TEMAS DE MATEMÁTICAS
(oposiciones de secundaria)

TEMA 10

<u>SUCESIVAS AMPLIACIONES DEL CONCEPTO DE NÚMERO. EVOLUCIÓN HISTÓRICA Y PROBLEMAS QUE RESUELVE CADA UNA.</u>

TEMA 10

<u>SUCESIVAS AMPLIACIONES DEL CONCEPTO DE NÚMERO. EVOLUCIÓN HISTÓRICA Y PROBLEMAS QUE RESUELVE CADA UNA.</u>

1. INTRODUCCIÓN.

Habitualmente, presentamos los diferentes conjuntos de números de una manera didáctica. Construimos los conjuntos y los dotamos de unas propiedades. Luego, planteamos un problema tal que su solución es la construcción de un nuevo conjunto que amplíe el anterior. Comenzamos con el conjunto de los números naturales, que es un semianillo abeliano. La ecuación $x+a=b$ con $a>b$ no tiene solución. Ampliamos con el conjunto de los números enteros, que es un anillo conmutativo con elemento unidad. La ecuación $ax=b$ con a no divisor de b no tiene solución. Aparece el conjunto de los números racionales, que tiene estructura de cuerpo. Y resulta que el número π que todos conocemos, o el número $\sqrt{2}$ que es la diagonal del cuadrado de lado 1, no están en ese conjunto. Se amplía con los números irracionales, formando el conjunto de los reales. Y por último, este conjunto no soluciona la ecuación $x^2+1=0$. Realizamos la última ampliación, apareciendo el conjunto de los números complejos.

En este tema, vamos a ver la evolución histórica que ha habido del número. Y no coincide con la didáctica. En ambas comenzaremos por el número natural, ya que éste surge debido de la necesidad humana de contar. Desde que el hombre se puede considerar como tal, ha existido dicha necesidad. Pero a partir de aquí todo lo demás es diferente. El número cero surge mucho después que otros, las fracciones aparecen antes que los negativos, etc. Para ver esta evolución histórica, repasaremos los descubrimientos que han realizado las civilizaciones más importantes, en orden cronológico.

En la segunda parte del tema trataremos las sucesivas ampliaciones del concepto de número y veremos que problemas resuelve cada una de ellas.

2. DESARROLLO HISTÓRICO DEL CONCEPTO DE NÚMERO.

Antiguamente, se definía la matemática como la ciencia del número, la magnitud y la forma. Estos conceptos comenzaron a desarrollarse primero a partir de diferencias y contrastes entre elementos del entorno del hombre primitivo, y luego a partir de semejanzas.

El primer procedimiento aritmético de la historia comenzó con el artificio que llamamos *correspondencia biunívoca miembro a miembro*. Este procedimiento permitía a cualquier persona la posibilidad de comparar dos conjuntos, aunque no tuviesen la misma naturaleza. Se evitaba así contar de forma abstracta, ya que no se sabía.

2.1. El Hombre de Cromañon.

Los dedos de la mano pueden utilizarse fácilmente para representar conjuntos de hasta 5 ó 10 elementos (dependiendo de sí se usan una o las dos manos) y hasta 20 añadiendo los dedos de los pies. Cuando los dedos eran insuficientes, se recurrían a otros métodos, como era usar montones de piedras, de conchas o de cualquier otro elemento. Los montones eran grupos de cinco o diez piedras, lo cual significaba que empezaban a utilizar, sin saberlo, un sistema quinario o decimal, como consecuencia de contar con una o dos manos.

Pero estos montones eran un método efímero de conservar información. Así que comenzaron a realizar muescas en huesos. Está comprobado que el hueso o pedazo de madera tallado, es el método más utilizado en la historia de la *contabilidad*. Los restos más antiguos datan del 35.000 - 20.000 a.C. Las muescas podían representar un censo de personas, cosas o animales. O estar hechas por un guerrero y representar sus armas. O por un cazador y llevar así la contabilidad de las piezas de caza.

2.2. Los Sumerios.

La primera escritura conocida apareció poco antes de finales del IV milenio en el país de Sumer, situado en la baja Mesopotamia, entre las cuencas inferiores de los ríos Tigris y Eufrates. La escritura se realizaba en tablillas de arcilla, que eran el "papel" de la época.

Esas tablillas se utilizaban para realizar anotaciones de cantidades asociadas a diversas clases de mercancías, siendo las primeras actas contables que se conocen. Veamos como se realizaban dichos apuntes.

Los sumerios contaban utilizando la base 60 (sistema sexagesimal) en lugar de la base quinaria o decimal. Todavía quedan restos de esa base, por ejemplo en la forma de medir un ángulo o en la medida del tiempo.

La utilización de la base 60 implicaba el conocimiento de 60 signos y palabras distintas para nombrar a los números del 1 al 60 (todavía no se conocía el cero). Esto se resolvía usando el 10 como unidad auxiliar. Así, se tenían diez palabras para los números del 1 al 10. El sistema da nombre a los múltiplos de 10 hasta el 60 incluido. El 60 implica un nuevo orden. Del 60 se alcanza el 600. Del 600 al 3600. Y así sucesivamente. La forma de obtener las unidades del sistema eran 1 – 10 – 60 (10x6) – 600 (10x6x10) – 3600 (10x6x10x6) – 36000 (10x6x10x6x10)...

Pero, ¿Cómo se escribían estos números que ya tenían nombre?. Los sumerios asignaron a cada numero de la serie anterior (1, 10, 60, 600, 3600, 36000, 216000) un símbolo. Al principio, entre los años 3.200 – 3.100 aC. las cifras se representaban mediante unos símbolos dispuestos verticalmente. A parir de la primera mitad del III milenio a.C. cambiaron a una disposición horizontal. Y en el siglo XXVII a.C. apareció la escritura cuneiforme, debido simplemente a un cambio en el instrumento de escritura.

El sistema se basaba en el principio aditivo. Los nueve primeros números naturales se representan repitiendo el signo de la unidad tantas veces como sea preciso; los números 20, 30, 40 y 50 repitiendo el de las decenas; los números 120, 180, etc. repitiendo el signo de la sesentena, y así sucesivamente.

Era bastante usual que esta forma de escritura exigiera repeticiones desmesuradas de signos. Así, para representar el número 3599 se empleaban 26 cifras. Por tanto, surgió el método sustractivo, representando, por ejemplo el 9 como 10 – 1. Apareció un nuevo signo que equivalía a nuestro signo menos actual.

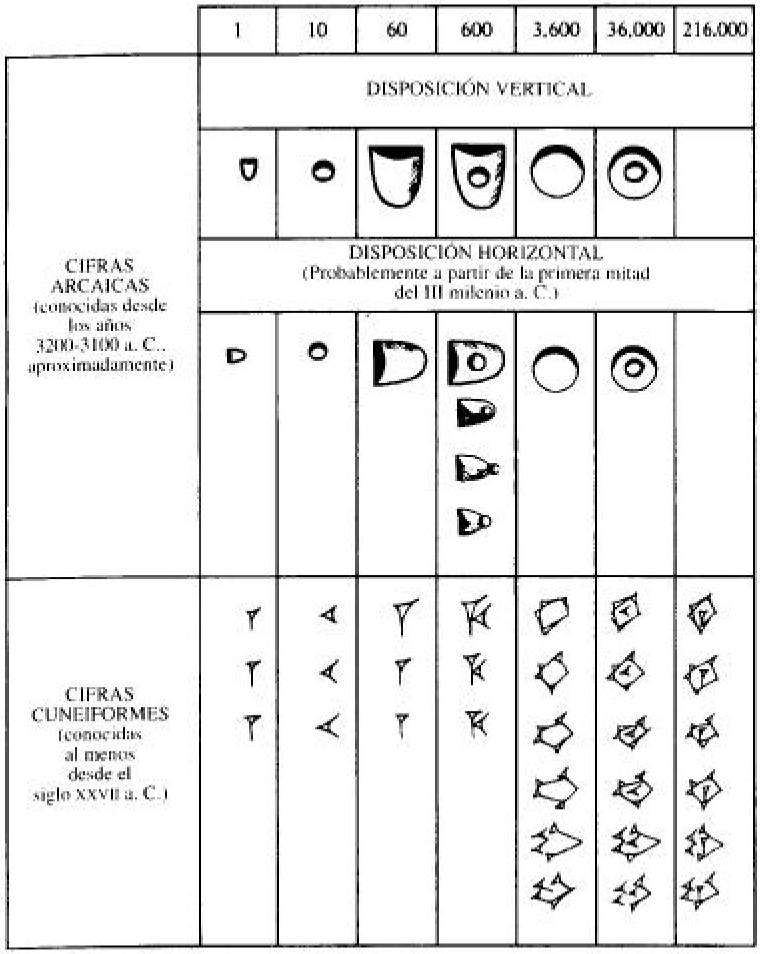

Fig. 1. Evolución gráfica de las cifras de origen sumerio

2.3. Los Semitas.

Por semitas, entendemos varios pueblos diferentes, como los acadios, los asirios, los babilonios y otros más. Cuando estos pueblos (por el orden en que los hemos nombrado) llegaron a Sumeria, se produjo un cambio en los sistemas de numeración. Se produjeron tres etapas fundamentales, debido a que los semitas utilizaban un sistema decimal.

La primera etapa corresponde a una asimilación por los acadios de la cultura sumeria, adoptando el sistema sexagesimal. En la segunda etapa, se produce la convivencia de los sistemas sexagesimal y decimal. Y en la tercera etapa, se elimina por completo el sistema sexagesimal.

A pesar de lo dicho anteriormente, en la época babilónica, los eruditos utilizaban un sistema de numeración posicional muy parecido al nuestro. Sólo se diferenciaba en que la base usada era la 60. Es difícil determinar con precisión cuando se produjo, pero en esta época apareció el primer **cero**, para significar la ausencia de unidades sexagesimales de cierto rango. Cada vez que faltaba una potencia de 60, representaban mediante este símbolo la ausencia de la misma, en lugar del espacio vacío. El símbolo tenía la significación de vacío, pero todavía no estaba pensado en el sentido de *nada*.

2.4. Los Egipcios.

Casi al mismo tiempo que en Mesopotamia, los egipcios inventaron un sistema de numeración, hacia el 3.000 a.C. Aunque había contacto con los sumerios, el sistema que se desarrolló no fue tomado de ellos, sino que es autóctono de los egipcios. El sistema es decimal, pudiendo representar números superiores a 10^6. De hecho, poseían jeroglíficos para representar el 1 y las seis primeras potencias de 10.

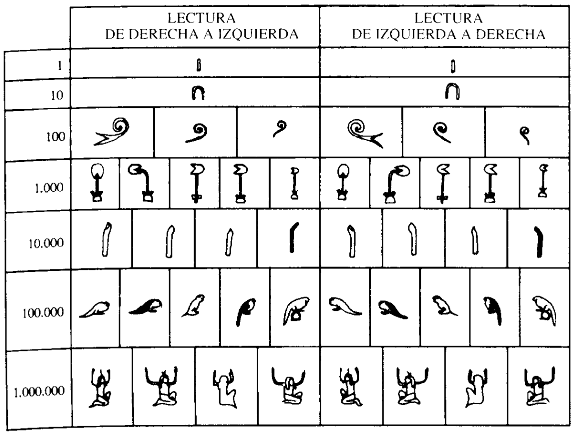

Fig. 2. Cifras fundamentales de la numeración jeroglífica egipcia y variantes

Esta notación era una manera de representar por escrito la forma de contar que tenían desde épocas arcaicas. Consistía en escribir los números por alineación o acumulación de objetos (piedras, conchas, guijarros, etc.) asociados cada uno de ellos al orden de la unidad utilizada.

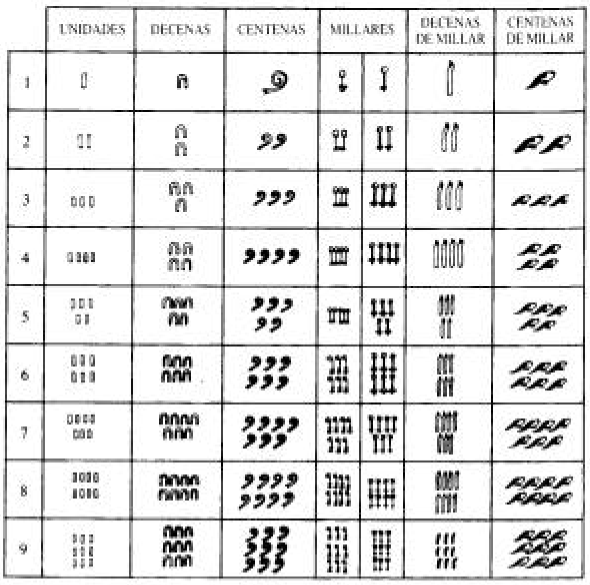

Fig. 3. Representación de unidades consecutivas de cada orden decimal.

Los hombres de la edad de piedra no representaron las fracciones, ya que no tenían necesidad de ellas. Fue en la edad del Bronce, al adquirir algunos pueblos un nivel cultural más elevado, cuando apareció dicha necesidad. En los jeroglíficos egipcios encontramos inscripciones que representan **fracciones** unitarias. Las fracciones unitarias son aquellas cuyo numerador es 1. Para representarlas se utilizaba un jeroglífico con forma de boca situado encima del número que actúa como denominador. Algunas fracciones, como ½ó ¼, tenían símbolos especiales.

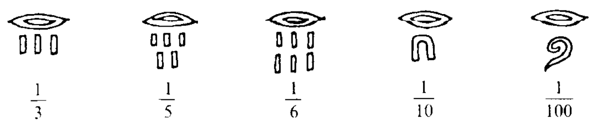

Fig. 4. Ejemplos de Fracciones Egipcias.

En Egipto existía otra notación numérica diferente de la que hemos descrito. Era utilizada por los escribas y se llamaba *escritura hierática*. Los escribas, desde el principio de las dinastías faraónicas, simplificaron el trazo, dando lugar a signos distintos de los jeroglíficos, con el paso del tiempo.

2.5. Los Griegos.

Los griegos emplearon varios sistemas de numeración a lo largo de su historia. Veamos los más importantes.

2.5.1. La Numeración Ática.

Este tipo de numeración atribuye un signo gráfico diferente a cada uno de los números 1, 5, 10, 50, 100, 500, 1.000, 5.000, 10.000, 50.000 y emplea el principio de adición.

1	I	100	H	10.000	M
2	II	200	HH	20.000	MM
3	III	300	HHH	30.000	MMM
4	IIII	400	HHHH	40.000	MMMM
5	Γ	500	𐅅	50.000	𐅇
6	ΓI	600	𐅅H	60.000	𐅇M
7	ΓII	700	𐅅HH	70.000	𐅇MM
8	ΓIII	800	𐅅HHH	80.000	𐅇MMM
9	ΓIIII	900	𐅅HHHH	90.000	𐅇MMMM
10	Δ	1.000	X		
20	ΔΔ	2.000	XX		
30	ΔΔΔ	3.000	XXX		
40	ΔΔΔΔ	4.000	XXXX		
50	𐅄	5.000	𐅆		
60	𐅄Δ	6.000	𐅆X		
70	𐅄ΔΔ	7.000	𐅆XX		
80	𐅄ΔΔΔ	8.000	𐅆XXX		
90	𐅄ΔΔΔΔ	9.000	𐅆XXXX		

Fig. 5. Sistema de notación numérica de inscripciones del Ática.

Este sistema presenta una particularidad: exceptuando a la unidad, los símbolos que sirven para representar el 5 y las potencias de 10 corresponden a la inicial del nombre griego que sirve para nombrarlas, o es una combinación de esas letras numerales. Es lo que se llama el principio de *acrofonía*. Los símbolos 50, 500, 5.000 y 50.000 se denotan mediante signos que siguen el principio multiplicativo. Para quintuplicar una potencia de 10 bastaba con incluir el símbolo que representa dicha potencia dentro del símbolo que representa al 5.

2.5.2. La Numeración Jónica o Alfabética.

Este sistema de numeración es en base 10 y aditivo. Existen símbolos para las cifras del 1 al 9, del 10 al 90 (sólo múltiplos de 10) y del 100 al 900 (sólo múltiplos de 100). En total son 27 símbolos.

Cuando el número a escribir era superior a 1.000, sólo tenían que escribir un número y precederlo del acento. Eso indicaba que dicho número estaba multiplicado por 1.000. Así, se podían representar todos los números inferiores a 10.000 con tan sólo cuatro símbolos.

Los 27 símbolos que se usaban correspondían con el alfabeto griego. El alfabeto actual sólo tiene 24 letras, pero se utilizaba el arcaico, que disponía de tres más.

2.5.3. Aportaciones de los Griegos.

Los griegos también utilizaban fracciones. Comenzaron, al igual que los egipcios, con fracciones unitarias, escribiendo el número y a continuación un acento o señal diacrítica. Poco después comenzaron a usar fracciones de cualquier tipo.

Establecieron la equivalencia de fracciones, a partir de las proporciones. Esto surgió debido al interés de convertir un rectángulo de lados *a* y *b* en un cuadrado, para lo que se precisaba resolver $\frac{a}{x}=\frac{x}{b}$

Uno de los fundamentos del pitagorismo era explicar todas las cosas por medio de las propiedades de los números naturales y de sus razones. Todo esto se vino abajo cuando descubrieron que había elementos, como la diagonal de un cuadrado de lado 1, que no eran medibles. A esos números se les llamó inconmensurables. Posteriormente, Euclides, en el *Libro X de Los Elementos* realiza una clasificación de los números inconmensurables o irracionales.

2.6. Los Romanos.

Las cifras romanas, al igual que algunos sistemas de numeración precedentes, no permitieron a sus usuarios realizar cálculos. Ello es debido a que son abreviaturas destinadas a anotar y retener números.

Inicialmente, la numeración romana se regía por el principio de adición. Posteriormente complicaron el sistema introduciendo una regla. *Todo signo numérico colocado a la izquierda de una cifra de valor superior se resta.* Así consiguieron no repetir más de tres veces el mismo signo.

Las cifras romanas nacieron mucho antes que la civilización romana. Provenían de los etruscos, y en general, de pueblos itálicos. Y estas, a su vez, tenían su origen en las griegas.

Si nos fijamos, la cifra más alta es M que representa 1.000. Para representar números grandes, surgieron varias iniciativas. La que más importancia tuvo fue la que consistía en multiplicar por 1.000 toda expresión numérica que tuviese encima una barra horizontal.

2.7. Los Hebreos.

En la época real (s. X-VI a.C.) los hebreos utilizaron las cifras hieráticas egipcias, desde la dominación persa a la época helenística (s. V-II a.C.) fueron las cifras arameas, y durante los primeros siglos de la era cristiana, gran parte de ellos manejaban las letras numerales griegas.

Para justificar esos cambios, hemos de saber que el pueblo de Israel, aunque desempeñó un papel de primer orden en la historia de las religiones, ha sufrido durante toda su historia las influencias de sus pueblos vecinos, ya fuesen aliados, huéspedes o conquistadores.

2.8. Los Chinos.

En China coexistieron dos esquemas de notación numérica. En el primero de ellos predominaba el principio multiplicativo y en el otro se utilizaba un sistema de notación posicional.

2.8.1. Sistema Multiplicativo.

Para expresar los números utilizan un sistema decimal formado por 13 signos que corresponden a las nueve unidades y a las primeras cuatro potencias de 10.

Fig. 6. Los 13 signos numéricos chinos.

A la hora de representar un número, los chinos proceden por adición y multiplicación a la vez. Por ejemplo:

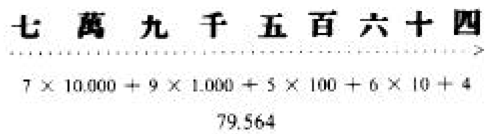

Fig. 7. Representación de un número

Debido a la influencia china, los pueblos limítrofes adoptaron sistemas de numeración iguales o muy similares. Entre ellos tenemos a los japoneses, los habitantes del reino de Anam (antiguo Vietnam), etc.

Para representar los números grandes, los chinos no necesitaron añadir ningún símbolo nuevo a los trece que ya disponían para poder escribir números hasta 10^{11}.

Consistía en considerar la decena de millar como una nueva unidad de cuenta. Así, representaban los números compuestos de la siguiente forma:

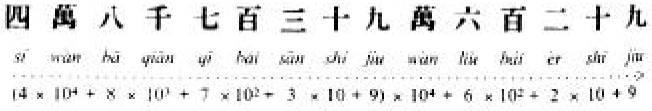

Fig. 8. Representación de un número grande compuesto.

2.8.2. Sistema Posicional.

Se dispone de documentación de este método del siglo II a.C. Es un sistema análogo a nuestra numeración moderna. Es en base 10 y el valor de sus cifras viene determinado por la posición que ocupan.

Se utilizan 18 símbolos, para representar los dígitos del 1 al 9 y los 9 primeros múltiplos de 10. La ausencia de un símbolo para indicar las unidades ausentes podía producir confusión. Inicialmente se dejaban espacios en blanco, pero después se idearon otros métodos. Uno de ellos fue disponer los símbolos en cuadrículas, de tal manera que una cuadrícula vacía significaba ausencia de cifra.

Conocían bien las fracciones, siendo capaces de obtener el mínimo común denominador de varias de ellas. Pero tenían preferencia por su escritura decimal. Los números negativos también fueron usados por los chinos, y probablemente sin muchos problemas, ya que estaban acostumbrados a calcular utilizando dos tipos de varillas, unas de color rojo para los positivos y otras de color negro para los negativos.

También estudiaron a fondo el número π, dando una aproximación de él que no se vio superada hasta el siglo XV.

Fue en el siglo VIII d.C. cuando los sabios chinos introdujeron un signo especial para escribir la ausencia de unidades (representado por un pequeño círculo). La idea, sin lugar a dudas, la tomaron de los matemáticos de la civilización India.

Es a partir de este momento cuando comenzaron a representar números fraccionarios e irracionales de una forma similar a la actual occidental.

2.9. Los Hindúes.

El sistema de numeración hindú es el que hemos heredado hoy en día. Comenzaron en el siglo III a.C. con nueve cifras, propias de la escritura *brahmi.* Hasta los siglos VI y VII d.C. el principio de notación numérica fue muy rudimentario. Se trataba de una notación en base decimal en la que utilizaban el principio de adición, atribuyendo un signo gráfico para cada uno de los números siguientes:

1	2	3	4	5	6	7	8	9
10	20	30	40	50	60	70	80	90
100	200	300	400	500	600	700	800	900
1000	2000	3000	4000	5000	6000	7000	8000	9000
10000	20000	30000	40000	50000	60000	70000	80000	90000

Se cree que el sistema de numeración posicional y el concepto de cero aparecieron en el siglo V d.C. ya que el documento *Lokavibhaga* (tratado de cosmología) así lo demuestra. De hecho, el propio documento indica que apareció el Lunes 25 de Agosto de 458. Y fue en el año 510 cuando el astrónomo indio Aryabhata inventa una notación numérica que precisa de un conocimiento perfecto del cero y del principio de posicionamiento en base decimal. Esta notación le permite realizar fácilmente raíces cuadradas y cúbicas.

En el año 628, el matemático y astrónomo *Brahmagupta* utiliza asiduamente este sistema de numeración posicional. Describe métodos de cálculo con las 9 cifras y el cero (muy similares a los actuales). Da las reglas algebraicas fundamentales, de números positivos y negativos, en las que el cero está presente como concepto matemático, y define el *infinito matemático* como el inverso del cero. Fue en este momento cuando se formaliza el uso de los números negativos.

En el año 875-876 se realizan las inscripciones de *Gwalior.* Son inscripciones en piedra propiamente indias donde aparece por primera vez el cero en forma de un pequeño círculo.

2.10. Los Árabes.

Un siglo después de la muerte del profeta Mahoma, los árabes del Islam habían conquistado un vasto imperio. En el siglo VIII se extendía desde los Pirineos hasta China. Es normal entonces, que un pueblo salido de las arenas del desierto de Arabia, asimilara rápidamente la cultura de los pueblos conquistados.

En lo que se refiere a su sistema de numeración, conocieron varios (egipcio, babilonio, griego, etc.) pero terminó imponiéndose el hindú, ya que era mucho más sencillo para escribir y para realizar operaciones que los demás. Fueron ellos los que trajeron al mundo occidental la forma de escritura que tenemos actualmente de los dígitos del 0 al 9. Y esta forma de escritura provenía de la escritura *Brahmi.*

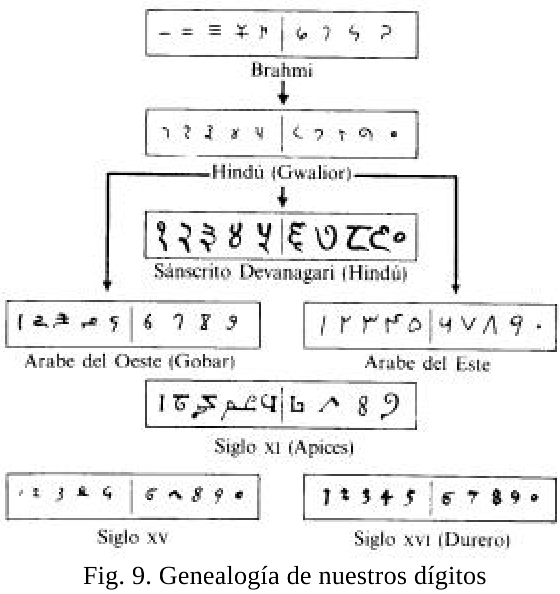

Fig. 9. Genealogía de nuestros dígitos

Los primeros en usar esta forma de numeración fueron los árabes orientales, que tenían como capital Bagdad. Gracias a las peregrinaciones a La Meca, alrededor del siglo IX se extendió al resto del Islam, alcanzando el arco mediterráneo. Así fue como entró en Europa el sistema de notación numérica posicional, el cero y las reglas aritméticas con números negativos de los hindúes.

2.11. Los Mayas.

Los Mayas fueron un pueblo que por su situación no pudieron recibir influencias del resto de las civilizaciones aquí descritas. Los mayas contaban en base 20 debido a la costumbre que habían adquirido de contar no sólo con los dedos de las manos sino también con los de los pies.

A pesar de trabajar en base 20, no tenían necesidad de 20 símbolos diferentes. Representaban la unidad mediante un punto y se ayudaban de una barra para representar el cinco. Combinaciones de estos dos elementos generaban los dígitos del 1 al 19.

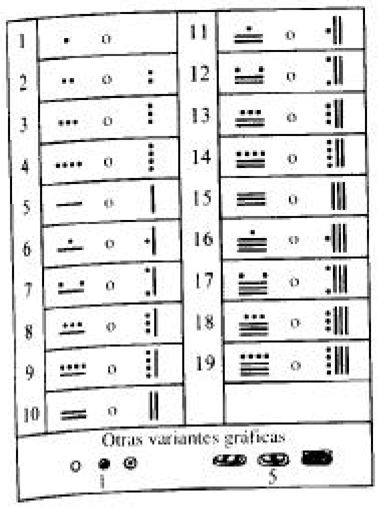

Fig. 10. Números Mayas.

El sistema de numeración era posicional, escribían de arriba hacia abajo, y tenían una irregularidad: el tercer nivel no correspondía al 20^2 (=20x20) sino al 360 (=18x20). Sólo sucedía en ese nivel ya que el cuarto y sucesivos era el anterior multiplicado por 20 (así, el cuarto nivel era 360x20=7200).

Para el caso en los que faltaba un número en una posición, los especialistas mayas inventaron el cero, y lo representaron mediante una concha o caparazón de caracol.

3. SUCESIVAS AMPLIACIONES DEL CONCEPTO DE NÚMERO.

Hasta ahora hemos visto como en las diferentes culturas se formalizó la acción de contar, creando sistemas de numeración. Al final prevaleció el sistema inventado por los hindúes, que consistía en los dígitos del 1 al 9 y otro para el cero siendo un sistema de numeración posicional en base 10. Ahora vamos a ver como surgieron los diferentes conjuntos de números tal cual los conocemos.

3.1. Los Números Naturales.

El número natural surge por la necesidad humana de contar. Hemos estado viendo como aparece en las diversas culturas y la forma que tienen de escribirlo. Al final prevaleció la hindú, al ser la más sencilla. Pero ese proceso duró varios siglos. Y tardó varios más en introducirse en Europa.

El matemático italiano Leonardo de Pisa, conocido como *Fibonacci*, realiza varios viajes al norte de África y Oriente Próximo y durante estos viajes se inicia en el arte del cálculo por medio de las nueve cifras más el cero, de origen hindú. En el año 1202 publica su tratado *Liber Abaci* (Tratado del Ábaco) que contribuirá al desarrollo de la aritmética y del álgebra en Europa occidental durante tres siglos. En él afirma: "*Es de esta forma, con estas nueve cifras, y con este signo 0, que recibe el nombre de zephirum en árabe, como se escriben todos los números que se quieran*".

Casi desde el comienzo de la utilización de las cifras, se sabía sumar y multiplicar, aunque algunos de los diferentes sistemas de numeración antiguos no lo permitieran o no fuese fácil, como el romano.

3.2. Los Números Enteros.

Los números enteros surgen por la necesidad de restar dos cantidades. Los griegos ya realizaban esa operación, pero fueron de nuevo los hindúes los que aportaron los números negativos como resultado de operaciones de medida en condiciones absurdas (a-b si a<b). En la obra de *Brahmagupta* encontramos reglas numéricas acerca de los números positivos y negativos.

La introducción de los números negativos en Europa la realiza *Nicolas Chuquet*, matemático francés. En su obra titulada *Triparty en la science des nombres* utiliza con habilidad tanto el cero como los números negativos de origen hindú, siendo publicada en 1484. En la primera parte de su obra realiza operaciones aritméticas con números enteros, utilizando las cuatro operaciones fundamentales suma, resta, producto y división.

Hubo que esperar al s. XIX para que Weierstrass diera el modelo de los números enteros, definiéndolos como clases de pares de naturales mediante una relación de equivalencia obvia que permitía la "resta" de naturales. La relación de equivalencia es $(a,b)R(c,d) \Leftrightarrow a+d = b+c$ donde (a,b) y (c,d) pertenecen a $\mathbb{N}x\mathbb{N}$ y define el número entero como a-b. A partir de aquí obtiene todas las propiedades de los números enteros para las operaciones de suma y producto.

3.3. Los Números Racionales.

Las fracciones eran conocidas desde la Antigüedad, pero recibieron notaciones complicadas a falta de un sistema de numeración bien concebido, y eran inadecuadas para realizar operaciones.

En un principio, las fracciones no eran consideradas como auténticos números, no eran más que relaciones entre números enteros. Era debido a que en muchas civilizaciones se considerara a la unidad como un dios, y por tanto no podía ser dividido. Cuando se desarrolló la aritmética y el cálculo, se vio que estaban sometidas a las mismas reglas que el resto de los números y podían considerarse como tales.

Los babilonios fueron los primeros en usar una notación racional para los números fraccionarios, dividiendo la unidad en potencias sucesivas de 60. Los griegos, intentaron elaborar una notación general para cualquier tipo de fracción (no sólo las unitarias), pero su numeración alfabética no era apta, por lo que tuvieron que abandonar dicho intento y adoptar la notación en base 60 de los babilonios (para las fracciones). Hoy en día todavía nos quedan reminiscencias en la forma de medir ángulos o tiempos.

La notación moderna de las fracciones se la debemos de nuevo a los hindúes, quienes, con su notación posicional, simbolizaban las fracciones casi como nosotros. Esta notación fue adoptada por los Árabes, quienes introdujeron la famosa barra horizontal para separar numerador y denominador.

Cuando se descubrieron las fracciones decimales (las que tienen denominador potencia de 10) se hizo patente la necesidad de prolongar la numeración posicional decimal hindú en el otro sentido (ahora se diría: "a la derecha de la coma"). Así se puede anotar con facilidad todas las fracciones y los números enteros serían un tipo particular de números: los que no poseen cifras significativas a la derecha de las unidades. Este tipo de fracciones ya se usaban en China, en la Arabia Medieval y en la Europa renacentista. En 1579, François Viète, proclama su decidido apoyo a estas fracciones.

Fueron *Bürgi* y *Stevin* dos matemáticos a caballo entre el siglo XVI y XVII los que contribuyeron al desarrollo y divulgación de las fracciones decimales. Y éste último, en 1585, solicitó el uso de una escala en base 10 para las fracciones, como ya lo estaba para los enteros. Fue precisamente *Simon Stevin* el primero en franquear el paso decisivo hacia nuestra notación actual escribiendo los números decimales sin denominador, sino que encerraba en un círculo, a continuación de cada dígito, la potencia de 10 que debía llevar como divisor. Así:

El número 237'941 lo escribía 237 (0) 9 (1) 4 (2) 1 (3)

El suizo *Jost Bürgi* simplificó la notación, eliminando la mención al orden de las cifras y sustituyéndolo por un circulito situado en la parte superior de las unidades:

$$23\overset{\circ}{7}941$$

Y poco tiempo después, el cartógrafo italiano *Magini* (1555-1617), sustituyó el redondelito por el punto situado entre las unidades y las décimas, que ha perdurado hasta nuestros días. En cuanto a la coma, el primero que la utilizó fue el holandés *Willebrod Snellius*, a comienzos del siglo XVII.

La definición formal de número racional se hizo a partir de la de número entero, pues es de la misma manera. Se definieron como clases de pares de números enteros relacionados mediante una relación de equivalencia que permitía simetrizar el producto, es decir, realizar la división. La relación de equivalencia es

$$(a,b)R(c,d) \Leftrightarrow ad = bc$$

donde (a,b) y (c,d) pertenecen a $\mathbb{Z}$x$\mathbb{Z}$ y define el número racional como $r = \dfrac{a}{b}$

3.4. El Número Real.

Desde el siglo VI a.C., los matemáticos griegos habían descubierto que la diagonal de un cuadrado de lado 1 no tiene medida conocida, es decir, es inconmensurable. Fue así como descubrieron los que hoy llamamos *números irracionales*, aquellos que no son ni enteros ni racionales.

Como es natural, este descubrimiento causó consternación entre los pitagóricos, ya que creían que *el número rige el universo*, pensando sólo en los números enteros y sus combinaciones los racionales. Aunque decidieron no darle publicidad al hallazgo, otros si lo hicieron, dándolos a conocer. Se admitión entonces la existencia de estos números, siendo algunos ejemplos $\sqrt{2}, \quad \sqrt{5}, \quad \sqrt[3]{10}, \quad \boldsymbol{p}$.

Estos números formaban una categoría más bien imprecisa, debido a que los sistemas de numeración de la época no resultaban ser los más adecuados. Los europeos, beneficiándose del sistema de numeración posicional hindú de base 10 que habían adoptado fueron capaces de definirlos con precisión: *esos números podían expresarse en forma decimal, siendo infinitas las cifras tras la coma, sin que se reprodujeran nunca en el mismo orden*. Esa era la diferencia que tenían con los números racionales.

A lo largo del siglo XIX se consiguió dar una definición formal de número real. En 1830, Bolzano intentó desarrollar una teoría de números reales como límites de sucesiones de números racionales, aunque no se publicó hasta 1962. Fue en el año 1872 cuando cinco matemáticos (*Mèray, Weierstrass, Heine, Cantor y Dedekind*) dieron con la definición formal de número real.

Mèray definió el limite de una sucesión como un número real. Y demostró que toda sucesión de Cauchy era convergente. Weierstrass separó la definición de número real del concepto de límite y definió los números irracionales de forma general como conjuntos de racionales. Heine y Cantor realizaron trabajos similares a los dos descritos.

Un planteamiento completamente distinto fue el desarrollado por Dedekind. Consiguió definir los números reales por medio de cortaduras. Consiste en obtener una partición de los números racionales en dos clases disjuntas, A y B, tales que todo número de la primera clase A es menor que todo número de la segunda clase B. Entonces existe uno y sólo un número real tal que si en A existe máximo o en B mínimo, el número real coincide con el máximo o mínimo y por tanto es racional, y en caso contrario el número real no está ni en A ni en B y es irracional.

3.5. El Número Complejo.

El primero en introducir los números complejos es Cardano, que en año 1545 publica su obra *Ars Magna*, en la que explica como resolver los diferentes casos de ecuaciones cúbicas. Como soluciones a esas ecuaciones obtenía raíces cuadradas negativas que él mismo denominó *sofisticas*. En su época, los números irracionales habían sido aceptados, ya que se podían aproximar por racionales, los enteros producían más dificultades, pero de pronto se toparon con raíces cuadradas negativas al aplicar las fórmulas de Cardano-Tartaglia para la resolución de dichas ecuaciones cúbicas.

A través de un ingenioso razonamiento, Bombelli obtiene propiedades de los números complejos conjugados, aunque en ese momento (comtemporáneo de Cardano) no sirvieron de mucho.

Desde la época de *Albert Girard* (1590-1633) ya se sabía que los números reales, positivos, cero y negativos se pueden representar en correspondencia con los puntos de una recta. *Wallis* sugirió que los números imaginarios puros se podían representar por los puntos de una recta perpendicular al eje de los números reales. Pero fueron *Wessel* y sobre todo *Gauss* los que establecieron la correspondencia entre los números complejos y los puntos del plano.

En 1777 *Leonhard Euler* introdujo el símbolo *i* para representar a $\sqrt{-1}$ y formuló la expresión $e^{pi}+1=0$, donde aparecen los cinco números más importantes de la historia de las Matemáticas. El matemático alemán *Carl F. Gauss*, en su tesis doctoral de 1799, demostró su famoso teorema fundamental del álgebra, que dice que todo polinomio con coeficientes complejos tiene al menos una raíz compleja.

<u>Bibliografía.</u>

- Historia de la Matemática. Carl B. Boyer (Alianza Editorial).
- Historia Universal de las Cifras. Georges Ifrah (Espasa)
- Elementos de historia de las Matemáticas. N. Bourbaki (Alianza Universidad)