TEMAS DE MATEMÁTICAS
(Oposiciones de Secundaria)

TEMA 41

<u>MOVIMIENTOS EN EL PLANO. COMPOSICIÓN DE MOVIMIENTOS. APLICACIÓN AL ESTUDIO DE LAS TESELACIONES DEL PLANO. FRISOS Y MOSAICOS.</u>

TEMA 41

MOVIMIENTOS EN EL PLANO. COMPOSICIÓN DE MOVIMIENTOS. APLICACIÓN AL ESTUDIO DE LAS TESELACIONES DEL PLANO. FRISOS Y MOSAICOS.

1. INTRODUCCIÓN.

En este tema vamos a tratar un tipo particular de transformaciones en el plano: aquellas que hacen corresponder a cada figura otra de igual forma y tamaño. Estas transformaciones reciben el nombre de movimientos, y son aplicaciones biyectivas del plano en sí mismo.

De los axiomas de movimiento también podemos deducir que son transformaciones biyectivas del plano que conservan la alineación y el orden, y que transforman segmentos y ángulos en otros iguales.

Para definir un movimiento es suficiente determinar las imágenes de dos puntos del plano e indicar la clase del movimiento (directo o inverso). De esta manera, cualquier otro punto del plano tiene determinada de forma unívoca su imagen. Recordemos que una transformación es directa si conserva la orientación e inversa en caso contrario.

Los movimientos del plano que vamos a estudiar son las traslaciones, los giros y las simetrías, y sus correspondientes composiciones.

2. CONCEPTOS BÁSICOS.

DEF Llamaremos Vector Fijo a u par ordenado de puntos A y B. El punto A recibe el nombre de Origen y el punto B de Extremo.

Un vector fijo es equivalente a un segmento dotado de orden.

Como características de los vectores vamos a definir la dirección, el sentido y el módulo.

DEF Diremos que dos vectores fijos (A,B) y (C,D) tienen la misma dirección si están situados sobre la misma recta o sobre rectas paralelas.

DEF Diremos que dos vectores (A,B) y (C,D) con la misma dirección tienen el mismo sentido si se verifica una de las dos condiciones siguientes:

a) Si los vectores están situados en rectas paralelas y trazamos la recta que pasa por A y C (el origen de ambos vectores), los puntos extremos, B y D, están en el mismo semiplano.
b) Si los vectores están situados en la misma recta, ambos tienen el mismo sentido que un tercer vector con la misma dirección y situado en otra recta paralela.

DEF Dos vectores fijos (A,B) y (C,D) tienen el mismo módulo si los segmentos que definen son iguales.

Si definimos el conjunto de los vectores fijos del plano, podemos definir sobre dicho conjunto una relación de equivalencia de la siguiente manera:

DEF Sean (A,B) y (C,D) dos vectores cualesquiera del conjunto de los vectores fijos del plano. Diremos que dichos vectores están relacionados si y sólo si tienen la misma dirección, sentido y módulo.

$$(A,B) \sim (C,D) \iff (A,B) \text{ y } (C,D) \text{ tienen igual dirección, sentido y módulo.}$$

PROP La relación anterior es de equivalencia (también llamada de Equipolencia).

<u>Dem.</u>

Inmediata.

La relación de equivalencia, o equipolencia, que hemos definido sobre el conjunto de los vectores fijos del plano nos define un conjunto de clases de equivalencia. Cada clase de equivalencia recibe el nombre de vector libre, y se representa mediante una letra en minúscula con una flecha sobre ella, en contraposición con los vectores fijos, que se representan por sus dos letras (origen y extremo por ese orden) con una flecha sobre ambas letras.

$$\vec{v} = \left[\overrightarrow{AB}\right] = \left\{\overrightarrow{XY} \,/\, \overrightarrow{XY} \sim \overrightarrow{AB}\right\}$$

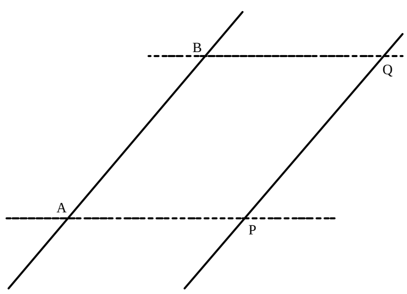
Los conjunto de los vectores libres del plano se representa por V_2. Veamos algunas propiedades de los vectores libres.

PROP Si $\vec{v}$ es un vector libre y P un punto cualquiera del plano, existe un único representante de $\vec{v}$ con origen en P.

<u>Dem.</u>

Sea $\overrightarrow{AB}$ un representante cualquiera de $\vec{v}$. Vamos a distinguir dos situaciones:

1) El punto P no pertenece a la recta que define el vector $\overrightarrow{AB}$.



Trazamos por el punto P una paralela a la recta AB y por B una paralela a la recta AP. El punto de intersección, que llamaremos Q, es único. Es trivial comprobar que por construcción obtenemos $\overrightarrow{PQ} \sim \overrightarrow{AB}$.

El vector fijo que definen los puntos P y Q es el único representante de $\vec{v}$ que tiene origen en P

2) El punto P pertenece a la recta que define el vector $\overrightarrow{AB}$.

En este caso, elegimos un punto O no perteneciente a la recta AB. A continuación obtenemos el único representante de $\bar{v}$ que tiene origen en O aplicando el caso 1. Por último, obtenemos el representante de $\bar{v}$ que tiene origen en P aplicando el caso 1 al vector fijo conseguido en el paso anterior.

Veamos ahora diferentes operaciones que podemos definir sobre el conjunto de vectores libres del plano.

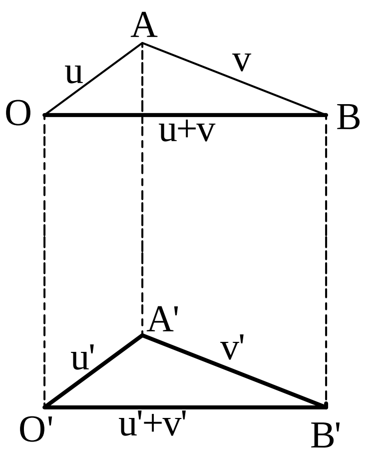
DEF Sean $\bar{u}$ y $\bar{v}$ vectores libres. Definimos la suma de ambos vectores como

$$\bar{u} + \bar{v} = \left[\overline{OB}\right]$$

siendo O un punto cualquiera del plano, $\overline{OA}$ un representante de $\bar{u}$ y $\overline{AB}$ un representante de $\bar{v}$.

PROP La definición dada de suma de vectores no depende del punto O elegido.

<u>Dem.</u>



Sea O' otro punto cualquiera del plano. Los puntos OAA'O' forman un paralelogramo, al igual que los puntos ABB'A'. Entonces los puntos OBB'O' también forman un paralelogramo, deduciéndose que $\overline{OB} \sim \overline{O'B'}$. Por tanto, la suma no depende del punto O elegido.

PROP La operación suma de vectores libres verifica las siguientes propiedades:

1) Conmutativa.
2) Asociativa.
3) Elemento Neutro.
4) Elemento Opuesto.

<u>Dem.</u>

1) y 2) son inmediatas.

3) Llamaremos $\bar{0}$ al neutro de la suma siendo $\bar{0} = \left[\overline{AA}\right]$. Es fácil comprobar con esa definición que es el neutro.

4) Dado un vector $\vec{u}=[\overline{AB}]$ definimos su opuesto como $-\vec{u}=[\overline{BA}]$. También es inmediato comprobar que esa definición verifica la propiedad de ser elemento opuesto.

Conclusión. El conjunto V_2 con la operación de suma definida tiene estructura de grupo abeliano. $(V_2, +)$ Grupo Abeliano.

DEF Dado un vector $\vec{u}=[\overline{AB}]$ definimos su producto por un escalar $\alpha\in\mathbb{R}$, y se representa por $\alpha\vec{u}$, como aquel vector libre que verifica:

1) La dirección de los vectores fijos que componen la clase $\alpha\vec{u}$ es la misma que la de los vectores $\vec{u}$.
2) El sentido de los vectores fijos que componen la clase $\alpha\vec{u}$ es el mismo si $\alpha>0$ y contrario si $\alpha<0$.
3) El módulo de cualquier vector fijo que representa la clase $\alpha\vec{u}$ es $|\alpha|$ multiplicado por el módulo del vector $\vec{u}$, $|\overline{AB}|$.

PROP La operación de producto de un vector por un escalar verifica las siguientes propiedades:

1) Distributiva respecto de los vectores: $\alpha(\vec{u}+\vec{v})=\alpha\vec{u}+\alpha\vec{v}$
2) Distributiva respecto de los escalares: $(\alpha+\beta)\vec{u}=\alpha\vec{u}+\beta\vec{u}$
3) Pseudoasociativa: $\alpha(\beta\vec{u})=(\alpha\beta)\vec{u}$
4) Elemento Unidad: $1\cdot\vec{u}=\vec{u}$

Dem.

Las demostraciones son inmediatas y no corresponden al objetivo del tema.

Conclusión: El conjunto de los vectores del plano, V_2, con las operaciones interna y externa definidas tiene estructura de espacio vectorial. $(V_2,+,\cdot)$ es un espacio vectorial.

3. MOVIMIENTOS EN EL PLANO.

3.1. Traslaciones.

DEF Sea $\vec{u}$ un vector cualquiera de V_2. Llamaremos traslación de vector $\vec{u}$ a la aplicación

$$\begin{aligned} T_{\vec{u}} : E_2 &\to E_2 \\ A &\mapsto A' \end{aligned}$$

del conjunto de los puntos del plano en sí mismo que transforma cualquier punto A en otro A' verificándose que $\overline{AA'}=\vec{u}$

En general, el vector $\vec{u}\neq 0$ y por tanto A y A' serán puntos diferentes. En el caso de que el vector fuese nulo, A=A' para todo punto del plano, y la aplicación sería la identidad.

Podemos definir el conjunto de las traslaciones de vectores del plano como:

$$T = \{T_{\bar{u}} \ / \ \bar{u} \in V_2\}$$

PROP Las traslaciones son transformaciones biunívocas del plano en sí mismo.

Dem.

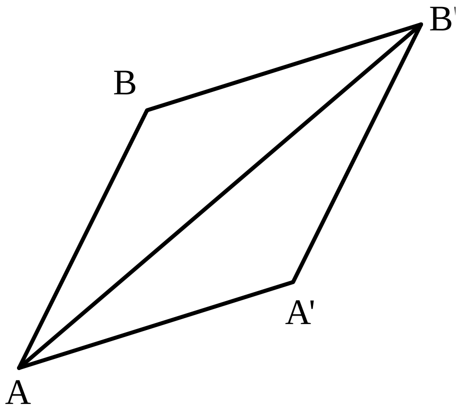
Trivial

PROP Las traslaciones conservan las distancias y transforman rectas paralelas en rectas paralelas.

Dem.

• Conservan las distancias.

Sean A y B dos puntos cualesquiera del plano y A' y B' sus imágenes por la aplicación $T_{\bar{u}}$. Entonces se verifica que $\overline{AA'} = \bar{u}$ y $\overline{BB'} = \bar{u}$.



A partir de la figura podemos deducir que:

$$\overline{AB} = \overline{AB'} - \overline{BB'} = \overline{AB'} - \bar{u}$$
$$\overline{A'B'} = \overline{AB'} - \overline{AA'} = \overline{AB'} - \bar{u}$$

Por tanto $\overline{AB} \sim \overline{A'B'}$

Y obtenemos que el módulo de ambos es el mismo. O lo que es lo mismo, la distancia de A a B se mantiene por la aplicación.

• Transforma rectas paralelas en rectas paralelas.

Partiendo de lo obtenido anteriormente, los puntos ABB'A' determinan un paralelogramo pues $\overline{AB} \sim \overline{A'B'}$ y $\overline{AA'} = \overline{BB'}$.

Por tanto también transforma rectas paralelas en rectas paralelas (y conserva los ángulos).

PROP Una traslación de vector no nulo no tiene puntos invariantes.

Dem.

Inmediata.

En el conjunto T de las traslaciones de vectores del plano, podemos definir una operación interna, llamada composición o producto, de la siguiente forma:

DEF Sean $T_{\bar{u}}, T_{\bar{v}} \in T$. Llamaremos composición o producto de $T_{\bar{u}}$ y $T_{\bar{v}}$ a la traslación definida por $(T_{\bar{v}} \circ T_{\bar{u}})(A) = T_{\bar{v}}(T_{\bar{u}}(A))$.

Comprobemos que la definición es consistente y que la aplicación obtenida como composición de traslaciones es una traslación.

Si tenemos en cuenta que:

$$(T_{\bar{v}} \circ T_{\bar{u}})(A) = T_{\bar{v}}(T_{\bar{u}}(A)) = T_{\bar{v}}(A') = A''$$

y que:

$$\overline{AA''} = \bar{u} + \bar{v}$$

obtenemos que la composición de las traslaciones $T_{\bar{u}}$ y $T_{\bar{v}}$ nos da como resultado otra traslación de vector suma de los anteriores $T_{\bar{u}+\bar{v}}$

PROP La operación de composición de traslaciones verifica las siguientes propiedades:

1) Asociativa
2) Conmutativa.
3) Elemento Neutro.
4) Elemento Opuesto.

<u>Dem.</u>

La demostración es inmediata ya que esas propiedades las verifica la suma de vectores en V_2 y sólo hemos de tener en cuenta que la composición de traslaciones se reduce a la traslación de la suma de los vectores asociados.

El elemento opuesto es $T_{\bar{0}}$ y el elemento inverso es $T_{\bar{u}}^{-1} = T_{-\bar{u}}$

Conclusión: El conjunto T con la operación de composición definida tiene estructura de grupo conmutativo. $(T, \circ)$ Grupo Conmutativo.

PROP Los grupos $(V_2,+)$ y $(T, \circ)$ son isomorfos.

<u>Dem.</u>

Basta comprobar que la aplicación

$$f: V_2 \rightarrow T$$

definida como $f(\bar{u}) = T_{\bar{u}}$ es un isomorfismo, lo cual es inmediato.

3.2. Giros.

DEF Llamaremos giro de centro el punto O y ángulo α a una aplicación delplano en sí mismo que transforma cada punto A en otro A' verificando las condiciones:

1) Los vectores OA y OA’ tienen el mismo módulo.
2) $\angle AOA' = \alpha$

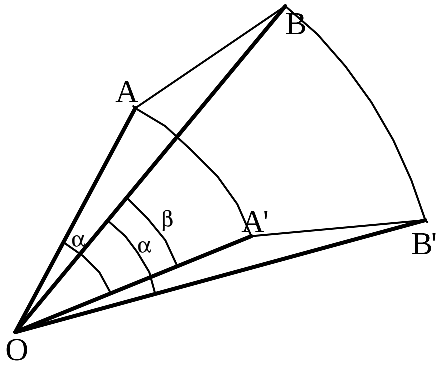
La aplicación se denota por $G_{O,\alpha}$

PROP Los giros verifican las siguientes propiedades:

1) Conservan las distancias, es decir, son Isometrías
2) Transforman puntos alineados en puntos alineados.

Dem.

1)



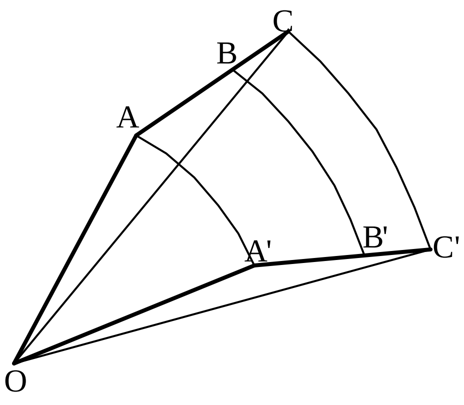
Sean A y B dos puntos del plano y A’ y B’ sus imágenes por $G_{O,\alpha}$ Se trata de comprobar que el módulo de los vectores AB y A’B’ es el mismo, manteniéndose así la distancia entre dos puntos por medio del giro. Para ello necesitamos demostrar que los triángulos AOB y A’OB’ son semejantes.

Los triángulos AOB y A’OB’ tienen dos lados iguales y un ángulo, que son

$$OA=OA' \qquad OB=OB' \qquad \angle AOB = \alpha\text{-}\beta = \angle A'OB'$$

Por tanto, el tercer lado también coincide y AB=A’B’, luego el módulo de ambos vectores es el mismo y la aplicación $G_{O,\alpha}$ conserva las distancias.

2)



Sean A, B y C tres puntos alineados del plano y sean A’, B’ y C’ sus imágenes respecto del giro $G_{O,\alpha}$.

Por el apartado anterior tenemos que se conservan las distancias entre los puntos, por tanto

$$\overline{AC} = \overline{AB} + \overline{BC} = \overline{A'B'} + \overline{B'C'} = \overline{A'C'}$$

De aquí obtenemos que si el punto B está en el segmento que forman A y C, entonces el punto B’ también está en el segmento determinado por los puntos A’ y C’. Así pues transforma puntos alineados en puntos alineados.

PROP Los giros transforman circunferencias en circunferencias del mismo radio.

Dem.

Sea $G_{O,\alpha}$ un giro de centro O y ángulo α. Sea también una circunferencia de centro el punto C y radio r.

La imagen de C será un punto $G_{O,\alpha}(C)=C'$ y teniendo en cuenta que conserva las distancias, transforma una circunferencia en otra.

Como consecuencia de estas propiedades podemos deducir que los giros son transformaciones directas, ya que mantienen el sentido de los ángulos.

Podemos definir el conjunto de todos los giros de centro O como:

$$G_O=\{\ G_{O,\alpha}\ /\ \alpha\in\mathbb{R}\}$$

DEF En el conjunto G_O definimos la operación interna llamada composición o producto como:

$$G_{O,b}\circ G_{O,a}=G_{O,a+b}$$

La operación es interna, ya que dado un punto A cualquiera del plano tenemos que al aplicarle la composición, la primera aplicación lo gira un ángulo α y la segunda lo gira un ángulo β. Por tanto el resultado final ha sido un giro suma de ángulos, que es otra aplicación que está en el conjunto G_O.

PROP El conjunto G_O con la operación de composición o producto verifica las siguientes propiedades:

1) Conmutativa.
2) Asociativa.
3) Elemento Neutro, $G_{O,0^o}$.
4) Elemento Opuesto, dado $G_{O,\alpha}$ su opuesto es $G_{O,-\alpha}$.

Dem.

Inmediata.

Conclusión: El conjunto de todos los giros con el mismo centro con la operación de composición o producto tiene estructura de grupo conmutativo. $(G_O,\circ)$ Grupo Conmutativo.

3.3. Simetrías.

3.3.1. Simetría Central.

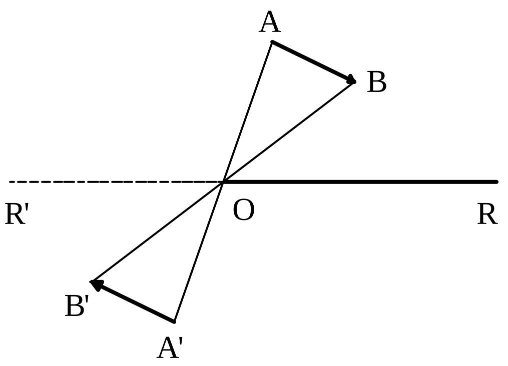
DEF Dada una recta r, consideremos una semirrecta suya con origen en el punto O. Llamaremos Simetría Central de centro O al movimiento que transforma la semirrecta de origen en O en su semirrecta opuesta, y cada semiplano determinado por la semirrecta en el semiplano opuesto.

Podemos dar como definición equivalente de simetría central la siguiente:

DEF2 Llamamos simetría central de centro O a una aplicación del plano en sí mismo que transforma cada punto A en otro A’ verificando que el segmento AA’ tiene como punto medio a O

CARACTERÍSTICAS.

1) Las simetrías centrales son movimientos directos, ya que los semiplanos quedan ambos a la derecha o a la izquierda de las semirrectas consideradas.
2) El punto O es el único punto invariante de la aplicación, también llamado punto doble.



3) Si A es un punto cualquiera del plano y A’ su imagen, se verifica que $\overline{OA'} = -\overline{OA}$. Si B es otro punto del plano, también se verifica que $\overline{OB'} = -\overline{OB}$ y de aquí deducimos que

$$\overline{A'B'} = \overline{OB'} - \overline{OA'} = -\overline{OB} + \overline{OA} = -\overline{AB}$$

PROP Las Simetrías Centrales verifican las siguientes propiedades:

1) Las rectas que pasan por el centro de simetría se transforman en ellas mismas, es decir, son invariantes.
2) Las rectas que no pasan por el centro de simetría se transforman en rectas paralelas.
3) Conservan las distancias y los ángulos.
4) Son aplicaciones involutivas, lo cual significa que aplicadas dos veces se convierten en la aplicación unidad o identidad.

<u>Dem.</u>

La demostración es inmediata sin más que tener en cuenta que una simetría central de centro O es equivalente a un giro de centro O y ángulo 180º.

En general, las simetrías centrales verifican las mismas propiedades que los giros, ya que son un caso especial de éstos.

3.3.2. Simetría Axial.

DEF Llamaremos Simetría Axial de eje r al movimiento del plano que deja invariante una semirrecta OR situada en la recta r, cambiando los semiplanos que determina.

Otra definición alternativa de simetría axial podría ser la siguiente:

DEF2 Dada una recta r, llamaremos Simetría Axial de eje r a la aplicación del plano en sí mismo que asocia a cada punto A del plano otro punto A' tal que el segmento AA' tiene como mediatriz a la recta r.

PROP Las simetrías axiales son transformaciones involutivas, es decir, aplicadas dos veces se convierten en la aplicación identidad.

PROP Los puntos que forman el eje de una simetría axial son invariantes por la simetría.

Dem.

Supongamos que no es cierto. Sea P un punto del eje r y P' su imagen por la simetría. Por la primera definición, el segmento OP se transforma en OP', siendo uno parte del otro. Y eso es una contradicción con los axiomas de movimiento.

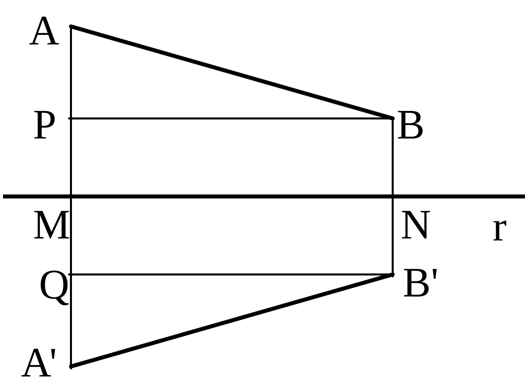
PROP Toda recta perpendicular al eje r de una simetría, se transforma en sí misma.

Dem.

Dado un punto A no perteneciente al eje r de la simetría se transforma en A' verificando que el eje r es la mediatriz del segmento que determinan. Por tanto, la recta que contiene al segmento AA' es perpendicular al eje (por definición de mediatriz). Luego todo punto de una recta perpendicular se transforma en otro punto de la propia recta. Como conclusión obtenemos que las rectas perpendiculares al eje son invariantes.

PROP Toda simetría axial es una isometría, es decir, conserva las distancias.

Dem.



Tenemos que demostrar que el módulo del vector AB coincide con el del vector A'B'. Para ello demostraremos que los triángulos rectángulos APB y A'QB' son semejantes. Obtenemos los puntos P y Q trazando paralelas a r por B y B' respectivamente, y están situados en la recta que contiene a los puntos A y A'.

Por definición de simetría tenemos que AM=MA', BN=NB' y PM=MQ

Por la manera de obtener P tenemos que PM=BN y MQ=NB'.

Entonces AM = AP + PM = AP + BN
MA' = MQ + QA' = NB' + QA' = BN + QA'

Y deducimos que AP = QA’

Como B y B’ están en la misma recta perpendicular a r y P y Q también están en otra recta perpendicular a r, tenemos que los cuatro puntos BB’QP determinan un paralelogramo, por lo que PB=QB’.

Así pues tenemos que ambos triángulos tienen dos lados iguales y el ángulo rectángulo también, por tanto, aplicando un criterio de semejanza de triángulos tenemos que ambos triángulos son semejantes. De lo cual se deduce que el tercer lado de ambos triángulos también coincide, verificándose que

AB = A’B’

PROP Las Simetrías Axiales transforman puntos alineados en puntos alineados.

Dem.

Sea r el eje de simetría y sean A, B y C tres puntos alineados, situados en el mismo semiplano. Sus imágenes por la simetría son, respectivamente, A’, B’ y C’.

Por la proposición anterior se conservan las distancias, luego:

AB = A’B’ BC = B’C’ AC = A’C’

Y como AC = AB + BC = A’B’ + B’C’

Entonces A’C’ = A’B’ + B’C’

siendo B’ un punto interior del segmento A’C’. Por tanto A’, B’ y C’ están alineados.

COROLARIO Las simetrías axiales transforman rectas en rectas.

COROLARIO Las simetrías axiales transforman circunferencias en circunferencias del mismo radio.

PROP Las simetrías axiales transforman ángulos en ángulos iguales pero de sentido contrario.

Dem.

Una semirrecta s con origen en un punto O del eje de simetría r se transforma en otra semirrecta s’ con el mismo origen, pues O es un punto invariante. El ángulo que forma s con el eje r se transforma en el que forma s’ con el propio eje, que son iguales pero de sentido contrario, pues están en distinto semiplano.

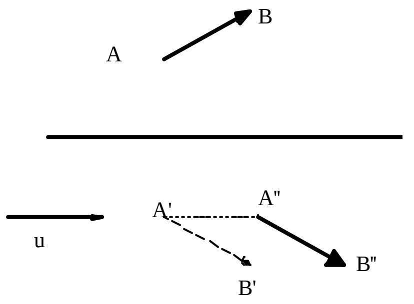
Conclusión: Las simetrías axiales son movimientos inversos.

4. COMPOSICIÓN DE MOVIMIENTOS.

4.1. Producto de Simetría axial por Traslación.

DEF Llamaremos Antitraslación o Deslizamiento a todo movimiento que sea igual a la composición o producto de una simetría axial de eje r por una traslación paralela al eje r. El eje r recibe el nombre de eje de la antitraslación o eje del deslizamiento.

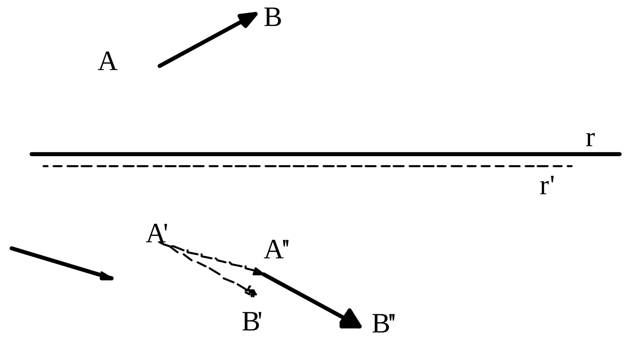
El eje de una antitraslación o deslizamiento es la única recta invariante.



Dado un vector AB, su imagen por la simetría axial es el vector A’B’ y aplicando la traslación de vector u nos da el vector A’’B’’

Cuando la traslación no es paralela al eje r de la simetría se obtiene también una antitraslación, pero de eje r’ paralelo al eje r. A partir de un vector AB se obtiene por la simetría un vector A’B’ y aplicando la traslación de vector u obtenemos A’’B’’.

Para hallar el eje de simetría de la antitraslación r’, éste viene dado como mediatriz del segmento que une el punto A’’ con el punto que se obtiene como intersección de una paralela a r que pasa por Acon la perpendicular a r que pasa por A’’.



4.2. Producto de Simetrías Axiales.

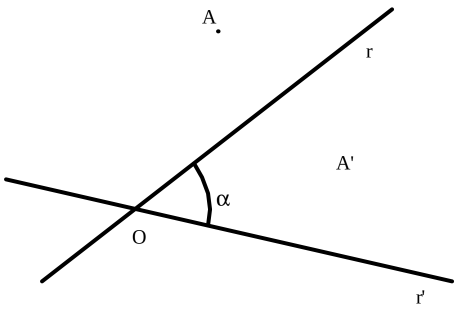
4.2.1. Ejes paralelos.

Sean dos simetrías axiales de ejes r y r’ respectivamente. Dado un punto cualquiera A, por la primera simetría obtenemos A’, y este punto tiene como imagen A’’ por la segunda simetría.

Por tanto, la imagen de A por la composición de las dos simetrías es A’’, que está en la recta perpendicular a ambos ejes. Se verifica que $\overline{AA''} = 2\bar{u}$, donde $\bar{u}$ es el vector determinado por dos puntos, uno de cada eje, contenidos en una perpendicular a los mismos.

Como esto sucede para todos los puntos, el producto de dos simetrías axiales de ejes paralelos es una traslación de vector $2\cdot\bar{u}$.

4.2.2. Ejes no Paralelos.



Sean dos simetrías axiales de ejes r y r' respectivamente y A un punto cualquiera del plano. Como los dos ejes no son paralelos, se cortan en un punto que llamaremos O y determinan un ángulo α.

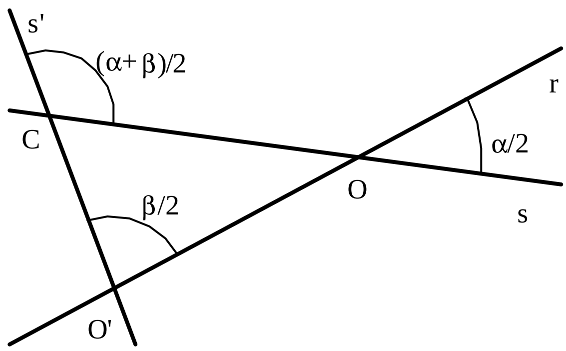
La imagen de A por la simetría de eje r es A', y la imagen de este punto por la otra simetría es A''. El ángulo $\angle$AOA''=2α, ya que el eje r es la bisectriz de $\angle$AOA' y el eje r' es la bisectriz de $\angle$A'OA''.

Luego la composición de dos simetrías axiales de ejes no paralelos equivale a un giro de centro O y ángulo 2α.

4.3. Producto de Giros.

Vamos a considerar la composición o producto de giros de distinto centro, ya que si tienen el mismo centro ya lo hemos visto (como una operación interna en el conjunto de los giros de centro O).

Sean los giros $G_{O,\alpha}$ y $G_{O',\beta}$. Supongamos que ambos ángulos son positivos.



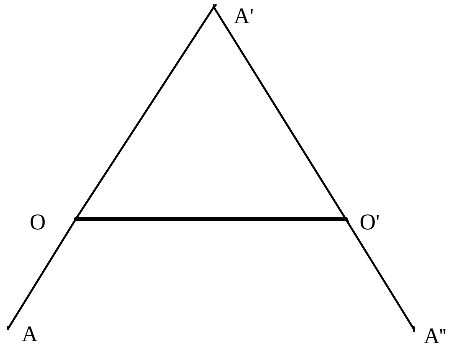
Trazamos la recta que pasa por los puntos OO' y la llamamos r. Como el primer giro tiene amplitud α, trazamos una recta s que forma con la recta r un ángulo α/2. Entonces el giro $G_{O,\alpha}$ se puede descomponer como producto de dos simetrías de ejes r y s respectivamente; $G_{O,a} = S_r \circ S_s$

De forma análoga trazamos un eje s' que forma con el eje r un ángulo β/2. Luego $G_{O,b} = S_{s'} \circ S_r$

Entonces $G_{O,b} \circ G_{O,a} = (S_{s'} \circ S_r) \circ (S_r \circ S_s) = S_{s'} \circ (S_r \circ S_r) \circ S_s = S_{s'} \circ S_s$

Y como la composición de las simetrías de ejes s y s' es un giro de centro C y ángulo $\alpha+\beta$, tenemos que la composición de dos giros de diferente centro es otro giro con otro centro y ángulo suma de los otros dos.

4.4. Producto de Simetrías Centrales.



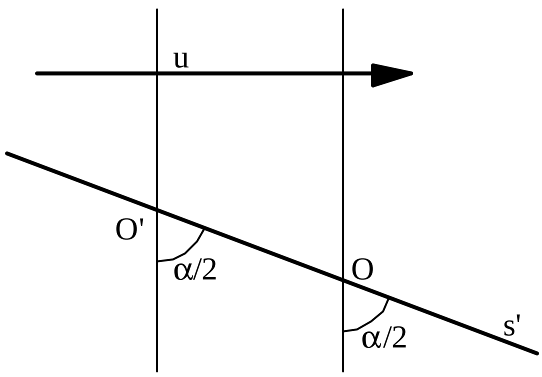
Sea la primera simetría central la semirrecta con origen en O y la segunda simetría central con origen en O'.

Se verifica:

$$\left.\begin{array}{r} \overline{OA'} = -\overline{OA} \\ \overline{O'A''} = -\overline{O'A'} \end{array}\right\} \quad \overline{AA''} = \overline{AA'} + \overline{A'A''} = 2\overline{OA'} + 2\overline{A'O'} = 2\overline{OO'}$$

Como la imagen de un punto por ambas simetrías no depende del punto elegido, tenemos que el producto de dos simetrías centrales de centros O y O' es una traslación de vector $2\overline{OO'}$

4.5. Producto de una Traslación por un Giro.



Sea $T_{\vec{u}}$ una traslación de vector $\vec{u}$ y $G_{O,\alpha}$ un giro de centro O y ángulo α.

Sea r una recta perpendicular al vector $\vec{u}$ que pasa por el centro de Giro O. Sea s una recta paralela a r, que verifica que mediante una traslación de vector $\vec{u}/2$ se transforma en r. Sea s' la recta obtenida a partir de r al aplicarle el giro de centro O y ángulo α/2.. Entonces podemos descomponer:

$$T_{\vec{u}} = S_r \circ S_s$$
$$G_{O,\partial} = S_{s'} \circ S_r$$

Entonces: $$G_{O,a} \circ T_{\vec{u}} = \left(S_{s'} \circ S_r\right) \circ \left(S_r \circ S_s\right) = S_{s'} \circ S_s = G_{O',a}$$

Por tanto, la composición de una traslación con un giro es otro giro con el mismo ángulo que el anterior y distinto centro.

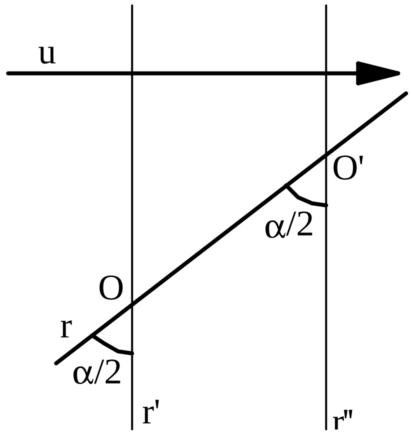
4.6. Producto de un Giro por una Traslación.

Sea $G_{O,\alpha}$ un giro de centro O y ángulo α y $T_{\vec{u}}$ una traslación de vector $\vec{u}$. Descomponemos el giro en producto de las simetrías S_r y $S_{r'}$, siendo r' una recta perpendicular al vector $\bar{u}$ por el punto O. Descomponemos la traslación como producto de las simetrías $S_{r'}$ y $S_{r''}$, cuya distancia es la mitad del vector $\bar{u}$.

$$G_{O,a} = S_{r'} \circ S_r$$
$$T_{\bar{u}} = S_{r''} \circ S_{r'}$$

Sustituyendo:

$$T_{\bar{u}} \circ G_{O,a} = S_{r''} \circ S_r = G_{O',a}$$



El producto de ambas aplicaciones es un giro de centro O' y ángulo α.

Podemos observar que el producto de giros y traslaciones no es una operación conmutativa, ya que varía el centro de Giro.

5. MOVIMIENTOS.

DEF Llamaremos Movimiento a toda transformación geométrica que se puede descomponer en un número finito de simetrías. Si el número de simetrías es par el movimiento es directo y si es impar diremos que es inverso.

La definición tiene sentido pues acabamos de ver que las traslaciones y los giros se pueden expresar como producto de dos simetrías axiales. Por tanto, las traslaciones y los giros son movimientos directos. Igualmente, una simetría central es también un movimiento directo, pues se puede interpretar como un giro de ángulo π.

PROP Todo movimiento directo puede reducirse a un producto de una traslación por un giro.

Dem.

Sean dos triángulos ABC y A'B'C' dos triángulos homólogos en el movimiento. Una traslación de vector AA' transforma el triángulo ABC en el triángulo A'B''C''. Si ahora aplicamos un giro de centro el punto A' y ángulo α (siendo α el ángulo formado por los lados A'B'' y A'B') transformamos el triángulo A'B''C'' en A'B'C'.

Si el movimiento fuese inverso, tendríamos que añadir a la traslación y al giro una simetría axial de eje A'B'.

OBS La descomposición anterior no es única ya que podemos encontrar otras con una reducción mayor.

TEOREMA. Teorema de Chasles.

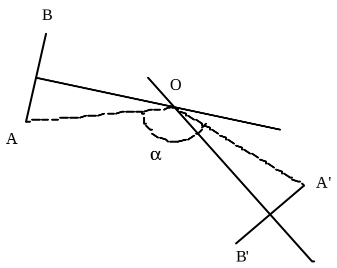
Sean A y B dos puntos del plano y A' y B' sus imágenes por un movimiento.

1) Si los vectores AB y A'B' no son equipolentes y tienen distinta dirección pero igual módulo, el movimiento puede reducirse a un giro.

2) Si tienen la misma dirección y módulo, pero no son equipolentes, se reduce a una simetría central.
3) Si son equipolentes, se reduce a una traslación.

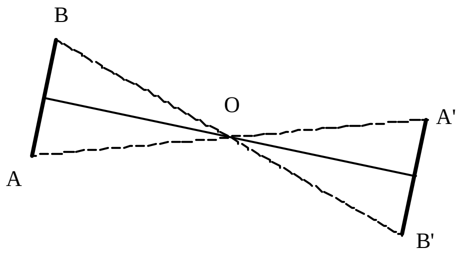
Dem.

1)



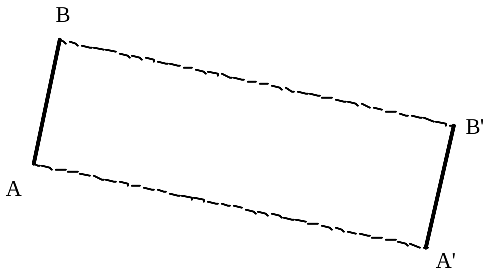
Las mediatrices de los segmentos AB y A'B' se cortan en un cierto punto O, que será invariante por la aplicación y centro de un giro de amplitud ∠AOA'.

2)



En este caso los dos segmentos determinan univocamente una simetría central que tendrá de centro el punto medio de AA' o de BB'.

3)



En este caso, la aplicación que transforma uno en otro es una traslación de vector AA'.

Como conclusión a todo lo que hemos visto, podemos resumir que:

- Todo movimiento directo se puede reducir a una composición de un número par de simetrías axiales, que podemos limitar a dos.
- Todo movimiento inverso se puede reducir a una composición de un número impar de simetrías axiales, que podemos limitar a tres.
- Las simetrías axiales son las transformaciones elementales del grupo de los movimientos.
- Un movimiento sin puntos dobles es una traslación o una composición de traslación y simetría axial (dependiendo que que existan dos o más rectas invariantes o sólo una).
- Un movimiento con tres puntos invariantes no alineados es la identidad.
- Un movimiento (excluyendo la identidad) con al menos dos puntos invariantes es una simetría axial.

- Un movimiento con un único punto invariante es un giro o rotación.

6. TESELACIONES DEL PLANO.

DEF Llamamos Teselación del plano a una o varias figuras planas que al repetirse con regularidad pueden llenar el plano.

Los movimientos que se pueden aplicar a la figura o figuras del plano son:

1) Simetrías axiales.
2) Traslaciones.
3) Giros.
4) Antitraslaciones o Deslizamientos.

Las aplicaciones de las teselaciones nos las podemos encontrar en los frisos y mosaicos.

6.1. Frisos.

Los frisos son también conocidos con el nombre de cenefas y son figuras donde el autor utiliza su ingenio geométrico para crear belleza por medio de la repetición. Podemos afirmar que los primeros frisos fueron las hileras de dólmenes prehistóricos, luego los podemos encontrar en las decoraciones de los templos egipcios y griegos, en las decoraciones textiles romanas, etc. En España los podemos encontrar en su máximo esplendor en la edificación musulmana de la Alhambra (Granada).

DEF Sea una cierta figura F y sea S(F) el grupo de simetría de F (S(F)=conjunto de isometrías que dejan invariante F). Diremos que F es un Friso si verifica las dos condiciones siguientes:

1) Existe una recta r (que puede estar o no dibujada) que indica la acción y desarrollo del friso y que permanece invariante por todas las isometrías de S(F).
2) Existe una traslación $T_{\bar{u}}$ de vector no nulo y paralelo a r que verifica que dada cualquier otra traslación $T_{\bar{v}}$ que deja invariante el friso, el vector $\bar{v}$ es un múltiplo entero de $\bar{u}$.

6.1.1. Tipos de Movimientos en los Frisos.

a) Simetrías Axiales en Frisos.

Nos podemos encontrar una simetría axial respecto de la recta r, S_r, y otra simetrías $S_{r'}$, siendo r' una recta perpendicular a r. También es posible tener más simetrías $S_{r''}$, siendo r'' rectas paralela a r' y situadas a una distancia mitad del vector $\bar{u}$ o múltiplos enteros de $\bar{u}$.

b) Giros en Frisos.

Son posibles todos los giros de centro un punto O situado en la recta r y ángulo 180º.. Puede existir más de un giro, pero todos debes de verificar que sus centros se obtienen como traslación de vector múltiplo entero de $\bar{u}$ de uno cualquiera de ellos.

c) Antitraslaciones en Frisos.

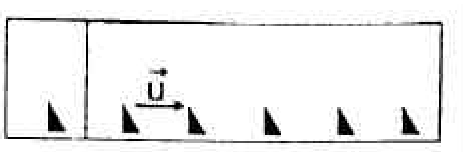
Las únicas antitraslaciones posibles son las que se obtienen de multiplicar la simetría axial de eje r, S_r, con traslaciones de vector $\frac{1}{2}n\bar{u}$, $T_{\frac{1}{1}n\bar{u}}$.

6.1.2. Clasificación de Frisos.

La clasificación la vamos a realizar en función de los movimientos que se efectúen para la obtención del Friso.

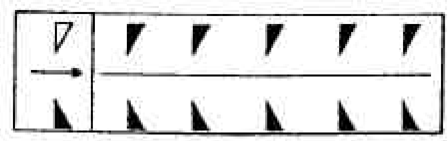
a) Traslación.

Disponemos de una figura que desplazamos a la derecha por medio de una traslación de vector $\bar{u}$.



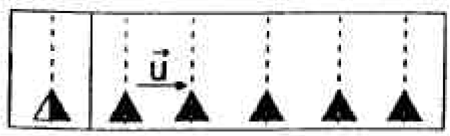
b) Traslación y simetría axial de eje paralelo al vector de la traslación.

A partir de una figura obtenemos el friso por medio de una traslación de vector $\bar{u}$ y sus múltiplos enteros y luego aplicamos una simetría axial. respecto de un determinado eje paralelo a $\bar{u}$.



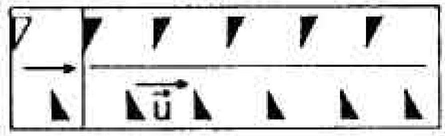
c) Simetría axial y traslación de vector perpendicular al eje de la simetría.

Dada una figura, realizamos una simetría de eje r y luego sucesivas traslaciones de vector $\bar{u}$ perpendicular al eje de simetría. Aparecen así infinitas simetrías obtenidas por traslación del eje r según múltiplos enteros de $\bar{u}$.



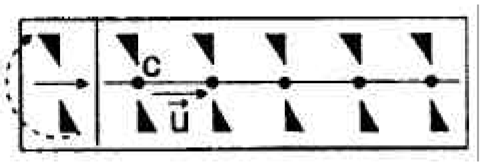
d) Traslación y antitraslación.

Dada una determinada figura, se realiza una traslación $T_{\vec{u}}$ y una antitraslación de vector $\left(\frac{1}{2}+n\right)\vec{u}$ y eje r, $T_{\left(\frac{1}{2}+n\right)\vec{u}} \circ S_r$.



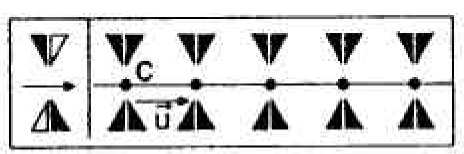
e) Giro de 180º y traslación.

Dada una figura, realizamos un giro de centro C situado en una recta r y 180º. A continuación aplicamos traslaciones de vector múltiplos de $\vec{u}$, siendo éste paralelo a la recta r.



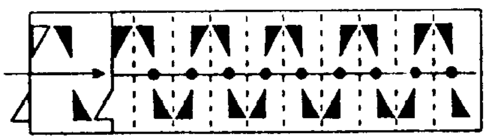
f) Simetría Axial, Giro de 180º y Traslación.

Se basa en el friso anterior, al que le añadimos una simetría axial de eje r.



g) Giro, Antitraslación y Traslación.

Aplicando estos movimientos surgen simetrías axiales respecto de ejes verticales, pero no aparece la simetría axial de eje paralelo al vector $\vec{u}$ de la traslación.



6.2. Mosaicos.

Los Mosaicos aparecen al intentar recubrir el plano de forma que no queden agujeros ni se produzcan solapamientos. A lo largo de la historia se han utilizado unos pocos diseños geométricos básicos. Se piensa que en el viejo Egipto ya conocían de la existencia de 17 formas de recubrir el plano mediante mosaicos periódicos, y en la Alhambra de Granada existe una representación de 17 modelos.

Fue el cristalógrafo ruso Fedorov quien demostró en 1981 que sólo hay 17 estructuras básicas en mosaicos periódicos.

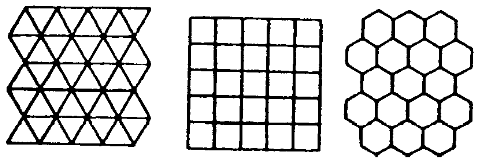
6.2.1. Tipos de Mosaicos.

a) Mosaicos Regulares.

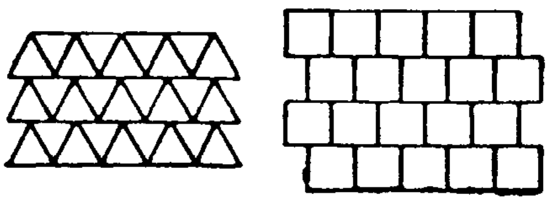
DEF Son aquellos formados por baldosas iguales con forma de polígono regular. Los casos que nos podemos encontrar son baldosas con forma de:

- Triángulos equiláteros.
- Cuadrados.
- Hexágonos regulares.

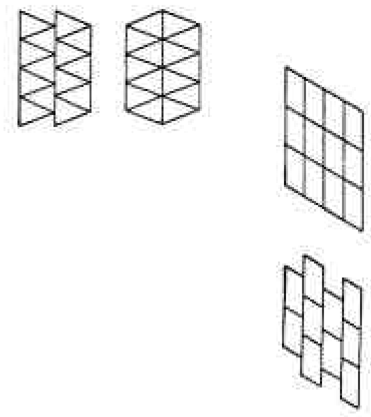
Para que estas baldosas recubran completamente el plano, basta con que verifiquen la siguiente propiedad*: Si giramos el polígono regular con centro en uno de sus vértices y ángulo igual al ángulo interior del polígono, al cabo de un número finito de giros, n, alcanzamos la posición inicial, siendo el producto de n por el ángulo de giro igual a 360º.*



Otra forma de obtener mosaicos es desplazando unas filas con respecto a otras, siempre que se pueda.



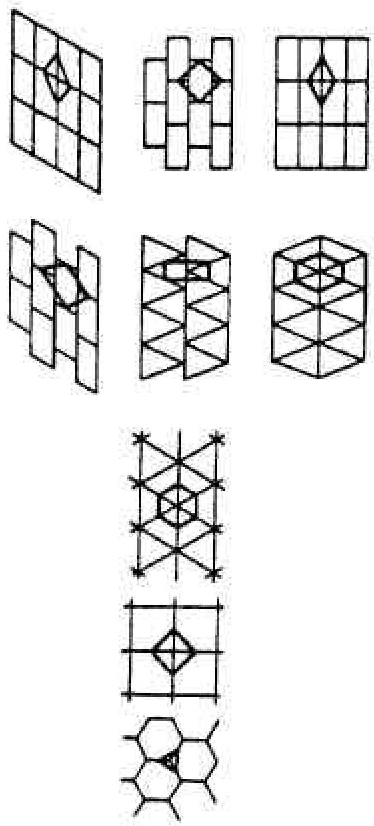
También podemos obtener otros mosaicos sin que verifiquen la propiedad anterior. Basta con que estén formados por paralelogramos y triángulos isósceles con una cierta equiangularidad o equilateralidad. Son, por ejemplo:



b) Polígonos Cuasirregulares.

DEF Diremos que un polígono es Cuasirregular si está formado con baldosas iguales y los polígonos que se forman al unir los puntos medios de sus lados o unir sus centros determinan nuevos polígonos regulares.

Como ejemplo de obtención uniendo sus puntos medios tenemos:

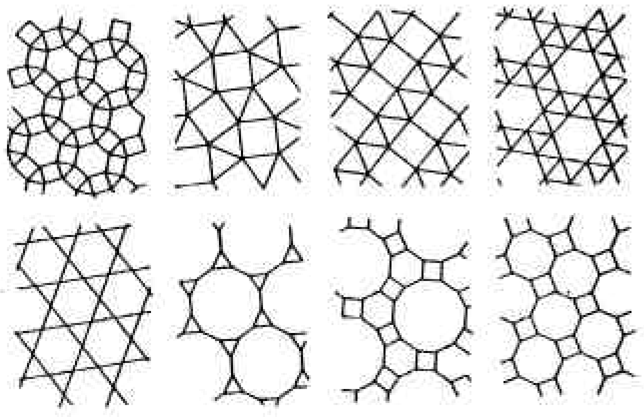


c) Mosaicos Semirregulares.

DEF Diremos que un mosaico es semirregular si está compuesto por dos o más tipos de polígonos regulares en los que existe un único tipo de polígono regular obtenido al unir sus puntos medios.

DEF Diremos que un mosaico es semirregular si está compuesto por dos o más tipos de polígonos regulares en los que su distribución alrededor de cualquier vértice del mosaico es siempre la misma.

Los ocho mosaicos semirregulares que existen son:

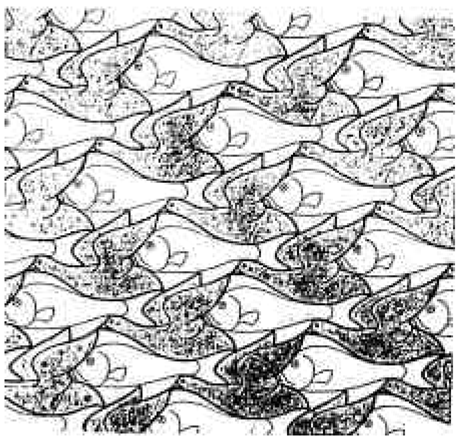


d) Mosaicos Pararregulares.

Son mosaicos formados por polígonos no regulares.

e) Mosaicos de Escher.

El matemático holandés Maurits Escher, conocido por sus configuraciones imposibles, también intervino en el proceso de construcción de mosaidos. A partir de una cierta loseta básica, realizaba modificaciones pero manteniendo el área de la misma. Un ejemplo es el siguiente mosaico, en el que utiliza figuras de animales:



Bibliografía Recomendada.

Curso de Álgebra y Geometría. Aut. Juan de Burgos. Ed. Alhambra Universidad.

Geometría Métrica y Proyectiva. Aut. Puig Adam.

Matemáticas de 4º de E.S.O. Diferentes editoriales.