TEMAS DE MATEMÁTICAS (OPOSICIONES DE SECUNDARIA)

TEMA 8

SUCESIONES. TÉRMINO GENERAL Y FORMA RECURRENTE. PROGRESIONES ARITMÉTICAS Y GEOMÉTRICAS.

1. Sucesiones de Números Reales.
2. Progresiones Aritméticas.
3. Progresiones Armónicas.
4. Progresiones Geométricas.
5. Series Aritméticas y Geométricas.
   5.1. Series Aritméticas.
   5.2. Series Geométricas.
6. Aplicaciones de las progresiones.
   6.1. Cálculo de las fracciones generatrices de números decimales periódicos.
   6.2. Aplicaciones de matemática financiera.
7. Progresiones Hipergeométricas.
8. Progresiones Aritmético-Geométricas.

Bibliografía Recomendada.

TEMA 8

SUCESIONES. TÉRMINO GENERAL Y FORMA RECURRENTE. PROGRESIONES ARITMÉTICAS Y GEOMÉTRICAS.

1. SUCESIONES DE NÚMEROS REALES.

A lo largo de este tema vamos a considerar que en conjunto $\mathbb{N}$ no contiene al elemento 0. Por tanto $\mathbb{N}=\{1, 2, 3, \ldots\}$.

DEF Llamaremos sucesión de Números Reales a toda aplicación f: $\mathbb{N} \to \mathbb{R}$.

Es claro que a cada número natural $i\in\mathbb{N}$ le corresponde una única imagen f(i), ya que en caso contrario f no sería aplicación.

Aunque hemos definido como sucesión a la aplicación f, por extensión del lenguaje también llamaremos sucesión al conjunto de las imágenes de f, que mantienen el orden de $\mathbb{N}$ inducido por f $\{f(n)\}_{n\in\mathbb{N}}$.

Cada una de las imágenes, f(k), recibe el nombre de término de la sucesión, y también se pueden denotar por a_k.

Si podemos encontrar una expresión o fórmula que nos permita obtener cualquier término de la sucesión en función de $n\in\mathbb{N}$, se denotará por a_n y se llamará término general de la sucesión.

Ejemplos.

1) Sea f :$\mathbb{N} \to \mathbb{R}$ con $f(n)=\dfrac{1}{n}$

$f(1)=a_1=1$ $f(2)=a_2=\dfrac{1}{2}$ … son los términos de la sucesión.

$a_n=\dfrac{1}{n}$ es el término general de la sucesión y $\left\{\dfrac{1}{n}\right\}_{n\in N}$ es la sucesión.

2) Otro ejemplo de sucesión puede ser $\left\{\dfrac{(-1)^n}{n}\right\}_{n\in N}$. Entonces el término general es $a_n=\dfrac{(-1)^n}{n}$ y los términos serían $-1, \dfrac{1}{2}, \dfrac{-1}{3}, \dfrac{1}{4}, \ldots$

3) $\begin{cases} 2n+1 & Si\ n\ es\ par \\ n^2 & Si\ n\ es\ impar \end{cases}$ Entonces $a_n=\begin{cases} 2n+1 & n\ par \\ n^2 & n\ impar \end{cases}$

y los términos son 1, 5, 9, 9, 25, 13, …

Como podemos comprobar en este ejemplo, a veces es necesario más de una fórmula para poder definir la sucesión o término general.

Podemos plantearnos la siguiente pregunta ¿Es posible determinar una sucesión a partir de un número finito de sus términos sin conocer el término general?

Antes de contestar esta pregunta necesitamos saber que es determinar una sucesión.

DEF Una sucesión está definida si y sólo si es posible escribir sus términos en orden hasta el término que se quiera.

Intentemos contestar ahora a la pregunta.

Sean $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots$ Para poder afirmar que son sucesión necesitamos conocer la expresión para a_n. La más intuitiva es $a_n = \frac{1}{n}$, pero ¿es única?

Si fuese única, la sucesión ya estaría totalmente determinada. Pero resulta que $a_n = \frac{25}{12} - \frac{35}{24}n - \frac{5}{12}n^2 - \frac{1}{24}n^3$ es otra sucesión tal que sus cuatro primeros términos también son $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots$ y no es la única. Podemos ver que $a_n = \begin{cases} \frac{1}{n} & n \leq 4 \\ 5 & n > 4 \end{cases}$ sería otra.

Como conclusión, podemos afirmar que a partir de un número finito de términos no podemos obtener el término general de la sucesión. Luego esa manera no nos permite definir una sucesión.

Veamos como poder definir una sucesión.

a) Conocer el término general.

Esta forma es la que hemos visto hasta ahora. Consiste en dar una expresión matemática función $n \in \mathbb{N}$, que permite obtener las imagenes de la función f: $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ sustituyendo en dicha expresión n por cualquier número natural.

b) Ley de Recurrencia.

Consiste en obtener el valor de un término de la sucesión en función del anterior o anteriores. Si el término general depende del anterior, es necesario conocer el valor del primer término de la sucesión, a_1. Si el término depende de los k términos anteriores, la sucesión sólo quedará completamente definida si también conocemos los k primeros términos, $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_k$.

Ejemplos.

1) Sea $\left.\begin{array}{l} a_1 = 3 \\ a_n = 2a_{n-1} - 1 \end{array}\right\} \Rightarrow a_1=3,\ a_2=2\cdot 3-1=5,\ a_3=2\cdot 5-1=9, \dots$

2) Una sucesión muy importante y conocida que sigue una ley de recurrencia es la sucesión de Fibonacci.

   $a_1=1 \quad a_2=1 \quad$ y $\quad a_n=a_{n-1}+a_{n-2} \quad \forall n\geq 3$

   Así, la sucesión de Fibonacci es:

   1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, …

2. PROGRESIONES ARITMÉTICAS.

DEF Diremos que una sucesión de números reales $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una progresión aritmética si la diferencia entre un término de la sucesión y el inmediatamente anterior es un valor constante.

De la definición de progresión aritmética obtenemos que la sucesión $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$:

$\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una progresión aritmética $\Leftrightarrow$ $a_{k+1}-a_k = d \quad \forall k\in\mathbb{N}$

El número d recibe el nombre de diferencia de la progresión aritmética.

A partir de la definición de progresión aritmética, obtenemos una ley de recurrencia para las mismas.

PROP Dada una progresión aritmética de diferencia d, el término general viene expresado por la ley de recurrencia $a_n=a_{n-1}+d$

dem.

Como $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una progresión aritmética de diferencia d $\Rightarrow a_{n+1}-a_n = d \Rightarrow$
$\Rightarrow a_{n+1}=a_n+d$ que es lo mismo que $a_n=a_{n-1}+d$

PROP Toda progresión aritmética de diferencia d tiene como término general
$a_n=(n-1)\cdot d+a_1$

dem.

Como $a_n=a_{n-1}+d$

Para n=2 $\quad a_2 = a_1+d$
Para n=3 $\quad a_3 = a_2+d = a_1+d+d = a_1+2d$
Para n=4 $\quad a_4 = a_3+d = a_1+2d+d = a_1+3d$
…
Para n $\quad a_n=a_{n-1}+d = a_1+(n-2)\cdot d+d = a_1+(n-1)\cdot d$

Luego $a_n = a_1+(n-1)\cdot d$

Así pues, podemos determinar completamente una progresión aritmética conociendo el primer término de la sucesión y la diferencia.

COROLARIO Dados dos términos cualesquiera, a_r y a_s con $r<s$, de una progresión aritmética, se verifica que $a_s = a_r+(s-r)\cdot d$

dem.

Sabemos que $a_s = a_1+(s-1)\cdot d$
$a_r = a_1+(r-1)\cdot d$

Al restar ambas expresiones miembro a miembro obtenemos

$$a_s - a_r = a_1 + (s-1)\cdot d - a_1 - (r-1)\cdot d = (s-1-r+1)\cdot d = (s-r)\cdot d$$

Luego $a_s = a_r + (s-r)\cdot d$

PROP Toda progresión aritmética tiene como término general $a_n = a\cdot n+b$ con $a,b\in \mathbb{R}$ y $a\neq 0$.

dem.

Sea $\{a_n\}_{n\in \mathbb{N}}$ una progresión aritmética de diferencia d $\Rightarrow$ $a_n = a_1 + (n-1)\cdot d$

$\Rightarrow$ $a_n = a_1 + n\cdot d - d$ $\Rightarrow$ $a_n = d\cdot n + (a_1 - d)$

Si tomamos $a = d$ y $b = a_1 - d$

nos queda $a_n = a\cdot n+b$ con $a\neq 0$

Un problema que podemos plantearnos es el llamado problema de interpolación. Consiste en intercalar n términos consecutivos entre a y b de tal forma que los n+2 términos formen parte de una progresión aritmética. Los términos que intercalamos entre los extremos a y b reciben el nombre de medios aritméticos. Para resolver este problema, lo único que necesitamos es poder obtener la diferencia d.

PROP Dados dos números a y b, si intercalamos n números tal que los n+2 números formen parte de una progresión aritmética, entonces la diferencia es $d = \dfrac{b-a}{n+1}$

dem.

Llamaremos $a_1=a$ y $a_{n+2}=b$ de tal forma que los n términos que intercalamos sean $a_2, a_3, \ldots, a_{n+1}$

Sabemos que $a_{n+2}=a_1+(n+1)\cdot d \ \Rightarrow \ d=\frac{a_{n+2}-a_1}{n+1}=\frac{b-a}{n+1}$

Los medios aritméticos serán $a+d, a+2d, a+3d, \ldots, a+nd$

Otro problema que también podemos plantearnos es el de calcular la suma de un número finito de términos de una progresión aritmética.

PROP La suma de dos términos cualesquiera que equidistan de a_1 y a_n es igual a la suma de éstos.

dem.

Tenemos que demostrar que dado $p\in\mathbb{N}$ con $0<p<n$ se verifica $a_1+a_n = a_{1+p}+a_{n-p}$ donde a_{1+p} y a_{n-p} son equidistantes de a_1 y a_n respectivamente.

Sabemos que $a_{1+p} = a_1+(1+p-1)d = a_1+pd$
$a_n = a_{n-p}+(n-n+p)d = a_{n-p}+pd$

Si restamos ambas ecuaciones miembro a miembro obtenemos

$$a_{1+p}-a_n = a_1-a_{n-p} \ \Rightarrow \ a_{1+p} + a_{n-p} = a_1 + a_n$$

PROP La suma de n términos consecutivos de una progresión aritmética es igual a la mitad de n veces la suma de sus extremos.

dem.

Sean $a_1, a_2, \ldots, a_n$ los términos de la progresión aritmética que queremos sumar.

$S_n = a_1+a_2+\ldots+a_n$
$S_n = a_n+a_{n-1}+\ldots+a_1$

$2S_n = (a_1+a_n)+(a_2+a_{n-1})+\ldots+(a_n+a_1)$

Aplicando la proposición anterior $\Rightarrow$ $2S_n = n\cdot(a_1+a_n) \ \Rightarrow \ S_n=\frac{n\cdot(a_1+a_n)}{2}$

Ejemplo

1) Calcular la suma de los n primeros múltiplos de 3, comenzando en 3.

sol

Como $a_1=3$, $a_2=6$, $a_3=9$, … $\Rightarrow$ $d=3$ y $a_n = 3+(n-1)\cdot 3$

$$S_n=\frac{n\cdot(3+3+(n-1)\cdot 3)}{2}=\frac{3n^2+3}{2}$$

2) Calcular la suma de los n primeros números impares.

sol

1, 3, 5, 7, … $\Rightarrow$ a_1=1 y d=2 $\Rightarrow$ $a_n = 1+(n-1)\cdot 2 = 2n-1$

$$S_n = \frac{n\cdot(1+2n-1)}{2} = \frac{2n^2}{2} = n^2$$

3. PROGRESIONES ARMÓNICAS.

DEF Llamaremos progresión armónica a una sucesión de números reales $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ cuyo término general es de la forma

$$a_n = \frac{1}{an+b} \qquad con \quad a,b\in\Re \ y \ a\neq 0$$

Como vemos, una progresión armónica está formada por los recíprocos de una progresión aritmética.

Ejemplo

1) $a_n = \dfrac{1}{n}$ es una progresión armónica con a=1 y b=0

2) $a_n = \dfrac{1}{2n+1}$ es también una progresión armónica.

4. PROGRESIONES GEOMÉTRICAS.

DEF Diremos que una sucesión de números reales $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una progresión geométrica si el cociente entre un término de la sucesión y el inmediatamente anterior es un valor constante.

De la definición de progresión geométrica obtenemos que la sucesión $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$:

$\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una progresión geométrica $\Leftrightarrow$ $\dfrac{a_{k+1}}{a_k} = r \quad \forall k\in\mathbb{N}$

El número r recibe el nombre de razón de la progresión aritmética.

Ejemplo.

La sucesión 3, 9, 27, 81, …, 3^n, … es una progresión geométrica ya que

$$\frac{a_n}{a_{n-1}} = \frac{3^n}{3^{n-1}} = 3 \ \Rightarrow \ \text{La razón es } r=3$$

Vamos a realizar un estudio similar al ya visto para las progresiones aritméticas.

A partir de la definición de progresión geométrica obtenemos una ley de recurrencia para las mismas.

PROP Dada una progresión geométrica de razón r, el término general viene expresado por la ley de recurrencia $a_n=a_{n-1}\cdot r$

dem.

Como $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una progresión geométrica de razón r $\Rightarrow$ $\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=r$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow a_{n+1}=a_n\cdot r$ que es lo mismo que $a_n=a_{n-1}\cdot r$

PROP Toda progresión geométrica de razón r tiene como término general $a_n=a_1\cdot r^{n-1}$

dem.

Como $a_n=a_{n-1}\cdot r$

Para n=2 $a_2 = a_1\cdot r$
Para n=3 $a_3 = a_2\cdot r = a_1\cdot r\cdot r = a_1\cdot r^2$
Para n=4 $a_4 = a_3\cdot r = a_1\cdot r^2\cdot r = a_1\cdot r^3$
…
Para n $a_n=a_{n-1}\cdot r = a_1\cdot r^{n-2}\cdot r= a_1\cdot r^{n-1}$

Luego $a_n = a_1\cdot r^{n-1}$

Por tanto, podemos determinar completamente una progresión geométrica conociendo el primer término de la sucesión y la razón.

COROLARIO Dados dos términos cualesquiera, a_p y a_q con p<q, de una progresión geométrica, se verifica que $a_q = a_p\cdot r^{q-p}$

dem.

Sabemos que $a_q = a_1\cdot r^{q-1}$
$a_p = a_1\cdot r^{p-1}$

Al dividir ambas expresiones miembro a miembro obtenemos

$$\frac{a_q}{a_p}=\frac{a_1\cdot r^{q-1}}{a_1\cdot r^{p-1}}=r^{q-1-p+1}=r^{q-p} \Rightarrow a_q = a_p\cdot r^{q-p}$$

Si nos fijamos en el término general de una progresión geométrica, $a_n=a_1\cdot r^{n-1}$, podemos determinar la estructura de la sucesión.

1) Si r>1 La sucesión es divergente. Cada término es mayor (menor) que el anterior si $a_1>0$ ($a_1<0$).

2) Si r=1 La sucesión tiene todos sus términos iguales.

3) Si $0<r<1$ La sucesión es convergente, y tiene por límite 0. . Cada término es menor (mayor) que el anterior si $a_1>0$ ($a_1<0$).

4) Si $r=0$ La sucesión es la sucesión nula.

5) Si $-1<r<0$ La sucesión es convergente y tiene por límite 0. La sucesión es oscilante.

6) Si $r=-1$ La sucesión es oscilante y con los términos en valor absoluto iguales.

7) Si $r<-1$ La sucesión es oscilante y divergente, ya que cada término es mayor (en valor absoluto) que el anterior.

En las progresiones geométricas, al igual que en las aritméticas, podemos plantearnos el problema de la interpolación.

PROP Dados dos números a y b ($a,b\in\mathbb{R}$ y $a\neq 0$) si intercalamos n números tal que los n+2 números formen parte de una progresión geométrica, entonces la razón es $r=\sqrt[n+1]{\frac{b}{a}}$

dem.

Sea $a_1=a$ y $a_{n+2}=b$ de tal forma que los n términos que intercalamos sean a_2, a_3, …, a_{n+1}

Sabemos que $a_{n+2} = a_1 \cdot r^{n+1} \Rightarrow r^{n+1}=\frac{a_{n+2}}{a_1} \Rightarrow r=\sqrt[n+1]{\frac{a_{n+2}}{a_1}}=\sqrt[n+1]{\frac{b}{a}}$

Los números que intercalamos reciben el nombre de medios geométricos y son $a\cdot r$, $a\cdot r^2$, $a\cdot r^3$, …, $a\cdot r^n$.

Ahora vamos a obtener tanto la suma como el producto de n términos de una progresión geométrica.

PROP El producto de dos términos equidistantes de a_1 y a_n es igual al producto de éstos.

dem.

Tenemos que demostrar que dado $p\in\mathbb{N}$ con $0<p<n$ se verifica $a_1\cdot a_n = a_{1+p}\cdot a_{n-p}$ donde a_{1+p} y a_{n-p} son equidistantes de a_1 y a_n respectivamente.

Sabemos que $a_{1+p} = a_1\cdot r^{1+p-1} = a_1\cdot r^p$
$a_n = a_{n-p}\cdot r^{n-n+p} = a_{n-p}\cdot r^p$

Si dividimos ambas ecuaciones miembro a miembro

$$\frac{a_{1+p}}{a_n} = \frac{a_1 \cdot r^p}{a_{n-p} \cdot r^p} \quad \Rightarrow \quad \frac{a_{1+p}}{a_n} = \frac{a_1}{a_{n-p}} \Rightarrow a_1 \cdot a_n = a_{1+p} \cdot a_{n-p}$$

PROP El producto de n términos consecutivos de una progresión geométrica es igual a la raíz cuadrada de la potencia n-ésima del producto de sus extremos.

dem.

Sean a_1, a_2, …, a_n los términos de la progresión geométrica que queremos multiplicar.

$P_n = a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n$
$P_n = a_n \cdot a_{n-1} \cdot \ldots \cdot a_1$

$P_n^2 = (a_1 \cdot a_n) \cdot (a_2 \cdot a_{n-1}) \cdot \ldots \cdot (a_n \cdot a_1)$

Aplicando la proposición anterior:

$$P_n^2 = (a_1 \cdot a_n)^n \quad \Rightarrow \quad P_n = \sqrt{(a_1 \cdot a_n)^n}$$

PROP La suma de n términos consecutivos de una progresión geométrica es $S_n = a_1 \cdot \frac{1-r^n}{1-r}$ siendo a_1 el primero de los términos.

dem.

Sean a_1, a_2, …, a_n los términos de la progresión geométrica que queremos sumar.

$S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$
$r \cdot S_n = a_2 + \ldots + a_n + a_{n+1}$

$S_n - r \cdot S_n = a_1 - a_{n+1} \Rightarrow S_n \cdot (1-r) = a_1 - a_1 \cdot r^n \Rightarrow S_n \cdot (1-r) = a_1 \cdot (1-r^n) \Rightarrow$

$$S_n = a_1 \cdot \frac{1-r^n}{1-r}$$

COROLARIO La suma de n términos consecutivos de una progresión geométrica de razón r=1 es $S_n = n \cdot a_1$

dem.

En este caso, al ser r=1, no nos sirve la proposición anterior, al ser el denominador 0.

Sabemos que todos los términos de una progresión geométrica de razón r=1 son iguales.

Entonces $S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n = n \cdot a_1 \Rightarrow S_n = n \cdot a_1$

COROLARIO La suma de n términos consecutivos de una progresión geométrica de razón r=-1 es $S_n=0$ si n es par ó $S_n=a_1$ si n es impar.

dem.

Sabemos que $S_n = a_1 \cdot \dfrac{1-r^n}{1-r} \Rightarrow S_n = a_1 \cdot \dfrac{1-(-1)^n}{2}$

Si n es par $\Rightarrow$ $(-1)^n = 1$ $\Rightarrow$ $S_n = 0$

Si n es impar $\Rightarrow$ $(-1)^n = -1$ $\Rightarrow$ $S_n = a_1$

5. SERIES ARITMÉTICAS Y GEOMÉTRICAS.

DEF Llamaremos serie al par $(\{a_n\}, \{S_n\})$ siendo $\{a_n\}$ una sucesión de números reales y $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$.

DEF La sucesión $\{S_n\}$ recibe el nombre de sucesión de sumas parciales de la sucesión $\{a_n\}$.

Si la sucesión $\{a_n\}$ es una progresión aritmética, entonces la serie se llama serie aritmética.

Si la sucesión $\{a_n\}$ es una progresión geométrica, entonces la serie se llama serie geométrica.

DEF Diremos que la serie$(\{a_n\}, \{S_n\})$ es sumable si la sucesión $\{S_n\}$ es convergente.

Si $\{S_n\}$ es convergente, entonces existe $S=LimS_n$ y se representa por $S = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$

5.1. Series Aritméticas.

Si $\{a_n\}$ es una progresión aritmética, entonces $S_n = \dfrac{n \cdot (a_1 + a_n)}{2}$

PROP Una serie aritmética no es sumable.

dem.

Para ver si es sumable, vamos a calcular $LimS_n$

$$LimS_n = Lim \frac{(a_1 + a_n) \cdot n}{2} = Lim \frac{(a_1 + a_1 + (n-1) \cdot d) \cdot n}{2} = Lim \frac{2a_1 n + dn^2 - dn}{2} =$$

$$= Lim \frac{dn^2 + (2a_1 - d)\cdot n}{2} = \infty$$

El límite será $+\infty$ si $d>0$ y será $-\infty$ si $d<0$

Luego la serie no es sumable al no ser $\{S_n\}$ convergente.

5.2. Series Geométricas.

PROP Una serie geométrica es sumable si $|r|<1$.

dem.

Sea $\{a_n\}$ una progresión geométrica y $\{S_n\}$ la sucesión de sumas parciales de $\{a_n\}$. Para que la serie sea sumable debe existir $\lim S_n$.

Como $\{a_n\}$ es una progresión geométrica, sabemos que $S_n = a_1 \cdot \frac{1-r^n}{1-r}$

$$Lim\ r^n = \begin{cases} 0 & si \quad |r|<1 \\ \infty & si \quad r>1 \\ 1 & si \quad r=1 \\ No\ Existe & si \quad r<-1 \\ No\ Existe & si \quad r=-1 \end{cases}$$

Teniendo en cuenta el Lim r^n, podemos calcular el Lim S_n en función del valor que tenga r.

1) Si $|r|<1$ $\Rightarrow$ $Lim\ S_n = \frac{a_1}{1-r}$ $\Rightarrow$ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \frac{a_1}{1-r}$

2) Si $r<1$ $\Rightarrow$ S_n no es convergente $\Rightarrow$ Lim S_n no es finito

3) Si $r=1$ $\Rightarrow$ Lim S_n = Lim $(a_1 \cdot n)$ que no es finito

4) Si $r<-1$ $\Rightarrow$ S_n no es convergente $\Rightarrow$ Lim S_n no es finito

5) Si $r=-1$ $\Rightarrow$ S_n no tiene límite, al ser una sucesión oscilante de 0 y a_1.

6. APLICACIONES DE LAS PROGRESIONES.

6.1. Cálculo de las fracciones generatrices de números decimales periódicos.

a) Decimal Periódico Puro.

Sea el número $x = 4'\overline{18}$

Como x=4’1818181818…

lo podemos escribir como x = 4 + 0’18 + 0’0018 + 0’000018 + …

y es lo mismo que $x = 4 + \frac{18}{10^2} + \frac{18}{10^4} + \frac{18}{10^6} + ... + \frac{18}{10^{2n}} + ...$

y por tanto $x = 4 + \frac{18}{10^2} \cdot \left(1 + \frac{1}{10^2} + \frac{1}{10^4} + ... + \frac{1}{10^{2n}} + ... \right)$

Lo que tenemos en el interior del paréntesis es la suma de una progresión geométrica de razón $r = \frac{1}{10^2}$ y primer término a_1.

Sabemos que la suma de dicha progresión geométrica es:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{10^{2n}} = \frac{1}{1 - \frac{1}{10^2}} = \frac{10^2}{99}$$

Por tanto $x = 4 + \frac{18}{10^2} \cdot \frac{10^2}{99} \quad \Rightarrow \quad x = 4 + \frac{18}{99} = \frac{414}{99}$

b) Decimal periódico mixto

Sea el número $x = 4'1\overline{8}$

como x = 4’1888888…

lo podemos escribir como x = 4 +0’1 + 0’08 + 0’008 + 0’0008 + …

y es lo mismo que $x = 4 + \frac{1}{10} + \frac{8}{10^2} + \frac{8}{10^3} + ... + \frac{8}{10^n} + ...$

y por tanto $x = 4 + \frac{1}{10} + \frac{8}{10^2} \cdot \left(1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{10^2} + ... + \frac{1}{10^n} + ... \right)$

Lo que tenemos en el interior del paréntesis es la suma de una progresión geométrica de razón $r = \frac{1}{10}$ y primer término $a_1=1$

Sabemos que la suma de dicha progresión geométrica es $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{10^n} \right) = \frac{1}{1 - \frac{1}{10}} = \frac{10}{9}$

Por tanto $x = 4 + \frac{1}{10} + \frac{8}{10^2} \cdot \frac{10}{9} = 4 + \frac{1}{10} + \frac{8}{90} = \frac{377}{90}$

6.2. Aplicaciones de Matemática Financiera.

Los bienes económicos tienen una utilidad que medimos en unidades monetarias (por ejemplo, euros o pesetas). Está claro que esta utilidad es mayor siempre que dispongamos de dicho bien. Es por ello que el tiempo influye en la apreciación positiva o negativa de los bienes económicos.

Definimos al capital financiero como la medida de cualquier activo, real o financiero, expresada por su cuantía y por su vencimiento o momento de disponibilidad. Por tanto, representaremos cualquier capital por el par ordenado (C,t) siendo C la cuantía del capital (en unidades monetarias) y t el momento de disponibilidad del capital (en años).

En la actividad financiera que se realiza día a día, se efectúan gran cantidad de operaciones con capitales. Los agentes económicos han de disponer de herramientas que les permitan comparar capitales, sustituir varios de ellos por uno sólo equivalente, etc. Las expresiones matemáticas que realizan esa labor son las llamadas Leyes financieras.

Podemos distinguir entre leyes de capitalización y de descuento, en función de si necesitamos conocer el valor de un capital actual en el futuro o en el pasado, respectivamente.

Son varias las funciones matemáticas que podemos utilizar como leyes financieras. Aquí veremos las leyes sumativas y las leyes multiplicativas. Las primeras se aplican cuando en el intervalo considerado no se acumulan intereses para producir nuevos intereses. Las segundas se utilizan cuando se acumulan los intereses. Como ejemplos tenemos la capitalización simple y el descuento comercial como leyes sumativas, y la capitalización compuesta y el descuento compuesto, como leyes multiplicativas.

a) Capitalización Simple.

   La expresión matemática es $L_1(t) = 1+i\cdot t$

   donde t es el tiempo en años e i el interés o tanto.

   Llamaremos montante al capital equivalente a C dentro de t años: $M = C\cdot(1+i\cdot t)$

b) Capitalización Compuesta

   La expresión matemática es $L_2(t) = (1+i)^t$

   Siendo el Montante dentro de t años: $M = C(1+i)^t$

Ejemplos:

1) Tenemos una persona que alquila un piso durante un año. Cada mes le pagan 500 € más el 5% mensual. ¿Qué cantidad obtendrá al final del año?

El primer mes cobra 500 € = 100(1+0’05(1-1))
El segundo mes cobra 500(1+0’05(2-1))
El tercer mes cobra 500(1+0’05(3-1))
...
El último mes cobra 500(1+0’05(12-1))

En general, el mes t (con t:1,...,12) cobrará $a_t = 500(1+0'05(t-1))$ y
$a_t = 25t+475$

El dinero que obtendrá será $a_1+a_2+...+a_{12}$ que es la suma de los 12 primeros términos de una progresión aritmética de término general $a_n = 250n+250$.

Entonces como $S_n = \frac{n\cdot(a_1+a_n)}{2}$ será $S_{12} = \frac{12(500+800)}{2} = 7.800$ €

2) Una persona con 55 años decide invertir 5.000€ anuales en un fondo de pensiones al 7’5% de interés anual. Como el dinero no lo puede rescatar hasta los 65 años, ¿Cuánto dinero obtendrá al cabo de esos diez años?

Como en este caso los intereses que se obtienen cada año son reinvertibles, hemos de utilizar la ley de capitalización compuesta. Vamos a calcular el dinero que será cada anualidad ingresada dentro de diez años.

La primera anualidad será: $5.000(1+0'075)^{11-1}$
La segunda anualidad será: $5.000(1+0'075)^{11-2}$
...
La décima y última anualidad será: $5.000(1+0'075)^{11-10}$

En general, cada anualidad se convierte, dentro de 11-t años en
$a_t = 5.000(1+0'075)^{11-t}$ €

El dinero que obtendrá será $a_1, a_2, ..., a_{10}$ que es la suma de los diez primeros términos de una progresión geométrica de término general $b_n = 5.000(1'075)^n$ con $b_i=a_{11-i}$.

Como $S_n = a_1 \cdot \frac{1-r^n}{1-r}$ tenemos que $S_{10} = 5.000\frac{1-1'075^{10}}{1-1'075} = 70.735'44$ €

7. PROGRESIONES HIPERGEOMÉTRICAS.

DEF Diremos que una sucesión $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una progresión hipergeométrica si el cociente de cada término por el inmediatamente anterior es una expresión de la forma:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{a\cdot n+b}{a\cdot n+c}$$ con $a,b,c\in\mathbb{R}$ y a y c no simultáneamente nulos.

OBS Las progresiones geométricas son un caso particular de las progresiones hipergeométricas ya que se obtienen para a=0, siendo la razón r=b/c.

PROP Dada la sucesión $\{a_n\}$ que forma una progresión hipergeométrica, la suma de m términos consecutivos es

$$S_m = \frac{a_{m+1}\cdot(m\cdot a + c) - a_1\cdot c}{a + b - c}$$

siendo a_1 el primero de ellos.

<u>dem.</u>

Como $\{a_n\}$ es una progresión hipergeométrica, se verifica que $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{a\cdot n + b}{a\cdot n + c}$

Dando a n los valores 1, 2, 3, …, m obtenemos

$a_1\cdot(a+b) = a_2\cdot(a+c)$
$a_2\cdot(2a+b) = a_3\cdot(2a+c)$
…
$a_{m-1}\cdot((m-1)\cdot a+b) = a_m\cdot((m-1)\cdot a+c)$
$a_m\cdot(m\cdot a+b) = a_{m+1}\cdot(m\cdot a+c)$

Sumando miembro a miembro y eliminando los sumandos comunes que figuran en ambos miembros, queda:

$S_m\cdot(a+b) = S_m\cdot c - a_1\cdot c + a_{m+1}(m\cdot a+c)$

$S_m\cdot(a+b) - S_m\cdot c = a_{m+1}(m\cdot a+c) - a_1\cdot c$

$$S_m = \frac{a_{m+1}\cdot(m\cdot a + c) - a_1\cdot c}{a + b - c}$$

8. PROGRESIONES ARITMÉTICO-GEOMÉTRICAS.

DEF Diremos que una sucesión $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una progresión aritmético-geométrica si el término general es de la forma:

$a_n = (a\cdot n+b)\cdot x^n$

donde $a,b,x\in\mathbb{R}$ y tales que a y x no se anulan simultáneamente.

OBS Si tomamos a=0 obtenemos una progresión geométrica y si tomamos x=1 obtenemos una progresión aritmética.

PROP La suma de m términos consecutivos de una progresión aritmético-geométrica es

$$S_m = \frac{a\cdot x\left(\frac{1-x^m}{1-x} - m\cdot x^m\right) + b\cdot x\cdot(1-x^m)}{1-x}$$

<u>dem.</u>

Si la sucesión $\{a_n\}$ es una progresión aritmético-geométrica, se verifica que $a_n = (a\cdot n+b)\cdot x^n$

Como $S_m = \sum_{n=1}^{m} a_n = \sum_{n=1}^{m} (a\cdot n + b)\cdot x^n$

Entonces $$S_m = a\cdot\sum_{n=1}^{m} n\cdot x^n + b\cdot\sum_{n=1}^{m} x^n$$

y $$x\cdot S_m = a\cdot\sum_{n=1}^{m} n\cdot x^{n+1} + b\cdot\sum_{n=1}^{m} x^{n+1}$$

Restando tenemos $$S_m - x\cdot S_m = a\cdot\left(\sum_{n=1}^{m}(n\cdot x^n - n\cdot x^{n+1})\right) + b\cdot\sum_{n=1}^{m}(x^n - x^{n+1}) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad S_m\cdot(1-x) = a\cdot\sum_{n=1}^{m}(n\cdot x^n - n\cdot x^{n+1}) + b\cdot\sum_{n=1}^{m}(x^n - x^{n+1}) \qquad (1)$$

Calculemos aparte ambos sumatorios:

$$\sum_{n=1}^{m}(n\cdot x^n - n\cdot x^{n+1}) = \sum_{n=1}^{m} n\cdot x^n - \sum_{n=1}^{m} n\cdot x^{n+1} =$$

$$= \left(x + 2x^2 + 3x^3 + \ldots + mx^m\right) - \left(x^2 + 2x^3 + \ldots + (m-1)x^m + mx^{m+1}\right) =$$

$$= x + x^2 + x^3 + \ldots + x^m - mx^{m+1} = x\cdot\frac{1-x^m}{1-x} - mx^{m+1} \qquad (2)$$

$$\sum_{n=1}^{m}(x^n - x^{n+1}) = (x-x^2) + (x^2-x^3) + \ldots + (x^m - x^{m+1}) = x - x^{m+1} \qquad (3)$$

Sustituyendo (2) y (3) en (1) nos queda:

$$(1-x)\cdot S_m = a\cdot\left(x\cdot\frac{1-x^m}{1-x} - mx^{m+1}\right) + b\cdot(x - x^{m+1})$$

$$S_m = \frac{a\cdot x\cdot\left(\frac{1-x^m}{1-x} - m\cdot x^m\right) + b\cdot x\cdot\left(1-x^m\right)}{1-x}$$

Corolario Si la sucesión $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una progresión aritmético-geométrica con $|x|<1$ entonces $Lim\ S_n = \frac{ax + bx(1-x)}{(1-x)^2}$

dem.

Si $\{a_n\}$ es una progresión aritmético-geométrica, se verifica que $S_n = \dfrac{a\cdot x\cdot\left(\dfrac{1-x^n}{1-x} - n\cdot x^n\right) + b\cdot x\cdot(1-x^n)}{1-x}$ y como $|x|<1 \Rightarrow \lim_n x^n = 0$

Por tanto $S_n = \dfrac{a\cdot x\cdot\left(\dfrac{1}{1-x} - 0\right) + b\cdot x\cdot(1-0)}{1-x} = \dfrac{\dfrac{ax}{1-x} + bx}{1-x} = \dfrac{ax + bx(1-x)}{(1-x)^2}$

El resultado anterior se puede generalizar de la siguiente forma:

DEF Sea $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión. Diremos que es una progresión aritmético-geométrica si su término general es de la forma:

$$a_n = P(n)\cdot x^n$$

donde P(n) es un polinomio de variable natural.

Para obtener S_n, se sigue un proceso similar al caso más específico, visto antes. Sólo hay que tener en cuenta que el proceso se reitera tantas veces como indica el grado de P(n).

Veámoslo mediante un ejemplo.

Ejemplo.

Sea $a_n=(2n^2+3)\cdot x^n$

$$S_m = \sum_{n=1}^{m} a_n = \sum_{n=1}^{m} (2n^2+3)\cdot x^n = 2\cdot\sum_{n=1}^{m} n^2 x^n + 3\cdot\sum_{n=1}^{m} x^n$$

$$x\cdot S_m = x\cdot\sum_{n=1}^{m} a_n = \sum_{n=1}^{m} (2n^2+3)\cdot x^{n+1} = 2\cdot\sum_{n=1}^{m} n^2 x^{n+1} + 3\cdot\sum_{n=1}^{m} x^{n+1}$$

$$S_m\cdot(1-x) = 2\cdot\left(\sum_{n=1}^{m} n^2 x^n - \sum_{n=1}^{m} n^2 x^{n+1}\right) + 3\cdot\left(\sum_{n=1}^{m} (x^n - x^{n+1})\right) =$$

$$= 2\cdot\left(x + 4x^2 + 9x^3 + \ldots + m^2x^m - x^2 - 4x^3 - 9x^4 - \ldots - m^2x^{m+1}\right) + 3\cdot\left(x - x^{m+1}\right) =$$

$$= 2\cdot\left(x + 3x^2 + 5x^3 + \ldots + (2m-1)x^m - m^2x^{m+1}\right) + 3x\left(1-x^m\right)$$

Luego

$$S_m\cdot(1-x) = 2x + 2\cdot\left(3x^2 + 5x^3 + \ldots + (2m-1)x^m\right) - 2m^2x^{m+1} + 3x\left(1-x^m\right)$$

y $$x \cdot S_m \cdot (1-x) = 2\cdot\left(x^2 + 3x^3 + 5x^4 + \ldots + (2m-1)x^{m+1} - m^2 x^{m+2}\right) + 3x^2\left(1-x^m\right)$$

Restando queda:

$$S_m \cdot \left((1-x) - x(1-x)\right) = 2x + 2\left(2x^2 + 2x^3 + \ldots + 2x^m\right) - 2(2m-1)x^{m+1} - 2m^2 x^{m+1} +$$

$$+ m^2 x^{m+2} + 3x\left(1 - x^m - x + x^{m+1}\right)$$

$$S_m (1-x)^2 = 2x + 2\cdot 2x^2 \cdot \frac{1-x^{m-1}}{1-x} - 2x^{m+1}\left(2m - 1 + m^2\right) + m^2 x^{m+2} + 3x\left(1 - x - x^m + x^{m+1}\right)$$

$$S_m = \frac{2x + 4x^2 \cdot \dfrac{1-x^{m-1}}{1-x} - 2x^{m+1}\left(m^2 + 2m - 1\right) + m^2 x^{m+2} + 3x(1-x)(1-x^m)}{(1-x)^2}$$

Si $|x| < 1$ la serie $(\{a_n\},\{S_n\})$ es sumable, siendo en este caso concreto

$$Lim\ S_n = \frac{2x + \dfrac{4x^2}{1-x} + 3x(1-x)}{(1-x)^2} = \frac{2x(1-x) + 4x^2 + 3x(1-x)^2}{(1-x)^2} = \frac{x(3x^2 - 4x + 5)}{(1-x)^2}$$

BIBLIOGRAFÍA RECOMENDADA.

Análisis Matemático I. Aut. J.A. Fernández Viña. Edit. Tecnos.

Análisis Matemático. Miguel de Guzmán-B. Rubio. Edit. Pirámide.

Curso de Análisis Matemático I. Edit. Edunsa.

Lecciones de Cálculo Infinitesimal I. Manuel Franco-Roque Molina. Edit. Universidad de Murcia.