TEMAS DE MATEMATICAS
(Oposiciones de Secundaria)

TEMA 47
<u>GENERACIÓN DE CURVAS COMO ENVOLVENTES.</u>

1. Introducción.
2. Envolvente.
   2.1. Definición de Envolvente.
   2.2. Existencia de Envolvente en el Plano.
   2.3. Determinación Práctica de la envolvente en el Plano.
   2.4. La Astroide.
3. Evoluta y Envolventes.
   3.1. Evoluta de una curva Plana.
   3.2. Ejemplos de Evolutas.
      3.2.1. Evoluta de la Elipse.
      3.2.2. Rectas del Plano dadas en forma Polar.
   3.3. Evolventes de una curva plana.
4. Envolvente de una Familia de Curvas.
   4.1. Curvas en Forma Paramétrica.
   4.2. Curvas en Forma Explícita.
   4.3. Curvas en Forma Implícita.
   4.4. Propiedades de la envolvente.
5. Construcción de Algunas Curvas.
   5.1. Trazado de la Evolvente del Círculo.
   5.2. Trazado de la Curva Pericicloide.
   5.3. Trazado de la Curva Epicicloide.
   5.4. Trazado de la Curva Cardioide.
   5.5. Trazado de la Curva Hipocicloide.

Bibliografía Recomendada.

TEMA 47

GENERACIÓN DE CURVAS COMO ENVOLVENTES.

1. INTRODUCCIÓN.

En este tema vamos a describir un tipo especial de curvas: las curvas generadas como envolventes. Son curvas de gran interés ya que tienen gran cantidad de aplicaciones.

2. ENVOLVENTE DE UNA FAMILIA DE RECTAS.

2.1. Definición de Envolvente.

Sea D el conjunto formado por todas las rectas del plano.

$$D = \{ y = ax + b / a, b \in \mathbb{R} \}$$

DEF Llamaremos Familia de Rectas dependientes de un Parámetro a la imagen de una aplicación.

$$\boldsymbol{j} : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathrm{D}$$

y designaremos a la familia como $(D_t)_{t \in I}$

Ejemplos

1. Dado el plano cartesiano, podemos definir tres funciones numéricas $\boldsymbol{a}(t), \boldsymbol{b}(t)$ y $\boldsymbol{g}(t)$ con t$\in$ I.

Entonces, las rectas

$$D_t \equiv \boldsymbol{a}(t)x + \boldsymbol{b}(t)y + \boldsymbol{g}(t) = 0$$

determinan una familia en función del parámetro t$\in$ I.

2. También podemos determinar una familia de rectas por su ecuación vectorial.

$$D_t \equiv \vec{r} = \vec{a}(t) + \boldsymbol{l}\vec{v}(t)$$

siendo $\vec{a}, \vec{v} : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ dos funciones vectoriales y $\boldsymbol{l} \in \mathbb{R}$ una variable independiente de t. $\vec{a}(t)$ es un punto del plano y $\vec{v}(t)$ el vector director que determina la recta $D_t \equiv \vec{r}$ en función del parámetro t$\in I$.

DEF Llamaremos envolvente de una familia de rectas dependientes de un parámetro, $(D_t)_{t \in I}$,a un arco parametrizado $(I, \vec{f})$ tal que, en todo punto $(t, \vec{f}(t))$, la recta D_t sea tangente al arco.

El par $\left(I,\vec{f}\right)$ también recibe el nombre de curve en paremétricas.

DEF Llamaremos Punto Característico de la recta D_t a $\left(t,\vec{f}(t)\right)$.

2.2. Existencias de Envolvente en el Plano.

PROP Una familia de rectas del plano dependientes de un parámetro posee, en general, un envolvente.

Dem

Sea $(D_t)_{t\in I}$ la familia de rectas definidas como

$$\vec{r}=\vec{\alpha}(t)+\lambda\vec{v}(t)$$

siendo las funciones $\vec{\alpha}(t)$ y $\vec{v}(t)$ derivables en I.

El arco $\left(I,\vec{f}\right)$ es la envolvente de la familia de rectas $(D_t)_{t\in I}$ si para todo $t\in I$, el punto característico $\vec{f}(t)$ pertenece a D_t y el vector $\vec{f}(t)$ que define la tangente al arco en ese punto, tiene la dirección de D_t.

Supongamos que existe una función $\vec{f}:I\to\mathbb{R}^2$ tal que el arco $\left(I,\vec{f}\right)$ sea la envolvente de la familia dada. Entonces:

1) $\forall t\in I$ el punto $\vec{r}=\vec{f}(t)\in D_t$.

Existe, por tanto, un número real $\lambda(t)$ tal que

$$\vec{f}(t)=\vec{\alpha}(t)+\lambda(t)\cdot\vec{v}(t) \qquad (1)$$

La determinación de la función f equivale a hallar la función $\lambda:I\to\mathbb{R}$

2) El vector derivada $\vec{f}\,'(t)$ (que en general será distinto de cero) debe ser vector director de D_t. Ahora bien, si derivamos (1)

$$\vec{f}\,'(t)=\vec{\alpha}\,'(t)+\lambda(t)\vec{v}\,'(t)+\lambda'(t)\vec{v}(t)$$

Y como $\vec{v}(t)$ es el vector director de D_t, ha de existir un $\mu(t)\in\mathbb{R}$ tal que:

$$\vec{\alpha}\,'(t)+\lambda(t)\vec{v}\,'(t)+\mu(t)\vec{v}(t)=\vec{o} \qquad (2)$$

Recíprocamente, si existe $\lambda,\mu:I\to\mathbb{R}$ funciones numéricas que satisfacen la expresión (2), y si λ es derivable, la función vectorial $\vec{f}$ dada por (1) es derivable, y su derivada verifica la ecuación:

$$\vec{f}'(t)=\left[\boldsymbol{l}'(t)-m(t)\right]\cdot\vec{v}(t)$$

por tanto, el vector $\vec{f}(t)$ es nulo o colineal con $\vec{v}(t)$.

Por tanto, la existencia de la envolvente están ligada a la existencia de dos funciones numéricas $\boldsymbol{l}$ y m que satisfagan (2).

Y (2) exige que los vectores $\vec{\boldsymbol{a}}'(t), \vec{v}'(t)$ y $v(t)$ sean Linealmente Dependientes, condición que trivialmente se verifica en el plano relación (2) se puede obtener las funciones λ y μ como sigue:

- Multiplicando escalarmente por $\vec{w}(t)$

$$\vec{\boldsymbol{a}}'(t)\cdot\vec{w}(t)+\boldsymbol{l}(t)\cdot\vec{v}'(t)\cdot\vec{w}(t)=\vec{o}$$

$$\boldsymbol{l}(t)=\frac{-\vec{\boldsymbol{a}}'(t)\cdot\vec{w}(t)}{\vec{v}'(t)\cdot\vec{w}(t)} \qquad (3)$$

- Multiplicando por $\vec{u}(t)$, perpendicularmente a $\vec{v}'(t)$ resulta:

$$\vec{\boldsymbol{a}}'(t)\vec{u}'+m(t)\cdot\vec{v}(t)\cdot\vec{u}(t)=\vec{o}$$

$$m(t)=-\frac{\vec{\boldsymbol{a}}'(t)\cdot\vec{u}(t)}{\vec{v}(t)\cdot\vec{u}(t)} \qquad (4)$$

En términos generales, estos dos valores existirán siempre, salvo $\vec{v}(t)$ y $\vec{v}'(t)$ sean colineales, en cuyo caso se anulan los denominadores. Si $\vec{v}(t)$ y $\vec{v}'(t)$ son linealmente independientes, para todo $t\in I$ existe un único par de funciones λ(t) y μ(t) que satisfacen (3) y (4). Este par único de funciones constituye la única solución de (2). La función λ(t), así determinada, define la función $\vec{f}$.

En el caso general, para la mayoría de valores de $t\in I$, se tiene también $\boldsymbol{l}'(t)\neq m(t)$, de donde se deduce $\vec{f}'(t)\neq\vec{o}$. Tal punto $t\in I$ es un punto ordinario del arco $\left(I,\vec{f}\right)$. La tangente al arco en ese punto es la recta D_t.

Si para cierto valor $t_o\in I$ se tiene $\boldsymbol{l}'(t_o)=m(t_o)$ entonces $\vec{f}'(t_o)=\vec{o}$.

El punto $\left(t_o,\vec{f}(t_o)\right)$ del arco $\left(I,\vec{f}\right)$ es un punto singular, y no es posible afirmar que la tangente al arco en ese punto sea la recta D_t.

Si la situación anterior nos la encontramos en puntos aislados, diremos también que $\vec{f}(t_o)$ es un punto característico de D_o. Teniendo en cuenta esto, la envolvente de la familia $(D_t)_{t\in I}$ es el arco $\left(I, \vec{f}\right)$, incluidos los puntos singulares. Así, es posible evitar el cálculo de la función μ.

Si $\vec{v}(t)$ y $\vec{v}\,'(t)$ son linealmente dependientes, tenemos:

1) Si $\vec{\alpha}\,'(t_o)$ no es colineal con $\vec{v}(t_o)$, la expresión (3) no tiene solución para λ ya que $\vec{w}(t)$, que es perpendicular a $\vec{v}(t)$, también lo será a $\vec{v}\,'(t)$ y por tanto

$$(3) \Rightarrow \vec{\alpha}\,'(t)\cdot\vec{w}(t) = \vec{o}$$

lo cual es imposible.

2) Si $\vec{\alpha}\,'(t_o)$ es colineal con $\vec{v}(t_o)$ es colineal con $\vec{v}(t_o)$, todo número real λ verifica (3) y todos los puntos de la recta D_{t_o} satisfacen las condiciones de punto característico. Diremos que D_{t_o} es una recta estacionaria de la familia.

Como casos singulares tenemos:

a) Si el par de funciones λ y μ verifican

$$\lambda'(t) = \mu(t) \qquad \forall t \in I$$

Entonces, se tiene

$$\vec{f}\,'(t) = \vec{o} \quad \forall t \in I \Rightarrow \vec{f}(t) = \vec{C}$$

siendo $\vec{c}$ un vector fijo.

Así pues, todas las rectas de la familia $(F_t)_{t\in I}$ pasan por el punto fijo $\vec{c}$. La familia forma una radicación de rectas concurrentes en $\vec{c}$.

b) Supongamos que $\vec{v}(t)$ satisface que $\{\vec{v}(t), \vec{v}\,'(t)\}$ son linealmente dependientes $\forall t \in I$. Entonces $\vec{v}$ ha de tener una orientación fija.

La familia $(D_t)_{t\in I}$ forma una radicación de rectas paralelas de la misma dirección que $\vec{v}$.

Como conclusión a todo lo anterior podemos enunciar

TEOREMA La familia de rectas del plano dependientes de un parámetro $(D_t)_{t\in I}$ $\vec{r} = \vec{\alpha}(t) + \lambda\cdot\vec{v}(t)$ con $\vec{\alpha}, \vec{v} : I \to \mathbb{R}^2$ admite, en general, una envolvente $\left(I, \vec{f}\right)$ con

$$\vec{f}(t) = \vec{\alpha}(t) + \lambda(t)\vec{v}(t)$$

donde la función λ(t) es la solución de la ecuación

$$\vec{a}'(t) + \boldsymbol{l}(t)\vec{v}(t) + m(t)\cdot\vec{v}(t) = \vec{o}$$

2.3. Determinación Práctica de la Envolvente en el Plano.

TEOREMA La envolvente de la familia de rectas del plano,

$$(D_t)_{t\in I} \qquad \boldsymbol{a}(t)\cdot x + \boldsymbol{b}(t)y + \boldsymbol{g}(t) = 0$$

con α, β, γ: I → ℝ y derivables ∀t∈I, se obtiene derivando primero esta relación respecto de la variable t:

$$\boldsymbol{a}'(t)\cdot x + \boldsymbol{b}'(t)\cdot' + \boldsymbol{g}'(t) = 0$$

y resolviendo a continuación con el sistema formado por las dos ecuaciones. La solución (c, y) serán las coordenadas de $\vec{f}(t)$ que define la envolvente $(I, \vec{f})$.

Dem.

Determinaremos la envolvente $(I, \vec{f})$ mediante las coordenadas

$$\left.\begin{array}{l} x = \boldsymbol{j}(t) \\ y = \boldsymbol{j}(t) \end{array}\right\} \text{ de } \vec{f}(t)$$

Lo vamos a hacer basándonos en el razonamiento desarrollado en el punto anterior.

a) El punto $\vec{f}(t) = (\boldsymbol{j}(t), \boldsymbol{y}(t))$ ha de pertenecer a D_t. entonces

$$\boldsymbol{a}(t)\boldsymbol{j}(t) + \boldsymbol{b}(t)\boldsymbol{y}(t) + \boldsymbol{g}(t) = 0 \qquad \forall t \in I \qquad (5)$$

b) El vector tangente $\vec{f}'(t) = (\boldsymbol{j}'(t), \boldsymbol{y}'(t))$ ha de ser paralelo a D_t, entonces

$$\boldsymbol{a}(t)\boldsymbol{j}'(t) + \boldsymbol{b}(t)\boldsymbol{y}'(t) = 0 \qquad \forall t \in I \qquad (6)$$

Si derivamos la expresión (5) y tenemos en cuenta la expresión (6) obtendremos

$$\boldsymbol{a}'(t)\boldsymbol{j}(t) + \boldsymbol{b}'(t)\boldsymbol{y}(t) + \boldsymbol{g}'(t) = 0 \qquad \forall t \in I \qquad (7)$$

Recíprocamente, toda solución $(\boldsymbol{j}, \boldsymbol{y})$ del sistema de ecuaciones formado por las expresiones (5) y (7) es también solución de la expresión (6) y representa, por tanto, la envolvente buscada.

2.4. La Astroide.

Sea un sistema de referencia ortonormal del plano y l∈$\mathbb{R}^+$ un número dado. Consideremos la familia de rectas que cortan a los ejes en dos puntos, siendo la distancia entre estos constante de valor 2l.

Vamos a obtener ecuaciones de estas rectas, que dependerán de un parámetro.

Una recta cortará a los ejes en dos puntos que llamaremos P y Q, verificándose d(P,Q) = 2l. Sea A el punto medio del segmento que une P y Q. Definimos el parámetro t como

$$t = L(OX, OA) \quad \text{con} \quad t \in [0, 2p)$$

Si d(P,Q) = 2l entonces d(0,A) = l siendo entonces las coordenadas del punto A

A(lcost, lsent)

Es fácil ahora obtener las coordenadas de P y Q

P(2lcost, 0) y Q(0, 2lsent)

Y de aquí conseguimos la ecuación de la recta que pasa por P y Q

$$\frac{x}{2l\cos t} + \frac{y}{2l\operatorname{sen} t} = 1$$

Para obtener la familia de rectas, vamos a limitarnos a tomar $I = [0, 2p]$, siendo

$$(D_t)_{t \in I} \qquad x \operatorname{sen} t + y \cos t = 2lSentCost \qquad (8)$$

Ahora ya estamos en condiciones de hallar la envolvente a esta familia de rectas. Para ello aplicamos el teorema anterior.

Derivando los dos miembros de la expresión (8) con respecto al parámetro t

$$x\cos t - y \operatorname{sen} t = 2l\left(Cos^2 t - Sen^2 t\right) \qquad (9)$$

Ahora hemos de resolver el sistema formado por (8) y (9) siendo

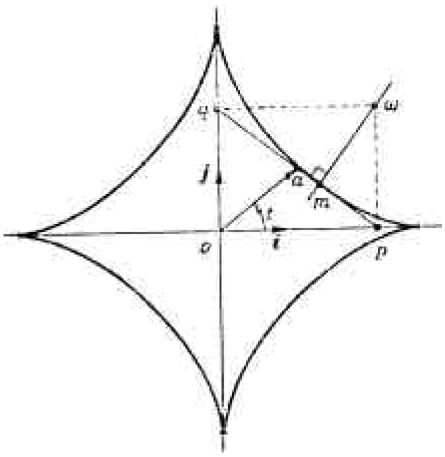
$$x(t) = 2lCos^3 t$$
$$y(t) = 2lSen^3 t$$

y definimos $\vec{f}(t) = (x(t), y(t))$.

La envolvente $(I, \vec{f})$ que acabamos de obtener recibe el nombre de Astroide.

Esta ecuación representa la recta trazada por W(2lcost, 2lSent) perpendicular al segmento PQ, cuyo vector $\vec{p}\vec{q}$ es linealmente dependiente con (cost – sent).

El punto característico m sobre D_t es el pie de dicha perpendicular.



3. EVOLUTAS Y EVOLVENTES.

3.1. Evoluta de una curva Plana.

DEF Llamaremos Evoluta de una curve paramétrica $\left(I, \vec{f}\right)$, con f: I $\rightarrow$ $\mathbb{R}^2$ derivable dos veces, a la envoltura de la familia de rectas normales a la curva paramétrica.

Sea el sistema de referencia de Frenet correspondiente a un punto S$\in$I, determinado por

$\vec{f}(s)$, como origen de coordenadas

$\vec{T} = \vec{f}'(s)$ como vector que define un eje de coordenadas que pasa por $\vec{f}(s)$.

$\vec{N}$ = vector normal a $\vec{f}$ en $\vec{f}(s)$, y perpendicular a $\vec{f}'(s)$

DEF Definimos el radio de curvatura ρ del arco $\left(I, \vec{f}\right)$ en s como

$$\frac{d\vec{T}}{ds} = \frac{1}{r}\vec{N} \qquad \text{y} \qquad \frac{d\vec{N}}{ds} = \frac{1}{r} = \frac{1}{r}\vec{T}$$

TEOREMA La envoltura ce una curva plana es el conjunto de los centros de curvatura.

Dem.

La ecuación vectorial de la normal a $\vec{f}$ en cada punto viene determinada por

$$\vec{p} = f` + \boldsymbol{l}\vec{N}$$

Para determinar el punto característico de esta recta calculamos la función λ(s) de forma que $\vec{p}'(s)$ y $\vec{p}(s)$ sean linealmente dependientes. $\forall$s$\in$I. Entonces

$$\vec{p}'(s) = \frac{d\vec{p}}{ds} = \frac{d\vec{f}}{ds} + \lambda\frac{s\vec{N}}{ds} + \frac{d\lambda}{ds}\cdot\vec{N} = \vec{T} + \lambda\left(-\frac{1}{\rho}\right)\vec{T} + \frac{d\lambda}{ds}\cdot\vec{N} = \left(1-\frac{\lambda}{\rho}\right)\vec{T} + \frac{d\lambda}{ds}\vec{N}$$

Para que $\vec{p}'(s)$ y $\vec{N}$ sean colineales basta con

$$1-\frac{\lambda}{\rho} = 0 \qquad \lambda = \rho$$

Queda así determinado el punto característico de la normal, el cual es precisamente el centro de curvatura en el punto $s\in I$.

3.2. Ejemplos de Evolutas.

3.2.1. Evoluta de la Elipse.

La elipse $(I, \vec{f})$ viene dada por

$$I = [0,2\pi] \qquad \vec{f}(\theta) = \begin{cases} x = aCos\theta \\ y = bSen\theta \end{cases}$$

En el punto $\theta\in I$ la ecuación de la normal es

$$-aSen\theta(x - a\cos\theta) + bCos\theta(y - b\,\mathrm{sen}\,\theta) = 0$$

Haciendo $c^2 = a^2 - b^2$ obtenemos la familia de rectas normales a la elipse

$$(D_\theta)_{\theta\in I} \qquad -a\,\mathrm{sen}\,\theta\cdot x + bCos\theta\cdot y + c^2 Sen\theta Cos\theta = 0$$

Para hallar la envolvente de esta familia se calcula primero

$$(D'_\theta)_{\theta\in I} \qquad -Cos\theta x - bSen\theta\cdot y + c^2\left(Cos^2\theta - Sen^2\theta\right) = 0$$

Resolviendo el sistema formado por las dos ecuaciones anteriores tenemos:

$$\vec{c}(\theta): \qquad x = \frac{c^2}{a}Cos^3\theta \quad y \quad y = -\frac{c^2}{b}Sen^3\theta$$

La evoluta es $(I,\vec{c})$, que es la transformación de la Astroide:

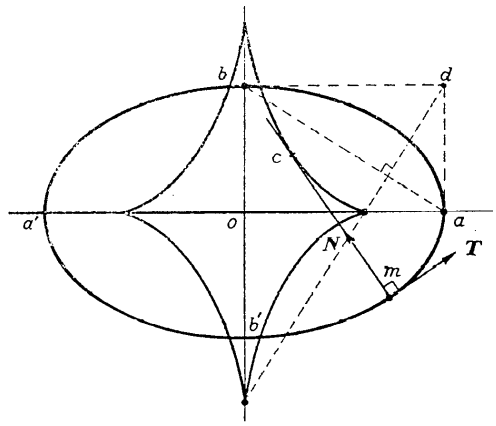
$$\left.\begin{aligned} X &= \frac{c^2}{a}Cos^3\theta \\ Y &= \frac{c^2}{a}Sen^3\theta \end{aligned}\right\} \text{ al aplicarle la afinidad se eje OX y de razón } -\frac{a}{b}\text{, es decir}$$

$$\left.\begin{array}{l} x = X \\ y = -\dfrac{a}{b}\, y \end{array}\right\}$$

Los puntos de retroceso de la evoluta $\left(\dfrac{c^2}{a},0\right)$ y $\left(0,-\dfrac{c^2}{b}\right)$ se obtienen trazando, por el cuarto vértice d del rectángulo construido sobre los semiejes OX y Ob positivos de la elipse, la normal a la diagonal ab. La ecuación de esta recta normal es

$$-ax + b + c^2 = 0$$

Por tanto, encuentra a los ejes OX y OY respectivamente, en los puntos de retroceso en cuestión. Los restantes se deducen por simetría.

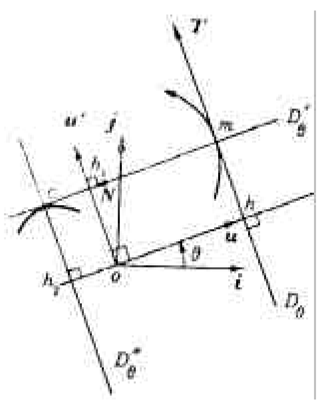


3.2.2. Rectas del plano dadas en forma polar.

Sea $(D_q)_{q\in I}$ una familia de rectas del plano, siendo el parámetro θ su ángulo polar:

$$\boldsymbol{q} = L(\vec{i},\vec{u})$$

donde $\vec{u}$ es un vector unitario normal de la recta D_q. Vamos a calcular la envolvente $(I,\vec{v})$ de la familia $(D_q)_{q\in I}$ y la evoluta $(I,\vec{c})$ del arco $(I,\vec{f})$.



El pie de la normal a D_θ trazada por el origen O, que denotaremos por h, describe un arco $\left(I, \vec{h}\right)$, denominado Podaria del arco $\left(I, \vec{f}\right)$ con relación al punto O. Sea $\vec{h} = r\vec{u}$ la ecuación de la Podaria en coordenadas polares, con $r(\theta)$ una función

$$r : I \to \mathbb{R}$$

La ecuación cartesiana de la familia de rectas es:

$$\left(D_\theta\right)_{\theta \in I} \qquad xCos\theta + ySen\theta = r(\theta)$$

Aplicando lo visto ya para el cálculo de la envolvente, basta resolver el sistema formado por la ecuación y su derivada respecto del parámetro θ:

$$\left(D'_\theta\right)_{\theta \in I} \qquad -xSen\theta + yCos\theta = r'(\theta)$$

La recta D'_θ es normal al vector $\vec{u}'(\theta)$ y pasa por el punto h_1, definido como $h_1 = r'(\theta) \cdot \vec{u}'$.

El punto característico m de D_θ es $m = D_\theta \cap D'_\theta$

La envolvente $\left(I, \vec{f}\right)$ de la familia $\left(D_\theta\right)_{\theta \in I}$ tiene a $\left(D'_\theta\right)_{\theta \in I}$ como familia de normales.

La evoluta del arco $\left(I, \vec{f}\right)$ coincide, por consiguiente, con al propio arco (I, f). Es la evolvente de la familia $\left(D'_\theta\right)_{\theta \in I}$.

Para hallar esta evolvente, derivamos de nuevo

$$\left(D''_\theta\right)_{\theta \in I} \qquad -xCos\theta - ySen\theta = r''(\theta)$$

La recta D''_θ es normal al vector $\vec{u}$ y pasa por el punto h_2 tal que $\vec{h}_2 = -r''(\theta) \cdot \vec{u}$.

El centro de curvatura del arco $\left(I, \vec{f}\right)$ es $c = D'_\theta \cap D''_\theta$. La evoluta $\left(I, \vec{c}\right)$ del arco $\left(I, \vec{f}\right)$ está definida por las coordenadas de $\vec{c}$, solución del sistema $\left(D'_\theta , D''_\theta\right)$.

3.3. Evolventes de una curva plana.

DEF Llamamos Evolvente de un arco $\left(I, \vec{f}\right)$ a otro arco $\left(I, \vec{p}\right)$ que admite a $\left(I, \vec{f}\right)$ como Evoluta.

Sea el arco $\left(I, \vec{f}\right)$ dado en representación normal. La ecuación vectorial de la tangente en $\vec{m}$ es:

$$\vec{p} = \vec{f} + \lambda\vec{T}$$

Vamos a obtener la función $\lambda : I \to \mathbb{R}$ de forma que el arco $(I, \vec{p})$ admite la recta anterior como normal, $\forall s \in I$.

$$\frac{d\vec{p}}{ds} = \vec{T} + \frac{d\lambda}{ds}\vec{T} + \lambda \frac{d\vec{T}}{ds} = \left(1 + \frac{d\lambda}{ds}\right)\vec{T} + \frac{\lambda}{\rho}\vec{N}$$

con ρ el radio de curvatura en el punto $s \in I$.

Para que $\frac{d\vec{p}}{ds}$ sea normal a $\vec{T}$ basta con que

$$1 + \frac{d\lambda}{ds} = 0$$

de donde se deduce

$$d\lambda = -ds \Rightarrow \lambda = -s + k \quad \text{(con k = cte)}$$

Obtenemos una familia parametrizada de los arcos $(I, p_k)_{k \in \mathbb{R}}$ siendo k el parámetro, y su ecuación.

$$\vec{p}_k = \vec{f} + (k - s)\vec{T}$$

$\forall k, k' \in \mathbb{R}$ $\forall s \in I$, los arcos $(I, \vec{p}_k)$ e $(I, \vec{p}_{k'})$ admiten tangentes paralelas, ya que:

$$\frac{d\vec{p}}{ds} = \frac{\lambda}{\rho}\vec{N} \qquad (10)$$

Aun más, sobre la normal común a los dos arcos, los puntos $\vec{p}_k(s)$ y $\vec{p}_{k'}(s)$ determinan un segmento de longitud constante $|k - k'|$ ya que:

$$\vec{p}_k - \vec{p}_{k'} = (k - k')\vec{T}$$

Decimos que las evolventes $(I, \vec{p}_k)_{k \in \mathbb{R}}$ son curvas paralelas.

La expresión (10) prueba que $\lambda = 0$ implica que $\vec{p}'(s) = 0$. Es decir, si una evolvente del arco $(I, \vec{f})$ encuentra a este arco, el punto de intersección es un punto singular de la evolvente (en general, un punto de retroceso).

4. EVOLVENTE DE UNA FAMILIA DE CURVAS.

4.1 Curvas en Forma Paramétrica.

Sea la ecuación $\vec{x} = \vec{x}(t, \lambda)$. Dando al parámetro λ todos los valores posibles obtenemos, para cada valor, un vector de posición que será función de la variable t, que representará una curva. El conjunto de Curvas obtenidas será función de la variable t, que representará una curva. El conjunto de Curvas obtenidas será una familia de curvas dependientes del parámetro λ.

Sea una recta tangente a cada curva de la familia en uno de sus puntos. Diremos que esta línea es la Envolvente de la familia de curvas.

Si queremos determinar la anterior envolvente, se M un punto de la curva de la familia que corresponde a un valor de λ y supongamos que a este punto le corresponde un cierto valor de t.

Para que el punto M sea de contacto de la curva con la envolvente, es necesario que los valores de t y λ existan una relación que se expresa como λ = λ(t) y la ecuación de la envolvente será:

$$\vec{x} = \vec{x}(t, \lambda(t))$$

Al ser M un punto en el que coinciden las rectas tangentes a la curva de la familia y a la envolvente, resulta que el vector tangente a la envolvente

$$\frac{\partial \vec{x}}{\partial t} + \frac{\partial \vec{x}}{\partial \lambda} \cdot \frac{d\lambda}{dt}$$

ha de ser igual al vector tangente a la curva.

$$\frac{\partial \vec{x}}{\partial t}$$

Por tanto, las componentes de ambos vectores deben ser proporcionales

$$\frac{\partial \vec{x}}{\partial t} + \frac{\partial \vec{x}}{\partial \lambda} \cdot \frac{d\lambda}{dt} = k \cdot \frac{\partial \vec{x}}{\partial t}$$

y entonces

$$\frac{d\lambda}{dt} \cdot \frac{\partial \vec{x}}{\partial \lambda} = (k-1)\frac{\partial \vec{x}}{\partial t}$$

obteniendo que los vectores $\frac{\partial \vec{x}}{\partial t}$ y $\frac{\partial \vec{x}}{\partial \lambda}$ son linealmente dependientes.

Si hacemos

$$\det\left(\frac{\partial \vec{x}}{\partial t}, \frac{\partial \vec{x}}{\partial \lambda}\right) = 0 \qquad (11)$$

y eliminamos λ entre las ecuaciones $\vec{x} = \vec{x}(t, \lambda)$ y (11) obtenemos la ecuación implícita de la envolvente.

4.2. Curvas en Forma Explícita.

Sea la familia de curvas parametrizadas dada como

$$x_2 = f(x_1, \lambda)$$

Podemos convertirla a forma paramétrica introduciendo la ecuación

$$x_1 = x_1$$

reduciéndose así al caso anterior.

La ecuación (11) se transforma en:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f}{\partial \lambda} \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial \lambda}(x_1, \lambda) = 0 \qquad (12)$$

y eliminando λ entre las ecuaciones (12) y $x_2 = f(x_1, \lambda)$ obtenemos la ecuación implícita de la envolvente.

4.3. Curvas en Forma Implícita.

Si la familia de curvas viene dada por la ecuación

$$f(x_1, x_2, \lambda) = 0 \qquad (13)$$

entonces, para ciertas condiciones

$$x_2 = \varphi(x_1, \lambda)$$

luego, por la condición (12)

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \lambda} = 0$$

y por tanto

$$\frac{\partial f}{\partial x_2} \cdot \frac{\partial x_2}{\partial \lambda} + \frac{\partial f}{\partial \lambda} = 0$$

lo que implica

$$\frac{\partial f}{\partial \lambda} = 0 \qquad (14)$$

que es la condición de envolvente. Por tanto, basta eliminar el parámetro λ entre las ecuaciones (13) y (14) para obtener la ecuación de envolvente.

4.4. Propiedades de la Envolvente.

PROP La envolvente es el lugar geométrico de las posiciones límites de la intersección de cada dos curvas de la familia cuando tienden a confundirse.

Dem.

Sea la familia de curvas

$$f(x_1, x_2, \lambda) = 0$$

y consideremos las curvas

$$\left.\begin{array}{r} f(x_1, x_2, \lambda) = 0 \\ f(x_1, x_2, \lambda + \Delta\lambda) = 0 \end{array}\right\}$$

La curva

$$\frac{f(x_1, x_2, \lambda + \Delta\lambda) - f(x_1, x_2, \lambda)}{\Delta\lambda} = 0$$

pasa por el punto común a ambas curvas consideradas (punto característico) y cuando $\Delta\lambda \to 0$ el movimiento que lleva a la segunda a confundirse con la primera desplaza a éste, de forma que la posición límite del punto común será:

$$\left.\begin{array}{r} f(x_1 x_2, \lambda) = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial \lambda} = 0 \end{array}\right\}$$

que son las condiciones de envolvente de una familia de curvas.

PROP La envolvente contiene al lugar geométrico de los puntos singulares de las curvas.

Dem.

Sea la familia de curvas $f(x_1, x_2, \lambda) = 0$.

Los puntos singulares vienen dados por las condiciones

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = 0 \qquad y \qquad \frac{\partial f}{\partial x_2} = 0 \qquad (15)$$

Si de estas dos ecuaciones despejamos x_1 y x_2 en función de λ, tendremos un punto singular para cada valor de λ, el cual debe satisfacer la ecuación de la familia. O sea:

$$f\left(x_1(\lambda), x_2(\lambda), \lambda\right) = 0$$

y derivando respecto a λ:

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} \cdot \frac{dx_1}{\partial \lambda} + \frac{\partial f}{\partial x_2} \cdot \frac{dx_2}{d\lambda} + \frac{\partial f}{\partial \lambda} = 0$$

y teniendo en cuenta (15) queda

$$\frac{\partial f}{\partial \lambda} = 0$$

que es la condición de envolvente.

Por tanto, resulta interesante al hallar la envolvente de una familia eliminar el lugar de los posibles puntos singulares de las curvas de la familia.

Recíprocamente, de las relaciones

$$f\left(x_1, x_2, \lambda\right) \quad y \quad \frac{\partial f}{\partial \lambda} = 0$$

deducimos las ecuaciones paramétricas de la línea

$$x_1 = x_1(\lambda) \qquad x_2 = x_2(\lambda)$$

cuyos puntos satisfacen la ecuación de la familia, es decir:

$$f\left(x_1(\lambda), x_2(\lambda), \lambda\right) = 0$$

y derivando respecto a λ:

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} \cdot \frac{dx_1}{d\lambda} + \frac{\partial f}{\partial x_2} \cdot \frac{dx_2}{d\lambda} + \frac{\partial f}{\partial \lambda} = 0$$

y como

$$\frac{\partial f}{\partial \lambda} = 0$$

resulta

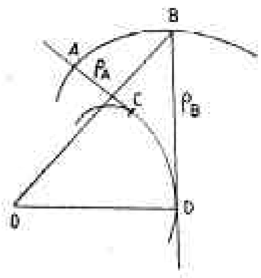
$$\frac{\dfrac{\partial f}{\partial x_1}}{\dfrac{\partial f}{\partial x_2}} = \frac{\dfrac{dx_2}{d\boldsymbol{l}}}{\dfrac{dx_1}{d\boldsymbol{l}}}$$

que nos dice que la línea obtenida y cada una de las curvas de la familia son tangentes.

6. CONSTRUCCIÓN DE ALGUNAS CURVAS.

TEOREMA El arco de evoluta es igual a la diferencia entre los radios de curvatura correspondientes a los extremos del arco de evoluta.

Dem



Sea la curva $\vec{x} = \vec{x}(s)$ y la ecuación de su evoluta

$$\vec{x} = \vec{x}(t) + p \cdot \vec{N}(s) \qquad (16)$$

Vamos a demostrar que el arco CD de la evoluta es igual a la diferencia de los radios de curvatura en A y B.

Derivando (16) tenemos

$$\frac{d\vec{x}}{ds} = \vec{T} + \boldsymbol{r}'(s) \cdot \vec{N}(s) + \boldsymbol{r}(s)\frac{d\vec{N}}{ds} = \vec{T} + \boldsymbol{r}'(s) \cdot \vec{N}(s) - \vec{T}$$

luego

$$\frac{d\vec{x}}{ds} = \boldsymbol{r}'(s) \cdot \vec{N}(s)$$

Si llamamos σ al arco de evoluta

$$\frac{d\vec{x}}{ds} = \frac{d\boldsymbol{s}}{ds}$$

luego

$$\frac{d\boldsymbol{s}}{ds} = \frac{d\boldsymbol{r}}{d\boldsymbol{s}} \Rightarrow \boldsymbol{s}_{CD} = \int_A^B d_{r} = \boldsymbol{r}_B - \boldsymbol{r}_A \qquad \text{c.q.d.}$$

Del teorema anterior deducimos la manera de construir de forma práctica la evolvente: Bastaría suponer una línea arrollada sobre la evoluta e irla extendiendo manteniéndola tensa. El punto tomado como origen para tal desarrollo describe la evolvente. Ahora bien, al variar ese punto obtenemos diferentes evolventes, todas ellas paralelas, de la misma curva evoluta.

Por otra parte, la podaria de una curva respecto de un punto C es el lugar geométrico de los pies de las perpendiculares trazadas por C a las tangentes de la curva.

Puede considerarse la podaria como envolvente de las circunferencias de diámetro CA donde A es el punto de la curva donde se traza la tangente y la normal.

En efecto, si la curva es $\vec{x} = \vec{x}(s)$, la tangente en uno de sus puntos es

$$\vec{x} = \vec{x}(s) + \lambda\vec{T}$$

La perpendicular por C a esta recta es

$$\vec{x} = \vec{c} + \mu\vec{N}$$

Si entre estas ecuaciones eliminamos s, λ y μ obtenemos la ecuación de la podaria.

Si la curva viene dada por $x_2 = f(x_1)$ se procesa de forma análoga obteniendo como normal en C:

$$x_2 - c_2 = -\frac{1}{f'(a_1)}(x_1 - c_1)$$

Si consideramos la circunferencia de diámetro AC:

$$(x_1 - c_1)(x_1 - a_1) + (x_2 - c_2)(x_2 - a_2) = 0$$

y queremos hallar la envolvente, derivamos respecto de a_1

$$(x_1 - c_1) + (x_2 - c_2) \cdot \frac{da_2}{da_1} = 0$$

y dividiendo ambas ecuaciones, después de transformar los términos

$$x_1 - a_1 = \frac{1}{a'_2}(x_2 - a_2)$$

que con $a_2 = f(a_1)$ nos dan las ecuaciones obtenidas anteriormente.

<u>5.1. Trazado de la Evolvente de la circunferencia.</u>

La evolvente de la circunferencia es la curva engendrada por un punto de una recta que se mueve, apoyándose sin desplazamientos sobre una circunferencia. Las ecuaciones paramétricas son

$$\left.\begin{aligned} x &= r\cdot\cos\alpha + (r\alpha \pm h)\operatorname{sen}\alpha \\ y &= r\cdot\operatorname{sen}\alpha - (r\alpha \pm h)\cos\alpha \end{aligned}\right\}$$

Veamos cual es el procedimiento para su trazado.

Paso 1: Trazamos la circunferencia evoluta con radio r.

Paso 2: Dividimos la circunferencia en n partes iguales. En el dibujo tomamos n = 12.

Paso 3: Por cada punto obtenido de la división anterior, trazamos rectas tangentes a la circunferencia.

Paso 4: Si el punto de tangencia C correspondiente a la partición O es punto de la evolvente, trazamos el arco de centro el punto 1 y radio la distancia del punto 1 al O.

Paso 5: Repetimos el proceso haciendo centro en el resto de puntos y como radio la distancia de dichos puntos al O.

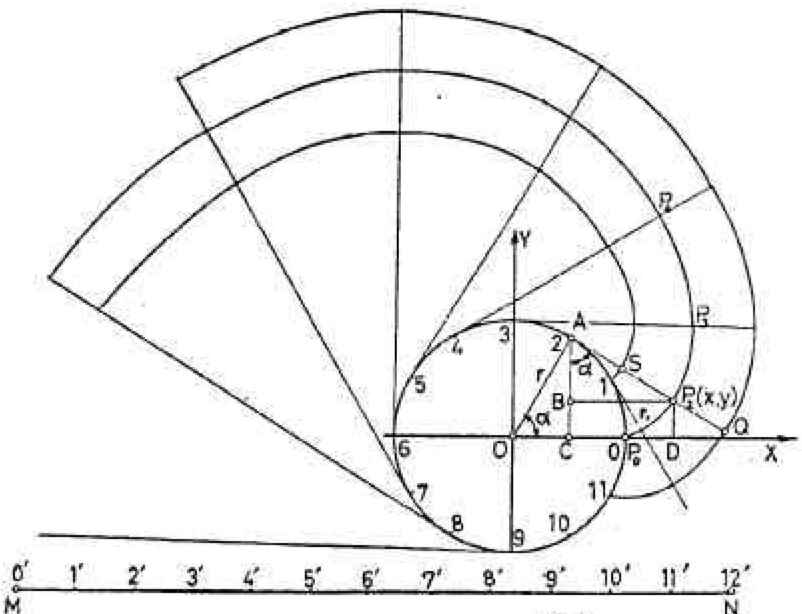
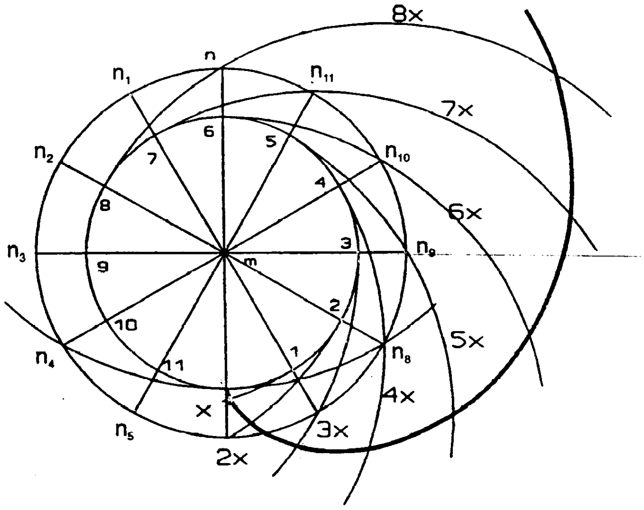


Fig. 3

5.2. Trazado de la curva Pericicloide.

Esta curva presenta características muy similares a la anterior. La diferencia está en que las tangentes a la circunferencia, que van a apoyar la construcción de la evolvente serán de circunferencias en lugar de rectas. Los lados cóncavos del dichos arcos tocarán al lado convexo de la circunferencia inicial e evoluta, siendo los radios de aquellos mayores que los de esta.



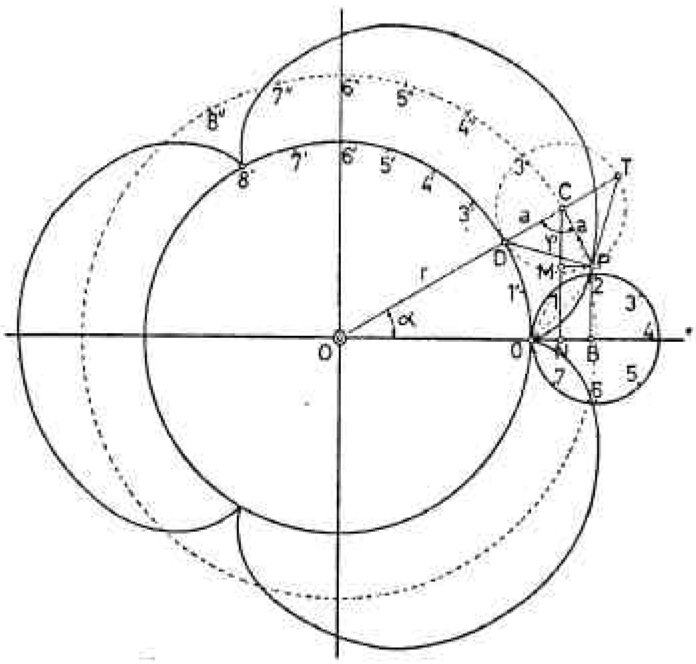
5.3. Trazado de la curva Epicicloide.

Un punto P de una circunferencia que rueda sobre otra fija describe la curva epicicloide.

De su construcción gráfica obtenemos sus ecuaciones paramétricas

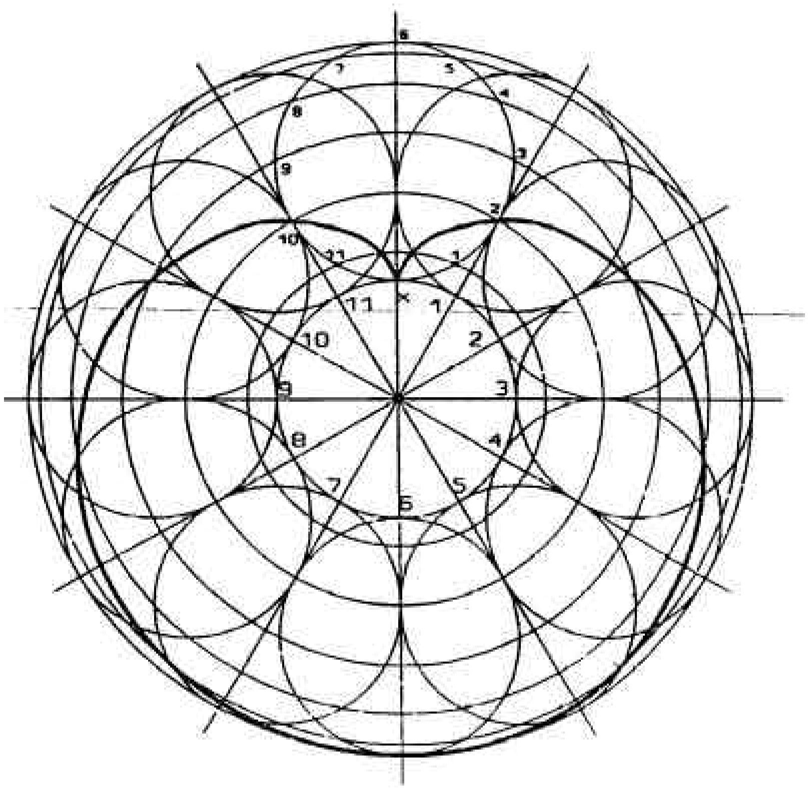
$$\left.\begin{aligned} x &= (r+a)\cdot\cos\alpha - a\cdot\cos\left(\frac{r}{a}+1\right)\cdot\alpha \\ y &= (r+a)\cdot\operatorname{sen}\alpha - a\cdot\operatorname{sen}\left(\frac{r}{a}+1\right)\cdot\alpha \end{aligned}\right\}$$

Su construcción gráfica es:



5.4. Trazado de la curva Cardioide.

Si en el trazado de la Epicicloide, ambas circunferencias, la móvil y la fija, son de la misma dimensión, obtenemos la Cardioide.



5.5. Trazado de la curva hipocicloide.

Si al rodar una circunferencia sobre otra fija el contacto es interior, las curvas descritas por los distintos puntos, unidos invariablemente a la curva móvil, describen hipocicloides. Las ecuaciones paramétricas son:

$$\left.\begin{aligned} x &= (r-a)\cos\boldsymbol{a} + a\cdot\cos\left(\frac{r}{a}-1\right)\cdot\boldsymbol{a} \\ y &= (r-a)\operatorname{sen}\boldsymbol{a} - a\cdot\operatorname{sen}\left(\frac{r}{a}-1\right)\cdot\boldsymbol{a} \end{aligned}\right\}$$

Bibliografía recomendada.

Curso de Matemáticas. Análisis y Geometría Diferencia. Aut: A. Donnddu. Edit: Aguilar.

Algebra. Aut: L. Thomas Ara.

Geometría Analítica. Aut: M. De Lanuza. Edit: Gredos.

Geometría Analítica. Aut: L. Crusat. Edit: Bosch.