3)\|^2=c^2+d^2=1\\ \varphi(u_2)\varphi(u_3)=ac+bd=0\end{array}$$

de aquí $\quad \begin{array}{l}\varphi(u_2)=au_2+bu_3\\ \varphi(u_3)=-bu_2+au_3\end{array} \qquad a^2+b^2=1$

tomando $0\le\theta<2\pi$ tal que cosθ=a seria senθ=b

y la matriz de f es
$$\begin{pmatrix}x_1'\\ x_2'\\ x_3'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\ 0&\cos\theta&sen\theta\\ 0&-sen\theta&\cos\theta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}$$

el movimientos es un giro de eje r y amplitud θ. Se trata de un movimiento directo.

d) dim Ker(φ -I)=0. En este caso hay vectores invariantes. Sea X$\in V_3$ no nulo y consideremos la simetría S_π respecto al plano bisectriz del ángulo determinado por X y φ (X). El movimiento S_π o φ (X) (hemos identificado el movimiento con su aplicación lineal asociada). Verifica S_π o φ (X)=X, luego dim ker(S_π o φ -I)≥ 1

si fuese la dimensión igual a 2, entonces S_π o $\varphi = S_{\pi'}$ y de aquí:

$$S_\pi \text{ o } S_\pi \text{ o } \varphi = S_\pi \text{ o } S_{\pi'} \Rightarrow \varphi = S_\pi \circ S_{\pi'}.$$

y φ seria un giro, contradicción pues φ no tiene puntos dobles. Luego:

$$\text{dim Ker}((S_\pi \text{ o } \varphi \text{ -I})=1$$

Entonces S_π o φ es un giro que se puede escribir como comparación de dos simetrías respecto a planos π',π''. De donde $\varphi = S_\pi \circ S_{\pi''} \circ S_{\pi'}$ (todos estos movimientos son inversos).

De todos estos movimientos el más interesante es la simetría central de centro A. En este movimientos, φ verifica:

$\varphi(u_1)=-u_1$
$\varphi(u_2)=-u_2$
$\varphi(u_3)=-u_3$

y las ecuaciones
$$\begin{pmatrix}x_1'\\ x_2'\\ x_3'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&0&0\\ 0&-1&0\\ 0&0&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}$$

Es evidentemente un movimiento inverso.

6. MOVIMIENTOS SIN PUNTOS DOBLES

Estudiaremos en primer lugar un movimiento especial.

6.1 La traslación

DEF Se llama traslación a todo movimiento en el que la aplicación lineal asociada es la identidad.

Sus ecuaciones serian, en una referencia ortonormal $\{O, u_1, u_2, u_3\}$

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

OBS Obviamente la traslación queda definida cuando se conoce la imagen de un punto, por ejemplo O, pues entonces

$$\text{OX}'=\text{OO}'+\text{O}'\text{X}'=\text{OO}'+\varphi\,(\text{OX})=\text{OO}'+\text{OX} \Rightarrow \text{OX}'-\text{OX}=\text{XX}'=\text{OO}'$$

DEF Entonces también puede definirse la traslación de vector $\vec{u}$ como el movimiento que transforma x en x´ siendo $\text{xx}'=\vec{u}$.

PROP Todo movimiento f puede considerarse como una composición de un movimiento f´ con un punto doble O seguido de una traslación de vector OO´ (O´=f(O)).

<u>Dem.</u>

Consideramos f´ como el movimiento con un punto fijo O, y aplicación lineal asociada l aplicación φ asociada a f.

Entonces en una referencia A= $\{O, u_1, u_2, u_3\}$ las ecuaciones de f´ son:

$$\begin{pmatrix} x_1'' \\ x_2'' \\ x_3'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

la traslación $t_{OO'}$ tiene R= $\{O, u_1, u_2, u_3\}$ las ecuaciones

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_1'' \\ x_2'' \\ x_3'' \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = f(O) \text{ y evidentemente f}= t_{OO'} \circ f'.$$

Esto nos simplifica la tarea, pues basta estudiar las composiciones de los movimientos anteriores con traslaciones para tener estudiadas todos los movimientos.

6.2 Composición de simetría especular y traslación.

Probaremos que, en este caso, el movimiento se puede reducir a la composición de una simetría respecto a un plano π y una traslación de vector u paralelo a la dirección de π.

El vector de la traslación $\vec{u}$ se puede descomponer de forma única como $\vec{u}=\vec{u}'+\vec{u}''$ donde $\vec{u}'$ es paralelo a la dirección de π y $\vec{u}''$ paralelo a la dirección perpendicular a π.

Así la traslación de vector $\vec{u}''/2$ transforma la simetría especular S_π en una simetría $S_{\pi'}$ (π' plano paralelo a π resultante de la traslación). Seguidamente la traslación de vector $\vec{u}'$ completa el movimiento. $t_u \circ Sp = t_{u'} \circ Sp'$ es un movimiento inverso y además la composición es conmutativa.

6.3. Composición de giro y traslación

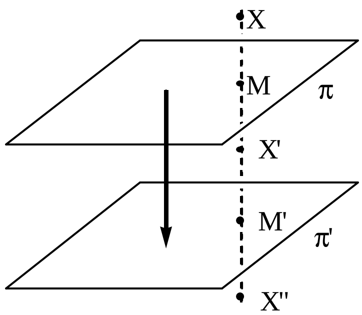
Probaremos que, en este caso, el movimiento se reduce a un giro de cierto eje, que determinaremos, y traslación de vector paralelo a la dirección del eje de giro.

El vector $\vec{u}$ de la traslación se descompone igualmente como $\vec{u}_1+\vec{u}''$ ($\vec{u}''$ de la dirección de e, $\vec{u}_1$ de la dirección perpendicular.) la traslación $t_{u_1/2}$ transforma el giro de eje e, en otro giro de eje e´ (paralelo de e) y la misma amplitud y seguidamente la traslación de vector $\vec{u}''$ completa el movimiento $t_u \circ G(e,a) = t_{u''} \circ G(e',a)$.

Es un movimiento directo, y recibe el nombre especial de movimiento helicoidal. Igualmente la composición es conmutativa.

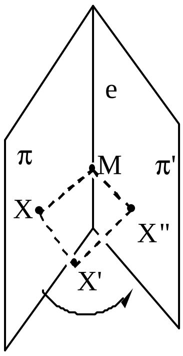
6.4 Composición de simetrías especulares.

A) De planos paralelos.



Si llamamos M a la proyección de X sobre π y M´´ la proyección de X´ sobre π'', se tiene que XX´´=2MM´, luego la comparación de $S_{p'} \circ S_M$ es una traslación de vector 2MM´.

B) De planos secantes.



En este caso los planos π y π´ se cortaran en una recta e, y determinaran un ángulo diedro g .

Si por x y x^n trazamos perpendiculares al eje e, se cortaran en un punto M, ang(MX,MX´´)=2g, siendo su orientación la determinada por la composición (de π a π´).

$$S_{p\,'} \circ S_M = G(\ell, 2g)\,.$$

Reciproco.

Recíprocamente, toda traslación de vector $\vec{u}$ puede escribirse como una composición de simetrías respecto a planos paralelos (los planos serán perpendiculares a la dirección $\vec{u}$, y distaran entre si $\frac{\|\vec{u}\|}{2}$).

Igualmente, todo giro de eje e y amplitud a puede escribirse como una composición de simetrías respecto a planos secantes en e. En este caso uno de los planos puede fijarse a voluntad. El otro, formara con el anterior un diedro de ángulo $\frac{a}{2}$, en el sentido de la composición.

OBS SIMETRÍAS AXIALES. Son giros de ángulo π, y por lo anterior, basta determinarlas como composición de simetrías respecto a planos perpendiculares.

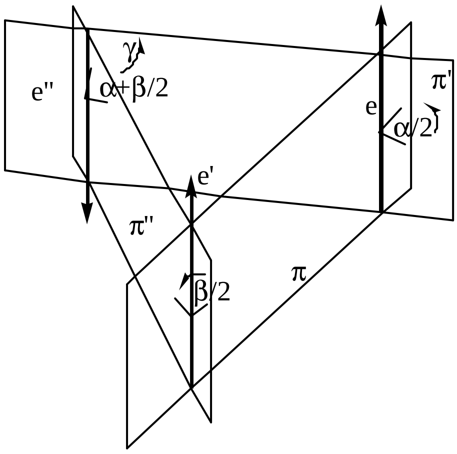
6.5 Composición de giros.

A) Del mismo eje.

En este caso es trivial que $G(\ell, b) \circ G(\ell, a) = G(\ell, a + b)$

B) De ejes paralelos.

Si $G(\ell, a)$ y $G(\ell', b)$ son los giros en cuestión, como podemos elegir uno de los planos que por composición determinan los giros, tomaremos el plano π que contiene a ℓ y $\ell\,'$.



Hallamos ahora planos π´ y π´´ tales que:

$$G(\ell,\alpha) = S_{\pi'} \circ S_{\pi} \qquad G(\ell',\beta) = S_{\pi} \circ S_{\pi''}$$

$$G(\ell,\alpha) \circ G(\ell',\beta) = S_{\pi'} \circ S_{\pi} \circ S_{\pi} \circ S_{\pi''} =$$

$$= S_{\pi'} \circ S_{\pi''} = \begin{cases} *G(\ell'',2\gamma) \\ \text{si } \pi' \text{ y } \pi'' \text{ se cortan en e''} \\ **\text{Traslación si } \pi' \text{ y } \pi'' \\ \text{son paralelos} \end{cases}$$

$G(\ell'',2\gamma)$ si π´ y π´´ se cortan en ℓ''. $\quad \gamma = \pi - \dfrac{\alpha+\beta}{2} \Rightarrow 2\gamma = -(\alpha+\beta)$

(**) Esto ocurrirá cuando $\alpha + \beta = 2k\pi$ siendo k entero.

B) De ejes que se cortan.

En este caso la composición es un movimiento directo trivialmente con un punto doble, el de corte, y sabemos que si esto es así debe haber una recta de puntos dobles. El movimientos resultante (de enorme complejidad) es un giro, como eje es una recta que pasa por el punto de corte.

C) De ejes que se cruzan.

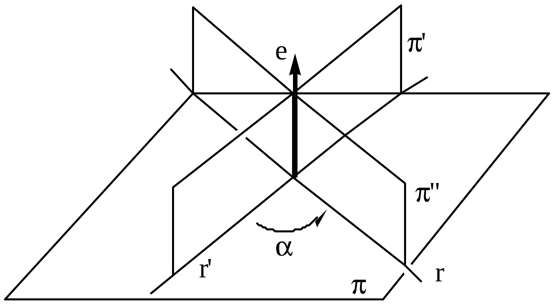
En este caso trazando la perpendicular PP´, y aplicar una traslación de vector P´P con lo que el giro de eje ℓ y ángulo α se transformara en otro giro de eje ℓ' (paralelo a ℓ) y el mismo ángulo. La composición de los giros de ejes ℓ'' y ℓ es otro giro. El movimiento resultante es composición de un giro y una traslación. Es un movimiento helicoidal.

Es fácil sin embargo determinar la composición de las simetrías asociadas (giros de 180º) cuando los ejes se cortan o se cruzan.

6.6 Composición de simetrías axiales.

A) De ejes que se cortan.

En este caso, si las simetrías axiales son de eje r y r´ y se cortan podemos determinar



$$S_{r'} = S_p \circ S_{p'}$$
$$S_r = S_{p''} \circ S_p$$

$$S_r \circ S_{r'} = S_{p''} \circ S_p \circ S_p \circ S_{p'} = \dots$$

$$\dots = S_{p''} \circ S_{p'} = G(\ell, 2\boldsymbol{a})$$

ℓ es la perpendicular común a las dos rectas por el punto de corte, $\boldsymbol{a}$ ángulo de r´ y r. (en ese orden).

B) De ejes que se cruzan.

Basta trazar planos π y π´ que contengan respectivamente a r y r´ y paralelos. π y π´ son perpendiculares a π´´ y π´´´ que contienen respectivamente a r´ y r. Luego el movimiento es composición de una traslación y un giro. (movimiento helicoidal).
En efecto

$$S_{r'} \circ S_r = (S_{p''} \circ S_p) \circ (S_{p'} \circ S_{p'''}) = S_{p''} \circ (S_p \circ S_{p'}) \circ S_{p'''} =$$

$$\dots = S_{p''} \circ T_{2\ell} \circ S_{p'''} = T_{2\ell} \circ S_{p''} S_{p'''} = T_{2\ell} \circ G(\ell, 2a)$$

6.7. Resumen.

De todo lo dicho resulta que:

Las simetrías a un plano son las transformaciones fundamentales puesto que cualquier movimiento pueda reducirse a una composición de ellas.

Resultaría el siguiente cuadro resumen:

	Movimientos directos	Movimientos inversos
No hay puntos fijos	Traslación o movimiento helicoidal (gira + traslación)	Simetría + traslación (composición de 3 simetrías especulares)
Un punto fijo	No hay	Composición de tres simetrías especulares (los planos se cortan en un punto)
Una recta de puntos fijos	Giro	No hay
Un plano de puntos fijos	No hay	Simetría respecto a un plano o sin especular
Todo el espacio de puntos fijos	Identidad	No hay

7. HOMOTECIAS.

DEF Se llama homotecia de centro C y razón k a la aplicación

$$H(c,k): \begin{matrix} E_B \to E_B \\ A \to A' \end{matrix} \quad \text{tal que } CA' = k \cdot CA.$$

Si k>0 la homotecia se llama directa, y en caso contrario inversa. Obviamente no son movimientos salvo si $|k| = 1$, pero trivialmente transforman rectas de la misma dirección y plano en plano de la misma dirección. Luego conserva los ángulos.

Ecuaciones

En la referencia ortonormal $\{O, u_1, u_2, u_3\}$, sea $X(x_1, x_2, x_3)$ $X(x_1', x_2', x_3')$ su transformada por la homotecia.

Entonces $CX' = k \cdot CX \Rightarrow OX - OC = k(OX - OC) \Rightarrow OX' = (1-k)OC + k \cdot OX$. luego si $C(c_1, c_2, c_3)$ queda:

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1(1-k) \\ c_2(1-k) \\ c_3(1-k) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} kx_1 \\ kx_2 \\ kx_3 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1' \\ c_2' \\ c_3' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} k & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & 16 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

Producto de homotecias.

a) Del mismo centro.

Sean H(C, k_1), H(C, k_2) dos homotecias del mismo centro:

$$x \xrightarrow{H(C,k_1)} x' \xrightarrow{H(C,k_2)} x'' \qquad CX' = k_1 \cdot CX, CX'' = k_2 \cdot CX' \Rightarrow CX'' = k_1 k_2 \cdot CX$$

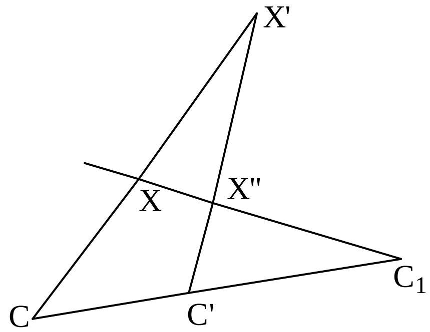
luego H(C, k_2) $\circ$ H(C, k_1) en otra homotecia de centro C y razón $k_1 \cdot k_2$.

b) De distinto centro.

Probaremos que el producto de dos homotecias de distinto centro es otra homotecia cuyo centro esta alineado con los centros de las homotecias dadas, y su razón el producto de las razones de ambas, o bien una traslación de vector paralelo a la línea de centros.

Sea X´ el transformado de X por H(C, k_1) $\Leftrightarrow CX' = k_1 \cdot CX$ y X´´ el transformado de X´ por H(C´, k_2) $\Leftrightarrow C'X'' = k_2 \cdot C'X'$.

Se tiene:



$$C_1X'' = C_1C' + C'X'' = C_1C + k_2 \cdot C'X' = C_1C' + k_2(C'C + CX') = C_1C' + k_2C'C + k_2k_1CX =$$

$$C_1C' + k_2C'C + k_2k_1(CC_1 + C_1X) \;\Rightarrow\; C_1X'' = (C_1C' + k_2CC' + k_2k_1CC_1) + k_2k_1 \cdot C_1X \quad (*)$$

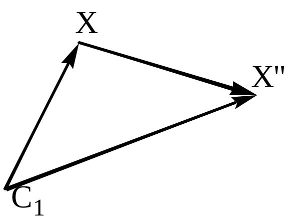
Como C_1X'' y C_1X tiene la misma dirección, y la expresión entre parámetros la dirección de CC´, en el caso que sean independientes será $C_1C' + k_2C'C + k_2k_1CC_1 = O$ y $C_1X'' = k_2k_1C_1X$ (homotecia de centro C_1 y razón k_1k_2).

C_1 esta relacionado con C y C´ por la igualdad:

$$C_1C' = \frac{k_2(1-k_1)CC'}{1-k_1k_2} \text{ pues } C_1C' + k_2C'C + k_1k_2(CC' + C'C_1) = O$$

$$C_1C'(1-k_1k_2) = k_2(1-k_1)CC' \qquad k_1k_2 \neq 1$$

Si $k_1k_2 = 1$, de (*) se deduce que $C_1X'' = (C_1C' + k_2C'C + CC_1) + C_1X$.



Traslación de vector:

$C_1C' + k_2C'C + CC_1 = (1-k_2)CC'$.

Todavía puede simplificarse mas pero es tedioso.

8. SEMEJANZAS.

Se llama semejanza de razón k a toda comparación de homotecia de razón k y un movimiento.

Igualmente puede definirse semejanza de razón k como la aplicación $f : E_B \rightarrow E_B$ tal que d(f(A),f(B))=kd(A,B).

Las propiedades de las semejanzas se deducen trivialmente de las de las homotecias y de los movimientos