TEMAS DE MATEMÁTICAS
(Oposiciones de Secundaria)

TEMA 52

<u>PRODUCTO ESCALAR DE VECTORES. PRODUCTO VECTORIAL Y PRODUCTO MIXTO. APLICACIONES A LA RESOLUCION DE PROBLEMAS FISICOS Y GEOMETRICOS.</u>

TEMA 52

PRODUCTO ESCALAR DE VECTORES. PRODUCTO VECTORIAL Y PRODUCTO MIXTO. APLICACIONES A LA RESOLUCION DE PROBLEMAS FISICOS Y GEOMETRICOS.

1. PRODUCTO ESCALAR.

DEF Sea V un espacio vectorial real. Se llama producto escalar en V a toda aplicación $f : V \times V \to R$ que verifique los siguientes axiomas:

Ax1	$f(\vec{u},\vec{u}) > 0$ si $\vec{u} \neq \vec{0}$	
Ax2	$f(\vec{u},\vec{v}) = f(\vec{v},\vec{u})$	
Ax3	$f(\vec{u},\vec{v}+\vec{w}) = f(\vec{u},\vec{v}) + f(\vec{u},\vec{w})$	$\forall\ \vec{u},\vec{v},\vec{w} \in V$
Ax4	$f(\alpha\vec{u},\vec{v}) = \alpha f(\vec{u},\vec{v})$	$\forall\ \alpha \in R$

El número real $f(\vec{u},\vec{v})$ se escribe simplemente $\vec{u} \cdot \vec{v}$, y por abuso del lenguaje, se dice que es el producto escalar de $\vec{u}$ y $\vec{v}$. En lo que sigue adoptaremos esta notación.

PROP $(\vec{u}+\vec{v})\,\vec{w} = \vec{u}\,\vec{w} + \vec{v}\,\vec{w}$

Dem.

$(\vec{u}+\vec{v})\,\vec{w} = \vec{w}(\vec{u}+\vec{v}) = \vec{w}\,\vec{u} + \vec{w}\,\vec{v} = \vec{u}\,\vec{w} + \vec{v}\,\vec{w} = (\vec{u}+\vec{v})\,\vec{w}$

PROP $\vec{u}\,(\alpha\,\vec{v}) = \alpha\,(\vec{u}\,\vec{v})$

Dem.

$\vec{u}\,(\alpha\,\vec{v}) = (\alpha\,\vec{v})\,\vec{u} = \alpha\,(\vec{v}\,\vec{u}) = \alpha\,(\vec{u}\,\vec{v})$

PROP $\vec{u}\,\vec{0} = 0 \qquad \forall\ \vec{u} \in V$

Dem.

$\vec{u}\,\vec{0} = \vec{u}\,(\vec{0}+\vec{0}) = \vec{u}\,\vec{0} + \vec{u}\,\vec{0} \;\Rightarrow\; \vec{u}\,\vec{0} = 0$

PROP $\vec{u}\,\vec{u} = 0 \;\Leftrightarrow\; \vec{u} = \vec{0}$

Dem.

Si $\vec{u} = \vec{0}$ se reduce al caso anterior

Si $\vec{u} \neq \vec{0}$,entonces $\vec{u}\ \vec{u} > 0$, contradicción

1.1. Norma De Un Vector. Espacio Normado.

Supongamos definido un producto escalar en V.

DEF Dado $\vec{u} \in V$, llamamos norma de $\vec{u}$ (o módulo) y se designa por $\|\vec{u}\|$, al nº real $\|\vec{u}\| = \sqrt{\vec{u}\cdot\vec{u}}$ (La definición tiene sentido pues $\vec{u}\ \vec{u} \geq 0 \ \ \forall \vec{u} \in V$)

TEOREMA

$\forall \vec{u}, \vec{v} \in V$ se verifica $|\vec{u}\ \vec{v}| \leq \|\vec{u}\| \ \|\vec{v}\|$ (Desigualdad de Cauchy-Schwartz)

Dem.

Si $\vec{u} = \vec{0}$ o $\vec{v} = \vec{0}$, el teorema es evidente. Supongamos ahora $\vec{u}, \vec{v}$ no nulos y sea $\vec{u} + \alpha\ \vec{v}$, $\alpha \in \mathbb{R}$ un cierto vector.

Se verifica $\|\vec{u} + \alpha\vec{v}\|^2 = (\vec{u} + \alpha\ \vec{v})(\vec{u} + \alpha\ \vec{v}) = \vec{u}\ \vec{u} + 2\alpha\ \vec{u}\ \vec{v} + \alpha^2 \vec{v}\ \vec{v} = \|\vec{u}\|^2 + 2\alpha(\vec{u}\ \vec{v}) + \alpha^2\|\vec{v}\|^2 \geq 0 \qquad \forall \alpha \in R$

Entonces el discriminante de la ecuación de segundo grado en α debe ser ≤ 0

$\Rightarrow (\vec{u}\ \vec{v}) - \|\vec{u}\|^2\|\vec{v}\|^2 \leq 0 \qquad \Rightarrow \qquad |\vec{u}\ \vec{v}| \leq \|\vec{u}\|\ \|\vec{v}\|$

(La ecuación anterior ocurrirá cuando $\vec{u}$ y $\vec{v}$ sean L.D)

PROP Se verifican las siguientes expresiones:

a) $\|\vec{u}\| \geq 0$
b) $\|\vec{u}\| = 0 \Leftrightarrow \vec{u} = 0$
c) $\|\vec{u} + \vec{v}\| \leq \|\vec{u}\| + \|\vec{v}\|$
d) $\|\alpha\vec{u}\| = |\alpha|\,\|\vec{u}\|$

Dem.

1, 2 y 4 son evidentes.

3) $\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + 2(\vec{u}\ \vec{v}) + \|\vec{v}\|^2 \leq \|\vec{u}\|^2 + 2\|\vec{u}\|\ \|\vec{v}\| \Rightarrow \|\vec{u} + \vec{v}\|^2 \leq (\|\vec{u}\| + \|\vec{v}\|)^2$ c.q.d.

DEF Un espacio vectorial real V sobre el que se define una aplicación $\|\ \|: V \to R$ que verifique las 4 propiedades anteriores es un espacio normado.

DEF Los vectores de norma 1 se llaman unitarios.

DEF Se dice que una base de V es normada si todos los vectores que la componen son unitarios.

1.2. Ortogonalidad. Ángulos.

DEF Dos vectores $\vec{u}, \vec{v} \in V$ se dice que son ortogonales si y solo si $\vec{u}\ \vec{v} = 0$.

PROP Se verifica:

1) El vector $\vec{0}$ es ortogonal a todo vector $\vec{u} \in V$
2) El único vector ortogonal a si mismo es el vector $\vec{0}$
3) Si $\vec{u}$ y $\vec{v}$ son ortogonales y no nulos, son linealmente independientes.
4) Si $\vec{u}$ y $\vec{v}$ son ortogonales entonces $\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2$

DEF Se dice que una base de V es ortogonal si los vectores que la componen son ortogonales dos a dos.

DEF Una base ortogonal y normada de V es una base ortonormada.

Sabemos que si $\vec{u}, \vec{v}$ son no nulos se tiene $(\vec{u}\ \vec{v})^2 \leq \|\vec{u}\|^2 \|\vec{v}\|^2$ (desigualdad de Cauchy-Schwartz) de donde $-1 \leq \dfrac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{\|\vec{u}\|\cdot\|\vec{v}\|} \leq 1$ podemos entonces

DEF Definimos el coseno del ángulo que forman dos vectores $\vec{u}, \vec{v}$ mediante la expresión

$$\cos(\vec{u}, \vec{v}) = \frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{\|\vec{u}\|\cdot\|\vec{v}\|}$$

que puede escribirse también de esta otra forma:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \cos(\vec{u}, \vec{v})$$

Hasta ahora los conceptos de norma e incluso de ángulo están desprovistos de sentido geométrico, al tratarse de elementos definidos en un espacio vectorial real de V.

Vamos a particularizar a los espacios vectoriales V_2 y V_3

DEF Al par formado por el plano afín E_2 y un producto escalar definido en V_2 lo llamaremos plano afín euclídeo.

DEF Al par formado por el espacio afín E_3 y un producto escalar definido en V_3 lo llamaremos espacio afín euclídeo.

1.3. Producto Escalar en V_2.

Sea B = $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2\}$ una base de V_2 y $\vec{u}, \vec{v}$ vectores de V_2 se tendrá

$\vec{u} = x_1\,\vec{u}_1 + y_1\,\vec{u}_2$
$\vec{v} = x_2\,\vec{u}_1 + y_2\,\vec{u}_2$

entonces

$\vec{u}\cdot\vec{v} = (x_1\,\vec{u}_1 + y_1\,\vec{u}_2)(x_2\,\vec{u}_1 + y_2\,\vec{u}_2) = (x_1\,x_2)(\vec{u}_1\,\vec{u}_2) + (x_1\,y_2)(\vec{u}_1\,\vec{u}_2) +$
$+ (y_1\,x_2)(\vec{u}_2\,\vec{u}_1) + (y_1\,y_2)(\vec{u}_2\,\vec{u}_2)$

(por los axiomas del producto escalar)

En forma matricial puede escribirse así:

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = (x_1\ y_1)\begin{pmatrix}\vec{u}_1\vec{u}_2 & \vec{u}_1\vec{u}_2\\ \vec{u}_2\vec{u}_1 & \vec{u}_2\vec{u}_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_2\\ y_2\end{pmatrix}$$

OBS Por tanto, el producto escalar queda determinado cuando se conoce la matriz (simétrica) $\begin{pmatrix}\vec{u}_1\vec{u}_2 & \vec{u}_1\vec{u}_2\\ \vec{u}_2\vec{u}_1 & \vec{u}_2\vec{u}_2\end{pmatrix}$ que se llama matriz del producto escalar.

OBS Cuando la base B es ortonormal se tiene $\vec{u}_1\,\vec{u}_1 = \vec{u}_2\,\vec{u}_2 = 1 \quad \vec{u}_1\,\vec{u}_2 = \vec{u}_2\,\vec{u}_1 = 0$, y entonces la matriz del producto escalar es la matriz identidad.

En una base ortonormal tenemos que:

El producto escalar es $\vec{u}\;\vec{v} = x_1\,x_2 + y_1\,y_2$

El módulo de $\vec{u} = (x_1, x_2)$ es $\|\vec{u}\| = \sqrt{x_1^2 + y_1^2}$

El coseno del ángulo que forman $\vec{u}$, $\vec{v}$ es $\cos(\vec{u}\,,\vec{v}) = \dfrac{x_1x_2 + y_1y_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2}\sqrt{x_2^2 + y_2^2}}$

OBS La relación $\vec{u}\;\vec{v} = \|\vec{u}\|\,\|\vec{v}\|\cos(\vec{u}\,,\vec{v})$ obtenida de la simple definición de producto escalar, es la expresión clásica del producto escalar ordinario. En ocasiones suele introducirse el producto escalar directamente, suponiendo conocidos los conceptos de módulo, norma o longitud de un vector, y el concepto de ángulo. En ese caso, las propiedades que definen el producto escalar deben demostrarse.

<u>NOTA</u>: El módulo o longitud de un vector $\vec{u}$ de V_2 es la longitud del segmento de un representante de $\vec{u}$. Se denota por $|\vec{u}|$.

Si se define $\vec{u}\;\vec{v} = |\vec{u}|\,|\vec{v}|\cos(\vec{u}\,,\vec{v})$, entonces $\vec{u}\;\vec{u} = |\vec{u}|\,|\vec{u}|$ pero también es $\vec{u}\;\vec{u} = \|\vec{u}\|\,\|\vec{u}\|$, luego $|\vec{u}| = \|\vec{u}\|$

1.4. Producto Escalar En V_3.

Sea B = $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}$ una base de V_3, $\vec{u}, \vec{v} \in V_3$ dos vectores. Entonces, si expresamos ambos vectores en la base B

$$\vec{u} = x_1\,\vec{u}_1 + y_1\,\vec{u}_2 + z_1\,\vec{u}_3$$
$$\vec{v} = x_2\,\vec{u}_1 + y_2\,\vec{u}_2 + z_2\,\vec{u}_3$$

tenemos que su producto escalar es:

$$\vec{u}\ \vec{v} = (x_1\,\vec{u}_1 + y_1\,\vec{u}_2 + z_1\,\vec{u}_3)(x_2\,\vec{u}_1 + y_2\,\vec{u}_2 + z_2\,\vec{u}_3) = (x_1\,x_2)(\vec{u}_1\,\vec{u}_1) + (x_1\,y_2)(\vec{u}_1\,\vec{u}_2) + (x_1\,z_2)(\vec{u}_1\,\vec{u}_3) + (y_1\,x_2)(\vec{u}_2\,\vec{u}_1) + (y_1\,y_2)(\vec{u}_2\,\vec{u}_2) + (y_1\,z_2)(\vec{u}_2\,\vec{u}_3) + (z_1\,x_2)(\vec{u}_3\,\vec{u}_1) + (z_1\,y_2)(\vec{u}_3\,\vec{u}_2) + (z_1\,z_2)(\vec{u}_3\,\vec{u}_3)$$

por los axiomas del producto escalar.

Nuevamente en forma matricial

$$\vec{u}\ \vec{v} = (x_1\ y_1\ z_1)\begin{pmatrix} \vec{u}_1\vec{u}_1 & \vec{u}_1\vec{u}_2 & \vec{u}_1\vec{u}_3 \\ \vec{u}_2\vec{u}_1 & \vec{u}_2\vec{u}_2 & \vec{u}_2\vec{u}_3 \\ \vec{u}_3\vec{u}_1 & \vec{u}_3\vec{u}_2 & \vec{u}_3\vec{u}_3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

donde $\begin{pmatrix} \vec{u}_1\vec{u}_1 & \vec{u}_1\vec{u}_2 & \vec{u}_1\vec{u}_3 \\ \vec{u}_2\vec{u}_1 & \vec{u}_2\vec{u}_2 & \vec{u}_2\vec{u}_3 \\ \vec{u}_3\vec{u}_1 & \vec{u}_3\vec{u}_2 & \vec{u}_3\vec{u}_3 \end{pmatrix}$ es la matriz del producto escalar en la base B.

Si la base es ortonormal entonces dicha matriz es la identidad y el producto escalar se escribe de forma más simple como:

$$\vec{u}\ \vec{v} = x_1\,x_2 + y_1\,y_2 + z_1\,z_2$$

Igualmente, la norma de un vector y el coseno del ángulo de dos vectores se pueden escribir, respectivamente, como:

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}$$

$$\cos(\vec{u}, \vec{v}) = \frac{x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}\sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}$$

El producto escalar ordinario de dos vectores puede definirse partiendo de:

$\vec{u}\ \vec{v} = |\vec{u}|\,|\vec{v}|\cos(\vec{u}\ \vec{v})$ si $\vec{u}, \vec{v}$ son no nulos

$\vec{u}\ \vec{v} = 0$ si $\vec{u} = \vec{0}$ ó $\vec{v} = \vec{0}$

El símbolo $|\vec{u}|$ expresa el módulo de $\vec{u}$, la longitud de uno de sus representantes y coincide con el concepto de norma, al igual que vimos para V_2.

2. PRODUCTO VECTORIAL DE DOS VECTORES DE V_3.

DEF Sean $\vec{a}\ \vec{b} \in V_3$, llamamos Producto Vectorial de $\vec{a}$ y $\vec{b}$ y se escribe $\vec{a}\times\vec{b}$ a otro vector que verifica:

1) $\|\vec{a}x\vec{b}\| = \|\vec{a}\|\ \|\vec{b}\|\ |sen(\vec{a},\vec{b})|$

2) $(\vec{a}\times\vec{b})\vec{a} = 0$, $(\vec{a}\times\vec{b})\vec{b} = 0$

3) En caso que $\vec{a}$ y $\vec{b}$ sean linealmente independientes, la orientación determinada por la base ortonormal $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}$ de V_3 es la misma que la determinada por $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{a}\times\vec{b})$, o lo que es lo mismo,

$$\text{signo } [\det(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3)] = \text{signo } [\det(\vec{a}, \vec{b}, \vec{a}\times\vec{b})]$$

2.1. Expresion Analítica en una Base Ortonormal.

Sea B = $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}$ una base ortonormal de V_3

$$\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$$
$$\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$$
$$\vec{w} = \vec{a}\times\vec{b} = (w_1, w_2, w_3)$$

por 2) se tiene $(\vec{a}\times\vec{b})\vec{a} = 0 \Rightarrow a_1\ w_1 + a_2\ w_2 + a_3\ w_3 = 0$

$(\vec{a}\times\vec{b})\vec{b} = 0 \Rightarrow b_1\ w_1 + b_2\ w_2 + b_3\ w_3 = 0$

Si $\vec{a}$ y $\vec{b}$ fuesen linealmente dependientes sería $\vec{a} = \lambda\ \vec{b}$, y por 1) $\|\vec{a}x\vec{b}\| = 0$ $\Rightarrow \vec{a}\times\vec{b} = \vec{0}$, luego podemos suponer $\vec{a}$ y $\vec{b}$ linealmente independientes.

Entonces

$\text{rang}\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{pmatrix} = 2$, y tomando un menor de orden 2 no nulo, por ejemplo

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} = \Delta \neq 0$$

$$\left.\begin{matrix} a_1 w_1 + a_2 w_2 = -a_3 w_3 \\ b_1 w_1 + b_2 w_2 = -b_3 w_3 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \quad w_1 = \frac{\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}}{\Delta}\ w_3$$

Llamemos $w_3 = t\Delta$

$$w_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix}}{\Delta}\, w_3$$

$$\Rightarrow\; w_1 = t\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}, \qquad w_2 = t\begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix}, \qquad w_3 = t\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}$$

Si la base está orientada positivamente, entonces por 3),

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix} > 0 \;\Rightarrow\; w_1\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} + w_2\begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix} + w_3\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} > 0$$

$$\Rightarrow w_1\frac{w_1}{t} + w_2\frac{w_2}{t} + w_3\frac{w_3}{t} > 0 \;\Rightarrow\; \frac{1}{t}(w_1^{\,2} + w_2^{\,2} + w_3^{\,2}) > 0$$

Además $\vec{w}\,\vec{w} = t^2 \left(\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}^2\right)$ y también

$$\vec{w}\,\vec{w} = \|\vec{a}\|^2\|\vec{b}\|^2 \mathrm{sen}^2(\vec{a},\vec{b}) = \|\vec{a}\|^2\|\vec{b}\|^2 - (\vec{a}\,\vec{b})^2 \;\Rightarrow$$

$$\vec{w}\,\vec{w} = (a_1^{\,2} + a_2^{\,2} + a_3^{\,2})(b_1^{\,2} + b_2^{\,2} + b_3^{\,2}) - (a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3)^2 = \ldots =$$

$$= a_1^{\,2}b_1^{\,2} + a_2^{\,2}b_1^{\,2} + a_3^{\,2}b_1^{\,2} + a_1^{\,2}b_2^{\,2} + a_2^{\,2}b_2^{\,2} + a_3^{\,2}b_2^{\,2} + a_1^{\,2}b_3^{\,2} + a_2^{\,2}b_3^{\,2} + a_3^{\,2}b_3^{\,2} -$$

$$- a_1^{\,2}b_1^{\,2} - a_2^{\,2}b_2{}^{-}a_3^{\,2}b_3^{\,2} - 2a_1 a_2 b_1 b_2 - 2a_1 a_3 b_1 b_3 - 2a_2 a_3 b_2 b_3 = \ldots =$$

$$= (b_1 a_2 - a_1 b_2)^2 + (a_3 b_1 - a_1 b_3)^2 + (a_3 b_2 - a_2 b_3)^2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}^2$$

$$\Rightarrow\; t^2 = 1 \;\Rightarrow\; t = 1$$

por tanto

$\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$
$\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$
$\vec{a} \times \vec{b} = \left(\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}\right)$ (cuando la base es ortonormal)

OBS A veces se suele adoptar como definición, demostrando en este caso 1), 2) y 3). Lo hemos hecho de esta forma pues la interpretación geométrica del producto vectorial es más inmediata. Así el producto vectorial de dos vectores $\vec{a}\,,\vec{b}$ es otro vector ortogonal a ambos, cuyo módulo es $\|\vec{a}\|\;\|\vec{b}\|$sen($\vec{a}\,,\vec{b}$), siendo el área del paralelogramo determinado por representantes de origen común de $\vec{a}$ y $\vec{b}$ y cuyo sentido viene dado por la regla del sacacorchos (orientación positiva de la base ortonormal de V_3 elegida).

PROP $\forall\ \vec{a}\,,\vec{b}\,,\vec{c} \in V_3$ y $\forall\ \boldsymbol{a} \in R$, se verifica:

1) $\vec{a}\,\mathrm{x}\,\vec{b} = -\vec{b}\,\mathrm{x}\,\vec{a}$
2) $\vec{a}\,\mathrm{x}(\boldsymbol{a}\,\vec{b}\,) = \boldsymbol{a}\,(\vec{a}\,\mathrm{x}\,\vec{b}\,) = (\boldsymbol{a}\,\vec{a}\,)\mathrm{x}\,\vec{b}$
3) $\vec{a}\,\mathrm{x}(\vec{b} + \vec{c}\,) = \vec{a}\,\mathrm{x}\,\vec{b} + \vec{a}\,\mathrm{x}\,\vec{c}$
4) $(\vec{a} + \vec{b}\,)\mathrm{x}\,\vec{c} = \vec{a}\,\mathrm{x}\,\vec{c} + \vec{b}\,\mathrm{x}\,\vec{c}$
5) $\vec{a}\,\mathrm{x}\,\vec{0} = \vec{0}$
6) $\vec{a}\,\mathrm{x}\,\vec{b} = \vec{0} \Rightarrow \vec{a}\,,\ \vec{b}$ son linealmente independientes.

Dem.

Estas propiedades se demuestran fácilmente si pensamos en la forma usual de calcular el producto vectorial cuando nos dan 2 vectores expresados en una base ortonormal:

$$\vec{a}\,\mathrm{x}\,\vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{u}_1 & \vec{u}_2 & \vec{u}_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

Evidentemente la expresión no es un determinante pero ayuda mucho a recordar la expresión del producto vectorial.

3. PRODUCTO MIXTO DE TRES VECTORES DE V_3.

DEF Dados $\vec{x}\,,\vec{y}\,,\vec{z} \in V_3$ se define el producto mixto de los tres vectores como el nº real:

$$[\,\vec{x}\,,\vec{y}\,,\vec{z}\,] = \vec{x}\cdot(\vec{y}\,\mathrm{x}\,\vec{z}\,)$$

3.1. Expresión Analítica en una Base Ortonormal.

$$\left.\begin{array}{l} \vec{x} = (x_1, x_2, x_3) \\ \vec{y} = (y_1, y_2, y_3) \\ \vec{z} = (z_1, z_2, z_3) \end{array}\right. \qquad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \vec{x}\,(\,\vec{y}\,\mathrm{x}\,\vec{z}\,) = x_1 \begin{vmatrix} y_2 & y_3 \\ z_2 & z_3 \end{vmatrix} + x_2 \begin{vmatrix} y_3 & y_1 \\ z_3 & z_1 \end{vmatrix} + x_3 \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ z_1 & z_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix} = \det(\,\vec{x}\,,\vec{y}\,,\vec{z}\,)$$

PROP Se verifica:

1) $[\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}] = [\vec{z}, \vec{x}, \vec{y}] = [\vec{y}, \vec{z}, \vec{x}] = -[\vec{x}, \vec{z}, \vec{y}] = -[\vec{z}, \vec{y}, \vec{x}] = -[\vec{y}, \vec{x}, \vec{z}]$
2) Si alguno de ellos es $\vec{0}$, entonces el producto mixto es 0
3) $\lambda [\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}] = [\lambda \vec{x}, \vec{y}, \vec{z}]$
4) $[\vec{x} + \vec{x}', \vec{y}, \vec{z}] = [\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}] + [\vec{x}', \vec{y}\ \vec{z}]$

<u>Dem.</u>

Son propiedades de determinantes.

3.2. Interpretación geométrica.

Sea R = { 0, $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3$} una referencia ortonormal del espacio E_3 y $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AD}$ representantes respectivos de los vectores $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$.

Dichos vectores determinan un paralelepípedo del que $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}$ son 3 aristas concurrentes en un vértice.

El volumen del paralelepípedo es: A x Base x h

A x Base = $\| \overrightarrow{AC} \times \overrightarrow{AD} \|$

La altura h es la distancia de B al plano ACD y como $\overrightarrow{AC} \times \overrightarrow{AD}$ es un vector normal al plano se tiene que h = $\left\| \overrightarrow{AB} \dfrac{\overrightarrow{AC} \times \overrightarrow{AD}}{\left\| \overrightarrow{AC} \times \overrightarrow{AD} \right\|} \right\| \Rightarrow$

$$V = \| \overrightarrow{AC} \times \overrightarrow{AD} \| \cdot h = | \overrightarrow{AB} (\overrightarrow{AC} \times \overrightarrow{AD}) | = [\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}]$$

4. APLICACIONES.

El producto escalar definido en V_2 y V_3 de la forma ordinaria permite introducir las nociones métricas de distancia y ángulo en el plano y espacio de forma clara y sencilla. Igualmente el producto vectorial nos facilita el cálculo de áreas, y el producto mixto, el cálculo de volúmenes. Todas estas cuestiones, que perfectamente pueden introducirse aquí, son propias del tema 53, y ahí se verán con detalle. Pero igualmente, nos facilitan la resolución de numerosos problemas geométricos y físicos. Veamos ejemplos de algunos de los más destacados.

4.1. Ecuación Normal de una Recta del Plano.

Supongamos R = { 0, $\vec{u}_1, \vec{u}_2$ } referencia ortonormal. Una recta r puede venir dada por un punto A(x_0 , y_0) y un vector $\vec{u}$ = (A, B) en la dirección perpendicular a r. Cualquier punto P(x, y) de r verifica

$$\vec{u} \cdot \overrightarrow{AP} = 0 \Rightarrow (A, B)(x - x_0 , y - y_0) = 0 \Rightarrow A(x- x_0) + B(y - y_0) = 0$$

ó bien

$$Ax + By + (-A x_0 - B y_0) = 0 \Rightarrow Ax + By + C = 0$$

4.2. Ecuación Normal del Plano.

Igualmente , un plano p viene dado por un punto A(x_0 , y_0 , z_0) de p y un vector $\vec{n}$ = (A, B, C) normal al plano.

Si P$\in p$ se tiene que

$$\overrightarrow{AP}\ \vec{n} = 0 \Rightarrow A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$$

$$\Rightarrow Ax + By + Cz + D = 0$$

siendo $D = -A x_0 - B y_0 - C z_0$

4.3. Teorema del coseno y de Pitágoras.

TEOREMA

En todo triangulo ABC se verifica $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$

Dem.

Si llamamos $\vec{b} = \overrightarrow{AC}$, $\vec{a} = \overrightarrow{CB}$, $\vec{c} = \overrightarrow{AB}$

se tiene

$$\vec{c} = \vec{a} + \vec{b} \Rightarrow \vec{a} = \vec{c} - \vec{b}$$

$$(\vec{a})^2 = \vec{a}\ \vec{a} = (\vec{c} - \vec{b})(\vec{c} - \vec{b}) = (\vec{c})^2 + (\vec{b})^2 - 2\vec{b}\ \vec{c} \Leftrightarrow a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$$

OBS Si el triángulo es rectángulo en A entonces se obtiene el teorema de Pitágoras.

4.4. Las Tres Alturas de un Triángulo son concurrentes en un Punto.

TEOREMA

Dados 4 puntos A, B, C, D cualesquiera del plano, se verifica que

$$\overrightarrow{AB}\ \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{AC}\ \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{AD}\ \overrightarrow{BC} = 0$$

Dem.

Llamamos $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$, $\overrightarrow{AC} = \vec{v}$, $\overrightarrow{AD} = \vec{w}$, $\overrightarrow{CD} = \vec{w} - \vec{v}$, $\overrightarrow{DB} = \vec{u} - \vec{w}$, $\overrightarrow{BC} = \vec{v} - \vec{u}$

Luego, basándonos en las propiedades del producto escalar

$$\vec{u}\,(\vec{w} - \vec{v}) + \vec{v}\,(\vec{u} - \vec{w}) + \vec{w}\,(\vec{v} - \vec{u}) = 0$$

Ello nos permite probar, por ejemplo que:

PROP Las tres alturas de un triángulo son concurrentes.

Dem.

Tracemos las alturas correspondientes a C y B que se cortan en O. Debemos probar que $\overrightarrow{AO}$ es ortogonal a $\overrightarrow{BC}$.

Aplicando la igualdad anterior a los puntos A, B, C, O obtenemos

$$\overrightarrow{AB}\ \overrightarrow{CO} + \overrightarrow{AC}\ \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{AO}\ \overrightarrow{BC} = 0$$

pero

$$\overrightarrow{AB}\ \overrightarrow{CO} = 0 \text{ y } \overrightarrow{AC}\ \overrightarrow{OB} = 0 \text{ por hipótesis,}$$

luego

$$\overrightarrow{AO}\ \overrightarrow{BC} = 0 \text{ como queríamos demostrar.}$$

4.5. Las diagonales de un rombo son perpendiculares.

En efecto $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$, $\overrightarrow{AC} = \vec{v}$ $\|\vec{u}\| = \|\vec{v}\|$,

Pero

$$\overrightarrow{BC} = \vec{v} - \vec{u} \text{ y } \overrightarrow{AD} = \vec{v} + \vec{u} \Rightarrow \overrightarrow{BC}\ \overrightarrow{AD} = (\vec{v} + \vec{u})(\vec{v} - \vec{u}) = 0.$$

4.6. Obtención de Fórmulas Trigonométricas.

Complicadas fórmulas de trigonometría se obtienen fácilmente con el producto escalar.

Sea B $= \{\vec{u}_1, \vec{u}_2\}$ una base de V_2 ortonormal y $\vec{a}, \vec{b}$ vectores unitarios tal que $(\vec{u}_1, \vec{a}) = \alpha$, $(\vec{u}_2, \vec{b}) = \beta$

Entonces $\vec{a} = \lambda_1 \vec{u}_1 + \lambda_2 \vec{u}_2 \Rightarrow \vec{u}_1 \vec{a} = \lambda_1 = \cos\alpha$

y

$$\vec{u}_2\ \vec{a} = \lambda_2 = \cos(\pi/2 - \alpha) = \operatorname{sen}\alpha$$

Así

$$\vec{a} = \cos\alpha\ \vec{u}_1 + \operatorname{sen}\alpha\ \vec{u}_2$$

y análogamente

$$\vec{b} = \cos \beta\, \vec{u}_1 + \operatorname{sen} \beta\, \vec{u}_2$$

$\vec{a}\,\vec{b} = \cos\alpha \cos\beta + \operatorname{sen}\alpha \operatorname{sen}\beta = \|\vec{a}\|\,\|\vec{b}\| \cos(\beta - \alpha)$

$\Rightarrow \cos(\beta - \alpha) = \cos\alpha \cos\beta + \operatorname{sen}\alpha \operatorname{sen}\beta$

Otro ejemplo si $\vec{a}$, $\vec{b}$ son unitarios y determinan un ángulo entonces $(\vec{a}, \vec{a}+\vec{b}) = \frac{\alpha}{2}$ (al ser unitarios $\vec{a}+\vec{b}$ es la diagonal del cuadrado que forman)

$$\vec{a}(\vec{a}+\vec{b}) = 1 + \cos\alpha = \|\vec{a}\|\,\|\vec{a}+\vec{b}\| \cos\frac{\alpha}{2}$$

$$\|\vec{a}+\vec{b}\| = \sqrt{(\vec{a}+\vec{b})(\vec{a}+\vec{b})} = \sqrt{2+2\cos\alpha} \Rightarrow 1+\cos\alpha = \sqrt{2+2\cos\alpha}\,\cos\frac{\alpha}{2} \Rightarrow$$

$$\cos\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}$$

4.7. Trabajo de una Fuerza.

El producto escalar está asociado en física con un concepto muy importante, el de TRABAJO.

Así, la aplicación de una fuerza $\vec{F}$ a un móvil que sigue una trayectoria $\vec{d}$, nos proporciona un trabajo que puede definirse como T = $\vec{F}\,\vec{d}$.

4.8. Fórmula de Herón para el cálculo del Área de un Triángulo.

$$A = \frac{b \cdot h_B}{2} \qquad h_B^2 = c^2 - c_1^2$$

Por el teorema del coseno (demostrado con el p. escalar) $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$

$\Rightarrow a^2 = b^2 + c^2 - 2bc_1 \Rightarrow c_1 = \dfrac{b^2+c^2-a^2}{2b}$

$$h_B^2 = c^2 - \left(\frac{b^2+c^2-a^2}{2b}\right)^2 = \left(c + \frac{b^2+c^2-a^2}{2b}\right)\left(c - \frac{b^2+c^2-a^2}{2b}\right) = \left(\frac{(b+c)^2-a^2}{2b}\right)$$

$$\left(\frac{a^2-(b-c)^2}{2b}\right) = \frac{(b+c-a)(b+c+a)(a-b+c)(a+b-c)}{4b^2}$$

Llamando $p = \dfrac{a+b+c}{2}$

$$h_B^2 = \frac{2(p-a)2p2(p-b)2(p-c)}{4b^2} \Rightarrow h_B = \frac{2}{b}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

luego A = $\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$

Bibliografía Recomendada.

Curso de Álgebra y Geometría. Aut. Juan de Burgos. Ed. Alambra Universidad.

Álgebra Lineal. Aut. F. Puerta. Ed. Univ. Politécnica de Barcelona.

Matemáticas COU, Tomo I. Aut. Vizmanos-Anzola.