TEMAS DE MATEMÁTICAS
(Oposiciones de Secundaria)

TEMA 70

<u>LÓGICA PROPOSICIONAL. EJEMPLOS Y APLICACIONES AL RAZONAMIENTO MATEMÁTICO.</u>

TEMA 70

LÓGICA PROPOSICIONAL. EJEMPLOS Y APLICACIONES AL RAZONAMIENTO MATEMÁTICO.

1. INTRODUCCIÓN.

La Lógica es una ciencia que trata de ser la teoría formal del razonamiento, por ello es una herramienta muy importante para el análisis de argumentos. Según la Academia de la Lengua, la Lógica es la disciplina que estudia la estructura, fundamento y uso de las expresiones del conocimiento humano.

Otra cuestión a tener en cuenta en el estudio de la Lógica es su relación con la Teoría de Conjuntos. Conocida es la posibilidad de establecer un isomorfismo entre ésta y una gran parte de aquella, lo que nos garantiza que muchos teoremas, en cualquiera de las dos teorías, tiene su contrapartida en la otra. Este hecho hace que sea posible la explicación de las dos de manera análoga y simultánea.

La Lógica pretende ser una ciencia y por ello tener capacidad de realizar operaciones o cálculos de modo preciso. Para conseguirlo se requiere la confección de un lenguaje artificial que, contando con reglas explícitas, permita usar componentes y combinarlos para formar enunciados.

Una primera área del estudio de la lógica es la lógica de proposiciones, que trata de las combinaciones de variables en proposiciones arbitrarias. Estas variables se llaman variables lógicas o proposicionales. Estas variables pueden asumir los dos valores de la lógica clásica, los de verdad o falsedad. En lógica de proposiciones se pueden producir nuevas proposiciones aplicando las fórmulas lógicas a las proposiciones existentes. El interés de la lógica de proposiciones está en el estudio de estas reglas qe permiten producir nuevas variables y proposiciones en función de otras ya conocidas.

2. EL LENGUAJE PARA LA LOGICA DE PROPOSICIONES.

Vamos a definir un lenguaje que nos permita representar las fórmulas sentenciales para su estudio. Esto supone definir los símbolos que utilizaremos y las reglas de cómo utilizar estos símbolos para formar fórmulas sentenciales correctas, es decir, la sintaxis de nuestro lenguaje, así como la semántica, asignación de un significado lógico a las sentencias.

En la lógica de proposiciones los enunciados declarativos del tipo:

Está lloviendo
Antonio corre
Clara aprueba

pueden ser verdaderos o falsos, pero no las dos cosas a la vez.

DEF Llamaremos proposición a un enunciado declarativo que puede ser verdadero o falso pero no ambas cosas a la vez.

2.1. Sintaxis.

El primer paso en el estudio de un lenguaje es definir los símbolos básicos que lo constituyen, el alfabeto, y cómo se combinan para formar sentencias, es decir, la sintaxis o estudio de los signos como puras y simples figuras, independientemente de lo que designan y significan, y las relaciones de los signos entre sí.

El alfabeto con el que vamos a trabajar es el siguiente:

- Los símbolos de Verdadero, V ó 1, y Falso, F ó 0.
- Los símbolos que representan variables proposicionales, p, q, r, s, ...
- Los símbolos que representan las conjunciones y/o los adverbios, que en lógica denominaremos conectivas, tales como 'no', 'y', 'o', 'o..o...', 'si..entonces...', 'si y solo si', y que son representadas mediante '$\neg$', '$\wedge$', '$\vee$', '$\oplus$', '$\rightarrow$', '$\leftrightarrow$'.
- Los símbolos de puntuación como '(', ')', utilizados para evitar ambigüedades.

La conectiva $\neg$ es unitaria, pues sólo actúa sobre un operando, el cual se coloca detrás de la conectiva. El resto de las conectivas son binarias, pues operan sobre dos operandos.

2.1.1. Reglas de Formación.

Una secuencia finita de símbolos de variables proposicionales, conectivas y paréntesis forman una fórmula sentencial. Por ejemplo:

$$) \vee p \neg \rightarrow ($$
$$p \wedge (q \vee \neg r) \rightarrow s$$

son fórmulas sentenciales. Aunque la única que significa algo es la segunda, por lo tanto sólo esta expresión es una sentencia.

Diremos que la segunda expresión es una fórmula sentencial bien formada (o símplemente fbf), mientras que la primera es una fórmula sentencial mal formada. La diferencia entre ambas es sintáctica, siendo la segunda la única que puede tener significado.

Para poder obtener fórmulas bien formadas, hemos de tener en cuenta las llamadas reglas de formación. Son tres:

1) Una variable proposicional es una fbf.
2) Una fbf precedida de la negación ($\neg$) es una fbf.
3) Dos fbf unida por una conectiva binaria constituye una fbf.

Ejemplos de fbf es

$$p \quad ; \quad \neg p \quad ; \quad \neg(p \wedge q) \quad ; \quad [\neg p \vee (q \leftrightarrow p)]$$

Las reglas de formación se pueden relajar para facilitar la lectura y la escritura. Así tenemos:

- Se pueden omitir los paréntesis que encierran una sentencia completa.
- El estilo tipográfico de los paréntesis se puede variar para hacerlos más evidentes.
- A las conjunciones y disyunciones se les puede permitir tener más de dos argumentos: $p \wedge q \wedge r$.

2.1.2. Conectivas.

Las conectivas las dividimos en conectivas singulares y binarias, dependiendo de que se apliquen a una única sentencia o a dos.

a) Negación.

Es la única conectiva singular. La simbolizamos por medio de '$\neg$' precediendo a la variable proposicional o sentencia que niegue.

b) Conjunción.

La conectiva 'y' la simbolizamos con el signo '$\wedge$' insertado entre dos variables proposicionales o sentencias, de la forma $p \wedge q$, leyéndose 'p y q'.

c) Disyunción.

A la conectiva 'o' se le dan dos sentidos, los cuales quedan reflejados en el lenguaje ordinario cuando se distingue entre 'o' y 'o...o...'. El primero corresponde a 'o bien p, o bien q, o ambas'. Es la llamada disyunción inclusiva. El segundo corresponde a 'o bien p o bien q, pero no ambas'. Es la disyunción exclusiva.

La disyunción inclusiva la simbolizamos por el símbolo '$\vee$' insertado entre las dos sentencias, $p \vee q$, leyéndose 'p o q'.

La disyunción exclusiva la simbolizamos con el signo '$\oplus$', insertado entre dos sentencias, $p \oplus q$, y se lee 'o p o q'

d) Condicional.

La conectiva 'si...entonces...' la simbolizamos mediante '$\rightarrow$' insertado entre dos sentencias, $p \rightarrow q$, y se lee 'si p entonces q'.

La primera sentencia del condicional, p, recibe el nombre de antecedente. La segunda, q, consecuente.

Hemos de advertir que no debemos de confundir el condicional con la implicación.

e) Bicondicional.

El bicondicional o conectiva ‘...si y sólo si...’ se simboliza mediante ‘$\leftrightarrow$’.

2.2. Semántica.

Hasta ahora hemos presentado la sintaxis o forma de las sentencias de la lógica proposicional. Ahora, le vamos a asignar a cada sentencia un valor de verdad, ‘V’ si es verdadera y ‘F’ si es falsa.

La asignación de unos valores concretos de verdad a cada variable proposicional y a cada sentencia corresponde a una interpretación. Hemos de tener en cuenta que a todas las ocurrencias de una variable proposicional se les asigna el mismo valor dado por la interpretación.

2.2.1. Tablas de Verdad.

Dada una interpretación para una sentencia, podemos determinar su valor de verdad bajo esta interpretación aplicando ciertas reglas que dan significado a las conectivas que la constituyen. Para ello partiremos del principio de que el valor de verdad de cualquier sentencia está determinado por los valores de verdad de cada variable proposicional que la compone.

Para determinar el valor de verdad de una sentencia para una interpretación determinada, nos podemos ayudar de las denominadas tablas de verdad.

La Tabla de Verdad de una sentencia es una tabla en la que se presentan todas las posibles interpretaciones de las variables proposicionales que constituyen la sentencia y el valor de verdad de la sentencia para cada interpretación. Corresponden a un modo mecánico de determinar la verdad o falsedad de una sentencia dada una interpretación de las variables proposicionales que la constituyen.

En la tabla siguiente resumimos las seis tablas de verdad de las seis conectivas vistas

p	**q**	**Øp**	**pÙ q**	**pÚ q**	**pÅ q**	**p® q**	**p « q**
V	V	F	V	V	F	V	V
V	F	F	F	V	V	F	F
F	V	V	F	V	V	V	F
F	F	V	F	F	F	V	V

Cada una de las filas de esta tabla corresponde a una interpretación de las variables proposicionales p y q.

Las tablas de verdad no se confinan sólo a la expuesta anteriormente, sino que se hacen tablas de verdad para comprobar mecánicamente los valores de verdad de cualquier sentencia. Por ejemplo, la sentencia

$$(p \rightarrow q) \rightarrow ((\neg p) \rightarrow (\neg q))$$

tendrá cuatro posibles interpretaciones. Para construir la tabla de verdad, en las columnas de la izquierda ponemos los valores de verdad de p y q para cada una de las cuatro posibles interpretaciones. Para cada una de dichas interpretaciones, vamos poniendo en columnas sucesivas los valores de verdad de cada una de las subsentencias que la constituyen. La última columna de la derecha tendrá los valores de verdad de la sentencia en su conjunto.

p	**q**	**p® q**	**Øp**	**Øq**	**(Øp)® (Øq)**	**Sentencia**
V	V	V	F	F	V	V
V	F	F	F	V	V	V
F	V	V	V	F	F	F
F	F	V	V	V	V	V

También se pueden construir tablas de verdad para sentencias que contengan más de dos variables proposicionales. Sólo hemos de tener en cuenta que tendremos 2^n interpretaciones, siendo n el número de variables proposicionales de la sentencia.

2.2.2. Equivalencia.

DEF Diremos que dos sentencias son Equivalentes si tienen los mismos valores de verdad para cualquier interpretación, es decir, si sus tablas de verdad son iguales.

La equivalencia la representaremos mediante el símbolo '≡'

PROP La relación anterior definida entre dos sentencias verifica las propiedades Reflexiva, Simétrica y Transitiva, siendo una relación de Equivalencia.

Esta relación de equivalencia permitirá catalogar todas las sentencias en clases de equivalencia. Así, para todo el conjunto infinito de sentencias con dos variables proposicionales, su tabla de verdad corresponderá a una de las dieciséis clases de equivalencia que existen para ese tipo de sentencias.

2.2.3. Tautologías y Contradicciones.

Cada una de las clases de equivalencia que surgen de la relación anterior pueden contener valores verdaderos y falsos, sólo verdaderos o sólo falsos.

DEF Diremos que una sentencia es indeterminada si tiene interpretaciones verdaderas para unos casos y falsas para otros.

Por ejemplo, la sentencia $p \vee q$ es indeterminada, ya que su valor final depende de que interpretación le demos a p y a q.

DEF Diremos que una sentencia es una tautología si todas sus interpretaciones son verdaderas.

Son tautologías las sentencias $p \vee (\neg p)$ $((p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r)) \rightarrow (p \rightarrow r)$ cuya demostración dejamos como ejercicio.

DEF Diremos que una sentencia es una Contradicción si todas sus interpretaciones son falsas.

Ejemplos de contradicciones son $p \wedge (\neg p)$ $\neg[(p \wedge q) \rightarrow p]$

3. VALIDACIÓN DE SENTENCIAS PROPOSICIONALES.

Un problema importante para cualquier sistema lógico es el problema de encontrar un procedimiento efectivo para verificar la validez o tautología de una sentencia bien formada. Procedimiento que no es posible para todos los sistemas lógicos.

El problema de encontrar un procedimiento de validación de las sentencias bien formadas se denomina Problema de Decisión.

Para los sistemas en que se puede encontrar un procedimiento de decisión, se dice que el problema es Resoluble y el sistema Decidible. Para los sistemas en que no se puede encontrar un procedimiento de decisión se dice que el problema de decisión es Irresoluble y el sistema es Indecidible.

La lógica de proposiciones es un sistema decidible. De hecho se conocen varios procedimientos de decisión, entre los que podemos destacar

- Validación mediante tablas de verdad
- Árboles Semánticos.
- Refutación.

El último de los procedimientos es muy conocido en matemáticas, pues consiste en suponer falsa la sentencia a validar, y ver si ello supone una contradicción.

4. LEYES DE LA LÓGICA DE PROPOSICIONES.

Existen un número infinito de Tautologías. Ahora bien, del infinito número de tautologías posibles, hay algunas que son especialmente útiles para los procesos de deducción. Éstas las agruparemos por afinidad y les damos el nombre de leyes o teoremas.

1) Ley de identidad:

$$p \rightarrow p$$
$$p \leftrightarrow p$$

indica que cualquier sentencia es equivalente a ella misma.

2) Ley de la doble negación:

$$p \leftrightarrow \neg\neg p$$

indica la equivalencia entre una sentencia y la negación de su negación.

3) Ley del tercio excluso:

$$p \vee \neg p$$

indica que siempre se verifica una sentencia o su negación.

4) Ley de contradicción:

$$\neg(p \wedge \neg p)$$

es la contraposición a la anterior, nunca se puede verificar a la vez una sentencia y su negación.

5) Leyes de Morgan:

$$\neg(p \wedge q) \leftrightarrow (\neg p \vee \neg q)$$
$$\neg(p \vee q) \leftrightarrow (\neg p \wedge \neg q)$$

Estas leyes fueron conocidas por Occam e indican que la negación de una conjunción se puede transformar en una disyunción de negaciones, y que la negación se puede transformar en una conjunción de negaciones.

6) Ley de reducción al absurdo:

$$(\neg p \rightarrow (q \wedge \neg q)) \leftrightarrow p$$

utilizada para demostrar una conclusión partiendo de la negación de la misma.

7) Leyes de conmutación:

$$(p \vee q) \leftrightarrow (q \vee p)$$
$$(p \wedge q) \leftrightarrow (q \wedge p)$$
$$(p \leftrightarrow q) \leftrightarrow (q \leftrightarrow p)$$

indican que los términos de conjunciones, disyunciones y bicondicionales se pueden conmutar.

8) Leyes de asociación:

$$((p \wedge q) \wedge r) \leftrightarrow (p \wedge (q \wedge r))$$
$$((p \vee q) \vee r) \leftrightarrow (p \vee (q \vee r))$$
$$((p \leftrightarrow q) \leftrightarrow r) \leftrightarrow (p \leftrightarrow (q \leftrightarrow r))$$

indican que los términos de conjunciones, disyunciones y bicondicionales se pueden agrupar como se quiera.

9) Leyes de transposición:

$$(p \rightarrow q) \leftrightarrow (\neg q \rightarrow \neg p)$$
$$(p \leftrightarrow q) \leftrightarrow (\neg q \leftrightarrow \neg p)$$

indican que los términos de un condicional y de un bicondicional se pueden intercambiar si se les hace preceder de la negación.

10) Leyes distributivas:

$$(p \wedge (q \vee r)) \leftrightarrow ((p \wedge q) \vee (p \wedge r))$$

$$(p\vee(q\wedge r))\leftrightarrow((p\vee q)\wedge(p\vee r))$$
$$(p\rightarrow(q\wedge r))\leftrightarrow((p\rightarrow q)\wedge(p\rightarrow r))$$
$$(p\rightarrow(q\vee r))\leftrightarrow((p\rightarrow q)\vee(p\rightarrow r))$$

indican que una conjunción se puede distribuir en una disyunción; que una disyunción se puede distribuir en una conjunción; y que un condicional se puede distribuir tanto en una conjunción como en una disyunción.

11) Ley de permutación:

$$(p\rightarrow(q\rightarrow r))\leftrightarrow(q\rightarrow(p\rightarrow r))$$

indica que el antecedente del consecuente de un condicional se puede intercambiar por el antecedente.

12) Ley del silogismo:

$$(p\rightarrow q)\rightarrow((q\rightarrow r)\rightarrow(p\rightarrow r))$$

13) Silogismo hipotético o transitividad:

$$((p\rightarrow q)\wedge(q\rightarrow r))\rightarrow(p\rightarrow r)$$
$$((p\leftrightarrow q)\wedge(q\leftrightarrow r))\rightarrow(p\leftrightarrow r)$$

muestra la transitividad del condicional.

14) Leyes de inferencia de la alternativa o de los silogismos disyuntivos:

$$[\neg p\wedge(p\vee q)]\rightarrow q$$
$$[p\wedge(\neg p\vee\neg q)]\rightarrow\neg q$$

15) Ley del dilema constructivo:

$$[(p\vee q)\wedge(p\rightarrow r)\wedge(q\rightarrow r)]\rightarrow r$$

16) Segunda ley del dilema constructivo:

$$[((p\rightarrow q)\wedge(r\rightarrow s))\wedge(p\vee r)]\rightarrow(q\vee s)$$

17) Ley del dilema destructivo:

$$[(\neg p\vee\neg q)\wedge(r\rightarrow p)\wedge(s\rightarrow q)]\rightarrow(\neg r\vee\neg s)$$

las tres últimas leyes (15, 16 y 17), y sobre todo la ley del dilema constructivo, eran muy usadas en la antigua retórica y todavía son muy comunes en las discusiones para poner al adversario en un aprieto.

18) Ley de exportación:

$$[(p\wedge q)\rightarrow r]\leftrightarrow[p\rightarrow(q\rightarrow r)]$$

indica que una parte del antecedente de un condicional puede pasar al consecuente mediante un cambio de conectiva.

19) Ley de resolución:

$$[(\neg p \vee q) \wedge (p \vee r)] \rightarrow (q \vee r)$$

esta ley nos permite eliminar las sentencias contradictorias. La usaremos para automatizar el proceso de deducción.

20) Ley del bicondicional:

$$(p \leftrightarrow q) \leftrightarrow [(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)]$$

indica que un bicondicional se puede transformar en un par de condicionales.

21) Condicional-disyunción:

$$(p \rightarrow q) \leftrightarrow (\neg p \vee q)$$

muestra la equivalencia entre un condicional y una disyunción.

22) Condicional-conjunción:

$$(p \rightarrow q) \leftrightarrow \neg (p \wedge \neg q)$$

muestra la equivalencia entre un condicional y la negación de una conjunción.

23) Leyes de simplificación:

$$(p \wedge q) \rightarrow p$$
$$p \rightarrow (p \vee q)$$

indican que una conjunción implica cualquiera de sus términos competentes; y que una disyunción está implicada por cualquiera de sus términos componentes.

24) Leyes de expansión:

$$(p \rightarrow q) \leftrightarrow [p \leftrightarrow (p \wedge q)]$$
$$(p \rightarrow q) \leftrightarrow [q \leftrightarrow (p \vee q)]$$

indican que los condicionales se pueden transformar en bicondicionales.

25) Modus ponendo ponens:

$$[(p \rightarrow q) \wedge p] \rightarrow q$$

según el cual se puede afirmar el consecuente de un condicional si se afirma su antecedente.

26) Modus tollendo tollens:

$$[(p \rightarrow q) \wedge \neg q] \rightarrow \neg p$$

según el cual se puede negar el antecedente de un condicional si se niega su consecuente.

5. SISTEMA AXIOMÁTICO DEL CÁLCULO DE PROPOSICIONES.

Podemos formalizar la lógica de proposiciones transformando el lenguaje lógico en un cálculo. Entendemos por Cálculo la estructura formal de un lenguaje, abstrayendo el significado.

Al ser el cálculo un sistema de signos no interpretados, su estudio pertenece a la sintaxis. Cuando se les da un significado a los signos, el cálculo se transforma en lenguaje, y su estudio pertenece a la semántica.

Cuando el cálculo se construye sobre la base de unos axiomas, se dice que es cálculo es un Sistema Axiomático. Axiomas son construcciones que se admiten como verdaderas en todos los lenguajes que se pueden formalizar a partir de ese cálculo.

La idea básica de construir un sistema axiomático es elegir como axiomas unas pocas sentencias bien formadas que junto a unas reglas sirvan de puntos de arranque para deducir otras sentencias bien formadas, denominadas teoremas o leyes. Tales reglas son llamadas Reglas de Transformación. Algunas veces a los teoremas se les denominan tesis, y otras veces la palabra teorema se usa tanto para los axiomas como para los teoremas.

Por tanto, para definir un sistema axiomático tenemos que especificar:

- Un Alfabeto.
- Un conjunto de reglas de formación.
- Una lista de sentencias bien formadas seleccionadas como axiomas.
- Una o más reglas de transformación.

En un sistema axiomático la demostración de una fbf es una secuencia de fbf, de las cuales la última es la sentencia que queremos demostrar, y cada una de las fbf de la secuencia es a su vez un axioma o es derivada de algún axioma o teoremas ya existentes. Una sentencia bien formada (o fórmula bien formada, fbf) es un teorema si y sólo si hay una demostración de la misma en el sistema axiomático.

Probablemente, el sistema axiomático mejor conocido en el cálculo de proposiciones es el derivado del Principio Mathematica de Alfred North Whitehead y Bertrand Russell (1910), denominado PM.

El sistema PM se compone de

- Alfabeto.
  - Los átomos V y F.
  - Los símbolos proposicionales p, q, r, ...
  - Los símbolos de conectivas $\neg$ y $\vee$.
  - Los símbolos ‘(‘ y ‘)’.
- Reglas de Formación
  - Un símbolo proposicional es una fbf.
  - Dada una fbf, su negación también lo es.
  - Dadas dos fbf, su disyunción también lo es.

- Axiomas.
  - $(p \vee p) \rightarrow p$
  - $q \rightarrow (p \vee q)$
  - $(p \vee q) \rightarrow (q \vee p)$
  - $(p \rightarrow q) \rightarrow [(r \vee p) \rightarrow (r \vee q)]$
- Reglas de Transformación.
  - Regla de Sustitución (Sust.). El resultado de reemplazar cualquier variable en un teorema por una sentencia bien formada es un teorema.
  - Regla de Separación. (Sep.) Si S y S→R son teoremas, entonces R es un teorema.

Tengamos en cuenta que sólo utilizamos dos conectivas porque el resto se pueden poner en función de éstas según las siguientes equivalencias, demostrables mediante tablas de verdad:

$$p \wedge q \equiv \neg (\neg p \vee \neg q)$$

$$p \rightarrow q \equiv \neg p \vee q$$

$$p \leftrightarrow q \equiv (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p) \equiv (\neg p \vee q) \wedge (\neg q \vee p)$$

$$p \oplus q \equiv \neg (p \leftrightarrow q)$$

Relativo a un criterio de validación, un sistema axiomático debe cumplir las siguientes propiedades.

- Debe ser lógico o razonable, en el sentido de que todo teorema es una tautología.
- Completo. Toda sentencia bien formada válida es un teorema y se debe poder demostrar a partir de los axiomas.
- Consistente. No se pueden demostrar como teoremas fbf que no sean tautologías. Así, si una fbf es un teorema, su negación no lo es.
- Por último, los axiomas y las reglas de transformación deben ser independientes, es decir, ningún axioma (regla de transformación) debe ser derivable a partir de los otros.

Se puede comprobar que el sistema PM, tal y como lo hemos definido, verifica las propiedades anteriores.

Ejemplo. Demostrar que

$$(p \rightarrow q) \rightarrow [(r \rightarrow p) \rightarrow (r \rightarrow q)]$$

es un teorema del sistema PM.

1	$(p \rightarrow q) \rightarrow [(r \vee p) \rightarrow (r \vee q)]$	Axioma 4
2	$(p \rightarrow q) \rightarrow [(\neg r \vee p) \rightarrow (\neg r \vee q)]$	Sustituimos r por $\neg$r
3	$(p \rightarrow q) \rightarrow [(r \rightarrow p) \rightarrow (r \rightarrow q)]$	Definición del Condicional

6. SISTEMA INFERENCIAL DEL CÁLCULO DE PROPOSICIONES.

La lógica se presenta, muchas veces, como una herramienta para analizar los procesos de razonamiento del lenguaje ordinario. Así, el cálculo de proposiciones se presenta como el Método de Deducción Natural. El cual consiste en un grupo de reglas que nos permiten deducir unas conclusiones a partir de unas hipótesis. Esto es lo que llamamos un sistema inferencial.

En un sistema inferencial llamamos inferencias a los procesos mediante los cuales obtenemos una conclusión a partir de unas premisas de forma que el razonamiento sea válido.

Una regla de inferencia es la declaración de las condiciones bajo las cuales se puede hacer una inferencia, así como el resultado de la misma.

Una inferencia que siga las reglas será una inferencia correcta, mientras que si no las sigue será una inferencia incorrecta.

En muchos tratados lógicos podemos encontrar que a la conclusión se la denomina consecuencia lógica de las premisas.

Formalmente podemos decir que C es una conclusión o consecuencia lógica de las premisas P_1, P_2, P_3, ..., P_n si y sólo si para cualquier interpretación I para la que $P_1 \wedge P_2 \wedge P_3 \wedge ... \wedge P_n$ es verdadera, C también es verdadera.

Se puede demostrar que C es una conclusión o consecuencia lógica de las premisas P_1, P_2, P_3, ..., P_n si y sólo si la sentencia

$$P_1 \wedge P_2 \wedge P_3 \wedge ... \wedge P_n \rightarrow C$$

es una tautología. O bien, si y sólo si la sentencia

$$P_1 \wedge P_2 \wedge P_3 \wedge ... \wedge P_n \wedge \neg C$$

es una contradicción.

6.1. Reglas de Inferencia.

Podemos considerar tantas reglas de inferencia como leyes del cálculo de proposiciones tengamos, es decir, infinitas, ya que a cada ley le corresponde una regla de inferencia. Pero aunque sean formas diferentes de decir lo mismo, no hay que confundirlas. Una ley es una sentencia bien formada que pertenece al lenguaje del cálculo de proposiciones y corresponde al enunciado de una sentencia válida de inferencia. Una regla es el enunciado de una instrucción para realizar una inferencia válida.

Aunque hay infinitas reglas de inferencia, en los tratados de lógica se presentan conjuntos seleccionados de reglas como sistemas de deducción natural.

Así, hemos seleccionado las siguientes reglas de inferencia.

a) Regla de Separación.

También llamada regla del Modus Ponens y conocida como regla de eliminación del condicional. (RE$\rightarrow$). Corresponde a la ley del modus ponens y la formulamos de la siguiente forma:

Si un condicional y su antecedente se toman como premisas, se puede inferir el consecuente como conclusión

$$\frac{\begin{array}{c} S \rightarrow R \\ S \end{array}}{R}$$

b) Regla de Unión.

Conocida también como Regla de la Introducción de la conjunción

Si dos sentencias se toman como premisas, se puede inferir su conjunción como conclusión.

$$\frac{\begin{array}{c} S \\ R \end{array}}{S \wedge R}$$

Esta regla parece "intuitivamente" evidente, nada más "natural" que afirmar la conjunción de dos sentencias si se han afirmado ya separadamente las dos sentencias. Sin embargo, un examen más detallado de la cuestión nos mostraría que la noción de "intuición" es ajena a la de prueba y que es necesario en lógica que cada etapa de una inferencia sea justificada por una regla.

c) Regla de Inserción.

Cualquier ejemplo de tautología puede servir de premisa en cualquier inferencia proposicional.

Por ejemplo

$$\frac{\begin{array}{c} S \rightarrow R \\ R \rightarrow T \end{array}}{S \rightarrow T}$$

es un razonamiento cuya conclusión no puede ser derivada de unas premisas sino gracias a la regla de inserción. La regla de unión nos permite deducir de las dos premisas anteriores

$$(S \rightarrow T) \wedge (R \rightarrow T)$$

pero no nos permite deducir la conclusión. No obstante, la regla de inserción nos permite insertar como premisa suplementaria la ley de transitividad

$$[(S \rightarrow T) \wedge (R \rightarrow T)] \rightarrow (S \rightarrow T)$$

y con la regla de separación nos permite deducir la conclusión.

d) Regla de Intercambio.

Si se da un bicondicional como premisa, se puede inferir como conclusión el resultado de intercambiar sus componentes en cualquier otra premisa.

$$\frac{\begin{array}{c} S \rightarrow R \\ R \leftrightarrow T \end{array}}{S \rightarrow T}$$

6.2. Proceso de Inferencia.

Con ayuda de las tautologías enumeradas en el apartado 4 y de las cuatro reglas de inferencia anteriores podemos realizar inferencias en la lógica de proposiciones.

El proceso de inferencia se efectúa según las normas siguientes

1) Se simbolizan los enunciados y las conectivas, procurando uniformar el lenguaje.
2) Se indican en líneas separadas las premisas precedidas de la letra 'P' (P1, P2, ...).
3) Se procede a derivar la conclusión a partir de las premisas. Cada fórmula se escribe en una línea aparte, indicándose a la derecha de la misma la inferencia y/o tautología que permite deducirla.
4) Se indica la conclusión precedida de la letra 'C'.

Ejemplo. Supongamos que nos dan las dos premisas siguientes:

Si Rivaldo juega, el Barcelona gana
Si Rivaldo no juega, el Barcelona pierde.

y nos piden concluir que

El Barcelona gana o pierde.

1) Sean las proposiciones:

J: Rivaldo juega.
G: El Barcelona Gana
P: El Barcelona Pierde

2) 3) y 4)

P1	$J \rightarrow G$	Premisa 1
P2	$\neg J \rightarrow P$	Premisa 2
3	$J \vee \neg J$	Regla de Inserción (Tercio Excluso)
4	$[((J\rightarrow G)\wedge(\neg J\rightarrow P))\wedge(J\vee\neg J)]\rightarrow(G\vee J)$	Regla de Inserción (Dilema)
5	$(J\rightarrow G)\wedge(\neg J\rightarrow P)$	Regla de Unión de P1 y P2
6	$((J\rightarrow G)\wedge(\neg J\rightarrow P))\wedge(J\vee\neg J)$	Regla de Unión de 3 y 5
C	$G\vee P$	Regla de Separación de 4 y 6

Este no es el único conjunto de reglas de inferencia que se puede seleccionar. Sea cual sea el conjunto de reglas de inferencia seleccionado, no es fácil su aplicación de una forma automática. Para cada problema es preciso tener una cierta habilidad o conocimiento, expresado en forma de metarreglas, para saber en qué orden aplicar las reglas y a qué premisas.

En cualquier caso, el conjunto de reglas que se utilicen debe ser consistente y completo. Estos conceptos son paralelos a los definidos para un sistema axiomático.

Un sistema inferencial es completo si para cualquier conjunto de premisas el sistema infiere toda conclusión que pueda deducirse de las premisas.

Un sistema inferencial es Consistente si para cualquier conjunto de premisas, toda conclusión que infiera el sistema también se deduce de las premisas.

7. LA DEMOSTRACIÓN EN MATEMÁTICAS.

Las Matemáticas utilizan términos del lenguaje ordinario y otros específicos. Hay de dos clases:

- Términos Primitivos. Los que se introducen con sólo enunciarse, es decir, sin definición. Por ejemplo: elemento, propiedad, conjunto.
- Términos Definidos: Los que se introducen dando unas propiedades características. Por ejemplo: Grupo, triángulo, etc.

También se usan dos tipos de proposiciones:

- Axiomas o postulados. Proposiciones cuya veracidad se establece por convenio. Por ejemplo, el postulado de Euclides.
- Teoremas. Proposiciones en las que una proposición llamada conclusión o tesis resulta ser consecuencia lógica de otras llamadas premisas o hipótesis. El paso de unas a la otra se llama demostración.

Una ciencia cuyos métodos de demostración pertenecen a la lógica se dice que está formalizada. La Matemática es la ciencia formalizada por excelencia.

Las principales demostraciones matemáticas son:

- Directas.
- Indirectas o por reducción al absurdo.
- Por recurrencia o Inducción Completa.

7.1. Demostraciones Directas.

Son las demostraciones más frecuentes. Consisten en razonamientos por los cuales se puede pasar de la hipótesis a la tesis mediante la consideración de definiciones, axiomas y proposiciones anteriormente establecidas y combinadas según la regla de inferencia del silogismo. Los teoremas que se demuestran así se llaman directos.

Si la demostración es válida, se dice que son ciertos y que:

- P es condición suficiente para que se verifique C
- C es condición necesaria para que se verifique P

Es decir $P \Rightarrow C$

Diremos que un teorema es Recíproco de otro dado si tiene por hipótesis la tesis del primero y por tesis la hipótesis del primero. Es decir

$$C' = P \quad y \quad P' = C$$

Si la demostración del teorema recíproco es válida diremos que el recíproco es cierto y que

- P es condición necesaria para que se cumpla C
- C es condición suficiente para que se cumpla P.

Es decir $C \Rightarrow P$

La certeza de un teorema no implica la de su recíproco, excepto si caben diversas hipótesis que se excluyan mutuamente y se completen.

Si fueran ciertos los dos, diremos que

- P es condición necesaria y suficiente para C
- C es condición necesaria y suficiente para P.

Es decir $C \Leftrightarrow P$

Diremos que un teorema es contrario a uno dado si tiene por hipótesis (P’’) la negación del otro y por tesis (C’’) la negación del otro.

Es decir $P'' = \neg P \quad y \quad C'' = \neg C$

Diremos que un teorema es contrarrecíproco de uno dado si tiene por hipótesis (P’’’) la negación de la tesis del otro y por tesis (C’’’) la negación de la hipótesis del otro.

Es decir $P''' = \neg\, C \quad y \quad C''' = \neg P$

Comparando entre sí los teoremas recíproco y contrario de uno dado, se observa que son mutuamente contrarrecíprocos.

Ejemplo.

- Directo. En un triángulo rectángulo se verifica que $h^2 = a^2 + b^2$.
- Recíproco. Si $h^2 = a^2 + b^2$ entonces el triángulo es rectángulo.
- Contrario (del directo). Si el triángulo no es rectángulo entonces $h^2 \neq a^2 + b^2$

- Contrarrecíproco. Si $h^2 \neq a^2 + b^2$ entonces el triángulo no es rectángulo.

7.2. Demostraciones Indirectas.

Son llamadas también demostraciones por reducción al absurdo. Se basan en la equivalencia de dos teoremas contrarrecíprocos entre sí. A veces conviene aprovechar esta equivalencia y en lugar de demostrar un teorema, demostrar su contrarrecíproco.

7.3. Demostraciones por Recurrencia o Inducción completa.

En las Ciencias Experimentales, de una serie más o menos grande de observaciones se establece una ley general (se induce) que abarca a todas las observaciones análogas. También la Matemática generaliza (induce), pero de modo distinto. No se contenta con comprobar una ley en determinados casos particulares. Por muchos que sean, hay que comprobarlos para todos.

Para ello se aplica el siguiente principio lógico, llamado de inducción completa, o de recurrencia, que consiste en:

1) Comprobar que la ley es cierta para un primer valor de n.
2) Suponer que es cierta para un cierto valor n'
3) Comprobar que es cierta para el siguiente, n'+1

8. ÁLGEBRA DE BOOLE DE LAS PROPOSICIONES.

Definamos el conjunto C formado por todas las fórmulas lógicas. Podemos definir en C las operaciones internas de negación '$\neg$', Conjunción '$\wedge$' y Disyunción '$\vee$'.

Si construimos las correspondientes tablas de verdad, podemos demostrar sin problemas que se verifican las siguientes propiedades:

- Idempotencia de $\wedge$: $p \wedge p \Leftrightarrow p$
- Complementaria de $\wedge$: $p \wedge (\neg p) \Leftrightarrow \lambda$ (λ es la proposición falsa universal)
- Conmutativa de $\wedge$: $p \wedge q \Leftrightarrow q \wedge p$
- Asociativa de $\wedge$: $p \wedge (q \wedge r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \wedge r$
- Elemento absorbente de $\wedge$: $p \wedge \lambda \Leftrightarrow \lambda$
- Elemento neutro de $\wedge$: $p \wedge \tau \Leftrightarrow p$ (τ es la proposición verdadera universal)
- Simplificativa de $\wedge$ respecto de $\vee$: $p \wedge (p \vee q) \Leftrightarrow p$
- Distributiva de $\wedge$ respecto de $\vee$: $p \wedge (q \vee r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$
- Idempotencia de $\vee$: $p \vee p \Leftrightarrow p$
- Complementaria de $\vee$: $p \vee (\neg p) \Leftrightarrow \tau$
- Conmutativa de $\vee$: $p \vee q \Leftrightarrow q \vee p$

- Asociativa de $\vee$: $p \vee (q \vee r) \Leftrightarrow (p \vee q) \vee r$
- Elemento absorbente de $\vee$: $p \vee \tau \Leftrightarrow \tau$
- Elemento neutro de $\vee$: $p \wedge \lambda \Leftrightarrow p$ (τ es la proposición verdadera universal)
- Simplificativa de $\vee$ respecto de $\wedge$: $p \vee (p \wedge q) \Leftrightarrow p$
- Distributiva de $\vee$ respecto de $\wedge$: $p \vee (q \wedge r) \Leftrightarrow (p \vee q) \wedge (p \vee r)$
- 1ª Ley de Morgan: $\neg(p \wedge q) \Leftrightarrow \neg p \vee \neg q$
- 2ª Ley de Morgan: $\neg(p \vee q) \Leftrightarrow \neg p \wedge \neg q$
- Doble negación Involutiva: $\neg(\neg p) \Leftrightarrow p$

El conjunto C con las tres operaciones internas definidas verificando las propiedades anteriores tiene estructura de Álgebra de Boole.

BIBLIOGRAFÍA RECOMENDADA.

Introducción a la Lógica Matemática. Aut.: P. Suppes y S. Hill. Edit.: Reverté

Elementos de Lógica Teórica. Aut.: D. Hilbert y W. Ackermann. Edit.: Tecnos

Introducción a la Lógica Formal. Aut.: A. Deaño. Edit.: Alianza

Fundamentos de Lógica Matemática. Aut.: j. Aranda y Varios. Edit. Sanz y Torres.