TEMAS DE MATEMÁTICAS
(OPOSICIONES DE SECUNDARIA)

TEMA 7

APROXIMACIÓN DE NÚMEROS. ERRORES. NOTACIÓN CIENTIFICA.

TEMA 7

APROXIMACIÓN DE NÚMEROS. ERRORES. NOTACIÓN CIENTIFICA.

1. INTRODUCCIÓN.

A la hora de realizar operaciones numéricas, nos podemos encontrar con números enteros, racionales y reales no racionales (irracionales). Para mayor comodidad, podemos expresar los números racionales de forma decimal. El problema surge con los números irracionales, ya que no podemos manejarlos al tener infinitos decimales. Es por tanto necesario truncarlos para poder operar con ellos. Pero entonces ya no manejamos los números originales, sino aproximaciones. Por ello, en el resultado final se comete un error. Si a esto añadimos que muchas veces los valores con los que trabajamos provienen de mediciones, el error se va acumulando.

El objetivo de la teoría de errores es conocer el error que se comete en un resultado cuando los datos con los que se trabaja se han tomado con una aproximación dada. Y recíprocamente, averiguar la aproximación con la que hay que tomar los datos de una operación para que el error del resultado no exceda de un valor fijado inicialmente. El primero recibe el nombre de problema directo y el segundo de problema inverso.

2. ERROR ABSOLUTO.

DEF Llamaremos número exacto a la cifra que representa el valor íntegro o completo de la cantidad.

DEF Llamaremos número aproximado al que no es exacto y se emplea para representar a éste.

DEF Definimos el error absoluto como la diferencia, en valor absoluto, de un número exacto y su aproximado.

Si A es un número exacto y A' su aproximación $\Rightarrow$ $e=|A-A'|$ siendo e el error absoluto.

DEF Diremos que la aproximación A' de un número exacto A es por defecto si $A-A'>0$

DEF Diremos que la aproximación A' de un número exacto A es por exceso si $A-A'<0$

Obs. Hay que destacar que el error que se comete al aproximar un número exacto nos resulta desconocido, ya que no conocemos el propio número exacto. Resulta, por tanto, necesario acotar el error.

DEF Llamamos límite del error absoluto a un número que es una unidad de un orden tal que el error cometido no llegue a valer una unidad de ese orden.

Suelen adoptarse como límites de error números de la forma 10^n con n entero.

Ejemplo.

Números como e ó π tienen infinitas cifras decimales, y por tanto nos son desconocidos. Como π=3'14159…, el número 3'141 es una aproximación de π. Su error absoluto viene dado por

$$e=3'14159\ldots - 3'141 = 0'00059\ldots$$

El error, como podemos comprobar, también nos es desconocido. Al ser el error positivo, la aproximación es por defecto, y verifica que e<0'001, siendo, por tanto, 0'001 ó 10^{-3} el límite del error absoluto.

DEF Llamaremos grado de aproximación al orden decimal a que corresponde el límite del error absoluto.

Ejemplo.

Siguiendo con el ejemplo anterior, el grado de aproximación es –3 que corresponde a las milésimas.

Si en la expresión decimal de un número se reemplazan las cifras que siguen a una de ellas por ceros, diremos que el número ha sido redondeado al orden de la última cifra conservada.

Ejemplo.

Dado π=3'141592…, si escribimos 3'141000… el número π ha sido redondeado a las milésimas, ya que la tercera cifra decimal es la última conservada.

El redondeo puede ser:

a) Por defecto, cuando la última cifra conservada no se modifica.

b) Por exceso, cuando la última cifra conservada se incrementa en una unidad, con la consiguiente repercusión en las anteriores (las de su izquierda).

c) Al valor más próximo, que será por defecto cuando la última cifra sea inferior a cinco (<5) o por exceso cuando la última cifra sea mayor o igual a cinco (≥5).

TEOREMA FUNDAMENTAL.

En todo redondeo el error no supera una unidad del orden decimal correspondiente.

dem

Sea *A* el número escrito en forma polinómica como $A=\sum_{j=0}^{n} a_j \cdot 10^j + \sum_{j=1}^{\infty} a_{-j} 10^{-j}$

siendo el primer sumatorio la parte entera de *A* y el segundo la parte decimal. Por comodidad llamaremos *E* a la parte entera de *A*.

Sea k∈ℕ-{0}. Podemos afirmar que:

$$E+\sum_{j=1}^{k}a_{-j}10^{-j}\le A<E+\sum_{j=1}^{k}a_{-j}10^{-j}+10^{-k}$$

Lo que hemos hecho es quedarnos con los k primeros decimales de *A*, que siempre será menor o igual a *A*, y sumarle 1 al decimal de lugar k, a_k, que dará un número mayor que *A*.

El número $E+\sum_{j=1}^{k}a_{-j}10^{-j}$ es el redondeo por defecto de *A*.

$$A-\left(E+\sum_{j=1}^{k}a_{-j}10^{-j}\right)=\sum_{j=k+1}^{\infty}a_{-j}10^{-j}<10^{-k}\quad \text{c.q.d.}$$

El número $E+\sum_{j=1}^{k}a_{-j}10^{-j}+10^{-k}$ es el redondeo por exceso de *A*.

$$E+\sum_{j=1}^{k}a_{-j}10^{-j}+10^{-k}-A=\sum_{j=k+1}^{\infty}(10-a_{-j})10^{-j}<10^{-k}\qquad \text{c.q.d.}$$

Veamos ahora el caso del redondeo al valor más próximo.

Si $a_{k+1}<5$, le sumaremos 1 a a_{k+1} en lugar de al término a_k

$$E+\sum_{j=1}^{k+1}a_{-j}10^{-j}\le A<E+\sum_{j=1}^{k+1}a_{-j}10^{-j}+10^{-(k+1)}$$

$$\sum_{j=1}^{k}a_{-j}10^{-j}$$

Y restando la expresión a *A* queda:

$$A-E-\sum_{j=1}^{k+1}a_{-j}10^{-j}<0\le 5\cdot 10^{-(k+1)}$$

y es claro que $5\cdot 10^{-(k+1)}<10^{-k}$

Si $a_{k+1}\ge 5$

$$E+\sum_{j=1}^{k+1}a_{-j}10^{-j}\le A<E+\sum_{j=1}^{k+1}a_{-j}10^{-j}$$

Y restando A a la expresión anterior:

$$E+\sum_{j=1}^{k+1} a_{-j}10^{-j}-A\le 0<5\cdot 10^{-(k+1)}$$

siendo $5\cdot 10^{-(k+1)}<10^{-k}$

Por tanto, y resumiendo lo obtenido en los tres casos, al redondear al decimal de lugar k, el error es inferior a 10^{-k}, que es una unidad del orden decimal.

3. CIFRAS EXACTAS.

DEF Llamaremos cifras exactas de un número aproximado a las que tiene (enteras o decimales) desde la primera cifra significativa de la izquierda hasta la que da el grado de aproximación inclusive.

Notación. La cifra que da el grado de aproximación o límite del error absoluto se suele señalar con un punto encima, sea o no la última de las cifras escritas.

DEF Diremos que un número tiene exactas todas sus cifras cuando su error absoluto es inferior a una unidad del orden de la última de ellas.

Ejemplo.

Sea a=12’123456… un número irracional, del que no conocemos su expresión exacta. Una aproximación por defecto al número a con un error inferior a las diezmilésimas es 12’1234 y otra sería 12’1234111

Ambas tienen 6 cifras exactas (2 cifras enteras y 4 decimales) y se denotan así: $12{'}123\dot{4}$ y $12{'}123\dot{4}111$

Es más, podemos afirmar que el número $12{'}123\dot{4}$ tiene exactas todas sus cifras.

Obs. Dado el número a=0’012345… y una aproximación $0{'}012\dot{3}33$, según la definición de cifras exactas, el número aproximado tendrá 3 cifras exactas.

DEF Llamamos cifras decimales exactas a las cifras que tiene a partir de la coma decimal hasta la que da el grado de aproximación inclusive.

Obs. En esta última definición no hacemos referencia a cifras significativas, luego también contaremos los ceros.

Ejemplo.

El número $12{'}123\dot{4}33$ tiene 6 cifras exactas y cuatro cifras decimales exactas. El número $0{'}012\dot{3}33$ tiene 3 cifras exactas y 4 cifras decimales exactas.

Ahora vamos a plantearnos el siguiente problema:

Dado un número a del que conocemos una aproximación a' con cifras exactas e inexactas, obtener otra aproximación con el mismo grado que la anterior pero con todas sus cifras exactas.

Se trata, por tanto, de suprimir las cifras inexactas de un número aproximado sin perder el grado de aproximación.

Este problema surge debido a que al operar con números aproximados, el resultado sólo vendrá aproximado hasta un orden dado, siendo el resto de las cifras de órdenes inferiores inexactas. Esto conlleva a que se desperdicie tiempo de procesamiento (por ejemplo en los ordenadores) al operar con esas cifras inexactas.

PROP Dado a número exacto, sea a' una aproximación por defecto y a'' por exceso tales que sus primeras cifras no iguales son consecutivas. Entonces, el número formado por las cifras comunes a a' y a'' y la siguiente de a'' es un valor aproximado de a con todas sus cifras exactas.

dem

Sea $$a' = E + \sum_{j=1}^{n} a_{-j}10^{-j} + b_0 10^{-(n+1)} + \sum_{j=1}^{m} b_{-j}10^{-(n+1+j)}$$

y sea $$a'' = E + \sum_{j=1}^{n} a_{-j}10^{-j} + (b_0+1)10^{-(n+1)} + \sum_{j=1}^{m'} c_{-j}10^{-(n+1+j)}$$

Como a' es una aproximación por defecto y a'' por exceso, se verifica $a'<a<a''$.

Si restamos a todos los miembros de la desigualdad el número

$$E + \sum_{j=1}^{n} a_{-j}10^{-j} + (b_0+1)10^{-(n+1)}$$

queda:

$$\sum_{j=1}^{m-1}[10-(b_{-j}+1)]10^{-(n+1+j)} + [10-b_{-m}]10^{-m} < a - \left(E + \sum_{j=1}^{n} a_{-j}10^{-j} + (b_0+1)10^{-(n+1)}\right) < \sum_{j=1}^{m'} c_{-j}10^{-(n+1+j)}$$

Y de ambas desigualdades deducimos:

$$\left| a - \left(E + \sum_{j=1}^{n} a_{-j}10^{-j} + (b_0+1)10^{-(n+1)}\right)\right| < 10^{-(n+1)}$$

El valor aproximado es $E + \sum_{j=1}^{n} a_{-j} 10^{-j} + (b_0 + 1)10^{-(n+1)}$ y tiene todas sus cifras exactas.

Ejemplo.

1) Sea $a' = 12'123\dot{4}44$ una aproximación por defecto de a. Como la aproximación a' es con un error menor que una diezmilésima, al sumar una diezmilésima a a' obtenemos una aproximación por exceso, que llamaremos a''. Entonces:

$$12'123\dot{4}44 < a < 12'123\dot{5}44$$

Si al número a' le quitamos las dos últimas cifras inexactas queda $12'123\dot{4} < a$

$12'123\dot{4}44$

Si al número a'' le quitamos las dos últimas cifras inexactas queda $12'123\dot{5}$ que no sabemos si es mayor o menor que a. Pero como $a < 12'123\dot{5}44$ se verifica que $a < 12'123\dot{6}$ añadiendo otra diezmilésima.

Así tenemos que $12'123\dot{4} < a < 12'123\dot{6}$

Al restar 12'1235 queda $-10^{-4} < a - 12'1235 < 10^{-4}$

Entonces $|a - 12'1235| < 10^{-4}$

Luego $12'123\dot{5}$ es una aproximación del número a hasta el orden de las diezmilésimas con todas sus cifras exactas.

2) Sea $a'' = 4'34\dot{5}67$ una aproximación por exceso de a. Como el error es menor que una diezmilésima, el número $4'34\dot{4}67$ es otra aproximación por defecto de a. Procediendo análogamente al ejemplo anterior, obtenemos $4'34\dot{5}$ es una aproximación de a con todas sus cifras exactas.

Obs. Hemos de tener en cuenta que al suprimir las cifras inexactas se pierde el sentido de la aproximación, ya que no podemos afirmar si el número obtenido es por defecto o por exceso.

Si queremos recuperar dicho sentido, hay que perder un grado en la aproximación.

Veamos ahora dos corolarios que justifican lo dicho anteriormente.

Corolario

1) Si el error absoluto de un valor aproximado por defecto es inferior a una unidad de un cierto orden, se obtiene otro con todas las cifras exactas incrementando en uno la cifra del orden considerado y sustituyendo las siguientes por ceros.

2) Si el error es por exceso, conservando sin alteración las cifras hasta la del orden considerado y sustituyendo las siguientes por ceros.

Corolario.

Si se desconoce el sentido de aproximación de un valor aproximado con error menor que una unidad de un cierto orden, se obtienen otros dos, con todas sus cifras exactas, conservando hasta la penúltima cifra del orden considerado o aumentando la penúltima en 1 y sustituyendo las siguientes por ceros.

4. ERROR RELATIVO.

DEF Se llama error relativo de un número aproximado, al cociente que se obtiene de dividir el error absoluto, *e*, por el número exacto, *a*. Se denota por la letra $\boldsymbol{e}$. $\boldsymbol{e} = \frac{e}{a}$

La cuantía del error absoluto no mide bien el grado de exactitud del número aproximado. Es por ello que necesitamos del error relativo, que nos da una medida del error absoluto por unidad.

Si comparamos el error absoluto con el relativo, observamos que el primero sólo nos dice cual es el error cometido. Pero este valor no nos dice si el error es grande o pequeño. El error relativo establece una comparación entre el error que se comete y el número en el que se comete, pudiendo obtener un valor más exacto sobre la precisión de la medida.

El número que nos da el error relativo es desconocido, ya que no conocemos el valor del número *a* y el valor del error absoluto *e*. Para poder utilizar dicho error en cálculos, hemos de sustituirlo por un límite superior. El límite superior del error relativo será un valor mayor que el verdadero valor y vendrá dado por una expresión sencilla y fácil de obtener.

PROP El error relativo de un número no varía al multiplicar o dividir éste por un número real cualquiera.

dem

$$\forall k \in \mathbb{R} \quad \boldsymbol{e}' = \frac{ke}{ka} = \frac{e}{a} = \boldsymbol{e}$$

Esta propiedad nos va a permitir hacer enteras todas las cifras exactas de un número aproximado, al multiplicarlo por 10^n siendo *n* el número de cifras decimales exactas, manteniendo el error relativo.

Ejemplo.

Veamos un ejemplo de esto:

Número Aproximado	Cifras Exactas	Cifras Decimales exactas	Error Absoluto e	Error Relativo e
$1'1\dot{2}$	3	2	e<10^{-2}	$\boldsymbol{e}=\frac{10^{-2}}{1'1\dot{2}}=\frac{1}{112}$
$0'11\dot{2}$	3	3	e<10^{-3}	$\boldsymbol{e}=\frac{10^{-3}}{0'11\dot{2}}=\frac{1}{112}$
$0'011\dot{2}$	3	4	e<10^{-4}	$\boldsymbol{e}=\frac{10^{-4}}{0'011\dot{2}}=\frac{1}{112}$

Como podemos comprobar, el error absoluto depende del número de cifras decimales exactas. En cambio, el error relativo depende únicamente del número de cifras exactas, sin tener en cuenta el punto decimal.

5. PROBLEMA DIRECTO E INVERSO.

5.1. Problema Directo.

TEOREMA

Un límite superior del error relativo de un número aproximado es $\boldsymbol{e}<\frac{1}{a_0 \cdot 10^{n-1}}$, siendo a_0 la primera cifra significativa de la izquierda y n el número de cifras exactas.

dem

Sea A el número exacto. Entonces sabemos que $\boldsymbol{e}=\frac{e}{A}$ con e el error absoluto y $\boldsymbol{e}$ el error relativo. También podemos suponer que todas las cifras exactas de A son enteras, ya que su error relativo sigue siendo el mismo. Entonces e<1 y $\boldsymbol{e}<\frac{1}{A}$.

Sea $A=\sum_{j=0}^{\infty} a_j 10^{n-1-j}$ (escribimos como exponente n-1-j para que el número A tenga n cifras enteras, que son todas exactas).

Es claro que $a_0 10^{n-1}<A \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{A}<\frac{1}{a_0 10^{n-1}} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{e}<\frac{1}{a_0 10^{n-1}}$

Obs. A partir de este resultado, para conocer un límite superior del error relativo no es necesario conocer dicho error, sino sólo el número de cifras exactas.

Ejemplo.

Dado el número $7'12\dot{3}45$, calcular un límite superior del error relativo.

sol

Como el número tiene como primera cifra significativa un 7 y 4 cifras exactas, entonces $\varepsilon < \dfrac{1}{7{\cdot}10^3}$

Obs. También, el teorema anterior nos sirve para obtener el error relativo a partir del error absoluto.

Ejemplo.

El número $\sqrt{5}$ está aproximado con $e<10^{-4}$. Obtener el límite del error relativo.

sol

Sabemos que $\sqrt{5}$ tiene como primera cifra significativa un 2 y es la única que es entera. Como $e<10^{-4}$, significa que la aproximación tiene cuatro cifras decimales exactas. Sumando tenemos que la aproximación tendrá cinco cifras exactas. Entonces:

$$\varepsilon < \frac{1}{2{\cdot}10^4}$$

TEOREMA

Si un límite del error relativo aplicado al número $a=\sum_{j=0}^{m} a_j{\cdot}10^{m-j}$ es de la forma $\varepsilon < \dfrac{1}{b_0{\cdot}10^n}$, el número podrá tener:

1) n cifras exactas si $b_0 \le a_0$.

2) $n+1$ cifras exactas si $b_0 > a_0$.

dem

Sabemos que $\varepsilon < \dfrac{e}{A}$ siendo A el número exacto.

Entonces $e=\varepsilon{\cdot}A$ y como $\varepsilon < \dfrac{1}{b_0{\cdot}10^n} \;\Rightarrow\; e < \dfrac{A}{b_0{\cdot}10^n}$

1) Si $b_0<a_0 \;\Rightarrow\; A<b_0{\cdot}10^n \;\Rightarrow\; e < \dfrac{b_0{\cdot}10^n}{b_0{\cdot}10^n} = 1 \;\Rightarrow$ Si $e<1$ es porque el número tiene n cifras exactas.

2) Si $b_0=a_0$ $\Rightarrow$ $A<b_0\cdot 10^n$ $\Rightarrow$ $e<\dfrac{b_0\cdot 10^n}{b_0\cdot 10^n}=1$ $\Rightarrow$ Igualmente el número tiene n cifras exactas.

3) Si $b_0>a_0$ $\Rightarrow$ $A<b_0\cdot 10^{n-1}$ $\Rightarrow$ $e<\dfrac{b_0\cdot 10^{n-1}}{b_0\cdot 10^n}=0'1$ $\Rightarrow$ El número tiene n cifras enteras más una decimal exactas, es decir (n+1) cifras exactas.

Ejemplo.

¿Con cuántas cifras nos aproximamos al número 4'12345… si $e<\dfrac{1}{5\cdot 10^3}$? ¿Y si $e<\dfrac{1}{3\cdot 10^4}$?

sol

1) Como 5>4 (caso $b_0>a_0$) será con n+1, es decir 3+1=4 $\Rightarrow$ $a=4'12\dot{3}$

2) Como 3<4 ($b_0<a_0$) será con n, es decir, 4 $\Rightarrow$ $a=4'12\dot{3}$

5.2. Problema Inverso.

TEOREMA

Si el límite superior del error relativo es $e<\dfrac{1}{b_0\cdot 10^n}$, entonces el número aproximado se calculará con:

1) $n+1$ cifras exactas si b_0£a_0.

2) $n+2$ cifras exactas si $b_0>a_0$.

siendo a_0 la primera cifra significativa del número.

dem

Sea m el número de cifras exactas del número aproximado. Por el teorema del caso directo tenemos $e<\dfrac{1}{a_0\cdot 10^{m-1}}$. Si $\dfrac{1}{a_0\cdot 10^{m-1}}\le\dfrac{1}{b_0\cdot 10^n}$ se verifica que $e<\dfrac{1}{b_0\cdot 10^n}$.

Podemos deducir entonces que $b_0\cdot 10^n\le a_0\cdot 10^{m-1}$. Entonces:

1) Si b_0£a_0 $\Rightarrow$ n=m-1 $\Rightarrow$ m=n+1 cifras exactas.

2) Si $b_0>a_0$ $\Rightarrow$ n+1=m-1 $\Rightarrow$ m=n+2 cifras exactas.

Obs. El teorema anterior permite pasar del error relativo al número de cifras exactas y de aquí al error absoluto. El teorema del caso directo nos permite pasar del error absoluto al número de cifras exactas y de aquí al error relativo.

6. OPERACIONES CON NÚMEROS APROXIMADOS.

6.1. Suma de Números Aproximados.

Lema El error absoluto de la suma de varios números aproximados es la suma de los errores absolutos de cada número.

dem

Sean los números aproximados A_i+a_i con i:1,…,n

Con esta notación, A_i es el número exacto y a_i el error absoluto. Si a_i es positivo, el número aproximado es por exceso y si es negativo es por defecto. Supongamos que todos son por exceso.

$$e = \sum_{i=1}^{n}(A_i + a_i) - \sum_{i=1}^{n} A_i = \sum_{i=1}^{n} a_i$$

Luego el error de la suma es la suma de los errores.

Lema Un límite superior del error de la suma de varios números aproximados es la suma de los límites superiores de los errores de cada número.

dem

Sean A_i+a_i con i:1,…,n los números aproximados y a_i’ los límites superiores del error de cada número.

Se verifica que $a_i<a_i'$ $\forall$i:1,…,n

$$e = \sum_{i=1}^{n} a_i < \sum_{i=1}^{n} a_i'$$

Obs. Si los límites superiores de cada número son de diferentes órdenes, entonces este resultado no es representativo.

Lema Un límite superior del error absoluto de la suma de n números aproximados, es igual al mayor de los límites (grado de aproximación menor) multiplicado por el número de sumandos.

dem

Sean A_i+a_i con i:1,…,n los números aproximados y a_i’ los límites superiores. Sea a_1’ el mayor de los límites superiores (si no lo fuese se reordenan los sumandos).

Entonces $a_1' \leq a_i'$ $\forall i:1,\ldots,n$

Por tanto $e < \sum_{i=1}^{n} a_i' \leq \sum_{i=1}^{n} a_1' = n \cdot a_1'$

A partir de este último lema vamos a obtener una regla práctica para conseguir un límite superior de la suma. Se hará sustituyendo $n \cdot a_1'$ por un número mayor. Cambiaremos n por 10 si $n<10$ (disminuyendo en un orden la aproximación), por 100 si $n<100$ y en general por 10^k si $10^{k-1} \leq n < 10^k$.

Podemos ahora enunciar la siguiente regla.

Regla general para la Suma: El límite superior del error absoluto de la suma de varios números es el mayor de los límites superiores de los sumandos, multiplicados por 10^k si el número de sumandos se encuentra comprendido entre 10^{k-1} y 10^k con $k \in \mathbb{N}$.

Problema Directo de la Suma:

Si tenemos varios números aproximados con órdenes de aproximación distintos cada uno, la suma tendrá k cifras decimales exactas menos que el sumando que tiene menos cifras decimales exactas, siendo el número de sumandos inferior a 10^k.

Problema Inverso de la Suma:

Para obtener la suma de varios números aproximados con error absoluto menor que 10^{-n}, se tomará cada sumando con n+k cifras decimales exactas y se efectúa la suma, obteniéndose un número con n cifras decimales exactas y k inexactas, siendo el número de sumandos inferior a 10^k.

6.2. Resta de Números Aproximados.

Sea A_1+a_1 una aproximación por exceso de A_1 y A_2-a_2 una aproximación por defecto de A_2.

Lema El error absoluto de la diferencia entre A_1+a_1 y A_2-a_2 es la suma de los errores absolutos de cada número.

dem

$$e = [(A_1 + a_1) - (A_2 - a_2)] - [A_1 - A_2] = a_1 + a_2$$

Lema El límite superior del error de la resta de dos números aproximados es la suma de los límites superiores de los errores de cada número.

dem

Si $a_1 < a_1'$ y $a_2 < a_2'$ $\Rightarrow$ $e = a_1 + a_2 < a_1' + a_2'$

Lema Un límite superior del error absoluto de la resta de dos números aproximados es igual al mayor de los dos límites superiores, multiplicado por 10.

dem

Supongamos que $a_1'>a_2'$. Entonces:

$e=a_1+a_2<a_1'+a_2'<2a_1'<10a_1'$

Obs. Los problemas directo e inverso de la resta son los mismos que los vistos para la suma.

Obs. Si no conocemos el sentido de aproximación del minuendo y del sustraendo, no estamos en condiciones de poder asegurar el sentido de aproximación de la diferencia. Igualmente sucede si ambos están aproximados en el mismo sentido.

6.3. Producto de Números Aproximados.

Vamos a calcular ahora el error que se produce al realizar el producto de varios números aproximados. A diferencia de las dos operaciones anteriores, suma y resta, trabajaremos a partir de aquí con el error relativo en lugar del error absoluto. En lugar de intentar calcular el error relativo del producto de varios números aproximados, nos apoyaremos previamente en dos casos más simples: El producto de un número exacto por otro aproximado y luego el producto de dos números aproximados.

6.3.1. Producto de un Número Exacto por otro Aproximado.

PROP Sea A_1+a_1 un número aproximado y A_2 un número exacto. El error relativo del producto coincide con el error relativo del único número aproximado, a_2.

dem

El producto de ambos números es $(A_1+a_1)\cdot A_2 = A_1\cdot A_2+a_1\cdot A_2$

El producto exacto de ambos es $A_1\cdot A_2$

Su error absoluto será entonces $e=(A_1+a_1)\cdot A_2-A_1\cdot A_2 = a_1\cdot A_2$

Y el error relativo queda $\boldsymbol{e}=\frac{a_1A_2}{A_1A_2}=\frac{a_1}{A_1}=\boldsymbol{e}_1$

Obs. Si el número A_1+a_1 está aproximado por defecto y $\boldsymbol{e}_1'$ es un límite superior de su error relativo, entonces el error relativo del producto $\boldsymbol{e}=\boldsymbol{e}_1<\boldsymbol{e}_1'$ tiene como límite superior a $\boldsymbol{e}_1$.

Problema Directo

PROP Sea a_0 la primera cifra significativa de la izquierda del número aproximado y p_0 la primera cifra significativa del producto. Si el número aproximado A_1+a_1 tiene m cifras exactas, el producto tendrá

1) *m-1* cifras exactas si $a_0<p_0$
2) *m* cifras exactas si $a_0 \geq p_0$

dem.

Supongamos que el producto tiene n cifras exactas

$(A_1+a_1)\,A_2 = p$ siendo $\left(\sum_{j=0}^{m-1} a_j \cdot 10^{m+j}\right)\cdot A_2 = \sum_{j=0}^{n-1} p_j \cdot 10^{n-1-j}$

Entonces $\varepsilon \leq \dfrac{1}{a_0 \cdot 10^{m-1}} \leq \dfrac{1}{p_0 \cdot 10^{n-1}} \Rightarrow a_0 \cdot 10^{m-1} \geq p_0 \cdot 10^{n-1}$

1) Si $a_0<p_0 \Rightarrow n-1 = m-2 \Rightarrow n = m-1$ cifras exactas.
2) Si $a_0 \quad p_0 \Rightarrow n-1 = m-1 \Rightarrow n = m$ cifras exactas.

Problema Inverso

PROP Sea a_0 la primera cifra significativa de la izquierda del número aproximado y p_0 la primera cifra significativa de la izquierda del producto. Si el número aproximado tiene:

1) m+1 cifras exactas si $p_0 > a_0$
2) m cifras exactas si $p_0 \quad a_0$

entonces el producto tendrá m cifras exactas.

dem.

Aplicando la proposición anterior, se obtiene de inmediato.

6.3.2. Producto de dos números aproximados.

PROP Un límite superior del error relativo del producto de dos números aproximados es la suma de los limites superiores de los errores relativos de los factores.

dem.

Sean A_1+a_1 y A_2+a_2 los dos factores, que vamos a suponer aproximados por exceso. El error absoluto del producto, e, es:

$e = (A_1+a_1)\cdot(A_2+a_2) - A_1A_2 = a_1A_2+a_2A_1+a_1a_2$

y el error relativo del producto, å, es:

$$å = \frac{a_1A_2+a_2A_1+a_1a_2}{A_1A_2} = \frac{a_1}{A_1}+\frac{a_2}{A_2}+\frac{a_1}{A_1}\cdot\frac{a_2}{A_2} = \varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_1\cdot\varepsilon_2$$

siendo e_1 el error relativo de $A_1 + a_1$ y e_2 el error relativo de $A_2 + a_2$.
Sean e_1' y e_2' límites superiores de e_1 y e_2 respectivamente.

Sabemos que $e_1 < \dfrac{1}{a_{1,0} \cdot 10^{n-1}}$ con $a_{1,0}$ la primera cifra significativa de ($A_1 + a_1$) y n el número de cifras exactas.

Y $e_2 < \dfrac{1}{a_{2,0} \cdot 10^{n'-1}}$ con $a_{2,0}$ la primera cifra significativa de ($A_2 + a_2$) y n' el número de cifras exactas.

El producto de e_1 y e_2 será de un orden decimal bastante menor, de tal manera que si suprimimos el sumando $e_1 \cdot e_2$ en å desaparecen unidades de ordenes menores a e_1 y a e_2. Por otro lado, sabemos que $e_1 < e_1'$ y $e_2 < e_2'$. Si sustituimos e_1 por e_1' y e_2 por e_2' añadimos unidades del mismo orden, con lo cual se verifica que:

$$e = e_1 + e_2 + e_1 \cdot e_2 < e_1' + e_2'$$

<u>Problema Directo</u>

PROP Sean ($A_1 + a_1$) y ($A_2 + a_2$) dos factores aproximados con m cifras exactas cada uno.

$$A_1 + a_1 = \sum_{j=0}^{m-1} a_{1,j} \cdot 10^{m-1-j} \text{ y } A_2 + a_2 = \sum_{j=0}^{m-1} a_{2,j} \cdot 10^{m-1-j}$$

Si p_0 es la primera cifra significativa por la izquierda del producto, se verifica:

1) Si $\dfrac{a_{1,0} - a_{2,0}}{a_{1,0} + a_{2,0}} \geq p_0 \Rightarrow n = m$
2) Si $\dfrac{a_{1,0} - a_{2,0}}{a_{1,0} + a_{2,0}} < p_0 \Rightarrow n = m - 1$

<u>dem.</u>

Sabemos que:

$$e < \frac{1}{a_{1,0} \cdot 10^{m-1}} + \frac{1}{a_{2,0} \cdot 10^{m-1}} \leq \frac{1}{p_0 \cdot 10^{n-1}} \Rightarrow \frac{a_{2,0} + a_{1,0}}{a_{1,0} \cdot a_{2,0} \cdot 10^{m-1}} \leq \frac{1}{p_0 \cdot 10^{n-1}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow p_0 \cdot 10^{n-1} \leq \frac{a_{1,0} \cdot a_{2,0} \cdot 10^{m-1}}{a_{2,0} + a_{1,0}}$$

Entonces,

1) Si $\dfrac{a_{1,0}\cdot a_{2,0}}{a_{1,0}+a_{2,0}} \geq p_0 \Rightarrow m-1=n-1 \Rightarrow n=m$ cifras exactas

2) Si $\dfrac{a_{1,0}\cdot a_{2,0}}{a_{1,0}+a_{2,0}} < p_0 \Rightarrow m-1=n \Rightarrow n=m-1$ cifras exactas

Problema Inverso

Consiste en hallar el número m de cifras exactas que ha de tener cada factor para que el producto tenga n cifras exactas.

PROP Con la notación de la proposición anterior, si el producto de dos números aproximados tiene n cifras exactas, entonces:

1) m = n cifras exactas si $\dfrac{a_{1,0}\cdot a_{2,0}}{a_{1,0}+a_{2,0}} \geq p_0$
2) m = n+1 cifras exactas si $\dfrac{a_{1,0}\cdot a_{2,0}}{a_{1,0}+a_{2,0}} < p_0$

dem.

Inmediata, a partir de la proposición anterior.

6.3.3. Producto de n números aproximados

PROP Dados K factores aproximados $A_i + a_i$ i = 1, ..., K, un límite superior del error relativo del producto es la suma de los límites superiores de los errores relativos de los factores.

dem.

Efectuamos el producto de los dos primeros, el resultado por el tercero, y así sucesivamente. Al aplicar reiteradamente la proposición del caso anterior se obtiene:

$e < e_1' + e_2' + ... + e_k'$

Problema Directo

PROP Sean (A_i + a_i) i = 1, …, K. K números aproximados con m cifras exactas cada uno. Se verifica:

1) n = m si $\frac{\prod a_{i,0}}{\sum a_{i,0}} \geq p_0$
2) n = m-1 si $\frac{\prod a_{i,0}}{\sum a_{i,0}} < p_0$

Problema Inverso

PROP Si el producto de K números aproximados tiene n cifras exactas entonces:

1) n = m si $\frac{\prod a_{i,0}}{\sum a_{i,0}} \geq p_0$
2) m = n+1 si $\frac{\prod a_{i,0}}{\sum a_{i,0}} < p_0$

6.4. Cociente de números aproximados.

Como la división de dos números es lo mismo que multiplicar uno de ellos por el inverso del otro, las reglas de la división son las mismas que las del producto.
Al dividir dos números que tengan el mismo sentido de aproximación, no conocemos el sentido de aproximación al cociente. Éste sólo se conocerá, y coincidirá con el del dividendo, en caso de que dividendo y divisor tengan sentidos de aproximación diferentes.
Al igual que en el producto, vamos a distinguir varios casos.

6.4.1. Cociente de un número exacto y otro aproximado.

PROP Un límite superior del error relativo del cociente es el mismo límite superior del error relativo de número aproximado.

dem.

En la demostración vamos a distinguir dos situaciones:

1) Dividendo A + a aproximado y divisor B exacto.

$$e = \frac{\frac{A+a}{B} + \frac{A}{B}}{\frac{A}{B}} = \frac{\frac{a}{B}}{\frac{A}{B}} = \frac{a}{A} = e_a < e_a'$$

2) Dividendo A exacto y divisor B-b aproximado.

$$e=\frac{\frac{A}{B-b}+\frac{A}{B}}{\frac{A}{B}}=\frac{\frac{AB-AB+bA}{B(B-b)}}{\frac{A}{B}}=\frac{\frac{bA}{B(B-b)}}{\frac{A}{B}}=\frac{b}{B-b}=\frac{1}{\frac{B}{b}-1}=\frac{1}{\frac{1}{e_b}-1}=\frac{e_b}{1-e_b}$$

Luego $e=\frac{e_b}{1-e_b}<e_b'$

Al cambiar el numerador, e_b, por el e_b' lo que hacemos es añadir unidades del mismo orden de e_b . Pero al cambiar 1- e_b por 1 en el denominador, el denominador sólo disminuye en algún orden menor que e_b , luego la desigualdad se verifica y å< e_b .

Las siguientes proposiciones no las vamos a demostrar, al ser ésta igual a la del producto.

PROP Si llamamos a_0 a la primera cifra significativa de la izquierda del número aproximado y C_0 a la primera cifra significativa del cociente, tendremos que:

$$e<\frac{1}{a_0\cdot 10^{m-1}}\leq\frac{1}{C_0\cdot 10^{n-1}}$$

siendo m el número de cifras exactas del número aproximado y n las del cociente.

Problema Directo

PROP Al dividir un número exacto por otro aproximado, o viceversa, el cociente tendrá:

1) n = m cifras exactas si C_0 a_0
2) n = m-1 cifras exactas si $C_0 > a_0$

PROP Si el cociente tiene n cifras exactas, el número aproximado ha de tener:

1) m = n cifras exactas si C_0 a_0
2) m = n+1 cifras exactas si $C_0 > a_0$

6.4.2. Cociente de dos números aproximados.

PROP Un límite superior del error relativo de un cociente de números aproximados es la suma de los límites superiores de los errores relativos de ambos números, dividendo y divisor.

dem.

Sean los números aproximados A + a el dividendo y B – b el divisor. Como el error relativo de un número es el cociente del error absoluto del número y el propio número, vamos a calcular el primer error absoluto del cociente:

$$e = \frac{A+a}{B-b} - \frac{A}{B} = \frac{AB + aB - AB + bA}{B(B-b)} = \frac{aB + bA}{B(B-b)}$$

Por tanto, el error relativo del cociente es:

$$e = \frac{e}{\frac{A}{B}} = \frac{\frac{aB+bA}{B(B-b)}}{\frac{A}{B}} = \frac{aB+bA}{A(B-b)} = \frac{aB}{A(B-b)} + \frac{b}{B-b} = e_a \cdot \frac{B}{B-b} + \frac{b}{B-b} = e_a \cdot \frac{1}{1-e_b} + \frac{1}{\frac{1}{e_b} - 1} =$$

$$= \frac{e_a}{1-e_b} + \frac{e_b}{1-e_b} = \frac{e_a + e_b}{1-e_b} < e_a^{'} + e_b^{'}$$

Y la explicación de la desigualdad coincide con la proposición vista en 6.4.1.

PROP Si llamamos a_0 a la primera cifra significativa del número aproximado que hace de dividendo, b_0 a la primera cifra significativa del número aproximado que hace de divisor y c_0 a la primera cifra significativa del número aproximado obtenido como cociente, entonces se verifica:

$$e < \frac{1}{a_0 \cdot 10^{m-1}} + \frac{1}{b_0 \cdot 10^{m-1}} \leq \frac{1}{c_0 \cdot 10^{n-1}}$$

siendo m en número de cifras exactas de ambos números aproximados y n las del cociente.

Problema Directo

PROP Al dividir dos números exactos de m cifras exactas cada uno, el cociente tendrá:

1) n = m cifras exactas si $\frac{a_0 \cdot b_0}{a_0 + b_0} \geq c_0$

2) n = m-1 cifras exactas si $\frac{a_0 \cdot b_0}{a_0 + b_0} < c_0$

Problema Inverso

PROP Si el cociente de una división tiene n cifras exactas, entonces ambos números aproximados han de tener:

1) m = n cifras exactas si $c_0 \le \dfrac{a_0 \cdot b_0}{a_0 + b_0}$

2) m = n+1 cifras exactas si $c_0 > \dfrac{a_0 \cdot b_0}{a_0 + b_0}$

6.5. Potencia de números aproximados.

La potencia de un número es un caso particular del producto de m números aproximados, siendo ahora dichos números todos iguales.

Por tanto, $e < \dfrac{1}{m} \cdot \dfrac{1}{a_0 \cdot 10^{n-1}}$

así pues, por ejemplo, el cuadrado de un número aproximado tiene como límite superior del error relativo el doble del límite superior del número aproximado.
En el caso del cubo de un número aproximado, su límite superior del error relativo es el triple del límite superior del número aproximado.
Y así sucesivamente.

PROP La potencia m-ésima de un número aproximado tiene como límite superior del error relativo el límite superior del error relativo del número aproximado multiplicado por el factor m.

6.6. Raíces de números aproximados.

La raíz m-ésima de un número aproximado se puede escribir como la potencia de exponente $\dfrac{1}{m}$ del mismo número aproximado.

Por tanto, $e < \dfrac{1}{m} \cdot \dfrac{1}{a_0 \cdot 10^{n-1}}$

Análogamente al caso anterior, podemos afirmar.

PROP La raíz m-ésima de un número aproximado tiene como límite superior del error relativo el límite superior del error relativo del número aproximado multiplicado por el factor $\dfrac{1}{m}$.

7. NOTACIÓN CIENTÍFICA.

Hemos visto dentro de la teoría de Errores , que desarrollamos en este tema, una serie de símbolos específicos y formas de escribir, que se utilizan asiduamente en cualquier ciencia que haga uso de las técnicas del cálculo numérico.

Estos símbolos nos permiten interpretar correctamente los resultados y homogenizan las diferentes maneras de escribir los datos.
Llamaremos notación al simbolismo empleado para expresar una idea de forma mas breve y precisa.
Una de las notaciones más importantes y usuales es la basada en las distintas potencias enteras de 10. Si el exponente es positivo (de cero en adelante) obtenemos las unidades, decenas, centenas, millares, etc. Si el exponente es negativo, obtenemos las décimas, centésimas, milésimas, etc.
Este tipo de notación descrita que nos permite representar números ya sean exactos o aproximados, la llamaremos Notación Científica.
Por convenio, la notación científica consiste en escribir un número como producto de un número decimal cuya parte entera tiene un solo dígito multiplicado por una potencia de 10.
La Notación Científica muestra el orden de magnitud y las cifras significativas. Las operaciones descritas en el punto anterior son mucho más fáciles de realizar y también facilita la comparación entre números.

Bibliografía Recomendada.

Análisis Matemático I. Aut. J.A. Fernández Viña. Edit. Tecnos.

Introducción al Análisis Matemático. Aut. J.M. Ortega. Edit. Labor.

Cours de Mathematiques Elementaries. Aut. F.M.G.