TEMA 54

LAS CÓNICAS COMO SECCIÓNES PLANAS DE UNA SUPERFICIE CÓNICA. ESTUDIO ANALÍTICO. PRESENCIA EN LA NATURALEZA, EN EL ARTE Y EN LA TÉCNICA.

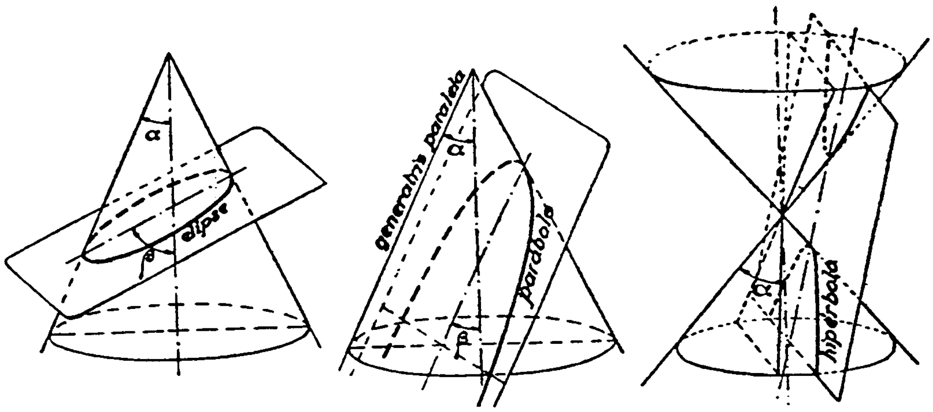
TEMA 54

LAS CÓNICAS COMO SECCIÓNES PLANAS DE UNA SUPERFICIE CÓNICA. ESTUDIO ANALÍTICO. PRESENCIA EN LA NATURALEZA, EN EL ARTE Y EN LA TÉCNICA.

1. LAS CÓNICAS COMO SECCIONES PLANAS DE UNA SUPERFICIE CÓNICA.

Siguiendo la tradición dórica antigua, definiremos las cónicas como secciones producidas en una superficie cónica de resolución por un plano que no pase por el vértice. De ahí su nombre.

Si el plano secante corta a todas las generatrices de la superficie llamaremos a la sección elipse. Si es paralelo a una sola generatriz, la curva tendrá un punto impropio y la llamaremos parábola. Si es paralelo a dos generatrices, tendrá dos puntos impropios y se llama hipérbola. Como el plano paralelo por el vértice solo puede contener, a lo sumo dos generatrices del cono, esto son todos los casos posibles.

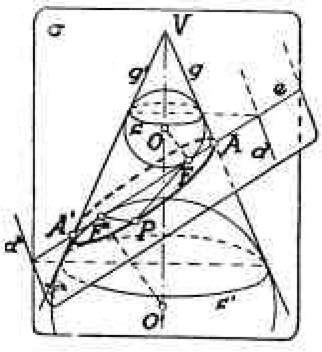


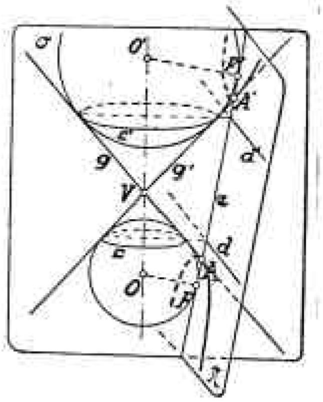
Si a es el ángulo de las generatrices con el eje y b el ángulo de este con el plano de la sección, podemos caracterizar la naturaleza de la sección según sea $a < b$ (elipse) $a = b$ (parábola) o $a > b$ (hipérbola). Si el plano de la sección es perpendicular al eje (b =90º) la sección es una circunferencia. Por tanto la circunferencia es un caso perpendicular de la elipse. En nuestro estudio no trataremos este caso, visto en temas anteriores.

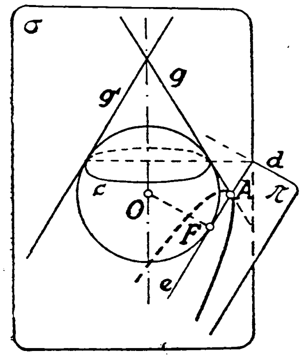
Llamaremos puntos interiores (exteriores) los que se proyectan desde el vértice según rayos interiores (exteriores) al espacio cónico encerrado por la superficie. De aquí se deduce que toda recta que pase por un punto interior a una cónica tiene con ésta dos puntos comunes (propios o impropios), por tener el plano que le proyecta dos generatrices comunes con la superficie cónica.

1.1. Focos, directrices y eje focal.

En cualquiera de los tres casos, tracemos por el eje del cono el plano s perpendicular al plano p que contiene la cónica. El plano s será el plano de simetría del cono y de p, y por tanto, de la cónica. Sean g y g´ las dos generatrices contenidas en dicho plano y *e* la recta de intersección de s con p. Tracemos en el plano s las dos circunferencias inferiores al ángulo gg´ (o a un opuesto por el vértice) tangentes a sus lados y a la recta *e*.







Sean F y F´ los puntos de contacto con *e*. Estas circunferencias se reducen a una sola recta *e* que es paralela a g o g´ (parábola) y por tanto, en tal caso no hay mas que un punto F. Los puntos F y F´ se llaman focos de la cónica.

Si hacemos girar las circunferencias obtenidas alrededor del eje del cono se engendran esferas que son tangentes a la superficie cónica (a lo largo de sendas circunferencias c y c´, situadas en planos perpendiculares al eje) y también tangentes al plano p en F o F´ respectivamente, puesto que la distancia del centro O(O´) al plano p es la perpendicular OF(OF´) igual al radio. Se llaman focos de una sección cónica a los puntos de contacto de un plano con las esferas inscritas en el cono y tangentes al plano de la sección.

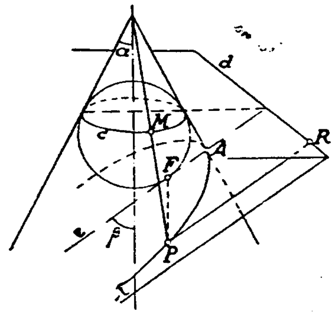
La intersección *d* (*d´*) del plano de la circunferencia de contacto con el plano de la cónica se llama directriz de éste correspondiente al foco F(F´). La parábola no tiene mas que un foco y una directriz.

Se llama eje focal a la recta FF´ que contiene a los focos. Esta recta *e* es eje de simetría de la cónica (por ser intersección de un plano con el plano s de simetría). Es, por tanto, perpendicular a las directrices.

Los puntos A (A´) de la cónica situadas en el eje se llaman vértices de la cónica. La parábola solo tiene uno.

Los segmentos PF(PF´) que unen un punto P cualquiera de la cónica con los focos, se llaman radios vectores del punto P.

1.2. Razón de distancias de un punto de la cónica a un foco y a una directriz.



En virtud de las definiciones anteriores resulta que el radio vector que une un punto cualquiera P de la sección con un foco F, es igual al segmento PM de generatriz que pase por P y la circunferencia c. PF=PM, puesto que ambos son segmentos de rectas tangentes por P a una esfera.

Ahora bien, PM forma constantemente el mismo ángulo α con el eje del cono, y el segmento de perpendicular PR de P a la directriz es paralelo al eje focal e, y forma con el eje del cono el ángulo constante β. Pero las proyecciones de PM y PR sobre el eje del cono son iguales por estar R y M en un mismo plano normal al eje, es decir, $PM \cdot \cos\alpha = PR \cdot \cos\beta$. Por tanto:

$$\frac{PF}{PR} = \frac{PM}{PR} = \frac{\cos\beta}{\cos\alpha} = \varepsilon \quad \text{(constante)}$$

y podemos enunciar:

La razón de distancias de un punto de una cónica a un foco y a una directriz es la misma para todos los puntos. Esta es una constante ε que se llama excentricidad y es igual a la que existe entre los cosenos de los ángulos que forman con el eje el plano de la sección y las generatrices rectilíneas de la superficie.

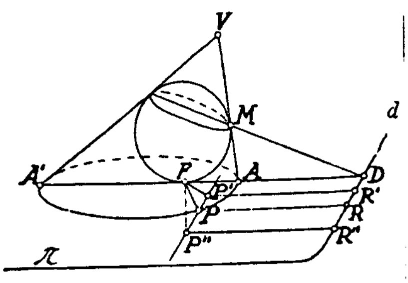
Según $\alpha < \beta$, $\alpha = \beta$ o $\alpha > \beta$, es decir según se trata de una elipse, parábola o hipérbola, se tendrá ε<1, ε=1 o ε>1.

1.3. Nueva definición métrica de las cónicas.

Recíprocamente, todo lugar geométrico de puntos de un plano cuya razón de distancias a un punto fijo F y a una recta fija *d* es constante, ε, es cónica.

Sea FD el segmento de perpendicular de F a *d* y sea A el punto del que cumple la condición:

$$\frac{FA}{FD} = \varepsilon .$$



Tracemos una esfera arbitraria tangente en F al plano π del lugar, y en el plano diametral por A tracemos la tangente AM. El cono circunscrito a dicha esfera a lo largo de su sección por el plano MD (impuesta esta sección no diametral, en cuyo caso variaremos la esfera), será cortado por el plano π según una cónica cuyos puntos, entre los que esta A, verifican la condición del enunciado.

Y son los únicos puntos que le verifican, pues si P´, por ejemplo, es un punto interior y trazamos por P´ la paralela a *d*, la distancia de F a uno de los puntos P de intersección verificare FP´<FP y por tanto

$$\frac{FP'}{P'R'} < e \, .$$

Análogamente probaríamos que para puntos exteriores P´´ es

$$\frac{FP''}{P'R''} > e \, .$$

Acabamos de probar de paso que: para todo punto interior (exterior) la razón de distancias al foco y a la directriz es menor (mayor) que la excentricidad. El razonamiento es válido para las tres curvas.

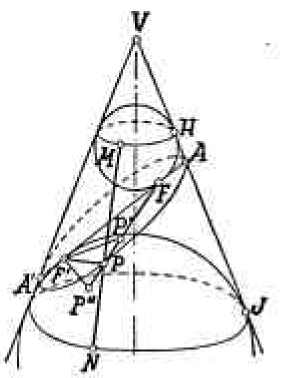
Demostrado lo anterior podemos dar estas nuevas definiciones de elipse, hipérbola y parábola, equivalentes a las anteriores:

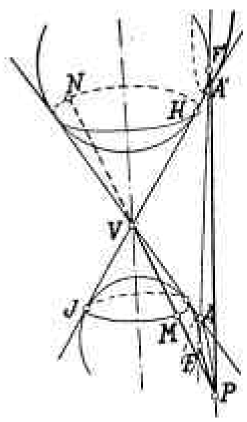
Cónica es el lugar geométrico de puntos de un plano cuya razón de distancias a un punto fijo (foco) y a una recta fija (directriz) es una cantidad constante, e. Si e<1 la cónica se llama elipse, si e>1 se llama hiperbólica y si e=1 es una parábola. De otro modo: parábola es el lugar geométrico de puntos de un plano equidistantes de uno fijo (foco) y de una recta fija (directriz).

En particular, el vértice A de la parábola es el punto medio del segmento FD de perpendicular trazada por el foco a la directriz.

1.4. Teorema de Dandelin. Tercera definición de elipse e hipérbola.

Consideramos ahora los dos radios vectores PF y PF´ por un mismo punto P cualquiera de la cónica, que son respectivamente iguales a los segmentos de generatriz PM y PN que pasen por P. Se tendrá:





Elipse: PF+PF´=PM+PN=MN=HJ

Hipérbola: PF´-PF=PN-PM=MN=HJ

Pero en el caso de la elipse, HJ es la distancia entre los puntos de contacto de dos circunferencias inscrita y exinscrita al triángulo AVA´, cuya longitud es igual al lado AA´.

En la hipérbola, el triángulo VAA´ permite obtener: (p=semiperímetro):

A´H=p-AA´

A´J=p

HJ=A´J-A´H=AA´

Luego los radios vectores de una elipse tienen, suma constante, los de una hipérbola, tienen diferencia constante, en valor absoluto.

En ambos casos esta longitud constante es la longitud del eje focal, entendiendo por tal la distancia entre los vértices A y A´ de la cónica situada en él. Se le suele designar por 2a, mientras que la distancia FF´ se designa por 2c.

Recíprocamente: el lugar geométrico de puntos P de un plano p cuya suma (diferencia) de distancias a dos puntos fijos F y F´ es una longitud 2a constante, es una elipse (hipérbola) cuyos focos son F y F´.

En efecto: colocadas A y A´ simétricamente respecto el punto medio de FF´, tales que AA´=2a, A y A´ pertenecen al lugar, puesto que AF+AF´=A´F´+A´F=2a

Tracemos ahora una esfera arbitraria, tangente al plano p en F y en el plano diametral que contiene A y A´, dos tangentes AV y A´V. El cono circunscrito a dicha esfera por el punto V de intersección (se suponen secantes, pues en caso contrario variaremos la dimensión de la esfera), corta al plano p según una cónica cuyos puntos, entre los que se hallan A y A´, cumplen la condición del enunciado. Y son los únicos puntos que la cumplen, pues todos los puntos P´(P´´) situados en el interior (prolongación) de un radio vector cualquiera PF verifican:

$$\left.\begin{array}{r} P'F' < PF' + P' \\ P''F' > PF' - PP'' \end{array}\right\} \text{ y sumando } \left\{\begin{array}{c} P'F \\ P''F \end{array}\right\} \text{ tenemos } \left\{\begin{array}{l} P'F' + P'F < PF' + PF = 2a \\ P''F' + P''F > PF' + PF = 2a \end{array}\right.$$

Es decir, la suma de distancias de todo punto interior (exterior) a la elipse a sus focos es menor (mayor) que el eje focal.

Análogamente se prueba que la diferencia de distancias de todo punto interior (exterior) a la hipérbola a sus focos es mayor (menor) que la longitud del eje focal.

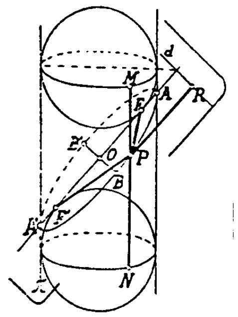
En resumen, podemos dar una tercera definición de elipse e hipérbola, equivalente a las anteriores:

Elipse (hipérbola) es el lugar geométrico de puntos cuya suma (diferencia) de distancias a dos puntos fijos (focos) es constante.

Esta definición junto a la anterior de parábola son las definiciones de donde se suele partir en las exposiciones elementales.

1.5. Secciones del cilindro de resolución. Eje menor de la elipse.

La sección producida en una superficie cilíndrica por una plano p oblicuo al eje es una elipse.



En efecto, definiendo las esferas tangentes al cilindro y al plano de la sección, si F´ y F´ son los puntos de contacto de las mismas, P es un punto cualquiera de la sección y MN el segmento de generatriz que pasa por P y limitado por las circunferencias de tangencia respectivas, se tiene:

PF+PF´=PM+PN=MN (constante)

lo que demuestra que la sección es elíptica.

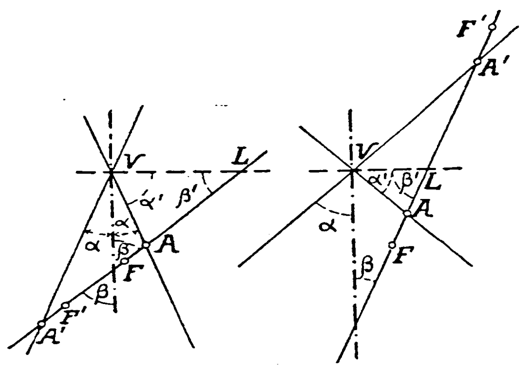
También se puede probar, por la constancia de la razón:

$$\frac{PM}{PR}$$

siendo PR la distancia de P a la recta intersección de p con el pleno de la circunferencia de contacto, de donde resulta que esta recta es directriz.

El plano diametral del cilindro, perpendicular a p, es plano de simetría de la elipse y una intersección con p será el eje de simetría AA´. El diámetro perpendicular a dicho eje por el punto medio O de AA´. Será asimismo eje de simetría del cilindro y de p, y por tanto, de la elipse. El segmento BB´ limitado por sus intersecciones con la elipse se llama eje menor y es igual al diámetro del cilindro. Se le designa por 2b y sus extremos B y B´ se llaman también vértices de la elipse.

1.6. La excentricidad en función del eje focal y la distancia focal.



En la elipse y en la hipérbola la excentricidad es igual a la razón:

$$\frac{FF'}{AA'} = \frac{c}{a}$$

entre la distancia focal, 2c, y la distancia AA´=2a entre los vértices del eje focal.

En efecto, trazando por V la perpendicular VL al eje del cono en el plano de simetría s (normal al de la sección) tendremos:

$$e = \frac{\cos b}{\cos a} = \frac{sen\, b'}{sen\, a'} = \frac{VA}{LA}$$

y por una propiedad de las bisectrices interiores y exteriores de un triángulo, se verifica (restando o sumando términos en proporción según ser elipse o hipérbola):

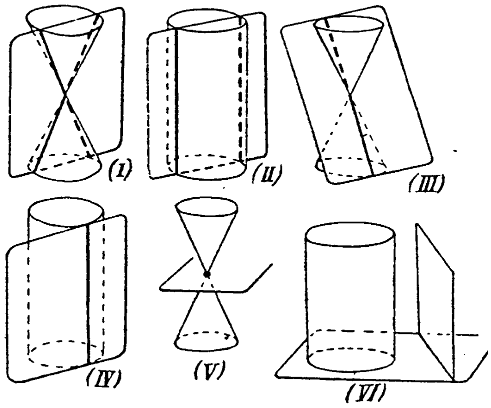
$$e = \frac{VA}{LA} = \frac{VA'}{LA'} = \frac{VA' \pm VA}{AA'}$$

pero VA´-VA=FF´ (elipse) y VA´+VA=FF´ (hipérbola).

Luego $e = \frac{FF'}{AA'}$ en cualquier caso.

1.7. Cónica degeneradas.

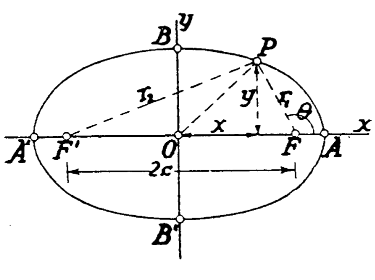
Si en la definición de cónica como sección de un cono omitimos la restricción de que el plano sección no pase por el vértice y consideremos el cilindro como un cono (de vértice impropio), obtenemos, además de la elipse, hipérbola y parábola, las diferentes clases de cónicas, llamadas degeneradas:

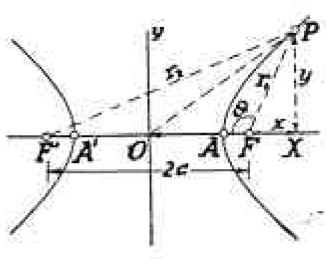


Dos rectas concurrentes (I)
Dos rectas paralelas (II)
Dos rectas confundidas en una (III y IV)
Dos rectas imaginarias con un punto propio común (V)
Dos rectas imaginarias con un punto impropio común (VI)

2. ESTUDIO ANALÍTICO

Consideremos unos ejes cartesianos rectángulos Ox, Oy coincidentes con los ejes AA´ y BB´ de la elipse o de la hipérbola.





Los dos radios vectores r_1, r_2 de cada punto P son lados de un triángulo PFF´ cuya diferencia de cuadrados se expresa fácilmente mediante el tercer lado FF´=2c y la proyección x de la mediana OP sobre el.

Así tendremos:

Elipse	Hipérbola
$r_2{}^2 - r_1{}^2 = 4cx$	$r_2{}^2 - r_1{}^2 = 4cx$
$r_2 + r_1 = 2a$	$r_2 - r_1 = 2a$

de donde:

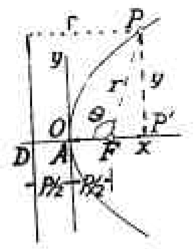
$$r_2 - r_1 = \frac{2c}{a}x \qquad\qquad r_2 + r_1 = \frac{2c}{a}x$$

Conocidas $r_2 + r_1$ y $r_2 - r_1$ se deduce por suma y resta respectivamente:

$$r_2 = a + \frac{c}{a}x = a + \varepsilon.x \qquad\qquad r_2 = a + \frac{c}{a}x = a + \varepsilon.x$$

$$r_1 = a - \frac{c}{a}x = a - \varepsilon.x \qquad\qquad r_1 = -a + \frac{c}{a}x = -a + \varepsilon.x$$

En la parábola, tomando como eje x el de la parábola y como eje y la tangente en el vértice y llamando p a la distancia del foco a la directriz resulta r=DP´, luego:



$$r = x + \frac{P}{2}$$

2.1. Ecuación focal de las cónicas.

Llamando θ al ángulo que forma el radio r_1 con FA se tiene:

Elipse	Hipérbola
$r_1 \cos\theta = x - c$	$r_1 \cos\theta = c - x$

y eliminando x entre estas ecuaciones y las respectivas expresiones del radio vector, para lo cual basta multiplicarlas por ε y sumarlas a las anteriores, y teniendo en cuenta que:

Elipse	Hipérbola
$a^2 = b^2 + c^2$	$c^2 = b^2 + a^2$

tenemos:

$$\left.\begin{aligned} r_1 &= a - \varepsilon.x \\ r_1\varepsilon\cos\theta &= \varepsilon.x - \varepsilon.c \end{aligned}\right\} \qquad\qquad \left.\begin{aligned} r_1 &= -a + \varepsilon.x \\ r_1\varepsilon\cos\theta &= \varepsilon.c - \varepsilon.x \end{aligned}\right\}$$

luego:

$$r_1(1+e\cos q) = a - e.c = \frac{a^2-c^2}{a} = \frac{b^2}{a} \qquad r_1(1+e\cos q) = e.c - a = \frac{c^2-a^2}{a} = \frac{b^2}{a}$$

y llamando $p = \dfrac{b^2}{a}$ queda la ecuación valida para ambas cónicas:

$$r = \frac{P}{1+e\cos q}$$

que liga las dos coordenadas polares (r,q) del punto P respecto a un origen situado en el foco y un eje polar coincidente con la dirección del radio-vector mínimo.

Esta ecuación vale también para la parábola pues:

$r\cos q = \dfrac{P}{2} - x$ y como en $r\cos q = \dfrac{P}{2} + x$ resulta:

$r(1+e\cos q) = P$ luego $r = \dfrac{P}{1+\cos q}$

2.2. Ecuación cartesiana de la elipse y la hipérbola.

Volviendo a los ejes cartesianos coincidentes con los de la cónica, tenemos:

$$r_1^2 = (x-c)^2 + y^2$$

y sustituyendo r_1 por $a - e.x$ ó $-a + e.x$ (respectivamente) tenemos:

$a^2 + \dfrac{c^2}{a^2}x^2 - 2cx = x^2 + c^2 - 2cx + y^2$ luego $x^2 + \dfrac{c^2}{a^2}x^2 + y^2 = a^2 - c^2$

Pero en la elipse, el coeficiente de x^2 es: $\dfrac{a^2-c^2}{a^2} = \dfrac{b^2}{a^2}$

y en una hipérbola, el coeficiente de x^2 es: $\dfrac{a^2-c^2}{a^2} = -\dfrac{b^2}{a^2}$

luego dividiendo por b^2 resulta:

Elipse		Hipérbola	
$\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$	(1)	$\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$	(2)

que se llaman ecuaciones reducidas de dichas cónicas referidas a sus ejes.

Recíprocamente, toda curva de ecuación (1) (supuesto a>b), pues en caso contrario bastaría con cambiar los ejes, puede escribirse, poniendo $c^2 = a^2 - b^2$ en la forma:

$$x^2 + \frac{c^2}{a^2}x^2 + y^2 = a^2 - c^2$$

o equivalentes, es decir: $$a^2 + \frac{c^2}{a^2}x^2 \pm 2cx = x^2 + c^2 \pm 2cx + y^2$$ o sea:

$$\left(a \pm \frac{c}{a}x\right)^2 = (x \pm c)^2 + y^2$$

Pero con el signo + el segundo miembro es el cuadrado de la distancia r_2 del punto P(x,y) al punto F´(-c,0) y con el signo – es el cuadrado de la distancia r_1 del punto P(x,y) al punto F(c,0), de donde:

$$\left.\begin{aligned} a + \frac{c}{a}x = r_2 \\ a - \frac{c}{a}x = r_1 \end{aligned}\right\} \quad \Rightarrow \quad 2a = r_1 + r_2$$

que expresa que todo punto del lugar cumple la definición de elipse.

Análogamente ocurre para la hipérbola.

2.2.1. Circunferencia.

Si en una elipse es $a=b$ entonces $c=0$, los focos se confunden (excentricidad nula) y la elipse se convierte en una circunferencia de ecuación:

$$x^2 + y^2 = a^2$$

2.2.2. Hipérbola equilátera.

Si $a=b$ en la hipérbola resulta $c=a\sqrt{2}$. Las asíntotas, que son las rectas $y = \pm\frac{b}{a}x$, son ahora $y = \pm x$ y por tanto, perpendiculares.

La ecuación queda $$x^2 - y^2 = a^2$$

2.3. Ecuación cartesiana de la parábola.

Respecto a unos ejes cartesianos coincidentes con el eje de la parábola y la tangente en el vértice, se tiene:

$$\left(x-\frac{P}{2}\right)^2+y^2=r^2$$

y como $r=x+\frac{P}{2}$ tenemos:

$$x^2+\frac{P^2}{4}-Px+y^2=x^2+\frac{P^2}{4}+Px$$

o sea:

$$y^2=2Px \qquad (3)$$

llamada ecuación reducida de la parábola.

Recíprocamente, toda ecuación de la forma (3) puede ponerse en la forma

$$\left(x-\frac{P}{2}\right)^2+y^2=\left(x+\frac{P}{2}\right)^2$$

que traduce la condición de equidistancia del punto P(x,y) del lugar al punto $F\left(\frac{P}{2},0\right)$ y a la recta $x=-\frac{P}{2}$.

2.4. Ecuación general de las cónicas.

Una cónica, en un sistema cartesiano ortonormal cualquiera, esta representado por una ecuación de 2º grado con dos variables:

$$a_{11}x^2+2a_{12}xy+a_{22}y^2+2a_{13}x+2a_{23}y+a_{33}=0$$

Usando la notación matricial dicha ecuación puede escribirse como:

$$(x \quad y \quad 1)\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}=0 \qquad \text{o sea} \qquad (x,y,1)\cdot A\cdot\begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}=0$$

siendo la matriz simétrica $(a_{ij}=a_{ji})$

Para el estudio de la cónica es muy importante tener en cuenta el valor del determinante de dicha matriz, que se llama discriminante de la cónica.

Si el discriminante es cero la ecuación de la cónica puede descomponerse en producto de dos factores de primer grado y la ecuación representara dos rectas. Estas rectas serán distintas cuando el rango de la matriz valga 2. Si el rango vale 1 la ecuación de la cónica es el cuadrado de la ecuación de una recta (recta doble).

Por tanto para que la ecuación general de 2º grado con dos variables represente una cónica no degenerada ha de ser $|A| \neq 0$.

Si $|A| = 0$ decimos que la cónica es degenerada.

2.5. Clasificación de las cónicas. Asíntotas.

Sabemos que la elipse no tiene puntos en el infinito, mientras que la parábola y la hipérbola si los tienen.

Las tangentes a la hipérbola en los puntos infinitos se llaman asíntotas.

Las ecuaciones de las asíntotas, por ser rectas, serán de la forma *y=mx+n*. Para hallarlas procederemos así:

La intersección de la recta *y =mx+n* con la cónica se obtiene resolviendo el sistema:

$$\left.\begin{array}{c} a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0 \\ y = mx + n \end{array}\right\}$$

que proporciona:

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}(mx+n) + a_{22}(mx+n)^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}(mx+n) + a_{33} = 0 \qquad (4)$$

o sea:

$$(a_{11} + 2a_{12}m + a_{22}m^2)x^2 + 2(a_{12}n + a_{22}mn + a_{13} + a_{23}m)x + (a_{22}n^2 + 2a_{23}n + a_{33}) = 0$$

dividiendo por x^2:

$$(a_{11} + 2a_{12}m + a_{22}m^2) + 2(a_{12}n + a_{22}mn + a_{13} + a_{23}m)\frac{1}{x} + (a_{22}n^2 + 2a_{23}n + a_{33})\frac{1}{x^2} = 0$$

cuando $x \to \infty$ nos queda:

$$a_{11} + 2a_{12}m + a_{22}m^2 = 0$$

ecuación de 2º grado en *m* que presenta 3 casos:

1) $$a_{12}{}^2 - a_{11}a_{22} > 0 \quad \text{o sea} \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} > 0$$

en este caso la ecuación tiene dos raíces reales. Hay dos valores reales de *m*, por lo que la cónica tiene dos asíntotas y es una hipérbola.

2) $$a_{12}{}^2 - a_{11}a_{22} < 0 \qquad \text{o sea} \qquad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} < 0$$

la ecuación no tiene raíces reales. No hay asíntotas y la cónica es una elipse.

3) $$a_{12}{}^2 - a_{11}a_{22} = 0 \qquad \text{o sea} \qquad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = 0$$

hay una raíz doble. Solo hay un punto en el infinito y la cónica es una parábola.

En el caso de la hipérbola la ecuación $a_{12}{}^2 - a_{11}a_{22} > 0$ y por tanto:

$$a_{11} + 2a_{12}m_1 + a_{22}m_1{}^2 = 0$$

tiene dos raíces reales distintas m_1 y m_2. Para hallar n sustituimos estos valores en la ecuación:

$$a_{11} + 2a_{12}m_1 + a_{22}m_1^2 = 0$$

luego en la ecuación (4) queda:

$$2(a_{12}n + a_{22}m_1n + a_{13} + a_{23}m_1) + (a_{22}n^2 + 2a_{23}n + a_{33})\frac{1}{x} = 0$$

y haciendo $x \to \infty$ queda: $$(a_{12}n + a_{22}m_1n + a_{13} + a_{23}m_1) = 0$$

ecuación que proporciona:

$$n_1 = -\frac{a_{13} + a_{23}m_1}{a_{12} + a_{22}m_1} \qquad \text{y análogamente} \qquad n_2 = -\frac{a_{13} + a_{23}m_2}{a_{12} + a_{22}m_2}$$

En el caso de la parábola, resolviendo la ecuación:

$$a_{11} + 2a_{12}m + a_{22}m^2 = 0 \qquad \text{tenemos:}$$

$$m = \frac{-a_{12}}{a_{22}} \qquad \text{o sea} \qquad a_{12} + a_{22}m = 0$$

Este valor de m nos da la dirección del punto del infinito de la parábola. Para hallar n_1 hacemos:

$$n_1 = -\frac{a_{13} + a_{23}m_1}{a_{12} + a_{22}m_1} \qquad \text{no finito al ser el denominador 0.}$$

2.6. Ecuación reducida de las cónicas.

La ecuación general de una cónica puede simplificarse trasladando el origen de coordenadas al centro de la cónica. Si las coordenadas del centro son (h,k), las fórmulas de transformación son:

$$x=X+h \qquad y=Y+k$$

y la ecuación general se convierte ahora en:

$$a_{11}(X+h)^2+2a_{12}(X+h)(Y+k)+a_{22}(Y+k)^2+2a_{13}(X+h)+2a_{23}(Y+k)^2+a_{33}=0$$

ordenando y desarrollando:

$$a_{11}X^2+2a_{12}XY+a_{22}Y^2+2(a_{11}h+a_{12}k+a_{13})X+2(a_{12}h+a_{22}k+a_{23})Y+\ldots$$
$$\ldots+(a_{11}h^2+2a_{12}hk+a_{22}k^2+2a_{13}h+2a_{23}k+a_{33})=0 \qquad (5)$$

si pretendemos que no queden términos lineales ha de ocurrir:

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}h+a_{12}k+a_{13}=0 \\ a_{12}h+a_{22}k+a_{23}=0 \end{array}\right\}$$

sistema que permite encontrar las coordenadas del centro:

$$h=\frac{\begin{vmatrix}-a_{13} & a_{12}\\ -a_{23} & a_{22}\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{12} & a_{22}\end{vmatrix}}=\frac{A_{31}}{A_{33}} \qquad h=\frac{\begin{vmatrix}a_{11} & -a_{13}\\ a_{12} & -a_{23}\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{12} & a_{22}\end{vmatrix}}=\frac{A_{32}}{A_{33}}$$

Los términos encerrados en el último paréntesis de (5) representan el valor numérico que toma la ecuación general de la cónica al sustituir x por h e y por k. Representando tal cosa por f(h,k) la ecuación (5) se convierte en:

$$a_{11}X^2+a_{12}XY+a_{22}Y^2+f(h,k)=0 \qquad (6)$$

Puede comprobarse que:

$$f(h,k)=\frac{|A|}{A_{33}}$$

con lo cual la formula (6) queda así:

$$a_{11}X^2+a_{12}XY+a_{22}Y^2+\frac{|A|}{A_{33}}=0 \qquad (7)$$

Hay que señalar que en la expresión de las coordenadas del centro ha de ser $A_{33}\neq 0$ luego la parábola no tiene centro.

2.7. Determinación de los ejes de la cónica.

La ecuación (9) puede escribirse así:

$$(x \quad y \quad 1)\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{|A|}{A_{33}} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

Si queremos que la cónica tenga por ejes de simetría los de coordenadas, su ecuación no cambiará al cambiar *x* por –*x* ni *y* por –*y*, luego ha de ser nulo el término XY. Por tanto en este caso la ecuación de la cónica seria de la forma:

$$c_1x^2 + c_2y^2 + c^3 = 0$$

o matricialmente:

$$(x \quad y \quad 1)\begin{pmatrix} c_1 & 0 & 0 \\ 0 & c_2 & 0 \\ 0 & 0 & c_3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

Para que los ejes de la cónica coincidan con los de simetría ha de producirse un giro de amplitud α mediante:

$$\left.\begin{aligned} X &= x\cos\alpha - ysen\alpha \\ Y &= xsen\alpha + y\cos\alpha \end{aligned}\right\} \quad \text{o bien:} \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -sen\alpha & 0 \\ sen\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}$$

y llamando T a esa matriz resulta $T^t = T^{-1}$

Entonces: $$(x \quad y \quad 1)\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{|A|}{A_{33}} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$ se convierte en

$$(x \quad y \quad 1)T^t\begin{pmatrix} c_1 & 0 & 0 \\ 0 & c_2 & 0 \\ 0 & 0 & c_3 \end{pmatrix}T\begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$ y por tanto:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{|A|}{A_{33}} \end{pmatrix} \cdot T = T\begin{pmatrix} c_1 & 0 & 0 \\ 0 & c_2 & 0 \\ 0 & 0 & c_3 \end{pmatrix}$$ o bien:

$$\left.\begin{array}{r} a_{11}\cos\boldsymbol{a} + a_{12} sen\,\boldsymbol{a} = c_1\cos\boldsymbol{a} \\ a_{21}\cos\boldsymbol{a} + a_{22} sen\,\boldsymbol{a} = c_1 sen\,\boldsymbol{a} \end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{r} -a_{11} sen\,\boldsymbol{a} + a_{12}\cos\boldsymbol{a} = -c_2 sen\,\boldsymbol{a} \\ -a_{21} sen\,\boldsymbol{a} + a_{22}\cos\boldsymbol{a} = c_2\cos\boldsymbol{a} \end{array}\right\}$$

$$\frac{|A|}{A_{33}} = c_3$$

Este ultimo nos da el valor de c_3 y las anteriores conducen a:

$$\left.\begin{array}{r} a_{11} - c_1 \ + a_{12} sen\,\boldsymbol{a} = 0 \\ a_{21}\cos\boldsymbol{a} + (a_{22} - c_2) sen\,\boldsymbol{a} = 0 \end{array}\right\}$$

y para que este sistema de ecuaciones homogéneas sea compatible y con soluciones no nulas, ha de ser:

$$\begin{vmatrix} a_{11} - c_1 & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - c_2 \end{vmatrix} = 0 \qquad\qquad (a_{12} = a_{21})$$

y desarrollando

$$c_1^{\ 2} - (a_{11} + a_{22})c_1 + (a_{11}a_{22} - a_{12}^{\ 2}) = 0 \quad \text{y como} \quad A_{33} = a_{11}a_{22} - a_{12}^{\ 2}$$

queda $$c_1^{\ 2} - (a_{11} + a_{22})c_1 + A_{33} = 0$$

Las otras dos ecuaciones conducen a una expresión idéntica, sustituyendo c_1 por c_2:

$$c_2^{\ 2} - (a_{11} + a_{22})c_2 + A_{33} = 0$$

Una vez calculadas los valores de c_1, c_2, c_3 se sustituyen en la ecuación

$$c_1x^2 + c_2y^2 + c_3 = 0$$

quedando: $$c_1x^2 + c_2y^2 + \frac{|A|}{A_{33}} = 0$$ o bien:

$$\frac{x^2}{-\dfrac{|A|}{c_1A_{33}}} + \frac{y^2}{-\dfrac{|A|}{c_2A_{33}}} = 1$$

y comparando esta ecuación con la de una cónica referida a sus ejes observamos que:

$$\frac{x^2}{a^2} \pm \frac{y^2}{b^2} = 1$$

luego: $a = \sqrt{-\frac{|A|}{c_1 A_{33}}}$ $b = \sqrt{-\frac{|A|}{c_2 A_{33}}}$

y obtendremos una elipse si: $-\frac{|A|}{c_1 A_{33}} > 0$ y $-\frac{|A|}{c_2 A_{33}} > 0$

Si ambos valores son negativos, a y b serian imaginarios y tendríamos una elipse imaginaria.

Si uno es negativo obviamente tenemos una hipérbola.

Si alguno de los c_1 y c_2 es nulo, no sirve este proceso y lo haremos mas adelante.

2.7.1. Ejes de una cónica.

Una vez calculados c_1 y c_2, podemos obtener el ángulo que forman los ejes de la cónica con los ejes cartesianos:

$$tg\alpha = \frac{c_1 - a_{11}}{a_{12}}$$

y puesto que $\left(\frac{A_{31}}{A_{33}}, \frac{A_{32}}{A_{33}}\right)$ son las coordenadas del centro, como la ecuación de la recta que pasa por (x_0, y_0) con pendiente $tg\alpha$ es $y - y_0 = tg\alpha(x - x_0)$, las ecuaciones de los ejes son:

$$\left.\begin{aligned} y - \frac{A_{32}}{A_{33}} &= \frac{c_1 - a_{11}}{a_{12}}\left(x - \frac{A_{31}}{A_{33}}\right) \\ y - \frac{A_{32}}{A_{33}} &= \frac{a_{12}}{a_{11} - c_1}\left(x - \frac{A_{31}}{A_{33}}\right) \end{aligned}\right\}$$

en el caso de cónica con centro (elipse o hipérbola)

2.8. Ecuación reducida de la parábola.

El camino seguido anteriormente no sirve para la parábola, al no tener centro. Sin embargo, se puede seguir un camino análogo haciendo girar primero los ejes cartesianos hasta situar el eje de abscisas paralelo al de la parábola. Después se traslada el centro de coordenadas al vértice y su ecuación es, entonces, de la forma:

$$y^2 = 2px$$

como se vio anteriormente. El valor de P, siguiendo este proceso nos da:

$$P = \pm\sqrt{\frac{-|A|}{(a_{11} + a_{22})^2}}$$

El signo de P depende del sentido que se tome como positivo en el eje OX.

3. PRESENCIA EN LA NATURALEZA, EL ARTE Y LA TÉCNICA.

3.1. Presencia en la Naturaleza.

Son innumerables los puntos de encuentro de las cónicas y la Naturaleza.

Las trayectorias de los planetas alrededor del sol, de los satélites alrededor de los planetas, muestran órbitas elípticas.

Se encuentran trayectorias de tipo parabólico e hiperbólico en las trayectorias de ciertos cometas y en los movimientos de cuerpos en los campos de fuerzas, como el campo gravitatorio.

Por otra parte, la teoría atómica explica, en algunos modelos, hoy superados, que las órbitas electrónicas pueden presentar excentricidades por ser elípticas.

3.2. Presencia en la Técnica.

Como se sabe, una de las aplicaciones militares mas importantes de las cónicas se produce al descubrir el lanzamiento de cañones y misiles, que es de tipo parabólico.

Es importante también la utilización de espejos de tipo parabólico, así como antenas de tipo parabólico, que utilizan la propiedad de que todos los rayos paralelos al eje del espejo o de las antenas, pasen, al reflejarse, por el foco. Esta misma propiedad se utiliza en los faros de los coches.

3.3. Presencia en el Arte.

La utilización de las cónicas en el arte está muy generalizadas.

Desde la construcción de edificios con planta elíptica, que utilizan la propiedad de que si se emite un sonido en uno de los focos, es oído por otra persona situada en el otro foco, hasta la construcción de puertas con aspecto de segmento de parábola, o de puentes con ojos parabólicos.

BIBLIOGRAFÍA RECOMENDADA.

Algebra. L.Thomas y M.E.Ríos. Santander.

Geometría Analítica. L.Crusat. Editorial Bosch

Curso de Geometría Métrica. P.Puig Adam. Ed.Biblioteca Matemática.

Geometría y Cónicas. Grupo Cero. ICE. Universidad de Valencia.

Geometría Analítica, J.Rey Pastor, L.A.Santaló y M.Balanzat. Ed.Kapelusz. Buenos Aires. (Argentina)

Geometría Analítica. Marcos de Lanuza. Editorial Gredos.