TEMAS DE MATEMATICAS
(Oposiciones de Secundaria)

TEMA 51

SISTEMAS DE REFERENCIA EN EL PLANO Y EN EL ESPACIO. ECUACIONES DE LA RECTA Y DEL PLANO. RELACIONES AFINES.

TEMA 51

<u>SISTEMAS DE REFERENCIA EN EL PLANO Y EN EL ESPACIO. ECUACIONES DE LA RECTA Y DEL PLANO. RELACIONES AFINES.</u>

1. ESPACIO AFIN.

DEF Sea V un K-espacio vectorial. Llamaremos K-espacio vectorial afín sobre V a una terna (E, V, φ) donde E es un conjunto arbitrario, V un espacio vectorial y φ es una aplicación φ : E x V → E que cumple las siguientes condiciones

i) $\forall\, P \in E \qquad \forall \vec{x}, \vec{y} \in V \qquad \boldsymbol{j}\left(\boldsymbol{j}(P,\vec{x}),\vec{y}\right) = \boldsymbol{j}(P, \vec{x}+\vec{y})$

ii) $\forall\, P \in E \qquad \boldsymbol{j}\left(P,\vec{\boldsymbol{q}}\right) = P \qquad \vec{\boldsymbol{q}}$ es el neutro de V.

iii) $\forall\, P, Q \in E \qquad \exists \vec{x} \in V \qquad \boldsymbol{j}(P,\vec{x}) = Q$

A la terna (E, V, φ) la vamos a denotar por A. Si definimos $\boldsymbol{j}(P,\vec{x}) = P + \vec{x}$ los axiomas anteriores quedan como:

i) $\forall\, P \in E \qquad \forall \vec{x}, \vec{y} \in V \qquad (P+\vec{x})+\vec{y} = P + (\vec{x}+\vec{y})$

ii) $P + \vec{0} = P$

iii) $\forall\, P, Q \in E \qquad \exists \vec{x} \in V \quad / \quad P + \vec{x} = Q$

DEF Se llama dimensión del espacio afín (E, V, φ) a la dimensión del espacio vectorial asociado.

<u>**TEOREMA.** TEOREMA DE CHASLES</u>

Si tenemos $P_1, P_2, \ldots\ldots, P_n \in E \quad \Rightarrow \quad \overrightarrow{P_1P_2} + \overrightarrow{P_2P_3} + \overrightarrow{P_3P_4} + \ldots\ldots + \overrightarrow{P_{n-1}P_n} = \overrightarrow{P_1P_n}$

<u>Dem.</u>

Vamos a realizar la demostración en n.

Si n = 3.

$$P_1 + \left(\overrightarrow{P_1P_2} + \overrightarrow{P_2P_3}\right) = \left(P_1 + \overrightarrow{P_1P_2}\right) + \overrightarrow{P_2P_3} = P_2 + \overrightarrow{P_2P_3} = P_3 \Rightarrow \overrightarrow{P_1P_2} + \overrightarrow{P_2P_3} = \overrightarrow{P_1P_3}$$

Supongamos que es cierto para n – 1 y vamos a demostrarlo para n luego $\overrightarrow{P_1P_2} + \overrightarrow{P_2P_3} + \ldots\ldots + \overrightarrow{P_{n-2}P_{n-1}} = \overrightarrow{P_1P_{n-1}}$ es la hipótesis de inducción

$$P_1 + \left(\overrightarrow{P_1P_2} + \overrightarrow{P_2P_3} + \ldots\ldots + \overrightarrow{P_{n-1}P_n}\right) = P_1 + \left[\left(\overrightarrow{P_1P_2} + \ldots\ldots + \overrightarrow{P_{n-2}P_{n-1}}\right) + \overrightarrow{P_{n-1}P_n}\right] =$$

$$= \left[P_1 + \left(\vec{P_1P_2} + ... + P_{n-2}Pn - \vec{1}\right)\right] + \vec{P_{n-1}} = \left[P_1 + P_1P_{n-1}\right] + P_{n-1}P_n \ ?\ P_{n-1} + P_{n-1}\vec{P_n} =$$

$$= P_n \Rightarrow Luego \quad \overrightarrow{P_1P_2} + \overrightarrow{P_2P_3} + ... + \overrightarrow{P_{n-1}P_n} = \overrightarrow{P_1P_n} \qquad \text{c.q.d.}$$

COROLARIO Un caso particular del teorema de Charles es

$$\overline{P_1P_2} + \overline{P_2P_3} + ... + \overline{P_nP_1} = \overline{P_1P_1} = \vec{0}$$

1.1. Plano afín.

Supongamos ahora que el espacio vectorial V es el conjunto de todos los vectores libres del plano definido sobre el cuerpo K = ℝ y sea E = P_2 conjunto de los puntos del plano.

En P_2 tenemos definida la ley de composición externa que asocia a un punto A y a un vector $\vec{v}$ un solo punto P tal que $\overrightarrow{AP}$ es el representante del vector $\vec{v}$.

$$\begin{array}{l} P_2 x V \xrightarrow{j} P_2 \\ (A, \vec{v}) \rightarrow P \quad siendo \quad \vec{v} = \left[AP\right] \end{array}$$

PROP $A_2 = (P_2, V_2, \boldsymbol{j})$ es un espacio afín de dimensión 2 llamado Plano Afín.

<u>Dem.</u>

i) Sea A∈P_2 y $\vec{u} = \left[\overrightarrow{AB}\right]$ y $\vec{v} = \left[\overrightarrow{BC}\right]$ dos vectores libres. Se verifica

$$B = A + \vec{u} \quad y \quad C = B + \vec{v} = (A + \vec{u}) + \vec{v}$$

Como $\left[\overrightarrow{AB}\right] + \left[\overrightarrow{BC}\right] = \left[\overrightarrow{AC}\right]$ tenemos que $C = A + (\vec{u} + \vec{v})$ luego

$$(A + \vec{u}) + \vec{v} = A + (\vec{u} + \vec{v})$$

ii) $A + \vec{O} = A$

Si $A + \vec{x} = A \Rightarrow \vec{x} = \overrightarrow{AA} = \vec{O}$

iii) Dos puntos cualesquiera A y B de P_2 definen un único vector libre $\vec{v}$ de representante $\overrightarrow{AB}$ y por tanto $B = A + \vec{v}$.

Por lo tanto $A_2 = (P_2, V_2, \boldsymbol{j})$ es un espacio afín de dimensión 2 llamado <u>Plano Afín.</u>

1.2. Espacio afín.

De forma análoga al plano afín, tomamos V como el conjunto de los vectores libres del espacio definido sobre ℝ y E el conjunto de puntos del espacio ordinario y se define:

$$\varphi \quad ExV \to E$$
$$(A,\vec{v}) \to P \qquad t{\cdot}q \quad \vec{v} = \left[\overrightarrow{AP}\right]$$

Así definido, cumple los axiomas del espacio afín. (Demostración análoga). Como la dimensión de V es 3 ⇒ la dimensión de $A_3 = (E,V,\varphi)$ es 3 y A_3 recibe el nombre de espacio afín tridimensional.

1.3. Subespacios afines.

DEF Sea E_1 un subconjunto no vacío de E y U un subespacio vectorial de V. Se dice que (E,U,φ_1) es un subespacio afín de dirección U cuando es un espacio afín asociado al espacio vectorial U y $\varphi_1 = \varphi\big|_{E_1xU}$

$$E_1xU \xrightarrow{\varphi_1} E_1$$
$$(A,\vec{u}) \to P = A + \vec{u}$$

Los subespacios afines reciben también el nombre de variedades lineales.

TEOREMA

Un subconjunto E_1 del espacio afín (E,V,φ) es un subespacio afín si y sólo si el conjunto $U = \left\{\overrightarrow{AX} \,/\, X \in E_1\right\}$, donde A es un punto fijo pero arbitrario de E_1, es un subespacio de V.

Dem.

"⇒"

Sea (E_1,U,φ_1) un subespacio afín de dirección U. Demostraremos que $U = \left\{\overrightarrow{AX}, x \in E_1\right\}$ es subespacio vectorial.

a) $\left\{\overrightarrow{AX}, X \in E_1\right\} \subset U$ ya que para todo par de puntos A, X ∈ E por ser (E_1,U,φ_1) un espacio afín (ax, iii) se tiene que $\overrightarrow{AX} \in U$.

b) Sea $\vec{u}$ un vector arbitrario de U, existe un vector fijo con origen en $A / \vec{u} \in \{AX, x \in E_1\}$.

"⇐"

Demostraremos que (E_1, U, j_1) es un espacio Afín asociado a U subespacio vectorial. Se cumple:

i) Sea B un punto arbitrario de E_1 y $\vec{u}, \vec{v} \in$ U. Se verifica

$$D = (B + \vec{u}) + \vec{v} \Leftrightarrow \begin{cases} C = B + \vec{u} \\ D = C + \vec{v} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{u} = \left[\overrightarrow{BC}\right] \\ \vec{v} = \left[\overrightarrow{CD}\right] \end{cases}$$

Como $\vec{u} + \vec{v} = \left[\overrightarrow{BC}\right] + \left[\overrightarrow{CD}\right] = \overrightarrow{BD} \in U \Rightarrow D = B + (\vec{u} + \vec{v})$.

Luego $(B + \vec{u}) + \vec{v} = B + (\vec{u} + \vec{v})$.

ii) $B + \vec{O} = B$

iii) B y C dos puntos arbitrarios de E_1, como $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC} \in U \Rightarrow \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB} \in U$ ya que U es un subespacio vectorial, luego $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD}$ y por tanto $C = B + \overrightarrow{AD}$.

OBS La recta es un subespacio afín de dimensión 1 y el plano es un subespacio afín de dimensión 2.

2. SISTEMAS DE REFERENCIA EN EL PLANO Y EN EL ESPACIO.

2.1. Sistemas de referencia en el plano.

Vamos a establecer una biyección $j_o : A_2 \to V_2$ y otra $b : V_2 \to \mathbb{R}_2$, de la siguiente manera:

PROP Sea O un punto fijo de A_2. Definimos una correspondencia

$$\begin{aligned} j_o : A_2 &\to V_2 \\ P &\to \left[\dot{OP}\right] \end{aligned}$$

con $\overrightarrow{OP}$ el vector posición del punto P. Entonces j_o es una biyección.

Dem.

- j_o es una aplicación ya que cada punto P del plano le corresponde un único vector $\left[\overrightarrow{OP}\right]$ por ser A_2 afín.

- j_o es inyectiva, ya que $j_o(P) = j_o(Q) \Rightarrow P = Q$.

Como $j_o(P) = \left[\overrightarrow{OP}\right]$ y $j_o(Q) = \left[\overrightarrow{OQ}\right]$.

Si $\varphi_o(P) = \varphi_o(Q) \Rightarrow [\overrightarrow{OP}] = [\overrightarrow{OQ}] \Rightarrow \overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OQ}$ por lo tanto por ser A_2 afín $O + \overrightarrow{OP} = O + \overrightarrow{OQ} \Rightarrow P = Q$.

- φ_o es suprayectiva ya que por el axioma iii) de espacio afín, dado un punto O y un vector $\vec{u}$, existe un único punto $P \in A_2$ /

$$O + \vec{v} = P \Rightarrow \vec{v} = [\overrightarrow{OP}]$$

PROP Sea $B = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2\}$ una base de V_2, entonces $\forall \vec{x} \in V_2 \Rightarrow \vec{x} = x_1\vec{u}_1 + x_2\vec{u}_2$ con x_1, $x_2 \in \mathbb{R}$.

Definimos la correspondencia b: $V_2 \to \mathbb{R}^2$ del siguiente modo $b(\vec{x}) = (x_1, x_2)$. Entonces b es una biyección.

Dem.

- b es una aplicación ya que $B = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2\}$ es una base por lo tanto $\vec{x} = x_1u_1 + x_2u_2$ se puede expresar de forma única.

- b es inyectiva ya que si $b(\vec{x}) = b(\vec{y}) \Rightarrow \vec{x} = \vec{y}$.

Si $b(\vec{x}) = b(\vec{y}) = (x_1, x_2) \Rightarrow \vec{x} = x_1\vec{u}_1 + x_2\vec{u}_2 = \vec{y}$

- b es sobreyectiva ya que $\forall (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ podemos considerar el vector $\vec{x} = x_1\vec{u}_1 + x_2\vec{u}_2$ y entonces $b(\vec{x}) = (x_1, x_2)$.

Luego b es una biyección.

DEF Sea A_2 un plano afín y R = (O, U_1, U_2) una terna de puntos. Se dice que esta terna es una sistema de referencia afín cuando los vectores $\overline{OU_1}$ y $\overline{OU_2}$ asociados forma una base de V_2.

El punto O se llama “origen del sistema de referencia”, el punto U_1 primer punto unidad y el punto U_2 segundo punto de unidad.

Si llamamos $\overrightarrow{OU_1} = \vec{u}_1$ y $\overrightarrow{OU_2} = \vec{u}_2$, el sistema de referencia se escribe $R = (O, \vec{u}_1, \vec{u}_2)$.

PROP Sea A_2 un plano afín, $O \in A_2$ y $B = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2\}$ sea una base de V_2. Entonces existe un único conjunto de puntos $\{O, U_1, U_2\}$ tal que $R = \{O, U_1, U_2\}$ es un sistema de referencia del plano afín y $\overrightarrow{OU_1} = \vec{u}_1$ y $\overrightarrow{OU_2} = \vec{u}_2$.

Dem.

Dada la base $B = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2\}$ y el punto O, por el axioma

i) $\exists \quad U_1 \ y \, U_2 \quad / \quad O + \vec{u}_1 = U_1 \Rightarrow \vec{u}_1 = \overline{OU_1}$
$\qquad O + \vec{u}_2 = U_2 \Rightarrow \vec{u}_2 = \overline{OU_2}$

Entonces la terna $R = \{O, U_1, U_2\}$ cumple el enunciado.

2.1.1. Coordenadas de un punto en el plano afín.

Dado $R = \{O, \vec{u}_1, \vec{u}_2\}$ un sistema de referencia afín y X un punto del plano afín. Se verifica:

1. Por la biyección $\varphi_o : A_2 \to V_2$ vista en una proposición anterior se tiene que $\varphi_o(x) = [\overrightarrow{OX}] = \vec{x}$.

2. Por la biyección b: $V_2 \to \mathbb{R}^2$ vista en otra proposición

$$b(\vec{x}) = b(x_1\vec{u}_1 + x_2\vec{u}_2) = (x_1, x_2)$$

Entonces la composición de φ_o y b, f= $b_o \circ \varphi_o$ queda

$$\begin{tikzcd}
& V_2 \arrow[dr, "b"] & \\
A_2 \arrow[ur, "\varphi"] \arrow[rr, "f"'] & & \mathbb{R}^2
\end{tikzcd}$$

Si $x \in A_2$

$$f(x) = (b \circ \varphi_o)(x) = b(\varphi_o(x)) = b(\vec{x}) = (x_1, x_2)$$

DEF Llamaremos coordenadas cartesianas del punto X respecto del sistema de referencia $R = \{O, \vec{u}_1, \vec{u}_2\}$ al vector numérico $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$. Es decir, a las coordenadas del vector posición $\vec{x}$.

Como consecuencia de ser f una biyección, las coordenadas del punto son únicas, pero dependen del sistema de referencia elegido.

2.1.2. Cambio de sistema de referencia afín.

Sea $R = \{0, \vec{u}_1, \vec{u}_2\}$ y $R' = \{0', \vec{v}_1, \vec{v}_2\}$ dos sistemas de referencia afín en el plano A_2 y X un punto cualquier de dicho plano.

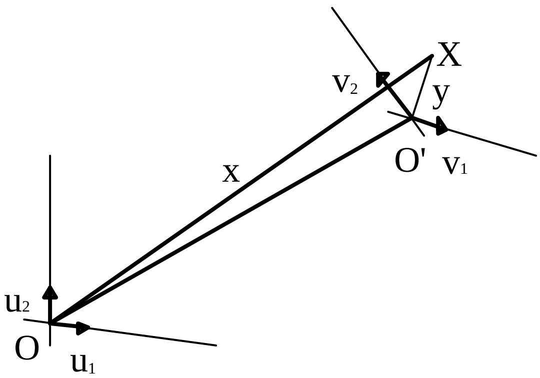
Sean (x_1, x_2) las coordenadas de X respecto de R

Sean (y_1, y_2) las coordenadas de X respecto de R´

El cambio del sistema de referencia consiste en hallar las coordenadas (x_1, x_2) en función de las (y_1, y_2) y recíprocamente.

Vamos a hallar las coordenadas del punto X en R´ conocidas sus coordenadas en la referencia R. Para ello tenemos que conocer las coordenadas de los elementos de la referencia R en función de R´. Sean

$$\begin{aligned} \vec{O´O} &= a_1\vec{v}_1 + a_2\vec{v}_2 \\ \vec{u}_1 &= a_{11}\vec{v}_1 + a_{12}\vec{v}_2 \\ u_2 &= a_{21}\vec{v}_1 + a_{22}\vec{v}_2 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \vec{x} &= \overrightarrow{OX} = x_1\vec{u}_1 + x_2\vec{u}_2 \\ \vec{y} &= \overrightarrow{O´X} = y_1\vec{v}_1 + y_2\vec{v}_2 \end{aligned}$$



Por la figura anterior se tiene que $\vec{y} = \overrightarrow{O´O} + \vec{x}$

$$\vec{y} = \overrightarrow{O´O} + \vec{x} = (a_1\vec{v}_1 + a_2\vec{v}_2) + (x_1\vec{u}_1 + x_2\vec{u}_2) = (a_1\vec{v}_1 + a_2\vec{v}_2) + [x_1(a_{11}\vec{v}_1 + a_{12}\vec{v}_2) + x_2(a_{21}\vec{v}_1 + a_{22}\vec{v}_2)] =$$

$$= a_1\vec{v}_1 + a_2\vec{v}_2 + x_1a_{11}\vec{v}_1 + x_1a_{11}\vec{v}_2 + x_2a_{21}\vec{v}_1 + x_2a_{22}\vec{v}_2 =$$

$$= (a_1 + a_{11}x_1 + a_{21}x_2)\vec{v}_1 + (a_2 + a_{12}x_1 + a_{22}x_2)\vec{v}_2$$

como $\vec{y} = y_1\vec{v}_1 + y_2\vec{v}_2$ y $\{v_1, v_2\}$ es una base, tenemos

$$\left.\begin{aligned} y_1 &= a_1 + a_{11}x_1 + a_{21}x_2 \\ y_2 &= a_2 + a_{12}x_1 + a_{22}x_2 \end{aligned}\right\}$$ que son las ecuaciones del cambio de sistema de referencia de R a R´.

Vamos a expresar estas relaciones en forma matricial, para ello añadimos las igualdades 1 = 1.

$$(1, y_1, y_2) = (1, x_1, x_2) \bullet \begin{pmatrix} 1 & a_1 & a_2 \\ 0 & a_{11} & a_{12} \\ 0 & a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$ y tenemos y = X · A

Además $|A| \neq 0$ ya que $\begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_2 \\ 0 & a_{11} & a_{12} \\ 0 & a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0$ ya que $\vec{u}_1$ y $\vec{u}_2$ son L. I.

Por lo tanto $\exists A^{-1}$.

Multiplicando la ecuación Y = X · A por A^{-1}

Y · A^{-1} = X que son las ecuaciones inversas de cambio de base.

2.2. Sistemas de Referencia en el Espacio.

Todas las propiedades demostradas en el plano son validas para el espacio, cambiando A_2 por A_3, V_2 por V_3 y $\mathbb{R}^2$ por $\mathbb{R}^3$. Por lo tanto la definición de sistema de referencia será:

DEF Sea A_3 el espacio afín y $R = \{0, U_1, U_2, U_3\}$ una cuaterna de puntos. Se dice que es un sistema de referencia afín tridimensional, cuando los vectores asociados $\vec{OU}, \vec{OU}_2$ y $\vec{OU}_3$ forman una base de V_3.

Si llamamos $\vec{u}_1 = \overrightarrow{OU_1}$; $\vec{u}_2 = \overrightarrow{OU_2}$ y $\vec{u}_3 = \overrightarrow{OU_3}$ podemos escribir $R = \{O, \vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}$.

2.2.1 Coordenadas de un punto en el espacio.

De igual forma que en el plano tenemos el siguiente diagrama

Donde $\varphi_o(x) = [\overrightarrow{OX}] = \vec{x}$
$b(\vec{x}) = b(x_1\vec{u}_1 + x_2\vec{u}_2 + x_3\vec{u}_3) = (x_1, x_2, x_3)$

$$\begin{array}{ccc} & V_3 & \\ {\scriptstyle\varphi_0}\nearrow & & \searrow{\scriptstyle b} \\ A_3 & \xrightarrow{\quad f \quad} & \mathbb{R}^3 \end{array}$$

Luego

$$f(x) = b \circ j_o(x) = b[j_o(x)] = b(\vec{x}) = (x_1, x_2, x_3)$$

Donde por ser f aplicación, las coordenadas son únicas, pero dependen del sistema de referencia elegido.

2.2.2. Cambio de Sistema de Referencia en el Espacio.

Sean $R = \{0, \vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}$ y $R' = \{0', \vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$ dos sistemas de referencia en el espacio afín A_3 y X un punto cualquiera de dicho espacio cuyas coordenadas respecto a R son (x_1, x_2, x_3) y con respecto a R´ sean (y_1, y_2, y_3).

Para obtener las ecuaciones del cambio de sistema de referencia es necesario conocer las coordenadas del punto O respecto a R´ y los de $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3$ respecto de $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$. Sean

$$\begin{aligned}
&\overrightarrow{O'O} = (a_1, a_2, a_3) \\
&\vec{u}_1 = a_{11}\vec{v}_1 + a_{12}\vec{v}_2 + a_{13}\vec{v}_3 \\
&\vec{u}_2 = a_{21}\vec{v}_1 + a_{22}\vec{v}_2 + a_{23}\vec{v}_3 \\
&\vec{u}_3 = a_{31}\vec{v}_1 + a_{32}\vec{v}_2 + a_{33}\vec{v}_3
\end{aligned}$$

Se tiene $\overrightarrow{O'X} = \overrightarrow{O'O} + \overrightarrow{OX} = (a_1\vec{v}_1 + a_2\vec{v}_2 + a_3\vec{v}_3) + (x_1\vec{u}_1 + x_2\vec{u}_2 + x_3\vec{u}_3) =$

$$= (a_1\vec{v}_1 + a_2\vec{v}_2 + a_3\vec{v}_3) + [x_1(a_{11}\vec{v}_1 + a_{12}\vec{v}_2 + a_{13}\vec{v}_3) + x_2(a_{21}\vec{v}_1 + a_{22}\vec{v}_2 + a_{23}\vec{v}_3) + x_3(a_{31}\vec{v}_1 + a_{32}\vec{v}_2 + a_{33}\vec{v}_3)] =$$

$$= a_1\vec{v}_1 + a_2\vec{v}_2 + a_3\vec{v}_3 + a_{11}x_1\vec{v}_1 + a_{12}x_1\vec{v}_2 + a_{13}x_1\vec{v}_3 + a_{21}x_2\vec{v}_1 + a_{22}x_2\vec{v}_2 + a_{23}x_2\vec{v}_3 + a_{31}x_3\vec{v}_1 +$$
$$+ a_{32}x_3\vec{v}_2 + a_{33}x_3\vec{v}_3 =$$

$$= (a_1 + a_{11}x_1 + a_{21}x_2 + a_{31}x_3)\vec{v}_1 + (a_2 + a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + a_{32}x_3)\vec{v}_2 + (a_3 + a_{13}x_1 + a_{23}x_2 + a_{33}x_3)\vec{v}_3$$

Y como $\overrightarrow{O'X} = y_1\vec{v}_1 + y_2\vec{v}_2 + y_3\vec{v}_3$ y $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$ es base tenemos

$$\left.\begin{aligned}
y_1 &= a_1 + a_{11}x_1 + a_{21}x_2 + a_{31}x_3 \\
y_2 &= a_2 + a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + a_{32}x_3 \\
y_3 &= a_3 + a_{13}x_1 + a_{23}x_2 + a_{33}x_3
\end{aligned}\right\}$$ Ecuaciones de cambio de sistema de referencia de R a R´.

En forma matricial se escriben

$$(1 y_1 y_2 y_3) = (1 x_1 x_2 x_3)\begin{pmatrix} 1 & a_1 & a_2 & a_3 \\ 0 & a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ 0 & a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \text{ o sea } \quad Y = X \cdot A$$

Y como A es regular por ser $|A| \neq 0$ ya que las filas, después de eliminar la 1ª columna y 1ª fila son las coordenadas de $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3$ que forman base.

Tenemos que X = Y A^{-1} que son las ecuaciones de R´ a R.

3. ECUACIONES DE LA RECTA EN EL PLANO.

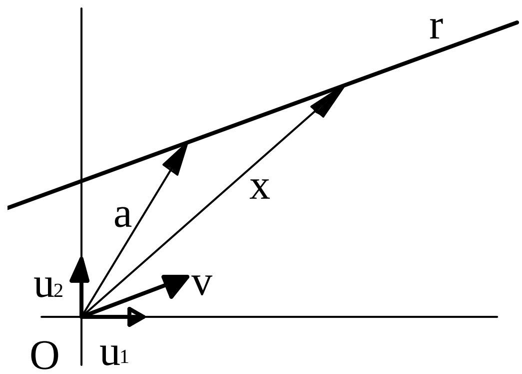
Sea $R = \{O, \vec{u}_1, \vec{u}_2\}$ un sistema de referencia en A_2.

Una recta r es un subespacio afín de A_2 de dimensión 1 por lo tanto $r \subset A_2$.

Si consideramos un punto $A \in A_2$ y un subespacio vectorial de V_2 engendrado por un vector v, que denotaremos por $\langle \vec{v} \rangle$

$$r = \{X \in A_2 \,/\, \vec{AX} \in \langle \vec{v} \rangle\}$$

3.1. Ecuación Vectorial de la Recta.



Si $x \in r \Rightarrow \vec{AX} \in \langle \vec{v} \rangle \Rightarrow \vec{AX} = t \cdot \vec{v}$ con $t \in \mathbb{R}$.

Si $\vec{a}$ y $\vec{x}$ son vectores posición de los puntos A y X respectivamente, se tiene que

$$\overrightarrow{OX} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AX}$$

$$\vec{x} = \vec{a} + t\vec{v} \quad \text{con} \quad t \in \mathbb{R}$$

Esta igualdad se llama ecuación vectorial de la recta r.

Se observa que dando valores al parámetro t, en la ecuación vectorial de la recta se obtiene un conjunto de vectores de posición de puntos que pertenecen a la recta r. Al vector $\vec{v}$ se le llama vector director de la recta.

3.2. Ecuaciones paramétricas de la recta.

Si $(x, y), (x_1, y_1)$ y (v_1, v_2) son las coordenadas de los vectores de posición $\vec{x}, \vec{a}, \vec{v}$ respectivamente en R y si tenemos en cuenta el isomorfismo existente entre V_2 y $\mathbb{R}^2$
(b: $V_2 \to \mathbb{R}^2$), entonces la ecuación vectorial de r
$\vec{x} \to (x_1, x_2)$

$$\vec{x} = \vec{a} + t\vec{v}$$

se traduce por

$$(x, y) = (x_1, y_1) + t(v_1, v_2) = (x_1, y_1) + (tv_1, tv_2) = (x_1 + tv_1, x_2 + tv_2)$$

de donde

$$\left.\begin{aligned} x &= x_1 + tv_1 \\ y &= x_2 + tv_2 \end{aligned}\right\} \text{ con } t \in \mathbb{R}$$

que reciben el nombre de ecuaciones paramétricas de la recta. Dichas ecuaciones están caracterizadas por el punto $A = (x_1, x_2)$ y el vector director $\vec{v}(v_1, v_2)$.

Para cada valor del parámetro t se obtiene un punto de la recta.

3.3. Ecuación de la Recta en Forma Continua.

- Si $v_1 \neq 0$ y $v_2 \neq 0$, si despejamos en las ecuaciones paramétricas resulta

$$\left.\begin{aligned} \frac{x - x_1}{v_1} &= t \\ \frac{y - y_1}{v_2} &= t \end{aligned}\right\} \qquad \frac{x - x_1}{v_1} = \frac{y - y_1}{v_2} \qquad v_1 \neq 0 \text{ y } v_2 \neq 0$$

Dicha igualdad recibe el nombre de ecuación de la recta en forma continua que esta determinada por $A(x_1, x_1)$ y $\vec{v}(v_1, v_2)$.

- Si $v_1 = 0$ las ecuaciones paramétricas son

$$\left.\begin{aligned} x &= x_1 \\ y &= y_1 + tv_2 \end{aligned}\right\} \text{ que se reduce a } x = x_1 \text{ que es una recta // al eje OY}$$

- Si $v_2 = 0$ las ecuaciones paramétricas son

$$\left.\begin{array}{l} x = x_1 + t v_1 \\ y = y_1 \end{array}\right\}$$ que se reduce a y = y_1 que es una recta // al eje OX

3.4. Ecuación de la Recta en Forma General.

- Si $v_1 \neq 0$ y $v_2 \neq 0$ a partir de la ecuación continua

$$\frac{x - x_1}{v_1} = \frac{y - y_1}{v_2}$$

se obtiene

$$\begin{aligned} v_2(x - x_1) &= v_1(y - y_1) \\ v_2 x - v_2 x_1 &= v_1 y - v_1 y_1 \\ v_2 x - v_1 y + v_1 y_1 - v_2 x_1 &= 0 \end{aligned}$$

Si hacemos A = v_2; B = -v_1 y C = $v_1 y_1$ – $v_2 x_2$ resulta

$$Ax + By + C = 0$$

Que recibe el nombre de ecuación general o implícita de la recta.

- Si v_1 = 0 teníamos que x = x_1, es decir, x – x_1 = 0.
- Si v_2 = 0 teníamos que y = y_1, es decir, y – y_1 = 0.

Luego, en los tres casos te obtiene una ecuación de la forma Ax + By + C = 0.

Análisis de la ecuación.

Recíprocamente si Ax + By + C = 0 es la ecuación de una recta en el espacio afín.

- El vector director de la recta será $\vec{v} = (-B, A)$ ya que A = v_2 y B = -v_1.
- Un punto base de la recta será cualquier punto perteneciente a la recta, por tanto sus coordenadas (x_1, y_1) verificarán la ecuación de la misma.

3.5. Ecuación Explícita de la Recta.

Si despejamos y en la ecuación general (siendo B ≠ 0)

$$By = -Ax - C$$

$$y = -\frac{Ax}{B} - \frac{C}{B} \qquad \text{haciendo } m = -\frac{A}{B} \text{ y } n = -\frac{C}{B}$$

tenemos y = mx + n ecuación explícita

donde m es la pendiente de la recta y n es la ordenada en el origen.

$$m = -\frac{A}{B} = \frac{v_2}{v_1} = \operatorname{tg}\alpha \text{ siendo } \alpha \text{ el ángulo que forma r con OX.}$$

3.6. Ecuación de la Recta que pasa por dos Puntos distintos.

Uno de los axiomas de la geometría elemental dice que una recta queda determinada por dos puntos A y B.

Sean $A(x_1, y_1)$ y $B(x_2, y_2)$ dos puntos distintos. Sean $\vec{a}$ y $\vec{b}$ los vectores posición de los puntos A y B respectivamente.

Por lo tanto $\overrightarrow{AB} = \vec{b} - \vec{a}$ es un vector direccional de la recta r cuyas componentes serán $(x_2 - x_1, y_2 - y_1) = (v_1, v_2)$ y considerando $A(x_1, y_1)$ podemos utilizar cualquier tipo de ecuación anterior por ejemplo utilizando la continua tendremos

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}$$

4. ECUACIONES DE LA RECTA Y DEL PLANO EN EL ESPACIO.

4.1. Ecuaciones de la Recta en el Espacio.

DEF Llamamos recta en el espacio a cualquier variedad lineal asociada a un subespacio vectorial de dimensión uno

$$r = \left\{X \in A_3 \,/\, \overrightarrow{AX} \in < \vec{v} > \right\}$$

donde A es un punto de A_3 y $\langle \vec{v} \rangle$ es un subespacio de dimensión 1 engendrado por el vector $\vec{v}$.

Sea $R = \{O, \vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}$ un sistema de referencia afín.

Para que un punto X pertenezca a la recta r debe satisfacer $\overrightarrow{AX} \in \langle \vec{v} \rangle \Rightarrow \overrightarrow{AX} = t\vec{v}$.

O sea $\overrightarrow{OX} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AX}$

Es decir, $\overrightarrow{OX} = \overrightarrow{OA} + t\vec{v}$

Si denominamos $\vec{x}$ al vector posición de X y $\vec{a}$ al de A tenemos

$$\vec{x} = \vec{a} + t\vec{v}$$

que es la ecuación vectorial de la recta.

Expresando la relación anterior, utilizando las componentes de los vectores (debido al isomorfismo existente entre V_3 y $\mathbb{R}^3$).

Sea (x, y, z) y (x_1, x_2, x_3) las coordenadas con respecto a R de X y A y (v_1, v_2, v_3) los del vector $\vec{v}$.

Entonces tenemos

$$(x, y, z) = (x_1, x_2, x_3) + t(v_1, v_2, v_3)$$

o sea

$$\left.\begin{array}{l} x = x_1 + tv_1 \\ y = x_2 + tv_2 \\ z = x_3 + tv_3 \end{array}\right\}$$ que son las <u>ecuaciones paramétricas de la recta.</u>

Para eliminar el parámetro t en el sistema anterior tenemos

$$rang\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = rang\begin{pmatrix} v_1 & x - x_1 \\ v_2 & y - x_2 \\ v_3 & z - x_3 \end{pmatrix} \qquad (1)$$

pero como $\vec{v} \neq \vec{O}$ por ser el vector director de una recta

$$rang\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = 1$$

por lo tanto, para que se cumpla (1) debe ser, suponiendo $v_1 \neq 0$

$$\left.\begin{array}{l} \begin{vmatrix} v_1 & x - x_1 \\ v_2 & y - x_2 \end{vmatrix} = 0 \\ \begin{vmatrix} v_1 & x - x_1 \\ v_3 & z - x_3 \end{vmatrix} = 0 \end{array}\right\} \begin{cases} v_1(y - x_2) = v_2(x - x_1) \\ v_1(z - x_3) = v_3(x - x_1) \end{cases} \qquad (2)$$

Igualdades que es costumbre escribir en la forma

$$\frac{x - x_1}{v_1} = \frac{y - x_2}{v_2} = \frac{z - x_3}{v_3} \qquad Si \quad v_1 \neq 0,\ v_2 \neq 0\ y\ v_3 \neq 0$$

que recibe el nombre de <u>ecuación continua de la recta.</u>

Las ecuaciones de la expresión (2) también pueden escribirse como

$$\left.\begin{array}{l} v_2 x - v_1 y + v_1 x_2 - v_2 x_1 = 0 \\ v_3 x - v_1 z + v_1 x_3 - v_3 x_1 = 0 \end{array}\right\}$$

En general, lo podemos escribir de la forma:

$$\left.\begin{array}{l} Ax+By+Cz+D=0 \\ A'x+B'y+C'z+D'=0 \end{array}\right\}$$

que reciben el nombre de ecuaciones cartesianas o implícitas de la recta.

Recíprocamente, dado un sistema de dos ecuaciones lineales con 3 incógnitas

$$\left.\begin{array}{l} a_1x+a_2y+a_3z+a_4=0 \\ b_1x+b_2y+b_3z+b_4=0 \end{array}\right\}$$

la condición necesaria y suficiente para que sean ecuaciones cartesianas de una recta es que

$$rang\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{pmatrix}=2$$

ya que entonces el sistema tiene por solución una variedad lineal de dimensión 1.

4.2. Ecuaciones del plano.

DEF Un plano en A_3 es cualquier variedad asociada a un subespacio de dimensión 2.

Sean $\langle \vec{v},\vec{w}\rangle$ el subespacio de dimensión 2 engendrado por $\vec{v},\vec{w}$ y A un punto arbitrario de A_3.

$$\Pi=\left\{X\in A_3 \,/\, \dot{AX}\in\langle\vec{v},\vec{w}\rangle\right\}$$

$\vec{v},\vec{w}$ se llaman vectores directores del plano y A es el punto base.

Sea $R=\{O,\vec{u}_1,\vec{u}_2,\vec{u}_3\}$ un sistema de referencia afín.

Sea (x_1,x_2,x_3) las coordenadas de A respecto a R y $(v_1,v_2,v_3),(w_1,w_2,w_3)$ los componentes de $\vec{v},\vec{w}$.

Si $X\in\Pi\Rightarrow \dot{AX}\in\langle\vec{v},\vec{w}\rangle\Rightarrow \dot{AX}=\boldsymbol{a}\vec{v}+\boldsymbol{b}\vec{w}$

es decir $\overrightarrow{OX}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AX}$.

O sea $\overrightarrow{OX}=\overrightarrow{OA}+\boldsymbol{a}\vec{v}+\boldsymbol{b}\vec{w}$ Ecuación vectorial del plano.

Expresando esta resolución en función de las componentes vectores que en ella intervienen, tenemos

$$(x, y, z) = (x_1, x_2, x_3) + \alpha(v_1, v_2, v_3) + \beta(w_1, w_2, w_3)$$

Luego

$$\left.\begin{aligned} x &= x_1 + \alpha v_1 + \beta w_1 \\ y &= x_2 + \alpha v_2 + \beta w_2 \\ z &= x_3 + \alpha v_3 + \beta w_3 \end{aligned}\right\}$$

que son las ecuaciones paramétricas del plano $\alpha,\beta \in \mathbb{R}$

Para eliminar los parámetros α, β planteamos

$$rang\begin{pmatrix} v_1 & w_1 \\ v_2 & w_2 \\ v_3 & w_3 \end{pmatrix} = rang\begin{pmatrix} v_1 & w_1 & x - x_1 \\ v_2 & w_2 & y - x_2 \\ v_3 & w_3 & z - x_3 \end{pmatrix} \qquad (3)$$

y como v, w son base de un subespacio de dimensión 2, entonces

$$rang\begin{pmatrix} v_1 & w_1 \\ v_2 & w_2 \\ v_3 & w_3 \end{pmatrix} = 2$$

y para que se cumpla la expresión (3)

debe ser

$$\begin{vmatrix} v_1 & w_1 & x - x_1 \\ v_2 & w_2 & y - x_2 \\ v_3 & w_3 & z - x_3 \end{vmatrix} = 0$$

Desarrollando este determinante y simplificando obtenemos la ecuación que recibe el nombre de <u>ecuación cartesiana o implícita</u> del plano.

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

En el caso de que el plano venga determinado por tres puntos no alineados $A = (a_1, a_2, a_3)$ $B(b_1, b_2, b_3)$ $C(c_1, c_2, c_3)$, podemos formar los vectores $\left[\overrightarrow{AB}\right]$ y $\left[\overrightarrow{AC}\right]$ que pueden tomarse como $\vec{v}, \vec{w}$ y pueden escribirse

$$\begin{vmatrix} b_1 - a_1 & c_1 - a_1 & x - a_1 \\ b_2 - a_2 & c_2 - a_2 & y - a_2 \\ b_3 - a_3 & c_3 - a_3 & z - a_3 \end{vmatrix} = 0$$

determinante que equivale al

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a_1 & b_1 & c_1 & x_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & x_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & x_3 \end{vmatrix} = 0$$

igualdad cuyo desarrollo da lugar a una ecuación de la forma

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

5. RELACIONES AFINES.

5.1. Incidencias de Puntos, Rectas y Planos.

5.1.1. Incidencia entre Punto y Recta.

DEF Se dice que un punto P es incidente con la recta r, o bien que la recta r pasa por P, cuando el punto P pertenece a dicha recta.

TEOREMA

El punto P es incidente con la recta r si y sólo si las coordenadas de P satisfacen las ecuaciones de la recta.

Dem.

Es inmediata por la definición de incidencia.

5.1.2. Incidencia entre Punto y Plano.

DEF Se dice que un punto P es incidente en un plano Π, o bien que el plano Π pasa por el punto P, cuando el punto P pertenece a dicho plano.

TEOREMA

El punto P es incidente al plano Π si y solo si las coordenadas de P satisfacen las ecuaciones del plano Π.

Dem.

Es inmediata por la definición.

5.1.3. Incidencia entre Recta y Plano.

DEF Se dice que una recta r es incidente con el plano Π, cuando todos los puntos de la recta r son incidentes con dicho plano, es decir, cuando la recta está contenida en el plano.

TEOREMA

Sea r la recta determinada por el punto A y el vector director $\vec{u}$ y sea Π el plano determinado por el punto B y los vectores directores $\vec{v}, \vec{w}$. La recta r es incidente con el plano Π si y sólo si existe un punto P de r incidente con Π y que el vector $\vec{u}$ se exprese como combinación lineal de los vectores $\vec{v}, \vec{w}$.

Dem.

La condición es necesaria, ya que si r es incidente con Π todos los puntos de r son incidentes con Π y por tanto el vector $\vec{u}$ tiene un representante con origen en B y extremo un punto C∈Π, luego $\vec{u} = \left[\overrightarrow{BC}\right] = \boldsymbol{a}_1\vec{v} + \boldsymbol{a}_2\vec{w}$.

Recíprocamente, sea P un punto de r incidente con Π y sea

$$\vec{u} = \boldsymbol{a}_1\vec{v} + a_2\vec{w}$$

Para todo punto X ∈ r se verifica:

$$\overline{OX} = \overline{OP} + t\vec{u} = \overline{OP} + t(\boldsymbol{a}_1\vec{v} + \boldsymbol{a}_2\vec{w}) = \overline{OP} + (t\boldsymbol{a}_1)\vec{v} + (t\boldsymbol{a}_2)\vec{w}$$

Luego el punto X también es incidente en el plano Π. Y como esto sucede para todo punto X de r entonces r es incidente en el plano Π.

COROLARIO

La recta es incidente con el plano Π si y sólo si rango $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = 2$ y A∈Π.

Dem.

Inmediata por el teorema anterior ya que los vectores $\vec{u}, \vec{u}\ y\ \vec{w}$ tienen que ser linealmente dependientes.

5.2. Paralelismo entre Rectas y Planos.

5.2.1. Paralelismo entre rectas.

DEF Sean $r \equiv A + V$ y $r' \equiv B + V'$ dos rectas afines y V y V' los subespacios vectoriales asociados. Se dice que las rectas r y r' son paralelos si V = V' y son coincidentes si además A∈r' ó B∈r.

TEOREMA

Dada la recta r determinada por A y por $\vec{u}$ y la recta r' determinada por B y por $\vec{v}$. Las rectas r y r' son paralelas si y sólo si los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ son linealmente dependientes.

Dem.

La condición es necesaria ya que si las dos rectas son paralelas, los espacios vectoriales V y V’ coinciden y por lo tanto, el sistema $\{\vec{u},\vec{v}\}$ es linealmente dependiente ya que la dimensión de los subespacios asociados es uno.

Recíprocamente si $\vec{u}$ y $\vec{v}$ son linealmente dependientes se tendrá que

$$\begin{aligned}\vec{u} &= \alpha\vec{v}\\ \vec{v} &= \beta\vec{u}\end{aligned}$$

luego

$$\left.\begin{array}{l}\forall\vec{w}\in V \Rightarrow \vec{w}=t\vec{u}=(t\alpha)\vec{v} \Rightarrow \vec{w}\in V' \Rightarrow V\subset V'\\ \forall\vec{w}\in V' \Rightarrow \vec{w}=s\vec{v}=(s\beta)\vec{u} \Rightarrow \vec{w}\in V \Rightarrow V'\subset V\end{array}\right\}\Rightarrow V=V'$$

COROLARIO

Dos rectas r y r’ son paralelas si y sólo si $rang(\vec{u},\vec{v})=1$. Además, serán coincidentes si $rango\left(\overrightarrow{AB},\vec{u},\vec{v}\right)=1$.

Dem.

Es consecuencia inmediata del teorema anterior ya que los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ son linealmente dependientes.

5.2.2. Paralelismo entre Planos.

DEF Sean $\Pi = A+V$ y $\Pi' = B+V'$, dos planos afines y V y V’ los subespacios vectoriales asociados. Se dice que los planos Π y Π' son paralelos si V = V’ y son coincidentes si además $A\in\Pi'$ ó $B\in\Pi$.

TEOREMA

Sean $(A,\vec{u},\vec{v})$ y $\left(B,\vec{a},\vec{b}\right)$ los determinantes lineales de los planos Π y Π' respectivamente. Los planos Π y Π' son paralelos si y sólo si $rango\left(\vec{u},\vec{v},\vec{a},\vec{b}\right)=2$.

Dem.

En efecto, si los planos son paralelos el sistema $\{\vec{u},\vec{v}\}$ depende linealmente de $\left\{\vec{a},\vec{b}\right\}$ y recíprocamente, ya que V = V’ y tienen dimensión 2.

Recíprocamente si el rango de los cuatro vectores es dos, quiere decir que hay dos vectores que dependen linealmente de los otros dos. Como $\{\vec{u},\vec{v}\}$ y $\left\{\vec{a},\vec{b}\right\}$ son sistemas linealmente independientes por ser bases de espacios vectoriales de dimensión dos, el primero depende linealmente del segundo y recíprocamente, luego engendran el mismo espacio vectorial.

COROLARIO

Los planos Π y Π’ definidos por sus ecuaciones cartesianas

$$\Pi \equiv Ax + By + Cz + D = 0 \qquad \Pi_1 \equiv A'x + B'y + C'z + D' = 0$$

son paralelos si y sólo si

$$rango\begin{pmatrix} A & B & C \\ A' & B' & C' \end{pmatrix} = 1$$

<u>Dem.</u>

En efecto, las ecuaciones cartesianas de los planos Π y Π’ se obtienen desarrollando los determinantes:

$$\Pi \equiv \begin{vmatrix} u_1 & v_1 & x - x_o \\ u_2 & v_2 & y - y_o \\ u_3 & v_3 & z - z_o \end{vmatrix} = 0 \qquad \Pi' \equiv \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & x - x_1 \\ a_2 & b_2 & y - y_1 \\ a_3 & b_3 & z - z_1 \end{vmatrix} = 0$$

y los coeficientes A, B y C, A´, B´ y C´ son los adjuntos de los elementos de la tercera columna respectivamente.

Si los planos son paralelos, por el teorema anterior, los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$ dependen linealmente de $\vec{u}$ y $\vec{v}$, luego

$$\vec{a} = \boldsymbol{a}\vec{u} + \boldsymbol{b}\vec{v}$$
$$\vec{b} = t\vec{u} + s\vec{v}$$

con los que teniendo en cuenta las propiedades de los determinantes, se tendrá

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & x - x_1 \\ a_2 & b_2 & y - y_1 \\ a_3 & b_3 & z - z_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{a}u_1 + \boldsymbol{b}v_1 & tu_1 + sv_1 & x - x_1 \\ \boldsymbol{a}u_2 + \boldsymbol{b}v_2 & tu_2 + sv_2 & y - y_1 \\ \boldsymbol{a}u_3 + \boldsymbol{b}v_3 & tu_3 + sv_3 & z - z_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{a}u_1 & sv_1 & x - x_1 \\ \boldsymbol{a}u_2 & sv_2 & y - y_1 \\ \boldsymbol{a}u_3 & sv_3 & z - z_1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \boldsymbol{b}v_1 & tu_1 & x - x_1 \\ \boldsymbol{b}v_2 & tu_2 & y - y_1 \\ \boldsymbol{b}v_3 & tu_3 & z - z_1 \end{vmatrix} =$$

$$= (\boldsymbol{a}s - \boldsymbol{b}t)\begin{vmatrix} u_1 & v_1 & x - x_1 \\ u_2 & v_2 & y - y_1 \\ u_3 & v_3 & z - z_1 \end{vmatrix}$$

Igualando los coeficientes de las incógnitas, tendremos

$$A' = A(\boldsymbol{a}s - \boldsymbol{b}t)$$
$$B' = B(\boldsymbol{a}s - \boldsymbol{b}t)$$
$$C' = C(\boldsymbol{a}s - \boldsymbol{b}t)$$

esto es, los coeficientes A, B y C son proporcionales a los coeficientes A´, B´ y C´. Por tanto

$$rango\begin{pmatrix} A & B & C \\ A' & B' & C' \end{pmatrix} = 1$$

5.2.3. Paralelismo entre recta y plano.

DEF Sean r = A + V y Π = B + V' una recta y un plano afín, donde V y V' son los subespacios vectoriales asociados. Diremos que la recta y el plano son paralelos si $V \subset V_1$ y son incidentes si además $A \in \Pi$.

TEOREMA

Sean $(A,\vec{u})$ y $(B,\vec{u},\vec{w})$ los determinantes lineales de la recta r y del plano Π respectivamente. La recta r y el plano Π son paralelos si y sólo si $rang(u,v,w) = 2$.

<u>Dem.</u>

"⇒"

Si la recta y el plano son paralelos $V \subset V_1 \Rightarrow \vec{u}$ depende de $\{\vec{v},\vec{w}\}$ luego $rang(\vec{u},\vec{v},\vec{w}) = 2$.

"⇐"

Si $rango(\vec{u},\vec{v},\vec{w}) = 2$ por ser $\vec{v}$ y $\vec{w}$ L. I. el vector $\vec{u}$ depende linealmente de $\vec{v}$ y $\vec{w}$, luego $V \subset V_1$ y la recta y el plano son paralelos.

<u>5.3. Intersección entre Rectas y Planos.</u>

5.3.1. Intersección de Rectas.

DEF Sean r = A + V y r' = B + V' dos rectas afines y V y V' los subespacios vectoriales asociados. Diremos que las rectas r y r' son secantes o que se cortan en un punto, cuando las dos rectas son coincidentes con un mismo plano y no son paralelas.

TEOREMA

Sean $(A,\vec{u})$ y $(B,\vec{v})$ los determinantes lineales de las rectas r y r', respectivamente. Las rectas r y r' son secantes si y sólo si $rang\left(\overrightarrow{AB},\vec{u},\vec{v}\right) = 2$ y $rango(\vec{u},\vec{v}) = 2$.

<u>Dem.</u>

"$\Rightarrow$"

Si dos rectas r y r' son secantes, no son paralelas, luego por el corolario 2 $rang(\vec{u},\vec{v})=2$, pero además por ser incidentes con el mismo plano $rango\left(\overrightarrow{AB},\vec{u},\vec{v}\right)=2$ ya que tres vectores en el plano son linealmente dependientes.

"$\Leftarrow$"

Si $\left.\begin{array}{l} rang\left(\overrightarrow{AB},\vec{u},\vec{v}\right)=2 \\ rang(\vec{u},\vec{v})=2 \end{array}\right\} \Rightarrow$ las rectas están en el mismo plano y no son paralelas, luego son secantes.

DEF Se dice que las rectas r y r' se cruzan cuando no son incidentes con un mismo plano.

TEOREMA

Dos rectas r y r' se cruzan si y sólo si $rang\left(\overrightarrow{AB},\vec{u},\vec{v}\right)=3$.

Dem.

Inmediata a partir del teorema anterior.

5.3.2. Intersección entre Planos.

DEF Sean Π = A +V y Π' = B + V' dos planos afines y V y V' los subespacios vectoriales asociados. Diremos que los planos Π y Π' son secantes o que se cortan según una recta, cuando no son paralelos.

TEOREMA

Sean $(A,\vec{u},\vec{v})$ y $\left(B,\vec{a},\vec{b}\right)$ los determinantes lineales de los plano Π y Π' respectivamente. Los planos Π y Π' son secantes si y sólo si $rango\left(\vec{u},\vec{v},\vec{a},\vec{b}\right)=3$.

Dem.

Inmediata ya que por no ser paralelos $rang\left(\vec{u},\vec{v},\vec{a},\vec{b}\right)>2 \Rightarrow rang\left(\vec{u},\vec{v},\vec{a},\vec{b}\right)=3$.

5.3.3. Intersección entre Recta y Plano.

DEF Sean r = A + V y Π = B + V' una recta y un plano afín, donde V y V' son los subespacios vectoriales asociados. Diremos que la recta r y el plano Π son secantes o que se cortan en un punto cuando no son paralelos.

TEOREMA

Sean $(A,\vec{u})$ y $(B,\vec{v},\vec{w})$ los determinantes lineales de la recta r y del plano Π respectivamente. La recta r y el plano Π son secantes si y sólo si $rango(\vec{u},\vec{v},\vec{w})=3$.

Dem.

Consecuencia de un teorema anterior.

5.4. Posiciones Relativas de dos Rectas en el Plano.

Sean $r \equiv Ax+By+C=0$ y $r' \equiv A'x+B'y+C'=0$ dos rectas en el plano. Consideremos el sistema

$$\left.\begin{array}{l} Ax+By+C=0 \\ A'x+B'y+C'=0 \end{array}\right\}$$

Llamamos M a la matriz de coeficientes y M* a la matriz que resulta de añadir los términos independientes. Entonces

1)

$$Rang(M)=Rang(M^*)=1 \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} Sistema\ compatible \\ in\det erminado \end{array}\right\} \Rightarrow rectas \quad coincidentes$$

Además de cumple

$$\begin{vmatrix} A & B \\ A' & B' \end{vmatrix}=0 \qquad \begin{vmatrix} A & C \\ A' & C' \end{vmatrix}=0 \Rightarrow \frac{A}{A'}=\frac{B}{B'}=\frac{C}{C'}$$

2)

$$Rang(M)=Rang(M^*)=2 \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} Sistema \\ compatible \\ \det ermiando \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} Las\ rectas\ se \\ cortan\ en\ un \\ punto \end{array}\right\}$$

Además si son secantes se obtiene la siguiente relación

$$\begin{vmatrix} A & B \\ A' & B' \end{vmatrix}\neq 0 \Rightarrow \frac{A}{A'}\neq\frac{B}{B'}$$

3)

$$Rang(M)\neq Rang(M^*) \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} Sistema \\ incompatible \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} Las\ rectas\ son \\ paralelas \end{array}\right\}$$

$$\begin{matrix} RANG\ M = 1 \\ RANG\ M^* = 2 \end{matrix} \quad \text{Luego} \quad \begin{matrix} \begin{vmatrix} A & B \\ A' & B' \end{vmatrix} = 0 \\ \begin{vmatrix} A & C \\ A' & C' \end{vmatrix} \neq 0 \end{matrix}$$

Entonces obtendríamos la siguiente relación para rectas paralelas

$$\frac{A}{A'} = \frac{B}{B'} \neq \frac{C}{C'}$$

5.5. Estudio Analítico de las Posiciones Relativas entre Rectas y Planos.

Las distintas posiciones que pueden adoptar rectas y planos en el espacio se reducen analíticamente al estudio de las soluciones del sistema S formado por las ecuaciones que definen a las rectas y a los planos.

Si M es la matriz de coeficientes, M^* la matriz ampliada y g el grado de indeterminación del sistema S, con ayuda del teorema de Rouché-Fröbenious, se obtienen los siguientes resultados.

5.5.1. Posiciones Relativas de dos Planos.

1)

$$Rang(M) = Rang(M^*) = 1 \Leftrightarrow \left.\begin{matrix} \text{Sistema compatible} \\ \text{indeterminado} \\ g = 2 \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{matrix} \text{Planos} \\ \text{coincidentes} \end{matrix}\right\}$$

2)

$$Rang(M) = Rang(M^*) = 2 \Leftrightarrow \left.\begin{matrix} \text{Sistema compatible} \\ \text{indeterminado} \\ g = 1 \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{matrix} \text{Los planos se cortan} \\ \text{según una recta} \end{matrix}\right\}$$

3)

$$Rang(M) \neq Rang(M^*) \Leftrightarrow \left.\begin{matrix} \text{Sistema} \\ \text{incompatible} \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \left.\text{Planos paralelos}\right\}$$

5.5.2. Posiciones Relativas de Recta y Plano.

1)

$$Rang(M) = Rang(M^*) = 2 \Leftrightarrow \left.\begin{matrix} \text{Sistema compatible} \\ \text{indeterminado} \\ g = 1 \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{matrix} \text{Recta coincidente} \\ \text{con plano} \end{matrix}\right\}$$

2)

$$Rang(M) = Rang(M^*) = 3 \Leftrightarrow \left.\begin{array}{l} Sistema\ compatible \\ y\ determinado \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{l} La\ recta\ corta\ al \\ plano\ en\ un\ punto \end{array}\right\}$$

3)

$$Rang(M) \neq Rang(M^*) \Leftrightarrow Sistema\ incompatible\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{l} La\ recta\ es\ paralela \\ al\ plano \end{array}\right\}$$

5.5.3. Posiciones Relativas de dos Rectas.

1)

$$Rang(M) = Rang(M^*) = 2 \Leftrightarrow \left.\begin{array}{c} Sistema\ compatible \\ indeterminado \\ g = 1 \end{array}\right\} \Leftrightarrow Recta\ coincidente\}$$

2)

$$Rang(M) = 2 \neq Rang(M^*) \Leftrightarrow Sistema\ incompatible\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{l} Rectas\ paralelas \\ \quad\quad \updownarrow \\ Se\ encuentran\ en \\ el\ mismo\ plano \end{array}\right\}$$

3)

$$Rang(M) = Rang(M^*) = 3 \Leftrightarrow \left.\begin{array}{l} Sistema\ compatible \\ determinado \end{array}\right\} \Leftrightarrow Las\ rectas\ se\ cortan\ en\ un\ punto$$

4)

$$Rang(M) = 3 \neq Rang(M^*) \Leftrightarrow Sistema\ incompatible\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{l} Las\ rectas\ se \\ cruzan \end{array}\right\}$$

Bibliografía Recomendada.

Matemáticas COU. Aut. Angel Primo. Ed. SM

Matemáticas 2º BUP. Aut. Vizmanos, Primo, Anzola. Ed. SM

Matemáticas COU. Fortuny – Cienfuegos.

Geometría. Aut. Queysanne- Revuz.