TEMAS DE MATEMÁTICAS
(Oposiciones de Secundaria)

TEMA 23

FUNCIONES CIRCULARES E HIPERBÓLICAS Y SUS RECÍPROCAS. SITUACIONES REALES EN LAS QUE APARECEN.

TEMA 23

FUNCIONES CIRCULARES E HIPERBÓLICAS Y SUS RECÍPROCAS. SITUACIONES REALES EN LAS QUE APARECEN.

Funciones Circulares e Hiperbólicas y sus Recíprocas. Situaciones reales en las que Aparecen.

1. INTRODUCCIÓN.

La trigonometría estudia la relación entre ángulos y lados en un triángulo. A partir de este problema aparentemente tan simple, surgen las funciones circulares. Antes de proceder a su definición, veremos algunos conceptos previos.

DEF Dos semirectas r y s con origen común determinan un ángulo. Las dos semirrectas son los lados y el origen es el vértice del ángulo.

DEF Un par de semirrectas (r, s) con origen común determinan un ángulo dirigido, determinado por el giro de centro del origen, que lleva coincidir la primera con la segunda, según el sentido contrario al de las agujas del reloj.

Partiendo de la definición anterior y suponiendo que tenemos dos ejes de coordenadas perpendiculares OX y OY, podemos situar todos los ángulos de manera que la primera de las semirrectas coincida con el semieje OX positivo. A dicho semieje se le llama origen de ángulos. El ángulo queda determinado dando sólo una semirrecta.

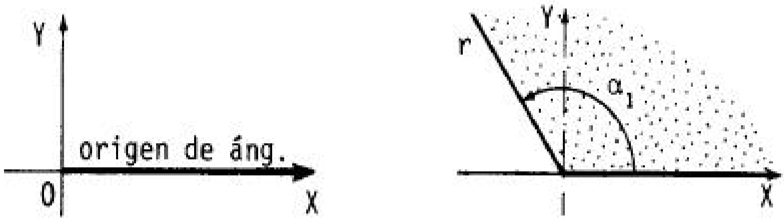

fig. 1

DEF Llamaremos Circunferencia trigonométrica a la que tiene su centro en el origen de coordenadas y radio unidad.

La única semirrecta que determina un ángulo en un sistema de ejes coordenados (la otra es el origen de ángulos) corta a la circunferencia trigonométrica en un solo punto. Por tanto, podemos simplificar la determinación de un ángulo dando simplemente un punto de la circunferencia.

Los puntos (x, y) pertenecientes a la circunferencia verifican la condición:

$$x^2 + y^2 = 1$$

DEF Sea α el ángulo dirigido definido por el punto (x_o, y_o) perteneciente a la circunferencia trigonométrica. Llamaremos seno del ángulo dirigido al valor y_o y coseno del ángulo dirigido a x_o.

Sen $\alpha = y_o$

Cos $\alpha = x_o$

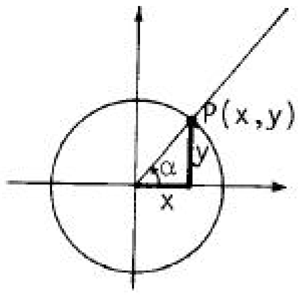

fig. 2

A partir de la definición anterior podemos obtener el senos y el coseno de un ángulo cualquiera que podamos representar en la circunferencia trigonométrica. Pero ¿cómo se miden los ángulos?.

La forma más antigua de medir los ángulos es en grados. En un sistema de base 60 que fue heredado por los griegos de los babilonios. Una circunferencia completa tiene 360º. Un grado se subdivide en 60 minutos y cada uno de estos en 60 segundos.

La definición que hemos dado para el senos y el coseno nos permite conocer estos valores de cualquier ángulo comprendido en una circunferencia.

$$\alpha \in [0^o, 360^o]$$

Si medimos los ángulos en grados, minutos y segundos, ¿cuánto mediría un ángulo de $\sqrt{2}^o$?.

Como en época de los babilonios o griegos no conocían los números irracionales, no se encontraron con la dificultad anterior. Para poder resolverla, surgió otra forma de medir los ángulos: en radianes.

DEF Un radian es el ángulo que tiene el arco de la misma longitud que el radio, donde arco y radio corresponden a la misma circunferencia.

Sabiendo que la longitud de la circunferencia es $2\pi r$, siendo r el radio de la misma, tenemos que el ángulo que abarca toda la circunferencia, 360º, equivale a 2π radianes.

Podemos pasar de un ángulo α medido en radianes, R, a medido en grados, G, mediante la expresión

$$R = \frac{p}{180} G$$

Con esta nueva fórmula de medir ángulos, y teniendo en cuenta que es 1 radian, concluimos que, al ser 1 el radio de la circunferencia trigonométrica, medir ángulos es lo mismo que medir la longitud del arco que abarca.

Ahora vamos a extender la definición del seno y coseno a un ángulo α cualquiera cuyo valor es un número real y está medido en radianes. Pero en lugar de realizar la definición en términos de longitud, resulta más fácil en términos de áreas, las cuales podemos expresarlas mediante integrales.

Supongamos que α es el ángulo determinado por un punto P de la circunferencia trigonométrica

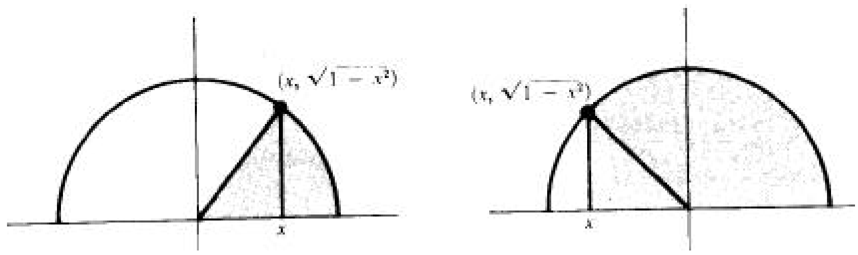

fig. 3

Si $P = (x, y)$ se verifica que $x^2 + y^2 = 1$. Si el ángulo α está medido en radianes, su valor coincide con la longitud del área que determina. Llamaremos l a la longitud del arco determinado por α ($l = \alpha$). Este arco contiene $\frac{l}{2\pi}$ de la longitud total de la circunferencia, que es 2π. Si llamamos S al sector determinado por las semirrectas OX positiva, OP y el arco de la circunferencia de longitud l, el área de S es:

$$A(S) = \frac{l}{2}$$

que se obtiene fácilmente teniendo en cuenta que el área del círculo es π.

Podemos, pues, definir sen α y cos α como las coordenadas de un punto P de la circunferencia trigonométrica tal que el sector que determina tiene área $\frac{\alpha}{2}$ (con α medido en radianes).

<u>2. FUNCIONES CIRCULARES.</u>

<u>2.1. Funciones Seno y Coseno.</u>

2.1.1. Sen x y Cos x para $x \in [0, \pi]$.

Vamos a iniciar el estudio de las funciones circulares con las funciones Seno y Coseno.

En principio vamos a definirlas cuando el ángulo α pertenece a la semicircunferencia positiva ($\alpha \in [0, \pi]$), para luego ir extendiendo la definición.

Como acabamos de ver que un punto P(x, y) de la circunferencia determina un ángulo x, siendo x = cos x e y = sen x y que el área del sector que determina α es $\frac{\alpha}{2}$, vamos a tratar de obtener una expresión analítica para el área de un sector situando en la semicircunferencia positiva.

Sea $f(x)=\sqrt{1-x^2}$ con $x\in[-1,\ 1]$ la semicircunferencia positiva. Un punto cualquiera de dicha semicircunferencia será

$$P\left(x,\sqrt{1-x^2}\right) \quad \text{con} \quad x\in[-1, 1]$$

- Si $x\in[0, 1]$

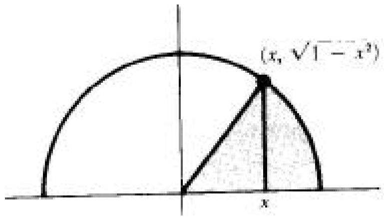

fig. 4

El área del sector puede descomponerse como suma del área del triángulo XOP más el área encerrada bajo la semicircunferencia.

$$A(x)=\frac{x\sqrt{1-x^2}+\int_x^1\sqrt{1-t^2}\,dt}{2}$$

- Si $x\in[-1, 0]$

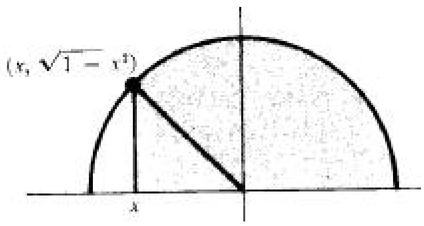

fig. 5

En este caso el área del sector es al área encerrada por al semicircunferencia menos el área del triángulo XOP.

$$A(x)=\int_x^1\sqrt{1-t^2}\,dt-\frac{-x\sqrt{1-(-x)^2}}{2}=$$

recordemos que escribimos - x ya que $x\in[-1, 0]$

$$=\frac{x\cdot\sqrt{1-x^2}}{2}+\int_x^1\sqrt{1-t^2}\,dt$$

El área del sector de la circunferencia determinado por $P\left(x,\sqrt{1-x^2}\right)$ con $x\in[-1,\ 1]$ es

$$A(x)=\frac{x\sqrt{1-x^2}}{2}+\int_x^1\sqrt{1-t^2}\,dt$$

PROP La función A: [-1, 1] $\rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$A(x)=\frac{x\sqrt{1-x^2}}{2}+\int_x^1\sqrt{1-t^2}\,dt$$

verifica:

1) Es continua en todo su dominio.

2) Es derivable en (-1, 1) y A´(x) $\neq$ 0.

3) $A(-1)=\frac{p}{2}$ y $A(1)=0$

<u>Dem.</u>

1) Trivial

2) Si x$\in$[-1,1] $\Rightarrow$ A(x) es derivable y se tiene que:

$$A'(x)=\frac{1}{2}\left[x\cdot\frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}}+\sqrt{1-x^2}\right]-\sqrt{1-x^2}=\frac{1}{2}\left[\frac{-x^2+\left(1-x^2\right)}{2\sqrt{1-x^2}}\right]-\sqrt{1-x^2}=$$
$$=\frac{1-2x^2}{2\sqrt{1-x^2}}-\sqrt{1-x^2}=\frac{1-2x^2-2\left(1-x^2\right)}{2\sqrt{1-x^2}}=\frac{-1}{2\sqrt{1-x^2}}\quad\Rightarrow\quad A'(x)\neq 0$$

3) $A(-1)=0+\int_{-1}^{1}\sqrt{1-t^2}\,dt=\frac{p}{2}$

A(1)=0 Trivialmente

De la proposición anterior deducimos que A(x) es una función estrictamente decreciente y, por tanto, inyectiva. Podemos decir aun más; la función

$$A: [-1, 1] \rightarrow [0, p/2]$$

Es biyectiva.

Retomando nuestro problema inicial, para $\alpha\in[0, \pi]$ queremos definir Sen α y Cos α como las coordenadas de un punto P(cos α, sen α) de la circunferencia trigonométrica que determina un sector cuya área es $\frac{a}{2}$.

Como $\alpha \in [0,\pi] \Rightarrow \frac{\alpha}{2} \in \left[0, \pi/2\right] \Rightarrow \frac{\alpha}{2} \in Rang(A(x))$.

Al ser la función A(x) biyectiva, podemos garantizar la existencia de un único $x_o \in [-1, 1]$ tal que $A(x_o) = \frac{\alpha}{2}$ para un α concreto.

DEF Si $\alpha \in [0, \pi]$, definimos cos α como el único número $x_o \in [-1, 1]$ tal que $A(x_o) = \frac{\alpha}{2}$. Se define sen α como $\sqrt{1 - x_o^2}$.

Luego dado $\alpha \in [0, \pi]$ se verifica $A(\cos \alpha) = \frac{\alpha}{2}$ y por el teorema de Pitágoras $\operatorname{sen} \alpha = \sqrt{1 - \cos \alpha^2}$

Si construimos una nueva función D(x) como

$$D: [-1, 1] \to [0, \pi]$$

$$X \to D(x) = 2A(x)$$

Podemos afirmar que D(x) es una función biyectiva. Y se verifica que

$$D(\cos \alpha) = \alpha \qquad \forall \alpha \in [0, \pi]$$

Por tanto, la función coseno es la recíproca de la función D

$$\text{Cos } x = D^{-1}(x)$$

Y deducimos que

$$\operatorname{sen} x = \sqrt{1 - \left(D^{-1}(x)\right)^2}$$

verificándose en ambas definiciones que $x \in [0, \pi]$.

Tenemos pues que

$$\text{Cos}: [0, \pi] \to [-1, 1]$$

$$X \to \cos x = D^{-1}(x)$$

Y teniendo en cuenta que $\operatorname{sen} x = \sqrt{1 - \cos^2 x}$

$$\text{Sen}: [0, \pi] \to [0, 1]$$

$$x \to \operatorname{sen} x = \sqrt{1 - \cos^2 x}$$

Podemos observar que la función sen x, donde la tenemos definida, es positiva.

Veamos algunas propiedades de ambas funciones.

PROP Si x∈[0, π] se verifica

1) La derivada de Cos x es - Sen x: (Cos x)´ = - Sen x

2) La derivada de Sen x es Cos x: (Sen x)´ = Cos x

<u>Dem.</u>

La derivada de la función A(x) es

$$A'(x) = \frac{-1}{2\sqrt{1-x^2}}$$

siendo entonces

$$D'(x) = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$$

y como Cos x = D^{-1}(x)

$$(Cosx)' = \left(D^{-1}(x)\right)' = \frac{1}{-\dfrac{1}{\sqrt{1-\left(D^{-1}(x)\right)^2}}} = -\sqrt{1-Cos^2x} = -Senx$$

$$(Senx)' = \left(\sqrt{1-Cos^2x}\right)' = \frac{1}{2}\frac{-2Cosx(Cosx)'}{\sqrt{1-Cos^2x}} = \frac{Cosx \cdot Senx}{Senx} = Cosx$$

OBS La función Cos x, donde la tenemos definida, es una función decreciente estrictamente, ya que su derivada es positiva.

Calculemos algunos valores de la función cos x:

- x = 0 $A(Cos0) = \frac{0}{2} = 0 \Rightarrow A(Cos0) = 0 \Rightarrow Cos0 = 1$ ya que A(1) = 0.

- x = π $A(Cos\pi) = \frac{\pi}{2} \Rightarrow Cos\pi = -1$ ya que $A(-1) = \frac{\pi}{2}$

- x = $\frac{\pi}{2}$ $A\left(Cos\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{4} \Rightarrow Cos\frac{\pi}{2} = 0$ ya que $A(0) = \frac{\pi}{4}$

Justifiquemos este último resultado:

$$A(0) = \frac{0\sqrt{1-0^2}}{2} + \int_0^1 \sqrt{1-t^2}\,dt \Rightarrow A(0) = \int_0^1 \sqrt{1-t^2}\,dt$$

$$\int_{-1}^{0} \sqrt{1-t^2}\,dt = \int_0^1 \sqrt{1-t^2}\,dt \Rightarrow \int_{-1}^{1} \sqrt{1-t^2}\,dt = 2\int_0^1 \sqrt{1-t^2}\,dt$$

y como $\int_{-1}^{1} \sqrt{1-t^2}\,dt = \pi/2$ (área del semicírculo)

queda que $A(o) = \frac{\pi}{4}$

Sabiendo que la función Cos x es decreciente y los tres valores calculados antes podemos representarla, siendo

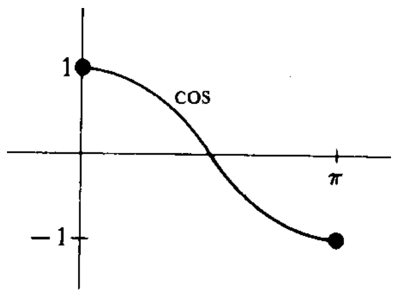

fig. 6

Para representar la función sen x tengamos en cuenta que:

$$(Senx)' = Cosx \begin{cases} > 0 & si \quad x \in \left(0, \pi/2\right) \\ < & si \quad x \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right) \end{cases}$$

Entonces Sen x $\begin{cases} Estrictamente\ Creciente & \forall x \in \left(0, \pi/2\right) \\ Estrictamente\ Decreciente & \forall x \in \left(\pi/2, \pi\right) \end{cases}$

Y presenta un máximo en $x = \frac{\pi}{2}$

- $Sen 0 = \sqrt{1 - Cos^2 0} = \sqrt{1-1} = 0$
- $Sen \pi = \sqrt{1 - Cos^2 \pi} = \sqrt{1 - (-1)^2} = 0$
- $Sen \frac{\pi}{2} = \sqrt{1 - Cos^2 \frac{\pi}{2}} = \sqrt{1-0} = 1$

luego su representación gráfica es

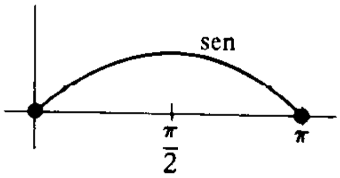

fig. 7

2.1.2. Extensión de Sen x y Cos x a todo $\mathbb{R}$.

Los valores de las funciones sen x y cos x con $x \in [\pi, 2\pi]$ los podemos calcular de la siguiente forma:

$$Senx = -Sen(2\pi - x)$$

$$Cosx = Cos(2\pi - x)$$

Estas definiciones provienen de observar la circunferencia trigonométrica y recordar las definiciones para sen x y cos x con $x \in [0, \pi]$ P(cos x, sen x) era un punto de la circunferencia.

Es fácil extender las gráficas de sen x y cos x al intervalo $[0, 2\pi]$, ya que los valores para $x \in [\pi, 2\pi]$ se basan en los que obtiene el cos x y sen x en $[0, \pi]$ respectivamente, los cuales nos son conocidos.

Por tanto tenemos que

Sen x con $x \in [0, 2\pi]$

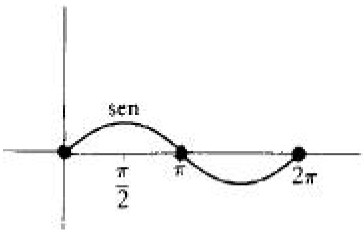

fig. 8

Cos x con $x \in [0, 2\pi]$

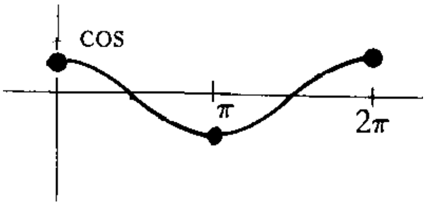

fig. 9

Al tener en $x \in [0, \pi]$

Rang (sen x) = [0, 1]

Rang (cos x) = [-1, 1]

Entonces en $x \in [\pi, 2\pi]$

Rang (sen x) = [-1, 0]

Rang (cos x) = [-1, 1]

Y deducimos que ambas funciones tienen de rango [-1, 1] cuando $x \in [0, 2\pi]$.

Antes de extender la definición a todo número real hemos de tener en cuenta que los ángulos son medidos modulo 360º o módulo 2π. Eso es debido a que si representamos un ángulo de 400º en la circunferencia, el punto de la misma que lo determina al ángulo de 40º, y a cualquier otro ángulo que provenga de sumar 40º a un número entero de vueltas de circunferencia.

Por tanto, tenemos que

Si $x \in \mathbb{R} \Rightarrow x = 2K\pi + x_o$ con $K \in \mathbb{Z}$ y $x_o \in [0, 2\pi]$

Sen x = Sen x_o

Cos x = Cos x_o

Las construimos de forma que son periódicas de periodo 2π. Y por tanto, el rango de ambas funciones sigue siendo [-1, 1].

Sen: $\mathbb{R} \to [-1, 1]$

$x \to$ Sen x_o siendo $x = 2\pi K + x_o$ con $x_o \in [0, 2\pi]$

Cos: $\mathbb{R} \to [-1, 1]$

$x \to$ Cos x_o siendo $x = 2\pi K + x_o$ con $x_o \in [0, 2\pi]$

Y $\text{sen}\, x_o = \sqrt{1 - \cos^2 x_o} \quad y \quad Cos x_o = D^{-1}(x)$

PROP Las funciones sen x y cos x con $x \in \mathbb{R}$ verifican

1) $\text{Sen}^2 x + \text{Cos}^2 x = 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

2) (Sen x)´ = Cos x $\quad \forall x \neq K\pi$

3) (Cos x)´ = - Sen x $\quad \forall x \neq K\pi$

Dem.

1) $\forall x \in \mathbb{R} \quad \exists K \in \mathbb{Z} \;/\; x = 2\pi K + x_o \quad$ con $\quad x_o \in [0, 2\pi]$

$$Sen^2 x + Cos^2 x = Sen^2(x_o + 2\pi K) + Cos^2(x_o + 2\pi K) = Sen^2 x_o + Cos^2 x_o = 1$$

Vale 1 porque $P(Cos\ x_o, Sen\ x_o)$ es un punto de la circunferencia trigonométrica.

2) Si $x \in (0, \pi)$ sabemos que es cierto.

Si $x \in (\pi, 2\pi) \Rightarrow$ sen x = - sen(2π - x) ⇒

⇒ (sen x)´ = (- sen(2π - x)´ y como $2\pi - x \in (0, \pi)$

⇒ (- sen(2π - x)´ = (- cos(2π - x) (- 1)

⇒ (sen x)´ = cos (2π - x) = cos x

Si x toma cualquier otro valor (no múltiplo de π) se reduce 3) Análogo al 2).

OBS Las derivadas de las funciones Sen x y Cos x no están definidas en los valores múltiplo entero de π. Ello es debido a que la función A(x) no tenía derivada para $x = \pm 1$.

Aún así vamos a extender la definición para que ambas derivadas sean continuas. Nos basaremos en el siguiente teorema.

TEOREMA Sea f(x) una función continua en x = a, existe f´(x) $\forall x \in E^*(a, \varepsilon)$ y existe $\lim_{x\to a} f'(x)$. Entonces existe f´(a) y es f´(a) = $\lim_{x\to a}$ f´(x).

COROLARIO

1) (Sen x)´ = Cos x $\quad \forall x \in \mathbb{R}$

2) (Cos x)´ = - Sen x $\quad \forall x \in \mathbb{R}$

PROP Se verifican las siguientes expresiones:

1) $\begin{cases} Sen(x+\pi) = -Senx \\ Cos(x+\pi) = -Cosx \\ Sen(-x) = -Senx \\ Cos(-x) = Cosx \end{cases}$

2) Sen $\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x$

3) $\text{Cos}\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \text{sen}\, x$

Dem.

Inmediatas

2.2. Función Tangente.

DEF Definimos la función tangente como

$$\text{tg}: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

$$x \to \text{tg}\, x = \frac{\text{sen}\, x}{\cos x}$$

siempre que $\cos x \neq 0$.

Veamos ahora donde la función tg x no está definida, que será cuando cos x = 0.

$$\left.\begin{array}{r} \cos x = 0 \\ \text{sen}^2 x + \cos^2 x = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} \cos x = 0 \\ \text{sen}^2 x = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} \cos x = 0 \\ \text{sen}\, x = \pm 1 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ Se corresponde con los puntos (0, 1) y (0, -1) de la circunferencia, y esos puntos definen los ángulos de $\frac{\pi}{2}$ y $\frac{3\pi}{2}$ radianes. Al ser la función cos x periódica de periodo 2π, resulta que se anula en $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi K$ y $x = \frac{3\pi}{2} + 2\pi K \quad \forall K \in \mathbb{Z}$, siendo esos puntos también expresables como $x = \frac{\pi}{2} + \pi K \quad \forall K \in \mathbb{Z}$.

Por tanto, $Dom(\text{tg}\, x) = \mathbb{R} - \left\{ x / x = \frac{\pi}{2} + K\pi \quad \forall K \in Z \right\}$

Para saber el periodo de la función tangente tenemos que

$$\text{tg}(x + 2\pi) = \frac{Sen(x + 2\pi)}{Cos(x + 2\pi)} = \frac{Senx}{Cosx} = \text{tg}\, x$$

pero 2π no es el periodo, ya que también se verifica

$$\text{tg}(x + \pi) = \frac{Sen(x + \pi)}{Cos(x + \pi)} = \frac{-Senx}{-Cosx} = \text{tg}\, x$$

y como π es el número más pequeño, estrictamente positivo, tal que

$$\text{tg}(x + P) = \text{tg}\, x$$

podemos afirmar que P = π es el periodo de la función tangente.

PROP Se verifica

$$1+\mathrm{tg}^2 x=\frac{1}{\cos^2 x}$$

Dem.

Sabiendo que $\mathrm{Sen}^2 x + \mathrm{Cos}^2 x = 1$ y que $\mathrm{tg}\, x=\frac{\mathrm{sen}\, x}{\cos x}$ tenemos que

$$\frac{Sen^2x}{Cos^2x}+1=\frac{1}{Cos^2x}\Rightarrow \mathrm{tg}^2 x+1=\frac{1}{Cos^2x}$$

PROP La función tg x es derivable en todo su dominio siendo

$$(\mathrm{tg}\, x)'=\frac{1}{\cos^2 x}$$

Dem.

$$(\mathrm{tg}\, x)'=\left(\frac{Senx}{Cosx}\right)'=\frac{(Senx)'Cosx-Senx(Cosx)'}{Cos^2x}=\frac{Cos^2x+Sen^2x}{Cos^2x}=\frac{1}{Cos^2x}$$

PROP La función tg x verifica

1) tg(- x) = - tg x

2) $\mathrm{tg}\left(\frac{p}{2}-x\right)=\frac{1}{\mathrm{tg}\, x}$

Dem.

1) $Tg(-x)=\frac{\mathrm{sen}(-x)}{\cos(-x)}=\frac{-\mathrm{sen}\, x}{\cos x}=-\mathrm{tg}\, x$

2) $Tg\left(\frac{p}{2}-x\right)=\frac{\mathrm{sen}\left(\frac{p}{2}-x\right)}{\cos\left(\frac{p}{2}-x\right)}=\frac{\cos x}{\mathrm{sen}\, x}=\frac{1}{\mathrm{tg}\, x}$

La representación de la función tg x es

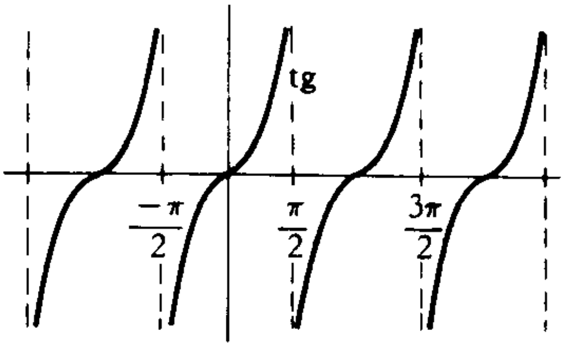

fig. 10

2.3. Funciones Circulares Inversas.

DEF Las funciones circulares inversas son:

1) Secante $Secx = \dfrac{1}{Cosx} \quad \forall x \neq \dfrac{\pi}{2} + K\pi \qquad K \in \mathbb{Z}$

2) Cosecante $Coscx = \dfrac{1}{Senx} \quad \forall x \neq K\pi \qquad K \in \mathbb{Z}$

3) Cotangente $Co\,\mathrm{tg} = \dfrac{Cosx}{Senx} \quad \forall x \neq K\pi \qquad K \in \mathbb{Z}$

PROP Las derivadas de las funciones circulares inversas son

1) $(Secx)' = Secx \cdot \mathrm{tg}\, x$

2) $(Co\sec x)' = -Coscx \cdot Co\,\mathrm{tg}\, x$

3) $(Co\,\mathrm{tg}\, x)' = \dfrac{-1}{Sen^2 x}$

Dem.

Inmediata.

La representación gráfica de las funciones circulares es

1) Sec x

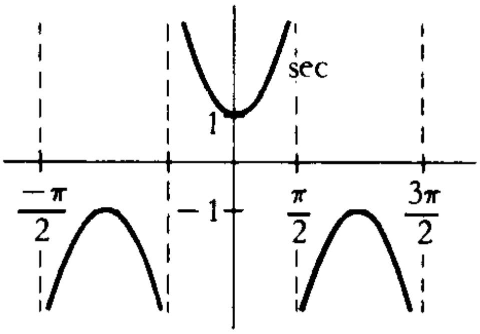

fig. 11

2) Cosec x

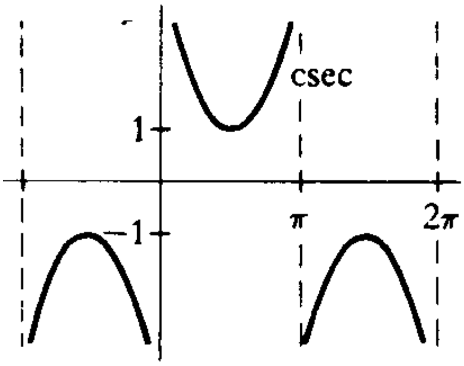

fig. 12

3) Cotg x

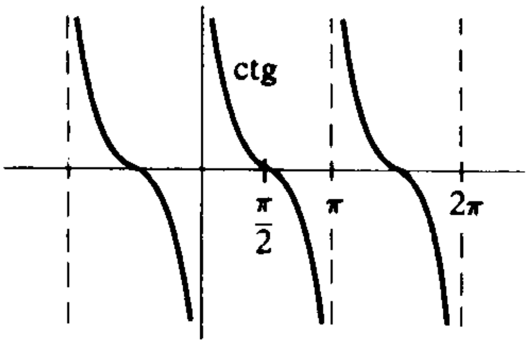

fig. 13

2.4. Funciones Circulares Recíprocas.

Las funciones circulares las tenemos definidas de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ y no son biyectivas. Para poder obtener sus recíprocas, primero hay que restringirlas a un intervalo adecuado. Hablando con propiedad, las funciones circulares no tienen recíproca, pero si unas restricciones suyas adecuadas.

2.4.1. La Recíproca de al función Sen x.

Definíamos f(x) como

$$f:\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]\to \mathbb{R}$$

$$x \to \text{Sen } x$$

La función f(x) definida como la función sen x restringida al intervalo $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ es biyectiva.

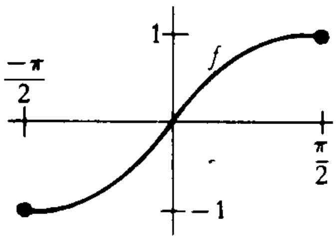

fig. 14

La recíproca de la función f(x) recibe el nombre de arco seno y se denota como:

$$arcse:[-1,1]\to\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$$

$$x \to \text{arcsen } x$$

y su representación gráfica es

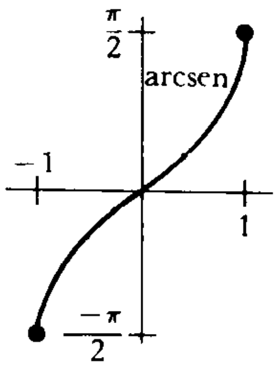

fig. 15

PROP Si $x\in(-1, 1)$ se verifica

$$(ar\cos enx)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

<u>Dem.</u>

$$(ar\cos enx)' = \left(f^{-1}(x)\right)' = \frac{1}{f'\left(\left(f^{-1}(x)\right)\right)} = \frac{1}{\left(\text{sen}\left(f^{-1}(x)\right)\right)'} = \frac{1}{\cos(\text{arcsen } x)} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

ya que $\text{sen}^2(\text{arcsen } x) + Cos^2(\text{arcsen } x) = 1 \Rightarrow x^2 + Cos^2(\text{arcsen } x) = 1 \Rightarrow$

$$\Rightarrow Cos(\text{arcsen } x) = \sqrt{1-x^2}$$

Tomamos la raíz cuadrada positiva porque $\text{arcsen } x \in \left(-\frac{p}{2}, \frac{p}{2}\right)$ y por tanto su coseno es positivo.

2.4.2. La Recíproca de la función Cos x.

Definimos f(x) como

$f: [0, \pi] \to [-1, 1]$

$x \to \text{Cos } x$

Así definida, f(x) es una función biyectiva y por tanto existe su recíproca. Su representación gráfica es:

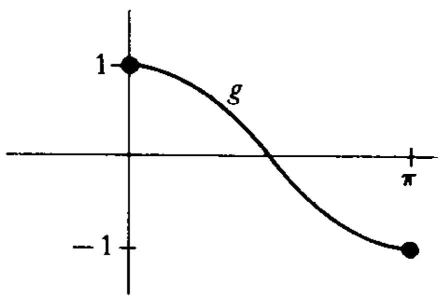

fig. 16

La recíproca de la función f(x) recibe el nombre de arcoseno y se denota como:

$\text{arccos}: [-1, 1] \to [0, \pi]$

$x \to \text{arccos } x$

y su gráfica es

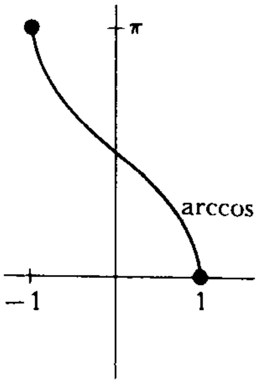

fig 17

PROP Si x∈(-1, 1) se verifica

$$(\arccos x)' = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$$

<u>Dem.</u>

$$(\text{arcsen}\, x)' = \left(f^{-1}(x)\right)' = \frac{1}{(Cos(\arccos x))'} = \frac{-1}{Sen(\arccos x)} = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$$

ya que $Sen^2(\arccos x) + Cos^2(\arccos x) = 1 \Rightarrow Sen(\arccos x) = \sqrt{1-x^2}$

e igualmente tomamos la raíz positiva porque arccos x∈(0, π) y por tanto su seno es positivo.

2.4.3. La Recíproca de la función tg x.

Definimos f(x) como

$$f : \left[\frac{-p}{2}, \frac{p}{2}\right] \to \mathbb{R}$$

x → tg x

Así definida, f(x) es una función biyectiva y por tanto existe su recíproca.

La recíproca de la función f(x) recibe el nombre de arcotangente y se denota como

$$\text{arctg} : \mathbb{R} \to \left[-\frac{p}{2}, \frac{p}{2}\right]$$

x → arctg x

siendo su gráfica

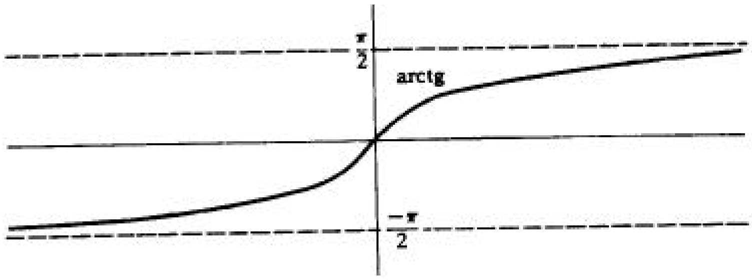

fig. 18

PROP $\forall x \in \mathbb{R}$ se verifica

$$(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}$$

Dem.

$$(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{(\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} x))'} = \frac{1}{(\operatorname{tg} y)'} = \frac{1}{1+\operatorname{tg}^2 y} = \frac{1}{1+x^2}$$

siendo $y = \operatorname{arctg} x \Leftrightarrow x = \operatorname{tg} y \Leftrightarrow x^2 = \operatorname{tg}^2 y$

OBS De forma análoga obtendríamos, en el mayor intervalo posible, las recíprocas de las funciones inversas.

1) La recíproca de la sec x es arcosec x.

2) La recíproca de la cose x es arcosec x.

3) La recíproca de la cotg x es arccotg x.

3. FUNCIONES HIPERBÓLICAS.

La circunferencia trigonométrica tiene como ecuación

$$x^2 + y^2 = 1$$

y sus ecuaciones paramétricas son

$$\left.\begin{array}{l} x = \cos t \\ y = \operatorname{sen} t \end{array}\right\}$$

Por eso las funciones Sen x y Cos x reciben el nombre de funciones circulares.

De forma análoga, dada la ecuación de una hipérbola

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

vemos que sus ecuaciones paramétricas son

$$\left.\begin{aligned} x &= a \cdot Cht \\ y &= b \cdot Sht \end{aligned}\right\}$$

siendo Sht el seno hiperbólico de t y Cht el coseno hiperbólico de t. Estas funciones, que ahora definiremos, son las llamadas funciones hiperbólicas. Aunque no lo vamos a hacer, podriamos definir estas funciones geométricamente de forma muy similar a como lo hemos hecho para el sen x y cos x.

3.1. Funciones Shx y Chx.

DEF Definimos la función Seno hiperbólico como

$$Shx = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

y la función Coseno hiperbólico como

$$Chx = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

PROP Las funciones Shx y Chx verifican

1) $Ch^2 x - Sh^2 x = 1$

2) $Ch(x+y) = Chx \cdot Chy + Shx \cdot Shy$

3) $Ch(x-y) = chx \cdot chy - shx \cdot shy$

4) $Sh(x+y) = Shx \cdot Chy + Chx \cdot Shy$

5) $Sh(x-y) = Shx \cdot Chy - Chx \cdot Shy$

6) $Sh2x = 2ShxChx$

7) $Ch2x = Ch^2 x + Sh^2 x$

8) $1 + Ch2x = 2Ch^2 x$

9) $1 - Ch2x = -2Sh^2 x$

Dem.

1) $Ch^2 x - Sh^2 x = (Chx + Shx)(Chx - Shx) =$

$$=\left(\frac{e^x+e^{-x}}{2}+\frac{e^x-e^{-x}}{2}\right)\left(\frac{e^x+e^{-x}}{2}-\frac{e^x-e^{-x}}{2}\right)=e^x\cdot e^{-x}=1$$

2) $Ch(x+y)=\dfrac{e^{x+y}+e^{-x-y}}{2}=\dfrac{e^xe^y+e^{-x}e^{-y}}{2}=$

Sabemos que $e^x=(Chx+Shx)$ y $e^{-x}=(Chx-Shx)$

$$=\frac{(Chx+Shx)(Chy+Shy)+(Chx-Shx)(Chy-Shy)}{2}=$$

$$=\frac{ChxChy+ChxShy+ShxChy+ShxShy+Chx-Chy-ChxShy-ShxChy+ShxShy}{2}=$$

$$=\frac{2ChxChy+2ShxShy}{2}=Chx\cdot Chy+ShxShy$$

3) 4) 5) Análogas a la anterior.

6) $Sh2x=Sh(x+x)=ShxChx+Chx\cdot Shx=2ShxChx$

7) 8) 9) Análogas a la anterior.

3.1.1. Estudio de la función Shx.

Ahora hemos de tener en cuenta las propiedades de la función exponencial, e^x, la cual estudiamos en el tema anterior.

Como $Shx=\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}$, podemos decir:

1) Dom(Sh x) = ℝ

2) Corta a los ejes en el origen (0, 0), pues Sh0 = 0

3) Tiene simetría Impar.

$$Sh(-x)=\frac{e^{-x}-e^x}{2}=-\frac{e^x-e^{-x}}{2}=-Shx$$

4) Es estrictamente Creciente ya que

$$(Shx)'=\left(\frac{e^x-e^{-x}}{2}\right)'=\left(\frac{e^x+e^{-x}}{2}\right)=Chx>0$$

su derivada es positiva.

Por tanto no presenta máximos ni mínimos.

5) $(Shx)'' = Shx \Rightarrow \begin{cases} Convexa\ en\ (0,+\infty) \\ Concava\ en\ (-\infty,0) \end{cases}$

Presenta un punto de inflexión en (0, 0)

6) No tiene asíntotas horizontales, ni verticales, ni oblicuas.

3.1.2. Estudio de la función Chx.

Realizaremos un estudio análogo al anterior par la función Chx.

1) $Dom(Chx) = \mathbb{R}$

2) Corta a los ejes en (0, 1) pues Ch0 = 1.

3) Tiene simetría par

$$Ch(-x) = \frac{e^{-x} + e^{x}}{2} = \frac{e^{x} + e^{-x}}{2} = Chx$$

4) $(Chx)' = Shx \Rightarrow \begin{cases} \text{Decreciente en } (-\infty,0)\text{, ya que } Shx < 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^- \\ \text{Creciente en } (0, +\infty)\text{, ya que } Shx > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^+ \end{cases}$

5) (Chx)´´ = Chx > 0 $\forall \mathbb{R} \Rightarrow$ Es siempre convexa.

6) No tiene asíntotas de ningún tipo.

3.2. Función Thx.

DEF La función Tangente hiperbólica, que se representa por Thx es

$$Thx = \frac{Shx}{Chx} \quad ó \quad Thx = \frac{e^{x} - e^{-x}}{e^{x} + e^{-x}}$$

PROP La función Thx verifica

1) $Th2x = \dfrac{2Thx}{1 + Th^2 x}$

2) $\dfrac{1 - Ch2x}{1 + Ch2x} = -th^2 x$

3) $Ch2x = \frac{1+Th^2x}{1-Th^2x}$

4) $Sh2x = \frac{2Thx}{1-Th^2x}$

3.2.1. Estudio de la función Thx.

1) Dom(Thx) = ℝ ya que su denominador, Chx, no se anula nunca.

2) Corta a los ejes en (0, 0) ya que th0 = 0.

3) Es simétrica impar:

$$th(-x) = \frac{Sh(-x)}{Ch(-x)} = \frac{-Shx}{Chx} = -thx$$

4) Es estrictamente creciente:

$$(thx)' = \frac{Chx \cdot Chx - Shx \cdot Shx}{Ch^2x} = \frac{1}{Ch^2x} > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

5) $(thx)'' = -\frac{2Shx}{Ch^3x} \Rightarrow \begin{cases} \text{Cóncava en } \mathbb{R}^- \\ \text{Convexa en } \mathbb{R}^+ \end{cases}$

6) Tiene asíntotas horizontales en y = ± 1 ya que $\lim_{x \to +\infty} thx = 1 \quad y \quad \lim_{x \to -\infty} thx = -1$.

3.3. Funciones Hiperbólicas Inversas.

DEF La función inversa del Shx es la cosecante hiperbólica, coschx, y se define como

$$Co\sec hx = \frac{1}{Shx}$$

DEF La función inversa del Chx es la Secante hiperbólica, Sechx, y se define como

$$Sechx = \frac{1}{Chx}$$

DEF La función inversa de la thx es la cotangente hiperbólica.

$$Cthx = \frac{1}{thx}$$

Ahora vamos a realizar el estudio de esta última función. Para no reiterarnos, omitiremos el estudio de las otras dos.

3.3.1. Estudio de la función Cthx.

1) Dom(Cthx) = ℝ - {0}.

2) No corta a los ejes.

3) Simétrica impar

$$Cth(-x) = -Cthx$$

4) $(Cthx)' = \dfrac{-1}{Sh^2 x} < 0 \quad \forall x = 0 \Rightarrow$ Es estrictamente decreciente.

5) $(Cthx)'' = \dfrac{2Shx \cdot Chx}{Sh^2 x} \Rightarrow \begin{cases} Concava & (-\infty, 0) \\ Convexa & (0, +\infty) \end{cases}$

No hay punto de inflexión en x = 0 ya que $0 \notin$ Dom(Cthx)

6) $\lim\limits_{x \to +\infty} Cthx = 1 \Rightarrow$ Asíntota Horizontal positiva en y = 1.

$\lim\limits_{x \to -\infty} Cthx = -1 \Rightarrow$ Asíntota Horizontal negativa en y = -1.

$\lim\limits_{x \to o^-} Cthx = -\infty \Rightarrow$ Asíntota Vertical por la izquierda en x = 0.

$\lim\limits_{x \to 0^+} Cthx = +\infty \Rightarrow$ Asíntota Vertical por la derecha en x = 0.

3.4. Funciones Hiperbólicas Recíprocas.

3.4.1. La recíproca de la función Shx.

La función Shx sabemos que es una biyectiva de ℝ en ℝ, luego admite función recíproca, que también será una biyección de ℝ en ℝ. Se representa por Argshx.

La gráfica de Argshx es simétrica de Shx con respecto de la recta y = x.

Como podemos comprobar, se trata de una función estrictamente creciente, que pasa por el origen, es simétrica impar, no presenta extremos relativos y tiene un punto de inflexión en (0, 0), siendo convexa en $\mathbb{R}^-$ y cóncava en $\mathbb{R}^+$.

Veamos como podemos expresar esta función:

$$y = \arg shx \Rightarrow x = Shy = \frac{e^y - e^{-y}}{2} \Rightarrow 2x = \frac{e^{2y} - 1}{e^y} \Rightarrow$$

$\Rightarrow e^{2y} - 2xe^{y} - 1 = 0$

$\Rightarrow$ e^y es solución de la ecuación $z^2 - 2x \cdot z - 1 = 0$

$\Rightarrow\ z = e^y = \dfrac{zx \pm \sqrt{4x^2+4}}{2} = x \pm \sqrt{x^2+1}$

y tomamos la raíz cuadrada positiva ya que $e^y > 0$.

$\Rightarrow\ e^y = x + \sqrt{x^2+1} \Rightarrow y = lu\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$

$$\arg shx = lu\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$$

3.4.2. La recíproca de la función Chx.

La función Chx no es biyectiva. Si nos quedamos con la rama correspondiente a valores de x positivos, tenemos que la función Chx define una biyección entre $\mathbb{R}^+$ y $[1, +\infty)$. Podemos hablar entonces de su función inversa, que recibe el nombre de y = argchx. Su gráfica es simétrica de la rama correspondiente a $x \geq 0$ de Chx respecto de al bisectriz y = x.

Para encontrar otra expresión que nos de argchx realizamos un proceso análogo al descrito para argshx, dando

$$\arg chx = lu\left(x + \sqrt{x^2-1}\right)$$

3.4.3. La recíproca de la función thx.

La función y = thx es una biyección de $\mathbb{R}$ en (-1, 1). Su función recíproca recibe el nombre de argthx y esta definida de (-1, 1) en $\mathbb{R}$.

Como $thx = \dfrac{Shx}{Chx}$, vamos a encontrar otra expresión para y = argthx.

$Y = \arg thx \Rightarrow x = thy = \dfrac{e^y - e^{-y}}{e^y + e^{-y}} = \dfrac{e^{2y}-1}{e^{2y}+1} \Rightarrow$

$\left(e^y\right)^2 - 1 = x\left(e^y\right)^2 + x \Rightarrow (1-x)\left(e^y\right)^2 = 1 + x \Rightarrow e^y = \pm\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}$

Nos quedamos con la raíz cuadrada positiva ya que $e^y > 0$.

$y = lu\left(\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}\right) \quad x \in (-1,1)$

4. SITUACIONES REALES EN LAS QUE APARECEN.

Las funciones circulares son básicas para el estudio de las funciones periódicas, ya que cualquiera de éstas se puede expresar en función de Sen mx y Cos mx.

Veamos un conjunto de fenómenos naturales periódicos que los podemos expresar mediante funciones circulares.

a) Movimiento Pendular.

b) La posición de las agujas de un reloj con relación a un punto origen.

c) El Movimiento de subida y bajada del émbolo en un motor de explosión.

d) Movimiento de una noria de feria, donde la altura de una persona montada varía a lo largo de una vuelta, y se repite en todas las demás.

e) Cálculos de navegación o astronomía.

f) Las leyes que rigen el movimiento armónico simple.

g) La actividad eléctrica del cerebro.

h) La Intensidad de Corriente alterna de un circuito.

Las funciones hiperbólicas tienen aplicación en situaciones de tipo técnico.

a) La Catenaria es la curva que forma un cable suspendido en el aire y solo sujeto por sus extremos (es Chx).

b) Al calcular la longitud de un arco de Catenaria aparece Shx.

c) Las recíprocas de las funciones hiperbólicas también nos las encontramos al realizar la integración de funciones donde aparecen expresiones de la forma $\sqrt{x^2 - 1}$.

Bibliografía recomendada.

Análisis Matemático I. Aut. J.A. Fernández Viña. Ed. Tecnos

Lecciones de Cálculo Infinitesimal I. Aut. R. Molina Legaz, M. Franco. Ed. Universidad de Murcia.

Principios de Análisis Matemático. Aut. W. Rudin. Ed. McGraw-Hill

Curso de Análisis Matemático I. Aut. E.L. Luna. Ed. Edunsa, 1991.

Calculus. Aut. M. Spivak. Ed. Reverté.

Análisis Matemático. Aut. M. de Guzmán, B. Rubio. Ed. Pirámide.

Calculus. Aut. Apostol. Ed. Reverté

Introducción al Análisis Matemático. Aut. J.M. Ortega. Ed. Labor