

TEMAS DE MATEMÁTICAS

(Oposiciones de Secundaria)

TEMA 43

PROYECCIONES EN EL PLANO. MAPAS. PLANISFERIOS TERRESTRES: PRINCIPALES SISTEMAS DE REPRESENTACIÓN.

1. Introducción.
2. Conceptos Elementales.
3. Proyecciones en el Plano.
 - 3.1. Clasificación de las Proyecciones Geométricas.
 - 3.1.1. Proyecciones Cilíndricas.
 - 3.1.2. Proyecciones Cónicas.
 - 3.1.3. Proyecciones Acimutales o Cenitales.
 - 3.2. Tipos de Proyecciones.
4. Mapas.
 - 4.1. Indicatriz de Tissot.
 - 4.2. Clases de Mapas.
5. Planisferios Terrestres: Sistemas de Representación.
 - 5.1. La Proyección de Mercator.
 - 5.2. La Proyección de Gauss.
 - 5.3. La Proyección de Gall.
 - 5.4. La Proyección de Lambert.
 - 5.5. La Proyección Estereográfica Polar.

TEMA 43

PROYECCIONES EN EL PLANO. MAPAS. PLANISFERIOS TERRESTRES: PRINCIPALES SISTEMAS DE REPRESENTACIÓN.

1. INTRODUCCIÓN.

Para representar la Tierra de forma exacta, al ser una superficie esférica, sólo podemos conseguirlo mediante otra esfera o un globo. Estos elementos han sido instrumentos habituales desde que se supo que la Tierra era esférica. Aun así presentan un problema y es su manejabilidad. Si son pequeños se pueden manejar con facilidad pero no son capaces de representar detalles más o menos importantes. Si son grandes ganamos en representación de detalles pero perdemos la posibilidad de manejarlos.

Por lo tanto, resulta necesario representar las superficies esféricas sobre un plano. Pero esto no es posible salvo que permitamos a la superficie esférica que se deforme o se rompa. Entonces sólo conseguimos su representación de modo aproximado.

A lo largo de la historia reciente se han desarrollado diferentes sistemas de representación de superficies esféricas en el plano. Todos estos sistemas se basan en el concepto de proyección, y dan lugar a distintos tipos de proyecciones cartográficas.

2. CONCEPTOS ELEMENTALES.

DEF La Cartografía es la parte de la Ciencia que se dedica al trazado, estudio e interpretación de los mapas.

DEF Llamaremos Mapa a la representación en el plano y a menor tamaño de la superficie terrestre, ya sea toda o una parte.

DEF La Escala es la relación entre la imagen representada en el Mapa y su tamaño verdadero.

DEF El Eje de la Tierra es una línea imaginaria que cruza el planeta de Norte a Sur, siendo el eje de revolución del planeta.

DEF El Ecuador es la circunferencia máxima de la Tierra, equidistante de ambos polos y perpendicular al eje de la Tierra. Divide al planeta en dos mitades, llamadas Hemisferios. Su radio es de 6378 km. y su longitud de 40.076 km.

DEF Los Trópicos son otras circunferencias paralelas al ecuador. En el hemisferio norte está el Trópico de Cáncer y en el hemisferio sur el Trópico de Capricornio. Tomando como referencia el centro de la Tierra, están a 23°27' del ecuador y -23°27' respectivamente.

DEF Llamaremos Meridianos a las semicircunferencias con origen en el Polo Norte y final en el Polo Sur.

DEF Los Paralelos son circunferencias paralelas al ecuador. La separación entre ellos es constante y determinan un ángulo esférico recto con los meridianos.

Para determinar un punto sobre la superficie de la Tierra, primero hemos de determinar un origen para las mediciones. Al ser una superficie, daremos dos coordenadas, una respecto de un Meridiano y otra respecto de un paralelo. El meridiano origen será el ecuador. Como paralelo origen consideraremos aquel que pasa por la población inglesa de Greenwich. Las coordenadas serán los ángulos que forman el meridiano y el paralelo que pasan por el punto respecto de las líneas de origen.

DEF La Longitud de un lugar es el ángulo que forma el meridiano que pasa por ese sitio con respecto al meridiano de Greenwich. La distancia se mide de 0° a 180° . y puede ser hacia el este, E, o hacia el Oeste, W.

DEF La Latitud de un lugar es el ángulo que forma el meridiano que pasa por ese sitio con respecto al Ecuador. Se mide de 0° a 90° y puede ser hacia el Norte o hacia el Sur.

3. PROYECCIONES EN EL PLANO.

Ya hemos comentado en la introducción del tema que la forma de representar una superficie esférica era sobre un plano, aunque no reflejara fielmente la realidad. Las diferentes representaciones de la Tierra se basan en proyectar su superficie directamente sobre un plano o sobre otras figuras geométricas que se puedan desarrollar de forma sencilla sobre el plano. Las figuras habituales serán el cilindro, el cono o directamente un plano tangencial a la superficie esférica. Una vez realizada la proyección sobre la figura geométrica auxiliar extenderemos ésta sobre el plano, cortándola previamente a lo largo de una generatriz.

Cada punto de la esfera terrestre lo tenemos determinado por medio de dos coordenadas, que son la longitud y la latitud. Al ser ángulos, las vamos a expresar en radianes. Entonces, cualquier punto de la Tierra viene determinado por un par de números reales (L,M) verificando que:

$$(L,M) \in \left(-\frac{\mathbf{p}}{2}, \frac{\mathbf{p}}{2} \right] \times (-\mathbf{p}, \mathbf{p}] = A$$

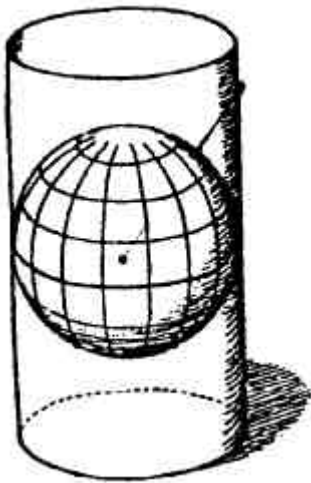
DEF Sea \mathbb{R}^2 un plano euclídeo. . Llamaremos Proyección a una aplicación $p:A \rightarrow \mathbb{R}^2$ de tal forma que existe un abierto $D \subset A$ no vacío y conexo verificando que $p:D \rightarrow p(D)$ es un homeomorfismo. El conjunto D es el dominio de valores de las coordenadas geográficas de la porción D' de la esfera terrestre S que se desea representar.

A veces, por abuso de lenguaje, se llama proyección a la aplicación $p:D' \rightarrow p(D)$, donde $p(D)$ es el trozo del plano donde se va a representar la porción de esfera seleccionada. Este trozo del plano será una unión de grafos de restricciones de p a puntos y líneas de D, a los que se les añadirán símbolos convencionales, nombres, coloraciones, etc.

3.1. Clasificación de las Proyecciones Geométricas.

Desde el punto de vista matemático son interesantes las proyecciones geométricas. Éstas las podemos clasificar en función del modo en el que se obtienen, o lo que es lo mismo, teniendo en cuenta la figura geométrica en la que se apoyan para realizar la proyección.

3.1.1. Proyecciones Cilíndricas.



Son proyecciones que se realizan sobre un cilindro, cuyo eje pasa por el centro de la Esfera. Posteriormente se desarrolla la superficie del cilindro, obteniéndose un plano. Las únicas condiciones son que el centro de la proyección ha de coincidir con el de la esfera y el radio del cilindro debe ser menor o igual que el de la esfera. De ahí que el cilindro sea tangencial a la esfera o la atraviese.

Como características de estas proyecciones, podemos decir que los paralelos de la esfera se convierten en líneas horizontales y los meridianos en líneas verticales.

Debido a que los paralelos cortan a los meridianos a distancias iguales, y esas distancias se conservan por la proyección, estas líneas determinan en el plano un sistema de rectángulos.

Teniendo en cuenta que una esfera, en este caso la Tierra, no tiene una representación perfecta en un plano, toda proyección presenta limitaciones. En el caso de la proyección cilíndrica, tenemos que en el plano la superficie de las zonas representadas crece a medida que nos separamos de los puntos de contacto entre la esfera y el cilindro.

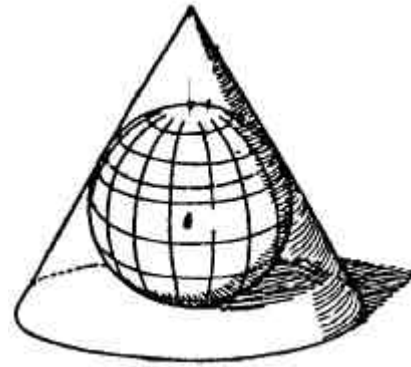
Este tipo de proyecciones se aplica de forma habitual en la representación de zonas próximas al ecuador o de regiones a las cuales el cilindro no es normal.

Como caso particular de este tipo de proyecciones tenemos las llamadas Proyecciones Planas, en las cuales el cilindro corta al mapa en el centro según los círculos paralelos. Se aplica fundamentalmente para representar trozos de superficie pequeños. Aunque sabemos que no conservan las áreas, al ser porciones pequeñas, las deformaciones están dentro de unos límites aceptables.

3.1.2. Proyecciones cónicas.

Las proyecciones cónicas son las que se realizan utilizando como figura geométrica un cono. Al desarrollar el cono se obtiene el mapa. El centro de proyección es el punto medio de la esfera.

Como características fundamentales de este tipo de proyecciones tenemos que los paralelos son circunferencias paralelas a la base del cono y los meridianos son generatrices del cono. Al desarrollar el cono, estas líneas se convierten en líneas circulares y líneas radiales, respectivamente.

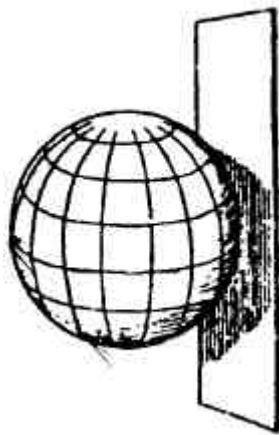


La aplicación más importante es la confección de atlas, dado que la proyección tiene facilidad para dividirse en secciones, cada una de las cuales será una hoja del atlas.

Existen diferentes variantes de esta proyección, que son:

- a) Proyección Cónica Simple.
- b) Proyección Cónica con dos paralelos Base.
- c) Proyección Cónica Equivalente.
- d) Proyección Policónica.

3.1.3. Proyecciones Acimutales o cenitales.



Son aquellas en las que la proyección se realiza sobre un plano tangente en algún punto de la esfera terrestre. El centro de proyección coincide con el centro de la esfera o con el punto diametralmente opuesto al punto de contacto. El mapa que obtenemos está concebido concéntricamente alrededor del punto de contacto.

Como características principales de estas proyecciones tenemos:

- Los círculos máximos que pasan por el punto de contacto de la esfera con el plano se proyectan en líneas rectas, y su acimut es verdadero. Recordemos que el acimut es el ángulo que forma el meridiano con el círculo vertical que pasa por un punto de la superficie terrestre.
- Todas las áreas situadas a la misma distancia del punto de contacto presentan la misma deformación.
- Los puntos de la esfera equidistantes del punto de contacto verifican que sus proyecciones también son equidistantes de dicho punto.

En función de cómo se produzca el contacto del plano de tangencia con la esfera, tenemos distintas proyecciones acimutales.

- Proyección Polar. El contacto se produce en el polo de la esfera.
- Proyección Ecuatorial. El punto de contacto es algún punto del ecuador.
- Proyección Transversal. El punto de contacto es cualquier otro.
- Proyección Estereográfica: El punto de mira está situado en la superficie de la Tierra, justamente en las antípodas del punto de contacto.

Un cierto tipo especial de proyecciones acimutales son las que no poseen punto de contacto o tangencia entre el plano y la esfera. Podemos destacar varios tipos:

- Proyección Ortográfica: La proyección se realiza mediante rayos paralelos a un plano perpendicular a los mismos. El punto de mira se situaría en el infinito.
- Proyección Gnomónica: Proyectamos sobre un plano desde el centro de la esfera, pudiendo estar dicho plano a cierta distancia de la Tierra. Los márgenes del mapa aparecen aumentados, por lo que no es posible representar un hemisferio completo.

3.2. Tipos de Proyecciones.

Sabiendo que $p:D' \rightarrow p(D)$ es una aplicación, podemos considerar los siguientes tipos de proyecciones.

a) Proyecciones Conformes.

Son las que conservan los ángulos, pero no las áreas. Son útiles en aquellas aplicaciones en las que la conservación de los ángulos y direcciones es primordial, como puede ser en la navegación. Las proyecciones geométricas son conformes.

b) Proyecciones Equivalentes.

Son las proyecciones que conservan las áreas pero no los ángulos. Las figuras proyectadas quedan deformadas, principalmente en los bordes de la zona representada. Entre sus aplicaciones nos encontramos que sirven para poner de relieve la distribución de productos en los estudios económicos o industriales.

c) Proyecciones Afilácticas.

Desde el punto de vista matemático, la igualdad de superficie y la igualdad de ángulos constituyen propiedades de las proyecciones muy dignas de tenerse en cuenta. Desde el punto de vista práctico, ambas propiedades no se pueden dar a la vez (salvo en la propia esfera). Por tanto, el cartógrafo prefiere proyecciones intermedias entre las equivalentes y las conformes, de tal forma que no se alteren en modo excesivo la forma ni el tamaño. Este tipo de proyecciones reciben el nombre de proyecciones afilácticas o híbridas. Podemos destacar la proyección equidistante, en la cual los paralelos son equidistantes y los meridianos son ortogonales a los paralelos.

4. MAPAS.

DEF Llamaremos Mapa a la proyección de un dominio abierto y conexo de una esfera sobre un plano. Esta esfera será habitualmente la esfera terrestre. En Mapas astronómicos será la esfera celeste.

DEF Llamaremos Escala de un mapa a la razón entre la distancia de dos puntos de un mapa y la distancia de sus respectivas antiimágenes sobre la esfera terrestre.

Como no existe ninguna isometría de un dominio abierto y conexo de la esfera en un dominio del plano (no existen proyecciones que sean a la vez conformes y equivalentes) las escalas sólo pueden ser locales.

La escala se puede indicar en un mapa de diferentes formas:

a) Escala Numérica.

Establece la relación entre las distancias mediante una razón o fracción. Así nos podemos encontrar con 1:100.000 lo cual significa que dos puntos separados por 1 cm en el mapa realmente se encuentran a una distancia de 100.000 cm en la esfera terrestre.

b) Escala Gráfica.

La relación entre las distancias se representa por medio de una escala graduada.

c) Escala centímetro por kilómetro.

Esta escala permite disminuir el número de ceros en la escala numérica. La razón expresa el número de kilómetros en la esfera terrestre por cada centímetro del mapa.

4.1. Indicatriz de Tissot.

Para poder apreciar la deformación producida por una proyección utilizamos la Indicatriz de Tissot. Consiste en una elipse obtenida como proyección de una circunferencia de la esfera terrestre. Las deformaciones que produce la aplicación utilizada son concretadas por la longitud y la orientación de los ejes de la elipse. Si la circunferencia que proyectamos es de radio unidad, entonces los semiejes de la indicatriz designan las escalas locales máxima y mínima. Más concretamente, si a y b son los semiejes de la elipse y $a \neq b$ tenemos que a es la escala máxima y b es la mínima. Además también nos determina las diferentes alteraciones que produce la proyección. Así, tenemos que:

- Las alteraciones lineales correspondientes son $a-1$ y $b-1$.
- La alteración de superficie es $p(ab-1)$.
- La alteración local de ángulos se mide por transportación de un ángulo central de la circunferencia y aumenta con la excentricidad de la indicatriz.

Aplicando la indicatriz de Tissot a algunas de las proyecciones que ya hemos estudiado, se verifica que:

- Proyecciones Conformes: Son circunferencias de radios distintos.
- Proyecciones Equivalentes: Son elipses de superficie constante y excentricidad variable.
- Proyecciones Afilácticas: Son elipses de superficie variable en las proyecciones equidistantes. En este caso, los valores de las alteraciones o deformaciones se reducen a la mitad, aproximadamente, en comparación con las anteriores.

4.2. Clases de Mapas.

Los mapas que nos podemos encontrar los podemos clasificar en tres tipos:

a) Mapas Celestes.

También llamados mapas astronómicos. Representan la esfera celeste, es decir, como es la distribución de estrellas. También pueden representar otros objetos como planetas, satélites, cometas, etc.

b) Mapas Marinos.

También conocidos con el nombre de Cartas Marinas. Existen de dos clases: Tenemos los que nos muestran diferentes accidentes físicos del mar, salinidad, corrientes, profundidad, etc. y aquellas que se usan para navegar, en las que aparecen todos los datos necesarios para la navegación. Entre estos datos tenemos los accidentes costeros, faros, boyas, etc.

c) Mapas Terrestres.

Los mapas terrestres son una representación de todo o parte de la superficie de la esfera terrestre.

Según los temas o detalles que aparezcan, tenemos distintas clases:

- Mapas Geográficos. Tratan de representar la superficie terrestre de la forma más exacta posible, incluyendo todos sus aspectos.
- Mapas Físicos: Representan fundamentalmente los accidentes físicos de la superficie terrestre. Los podemos subdividir en hidrográficos, sismotectónicos, geológicos, orográficos, etc.
- Mapas Biológicos: Se representan datos relativos a la distribución de animales o plantas.
- Mapas de Tráfico: Representan carreteras, líneas férreas, de navegación, de telecomunicaciones, etc.
- Mapas Políticos: Se representan los diferentes países, regiones, provincias, capitales o ciudades, etc.
- Mapas Estadísticos: Representan datos de población economía, industria, comercio y otros.

5. PLANISFERIOS TERRESTRES: SISTEMAS DE REPRESENTACIÓN.

Llamamos planisferios terrestres a la representación en el plano de la esfera terrestre completa. Teniendo en cuenta las distintas proyecciones vistas al principio del tema, veamos ahora algunas de las representaciones en el plano de la esfera terrestre.

5.1. La Proyección de Mercator.

Esta proyección aparece para mejorar la proyección cilíndrica, pretendiendo conservar la exactitud angular. Sobre una esfera de radio R se tiene:

$$p(L, M) = \left[R \cdot M, R \cdot \text{Log} \left(\text{Tg} \left(\frac{P}{4} + \frac{L}{2} \right) \right) \right]$$

siendo la escala local $k = \text{Sec } L$

Por abuso de lenguaje se llaman meridianos y paralelos a las respectivas proyecciones de estas líneas de la esfera. En esta proyección tenemos que los meridianos son rectas paralelas y equidistantes, y los paralelos son rectas perpendiculares a los meridianos. El intervalo de separación entre dos paralelos consecutivos es función de la latitud, y verifica la condición de conformidad.

Las curvas que forman ángulo constante con los meridianos reciben el nombre de Loxódromas, y en esta proyección se representan mediante rectas. Debido a esta característica, esta proyección es muy utilizada para la representación de cartas de navegación.

Como inconvenientes de esta proyección nos encontramos que los polos no pueden ser representados ya que al ser los meridianos paralelos entre sí no se cortan. Sabemos que en la esfera los paralelos son más cortos a medida que se aproximan a los polos siendo su longitud proporcional al coseno de la latitud. Como en la proyección Mercator los paralelos disponen todos de la misma longitud, tenemos entonces que éstos han sido aumentados proporcionalmente al seno de la latitud, expresada en grados.

5.2. Proyección de Gauss.

La proyección de Gauss es otro caso particular de proyección cilíndrica. Sobre una esfera de radio R tenemos definida la proyección como:

$$p(L, M) = \left[\frac{R}{2} \text{Log} \left(\frac{1 + \cos L \cdot \text{sen } M}{1 - \cos L \cdot \text{sen } M} \right), \text{arctg}(R \cdot \text{tg}(L \cdot \text{sen } M)) \right]$$

La escala local es $k = \frac{1}{\sqrt{1 - \cos^2 L \cdot \text{sen}^2 M}}$

La proyección de Gauss verifica que el ecuador y el meridiano central son rectas ortogonales. El resto de meridianos y paralelos son curvas trascendentes ortogonales entre sí.

5.3. La Proyección de Gall.

Esta es una proyección cilíndrica, donde el cilindro corta a la esfera en los paralelos 45° N. y 45° S. Los meridianos son rectas verticales, verificando que la distancia no presenta ninguna deformación en los paralelos nombrados. Los paralelos son rectas horizontales, no manteniéndose invariante la distancia entre ellos. En las zonas ecuatoriales las áreas son menores que las reales y en las zonas polares son mayores (siempre teniendo en cuenta la escala).

5.4. La Proyección de Lambert.

La proyección de Lambert es una proyección Cónica. Dado un paralelo L_0 que tomaremos como origen, tenemos que la imagen en coordenadas polares de un punto de la esfera son:

$$\begin{aligned} J &= M \cdot \sin L_0 \\ r &= r_0 \cdot e^{\sin L_0 \cdot (L_0 - L)} \end{aligned}$$

donde r_0 es el radio de las imágenes de los puntos del paralelo $L=L_0$ y L es la función de Mercator:

$$L(L) = \ln \left(\operatorname{tg} \left(\frac{P}{4} + \frac{L}{2} \right) \right)$$

La escala local es $k = 1 + \frac{y^2}{2R^2}$

Los meridianos son rectas concurrentes que determinan ángulos proporcionales a la longitud. Los paralelos son arcos de circunferencias concéntricas, siendo su centro el punto de intersección de los meridianos. Los radios de dichos arcos verifican la condición de conformidad.

5.5. Proyección Estereográfica Polar.

Para una esfera de radio R , las coordenadas polares del punto imagen vienen dados por:

$$\begin{aligned} J &= M \\ r &= 2R \operatorname{tg} \left(\frac{P}{4} - \frac{L}{2} \right) \end{aligned}$$

y la escala es $k = 1 + \frac{r^2}{4R^2} = 1 + \frac{x^2 + y^2}{4R^2}$

La proyección estereográfica es una proyección acimutal o cenital conforme en la que el punto del que parten los rayos proyectantes se encuentra en una posición diametralmente opuesta al punto de contacto del plano tangente con el globo; en ella, la distancia entre meridianos y paralelos contiguos aumenta desde el centro hasta los márgenes del mapa; se utiliza mucho para la confección de mapas de las zonas polares.