TEMAS DE MATEMÁTICAS
(Oposiciones de Secundaria)

TEMA 53

RELACIONES MÉTRICAS: PERPENDICULARIDAD, DISTANCIAS, ÁNGULOS, ÁREAS, VOLÚMENES, ETC...

TEMA 53

RELACIONES MÉTRICAS: PERPENDICULARIDAD, DISTANCIAS, ÁNGULOS, ÁREAS, VOLÚMENES, ETC...

1. INTRODUCCIÓN.

Para poder desarrollar este tema, vamos a exponer inicialmente la teoría necesaria. Recordaremos el Producto Escalar, Vectorial y Mixto.

1.1. Producto Escalar.

DEF Sea V un espacio vectorial real.

Se llama producto escalar V toda aplicación: $\begin{array}{l} VxV \to R \\ (\vec{u},\vec{v}) \to \vec{u}\cdot\vec{v} \end{array}$ que verifica:

1. $\vec{u}\cdot\vec{u} > 0 \quad si \quad \vec{u} \neq \vec{0}$

2. $\vec{u}\cdot\vec{v} = \vec{v}\cdot\vec{u}$

3. $\vec{u}\cdot(\vec{v}+\vec{w}) = \vec{u}\cdot\vec{v} + \vec{u}\cdot\vec{w} \qquad \forall \vec{u},\vec{v},\vec{w} \in V$
4. $\vec{u}\cdot(\alpha\vec{v}) = \alpha(\vec{u}\cdot\vec{v}) \qquad \forall \alpha \in R$

DEF Llamaremos producto escalar de $\vec{u}\ y\ \vec{v}$ al número real $\vec{u}\cdot\vec{v}$ (la imagen del par $(\vec{u},\vec{v})$ por la aplicación).

Como consecuencia directa de las axiones se tiene:

PROP Se verifican las siguientes igualdades:

1) $(\vec{u}+\vec{v})\cdot\vec{w} = \vec{u}\cdot\vec{w} + \vec{v}\cdot\vec{w} \quad \forall \vec{u},\vec{v},\vec{w} \in V$

2) $(\alpha\vec{u})\vec{v} = \alpha(\vec{u}\vec{v}) \qquad \forall \alpha \in R$

3) $\vec{u}\cdot\vec{O} = 0$

4) $\vec{u}\cdot\vec{u} = 0 \Rightarrow \vec{u} = \vec{O}$

<u>Dem.</u>

Inmediatas a partir de los axiomas.

Abreviadamente, un producto escalar es una forma bilineal, simétrica y definida positiva en V.

1.2. Norma de un Vector.

DEF Definido un producto escalar en V, se llama norma de un vector $\vec{u}$ al número real $\|\vec{u}\| = \sqrt{\vec{u}\cdot\vec{u}}$.

(Tiene sentido pues $\vec{u}\cdot\vec{u} \geq 0 \qquad \forall u \in V$) .

TEOREMA

$\forall \vec{u},\vec{v} \in V$ se verifica $|\vec{u}\cdot\vec{v}| \leq \|\vec{u}\|\cdot\|\vec{v}\|$

Dem.

$$\|\vec{u} + \boldsymbol{a}\vec{v}\|^2 = (\vec{u} + \boldsymbol{a}\vec{v})(\vec{u} + \boldsymbol{a}\vec{v}) = \|\vec{u}\|^2 + 2\boldsymbol{a}(\vec{u}\cdot\vec{v}) + \boldsymbol{a}^2\|\vec{v}\|^2 \geq 0$$

$$\Rightarrow (\vec{u}\cdot\vec{v})^2 - \|\vec{u}\|^2\cdot\|\vec{v}\|^2 \leq 0 \Rightarrow |(\vec{u}\cdot\vec{v})| \leq \|\vec{u}\|\cdot\|\vec{v}\|$$

1.3. Ángulos.

Si $\vec{u}$ y $\vec{v}$ son no nulos se tiene

$$\frac{|\vec{u}\cdot\vec{v}|}{\|\vec{u}\|\cdot\|\vec{v}\|} \leq 1 \qquad \Leftrightarrow \qquad -1 \leq \frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{\|\vec{u}\|\cdot\|\vec{v}\|} \leq 1$$

DEF Definimos entonces el coseno del ángulo formado por dos vectores como

$$\cos(\vec{u},\vec{v}) = \frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{\|\vec{u}\|\cdot\|\vec{v}\|}$$

y de aquí

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = \|\vec{u}\|\cdot\|\vec{v}\|\cdot\cos(\vec{u},\vec{v})$$

1.4. Ortogonalidad.

En virtud de la definición anterior parece lógico definir la ortogonalidad de en función del valor de la expresión anterior

DEF Diremos que los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ son Ortogonales si $\cos(\vec{u},\vec{v}) = 0$.

PROP $\vec{u},\vec{v}$ ortogonales $\Leftrightarrow \vec{u}\cdot\vec{v} = 0$

Dem.

Inmediata.

1.5. Particularización del Producto Escalar a V_3.

Si $B=\{\vec{u},\vec{u}_2,\vec{u}_3\}$ es una base V_3, entonces

$$\begin{aligned}\vec{u} &= x_1\vec{u}_1 + x_2\vec{u}_2 + x_3\vec{u}_3\\ \vec{v} &= x_1'\vec{u}_1 + x_2'\vec{u}_2 + x_3'\vec{u}_3\end{aligned}$$

y por las propiedades de linealidad

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = (x_1\vec{u}_1 + x_2\vec{u}_2 + x_3\vec{u}_3)\cdot(x_1'\vec{u}_1 + x_2'\vec{u}_2 + x_3'\vec{u}_3) = \sum_{i,j=1}^{3}(x_i x_j')(u_i\cdot u_j)$$

El producto escalar queda conocido cuando se conoce los valores de los 9 productos escalares $\vec{u}_i\cdot\vec{u}_j$ (en realidad sólo 6 por simetría).

El producto escalar de $\vec{u}$ y $\vec{v}$ es sumamente sencillo si la base $\{\vec{u}_1,\vec{u}_2,\vec{u}_3\}$ está formada por vectores ortogonales dos a dos y unitarios (de norma 1) pues entonces

$$\vec{u}_1\vec{u}_1 = \vec{u}_2\vec{u}_2 = \vec{u}_3\vec{u}_3 = \|\vec{u}_1\|^2 = \|\vec{u}_2\|^2 = \|\vec{u}_3\| = 1$$

$$\vec{u}_1\vec{u}_2 = \vec{u}_1\vec{u}_3 = \vec{u}_2\vec{u}_3 = 0$$

y

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = x_1x_1' + x_2x_2' + x_3x_3'$$

Una base con las características anteriores se dice que es ortogonal, y en dicha base se tiene

$$\begin{aligned}\|\vec{u}\| &= \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}\\ \cos(\vec{u},\vec{v}) &= \frac{x_1x_1' + x_2x_2' + x_3x_3'}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}\cdot\sqrt{x_1'^2 + x_1'^2 + x_3'^2}}\end{aligned}$$

OBS La particularización a V_2 es análoga

1.6. Producto Vectorial de dos Vectores de V_3.

DEF Sea $B=\{\vec{u}_1,\vec{u}_2,\vec{u}_3\}$ una base ortogonal de V_3. Llamaremos Producto Vectorial de $\vec{u}=(x_1,x_2,x_3)$ y $\vec{v}=(x_1',x_2',x_3')$ al vector $\vec{u}\,x\,\vec{v} = \left(\begin{vmatrix} x_2 & x_3\\ x_2' & x_3'\end{vmatrix}, \begin{vmatrix} x_3 & x_1\\ x_3' & x_1'\end{vmatrix}, \begin{vmatrix} x_1 & x_2\\ x_1' & x_2'\end{vmatrix}\right)$.

PROP Se verifica:

1) $\|\vec{u}\,x\,\vec{v}\| = \|\vec{u}\|\cdot\|\vec{v}\|(\text{sen}(\vec{u},\vec{v}))$

2) $(\vec{u}\,x\,\vec{v})\cdot\vec{u} = 0 \qquad (\vec{u}\,x\,\vec{v})\cdot\vec{v} = 0$

3) Si $\vec{u},\vec{v}$ son linealmente independientes, entonces $\vec{u},\vec{v},\vec{u}\,x\,\vec{v}$ determinan una base de V_3, y si $\det(\vec{u},\vec{u}_2,\vec{u}_3)>0$, también es $\det(\vec{u},\vec{v},\vec{u}\,x\,\vec{v})>0$.

<u>Dem.</u>

1) $$\|\vec{u}\,x\,\vec{v}\|^2=\begin{vmatrix} x_2 & x_3\\ x_2' & x_3'\end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix} x_3 & x_1\\ x_3' & x_1'\end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix} x_1 & x_2\\ x_1' & x_2'\end{vmatrix}^2=$$

$$=(x_2x_3'-x_3x_2')^2+(x_3x_1'-x_1x_3')^2+(x_1x_2'-x_2x_1')^2=$$

$$=x_2^2x_3'+x_3^2x_2'^2+x_3^2x'^2+x_1^2x_3'^2+x_1^2x_2'^2+x_2^2x_1'^2-2x_2x_3x_2'x_3-2x_3x_1x_3'x_1'-2x_1x_2$$

Sumando y restando $x_1^2x_1'^2+x_2^2x_2'^2+x_3^2x_3'^2$ se tiene

$$(x_1^2+x_2^2+x_3^2)(x_1'^2+x_2'^2+x_3'^2)-(x_1^2x_1'^2+x_2^2x_2'^2+x_3^2x_3'^2-2x_2x_3x_2'x_3'-2x_3x_1x_3'x_1\,2x_1x_2x_2)$$

$$=(x_1^2+x_2^2+x_3^2)(x_1'^2+x_2'^2+x_3'^2)-(x_1x_1'+x_2x_2'+x_3x_3')^2=$$

$$=\|\vec{u}\|^2\cdot\|\vec{v}\|^2-(\vec{u}\cdot\vec{v})^2=\|\vec{u}\|^2\cdot\|\vec{v}\|^2\cdot\left(1-\left(\frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{\|\vec{u}\|\cdot\|\vec{v}\|}\right)^2\right)$$

$$\Rightarrow\|\vec{u}\,x\,\vec{v}\|^2=\|\vec{u}\|^2\cdot\|\vec{v}\|^2\cdot\operatorname{sen}^2(u,v)$$

2) $$(\vec{u}\,x\,\vec{v})\cdot\vec{u}=x_1\begin{vmatrix} x_2 & x_3\\ x_2' & x_3'\end{vmatrix}+x_2\begin{vmatrix} x_3 & x_1\\ x_3' & x_1'\end{vmatrix}+x_3\begin{vmatrix} x_1 & x_2\\ x_1' & x_2'\end{vmatrix}=\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3\\ x_1 & x_2 & x_3\\ x_1' & x_2' & x_3'\end{vmatrix}=0$$

$$(\vec{u}\,x\,\vec{v})\cdot\vec{v}=x_1'\begin{vmatrix} x_2 & x_3\\ x_2' & x_3'\end{vmatrix}+x_2'\begin{vmatrix} x_3 & x_1\\ x_3' & x_1'\end{vmatrix}+x_3'\begin{vmatrix} x_1 & x_2\\ x_1' & x_2'\end{vmatrix}=\begin{vmatrix} x_1' & x_2' & x_3'\\ x_1 & x_2 & x_3\\ x_1' & x_2' & x_3'\end{vmatrix}=0$$

al ser determinantes con dos filas iguales.

3) $$\det(\vec{u},\vec{v},\vec{u}\,x\,\vec{v})=\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3\\ x_1' & x_2' & x_3'\\ \begin{vmatrix} x_2 & x_3\\ x_2' & x_3'\end{vmatrix} & \begin{vmatrix} x_3 & x_1\\ x_3' & x_1'\end{vmatrix} & \begin{vmatrix} x_1 & x_2\\ x_1' & x_2'\end{vmatrix}\end{vmatrix}\cdot\det(\vec{u},\vec{u}_2,\vec{u}_3)=$$

$$= \left(\begin{vmatrix} x_2 & x_3 \\ x_2' & x_3' \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} x_3 & x_1 \\ x_3' & x_1' \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ x_1' & x_2' \end{vmatrix}^2 \right) \det(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3) \Rightarrow$$

signo $\det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{u} \, x \, \vec{v}) =$ signo $\det(\vec{u}, \vec{u}_2, \vec{u}_3)$

Las dos primeras propiedades probadas tienen el siguiente significado:

1) $\|\vec{u} \, x \, \vec{v}\| = \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \cdot |\text{sen}\, \alpha|$, que es el área del paralelogramo determinando por 2 representaciones con origen común de $\vec{u}, \vec{v}$.

2) El producto vectorial de $\vec{u}$ y $\vec{v}$ es un vector ortogonal a la vez a $\vec{u}$ y $\vec{v}$.

1.7. Producto Mixto.

DEF Dados los vectores $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$, definimos su producto mixto como el número real $[\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}] = \vec{x} \cdot (\vec{y} \, x \, \vec{z})$

Si expresamos los tres vectores mediante sus coordenadas en una determinada base, podemos escribir su producto mixto como:

$$\left. \begin{array}{l} \vec{x} = (x_1, x_2, x_3) \\ \vec{y} = (y, y_2, y_3) \\ \vec{z} = (z, z_2, z_3) \end{array} \right\} \Rightarrow \vec{x} \cdot (\vec{y} \, x \, \vec{z}) = x_1 \begin{vmatrix} y_2 & y_3 \\ z_2 & z_3 \end{vmatrix} + x_2 \begin{vmatrix} y_3 & y_1 \\ z_3 & z_1 \end{vmatrix} + x_3 \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ z_1 & z_2 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix} = \det(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$$

Interpretación geométrica.

El producto mixto es

$$\vec{x} \cdot (\vec{y} \, x \, \vec{z}) = \|\vec{x}\| \cdot \|\vec{y} \, x \, \vec{z}\| \cdot \cos(\vec{x}, \vec{y} \, x \, \vec{z}) = \|\vec{y} \, x \, \vec{z}\| \cdot \|\vec{x}\| \cdot \cos(\vec{x}, \vec{y} \, x \, \vec{z})$$

donde

$\|\vec{y} \, x \, \vec{z}\|$ Es el área del paralelogramo definido por ambos vectores

y

$\|\vec{x}\| \cdot \cos(\vec{x}, \vec{y} \, x \, \vec{z})$ Es la proyección de x sobre la dirección normal al plano determinado por los otros dos vectores.

Luego $|[\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}]| =$ Volumen del paralelepípedo de aristas concurrentes $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$

2. ÁNGULOS.

2.1. Ángulo de dos Rectas.

El producto escalar definido en V_3 (o V_2) permite el estudio del ángulo que forman dos rectas en el espacio afín (o el plano afín).

DEF Sean r y s dos rectas de vectores directores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ respectivamente. Llamamos ángulo de r y s al menor de los ángulos que determinan los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$.

La medida del ángulo de r y s es el número real que verifica:

$$\cos\varphi = \frac{|\vec{u}\cdot\vec{v}|}{\|\vec{u}\|\cdot\|\vec{v}\|}$$
$$0 \le \varphi \le \pi/2$$

OBS Definimos así el ángulo de dos rectas aún en el caso de que éstas se crucen.

Si el sistema de referencia es ortogonal y las dos rectas las expresamos como

$$r \equiv \frac{x-x_1}{a} = \frac{y-y_1}{b} = \frac{z-z_1}{c} \qquad s \equiv \frac{x-x_2}{a'} = \frac{y-y_2}{b'} = \frac{z-z_2}{c'}$$

entonces

$$\cos(r,s) = \frac{|aa'+bb'+cc'|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}\cdot\sqrt{a'^2+b'^2+c'^2}}$$

2.2. Ángulos de dos Planos.

Sean π y π' dos planos, y $\vec{n}, \vec{n}'$ sus vectores normales. Sabemos que el ángulo que forman los dos planos es igual al ángulo que forman dos rectas normales de direcciones $\vec{n}$ y $\vec{n}'$.

DEF Sean π y π' planos de vectores normales $\vec{n}$ y $\vec{n}'$ respectivamente. Llamamos ángulo de π y π' al menor ángulo que forman $\vec{n}$ y $\vec{n}'$.

Su medida será el número real φ que verifica las dos condiciones siguientes:

1. $\cos\varphi = \dfrac{|\vec{n}\cdot\vec{n}'|}{\|\vec{n}\|\cdot\|\vec{n}'\|}$

2. $0 \le \varphi \le \pi/2$

Si los planos vienen dados por sus ecuaciones generales, con vectores normales:

$$\pi \equiv Ax + By + Cz + D = 0 \qquad \vec{n} = (A, B, C)$$

$$\pi' \equiv A'x + B'y + C'z + D = 0 \qquad \vec{n}' = (A', B', C')$$

luego $\cos(\pi, \pi') = \dfrac{AA' + BB' + CC'}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} \cdot \sqrt{A'^2 + B'^2 + C'^2}}$

2.3. Ángulo de Recta y Plano.

Sea π un plano y r una recta (no perpendicular). Sabemos que el ángulo de π y r es el formado por r y su proyección ortogonal, r´, sobre π. Pero dicho ángulo es el complementario del formado por $\vec{u}$, vector director de la recta, y $\vec{n}$, vector normal al plano.

Así pues, definiremos $\alpha = \angle(r, \pi)$ como el menor de los ángulos que forman $\vec{u}$ y $\vec{n}$.

Su medida será el número real que verifica:

1. $\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \operatorname{sen} \alpha = \dfrac{|\vec{u} \cdot \vec{n}|}{\|\vec{u}\| \cdot \|\vec{n}\|}$

2. $0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}$

Si $r \equiv \dfrac{x - x_1}{a} = \dfrac{y - y_1}{b} = \dfrac{z - z_1}{c}$ $\quad y \quad \pi \equiv Ax + By + Cz + D = 0$

entre $\operatorname{sen}(r, \pi) = \operatorname{sen} \alpha = \dfrac{|Aa + Bb + Cc|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} \cdot \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$

3. PARALELISMO.

3.1. Paralelismo de Rectas.

DEF Diremos que las rectas r y s son paralelas si el ángulo que determinan verifica que Cos(r,s)=1.

PROP Las rectas r y s son paralelas $\Rightarrow$ $\vec{u}$ y $\vec{v}$ son L. D. siendo ambos vectores los vectores directores de las rectas.

Dem.

$$r, s \text{ } paralelas \Leftrightarrow \cos(r, s) = 1 \Leftrightarrow (aa' + bb' + cc')^2 = (a^2 + b^2 + c^2)(a'^2 + b'^2 + c'^2)$$

$$2aa'bb'+2aa'cc'+2bb'cc' = a^2b'^2+a^2c'^2+b^2a'^2+b^2c'^2+b^2c'^2+c^2a'^2+c^2b'^2$$

$$\Rightarrow (ab'-ba')^2 + (ac'a'c)^2 + (bc'-b'c)^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \left.\begin{array}{l} ab'-ba'=0 \\ ac'-a'c=0 \\ bc'-b'c=0 \end{array}\right\} \quad \begin{array}{c} \dfrac{a}{a'}=\dfrac{b}{b'} \\ \dfrac{a}{a'}=\dfrac{c}{c'} \\ \dfrac{b}{b'}=\dfrac{c}{c'} \end{array} \quad cqd$$

3.2. Paralelismo de Recta y Plano.

DEF Diremos que la recta r y el plano π son paralelos si el ángulo que determinan verifica que $\text{Sen}\alpha=0$.

4. PERPENDICULARIDAD.

4.1. Perpendicularidad de Rectas.

DEF Las rectas r y s son perpendiculares si $\bar{u}\cdot\bar{v}=0$

PROP Las rectas r y s son perpendiculares si $aa'+bb'+cc'=0$, siendo (a,b,c) las coordenadas que determinan el vector director de la recta r y (a’,b’,c’) las del vector director de la recta s.

Dem.

r y s son perpendiculares $\Leftrightarrow \cos \boldsymbol{j} = 0 \Leftrightarrow aa'+bb'+cc'=0$

4.2. Perpendicularidad de Recta y Plano.

PROP r y π son perpendiculares si $\vec{u}$ y $\vec{n}$ son Linealmente Dependientes.

OBS La Proposición anterior significa que $rang\begin{pmatrix} a & b & c \\ A & B & C \end{pmatrix} = 1 \Leftrightarrow \dfrac{a}{A}=\dfrac{b}{B}=\dfrac{c}{C}$

4.3. Perpendicularidad de Planos.

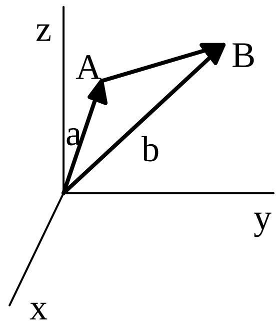
DEF Los planos π y π' son perpendiculares si verifican $\text{Cos}\varphi=0$.

PROP Los planos π y π' son perpendiculares si se verifica que AA’+BB’+CC’=0, siendo (A,B,C) y (A’,B’,C’) las coordenadas de los vectores normales a cada plano.

5. DISTANCIAS.

DEF Sea A y B dos puntos del espacio afín euclideo E_3. Se llama distancia de A a B a la norma del vector $\overrightarrow{AB}$.

$$d(A,B)=\left\|\overrightarrow{AB}\right\|$$



Si $\vec{a}$ es el vector de posición A (que nos da las coordenadas de A en la referencia) y $\vec{b}$ el vector de posición de B, se tiene:

$$d(A,B)=\left\|\vec{b}-\vec{a}\right\|$$

Así, si A(x_1, y_1, z_1) y B(x_2 · y_2 · z_2) se tendrá como expresión de la distancia entre dos puntos (si el sistema de referencia es ortonormal)

$$d(A,B)=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$$

PROP La aplicación d: E_3 x E_3 $\rightarrow$ R verifica:

1) $d(A,B)\geq 0$ y si $d(A,B)=0 \Leftrightarrow A=B$

2) $d(A,B)=d(B,A)$

3) $d(A,B)\leq d(A,C)+d(C,B)$ $\qquad\qquad \forall a,B,C\in E_3$

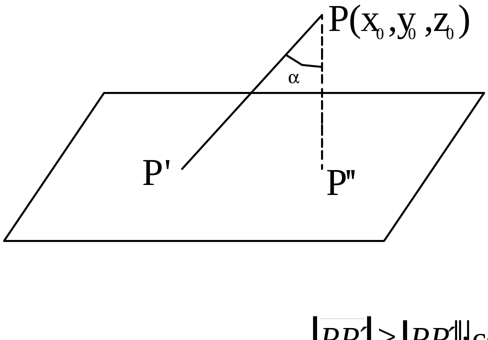
<u>Dem.</u>

Las dos primeras son inmediatas y la tercera es una consecuencia de la desigualdad de Cauchy-Swartz.

$$d(A,B)=\left\|\overrightarrow{AB}\right\|=\left\|\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CB}\right\|\leq\left\|\overrightarrow{AC}\right\|+\left\|\overrightarrow{CB}\right\|$$

Conclusión Así pues, (E_3, d) es un <u>espacio métrico.</u>

<u>5.1.Distancia de un Punto a un Plano.</u>



Sea M un plano y P un punto. Se define la distancia de P a Π como $min\{d(P,P')\}$ donde P´ ∈ Π.

Dicho mínimo se alcanza cuando P´ = P'', pie de L perpendicular trazado por P a Π, pues entonces:

$$\left|PP'\right|\geq\left|PP'\right|\cdot\left|\cos a\right|=\left\|PP''\right\| \qquad \forall P'\in\Pi$$

Si $\vec{u}$ es un vector normal al plano, se tiene que:

$$\left|\overline{PP'}\cdot\vec{n}\right| = \left\|\overline{PP'}\right\|\left\|\vec{n}\right\|\left|\cos\alpha\right| = \left\|\overline{PP''}\right\|\left\|\vec{n}\right\|$$

de donde $d(P,\Pi) = \left\|\overline{PP''}\right\| = \dfrac{\left|\overline{PP'}\cdot\vec{n}\right|}{\left\|\vec{n}\right\|}$

Así, si $P(x_o, y_o, z_o)$, $\Pi \equiv Ax + By + Cz + D = 0$ se tendrá que

$$d(P,\Pi) = \left|\frac{A(x - x_o) + B(y - y_o) + C(z - z_o)}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}\right| = \left|\frac{Ax_o + By_o + Cz_o + D}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}\right|$$

<u>5.2. Distancia entre Planos.</u>

DEF Sean π y π' dos planos. Definimos la distancia entre ellos como

$$d(\pi,\pi') = min\left\{\begin{matrix} d(A,B), A\in\pi \\ B\in\pi' \end{matrix}\right\}$$

Sólo tendrá sentido cuando π y π' sean paralelos, en cuyo caso basta calcular la distancia de un punto cualquiera de π al plano π'. Si no fuesen paralelos la intersección no sería vacía y la distancia es cero.

<u>5.3. Distancia de un Punto a una Recta.</u>

DEF Sea r una recta y P un punto. Se llama distancia de P a r a $d(P,r) = min\{d(P,P')\}$ $\{donde\ P'\in r\}$.

Esta claro que si P´ es un punto cualquiera de r y α el ángulo que determina $\overrightarrow{PP'}$ y $\vec{u}$ (vector director de r) se tendrá que $\left\|PP'\right\| \geq \left\|PP'\right\|\cdot\left|\text{sen}\,\alpha\right| = \left\|PP_o\right\|$, luego dicho mínimo se alcanza cuando P_o es el pie de la perpendicular desde P a r.

Teniendo en cuenta lo anterior, podemos expresar la distancia de un punto a una recta como sigue:

$$d(P,r) = \left\|PP_o\right\| = \frac{\left\|PP'\right\|\cdot\left\|\vec{u}\right\|\left|\text{sen}\,\alpha\right|}{\left\|\vec{u}\right\|} = \frac{\left\|\overrightarrow{PP'}x\vec{u}\right\|}{\left\|\vec{u}\right\|}$$ (recordar def. de prod. vectorial)

Así si $\begin{matrix} P(x_o, y_o, z_o) \\ P'(x_1, y_1, z_1) \end{matrix}$ y $r \equiv \dfrac{x - x_1}{a} = \dfrac{y - y_1}{b} = \dfrac{z - z_1}{c}$

$$d(P,r)=\frac{\sqrt{\begin{vmatrix} b & c \\ y_1-y_o & z_1-z_o \end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix} c & a \\ z_1-z_o & x_1-x_o \end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix} a & b \\ x_1-x_o & y_1-y_o \end{vmatrix}^2}}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

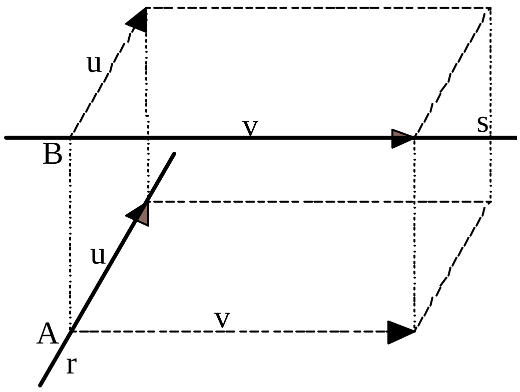
5.4.Distancia entre Rectas.

DEF Dadas dos rectas r, s definimos $d(r,s)=min\left\{\begin{matrix} d(A,B),\ A\in r \\ B\in s \end{matrix}\right\}$

Sólo tendrá interés cuando r y s sean paralelas y cuando se crucen.

En el caso de que sean paralelas se reduce a calcular la distancia de un punto cualquiera de una de ellas a la otra recta. Y esa situación ya la hemos visto.

En el caso de que se crucen, la distancia entre las rectas es también la distancia entre el plano paralelo a s que contiene r y el plano paralelo a r que contiene s.



$$d(r,s)=d(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})=\frac{\overrightarrow{AB}\cdot\vec{n}}{\|\vec{n}\|}$$

donde $\vec{n}$ es un vector normal a ambos planos y por tanto normal a $\vec{u}$ y a $\vec{v}$. Podemos tomar $\vec{n}=\vec{u}\,x\,\vec{v}$.

Así $$d(r,s)=\frac{\left|\overrightarrow{AB}\cdot(\vec{u}\,x\,\vec{v})\right|}{\|\vec{u}\,x\,\vec{v}\|}=\frac{\left[\overrightarrow{AB},\vec{u},\vec{v}\right]}{\|\vec{u}\,x\,\vec{v}\|}=\frac{\left|\det\left(\overrightarrow{AB},\vec{u},\vec{v}\right)\right|}{\|\vec{u}\,x\,\vec{v}\|}$$

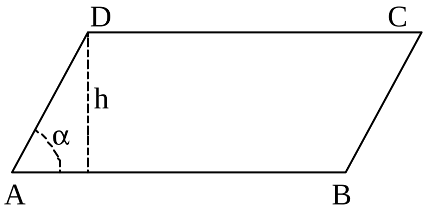
cuando $r\equiv\frac{x-x_o}{a}=\frac{y-y_o}{b}=\frac{z-z_o}{c}$ $\quad s\equiv\frac{x-x_1}{a´}=\frac{y-y_1}{b´}=\frac{z-z_1}{c´}$

$$d(r,s)=\frac{\begin{vmatrix} x_1-x_o & y_1-y_0 & z_1-z_o \\ a & b & c \\ a´ & b´ & c´ \end{vmatrix}}{\sqrt{\begin{vmatrix} b & c \\ b´ & c´ \end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix} c & a \\ c´ & a´ \end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix} a & b \\ a´ & b´ \end{vmatrix}^2}}$$ (referencia ortogonal)

6. ÁREAS.

Aun cuando el producto vectorial no nos resuelve el problema general del área, si puede ayudarnos a calcular determinadas áreas como las del paralelogramo y triángulo y cualquier otra figura geométrica que se pueda reducir a éstas.

6.1. Área del Paralelogramo.



Sea ABDC un paralelogramo. Sabemos que su área es el producto de su base por su altura y tomemos como base = $\left|\overrightarrow{AB}\right|$ y como altura $h = \left\|\overrightarrow{AC}\right\| \cdot \left|\text{sen}\,\alpha\right|$ donde $\alpha = ang\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right)$

Por la definición de producto vectorial

$$A = \left\|\overrightarrow{AB}\, x\, \overrightarrow{AC}\right\|$$

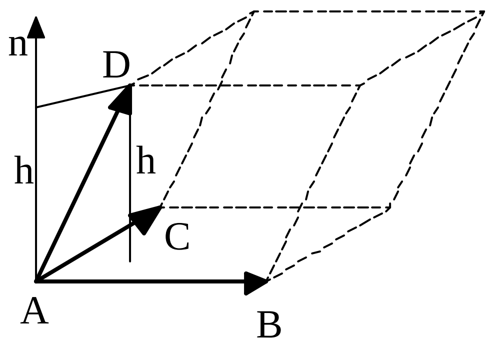
6.2. Área del Triángulo.

Dado un triángulo ABC, su área es la mitad de la del paralelogramo ABCD.

Luego $A = \frac{1}{2}\left\|\overrightarrow{AB}\, x\, \overrightarrow{AC}\right\|$

7. VOLUMENES.

7.1. Volumen del paralelepipedo.



Consideremos el paralelepípedo determinado por 3 aristas concurrentes en un vértice $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}$.

Admitimos que su volumen es el área de la base por la altura.

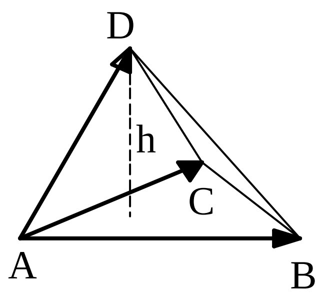
$$A.\, base = \left\|\overrightarrow{AB}\, x\, \overrightarrow{AC}\right\|$$

La altura h es la distancia de D al plano ABC y dado que $\vec{n} = \overrightarrow{AB}\, x\, \overrightarrow{AC}$ es un vector normal a dicho plano.

$$h = d\left(D,\, plano\ ABC\right) = \frac{\left|\overrightarrow{AD} \cdot \left(\overrightarrow{AB}\, x\, \overrightarrow{AC}\right)\right|}{\left\|\overrightarrow{AB}\, x\, \overrightarrow{AC}\right\|}$$ de donde

$$V=\frac{\left|\overrightarrow{AD}\cdot\left(\overrightarrow{AB}\,x\,\overrightarrow{AC}\right)\right|}{\left\|\overrightarrow{AB}\,x\,\overrightarrow{AC}\right\|}\cdot\left\|\overrightarrow{AB}\,x\,\overrightarrow{AC}\right\|=\left|\left[\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right]\right|=\left|\det\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD}\right)\right|$$

7.2. Volumen de un Tetraedro.



El tetraedro ABCD es una pirámide

$$V=\frac{Abase\,x\,h}{3}$$

$$Abase=\frac{\left\|\overrightarrow{AB}\,x\,\overrightarrow{AC}\right\|}{2}$$

$$h=d\left(D,\,plano\ ABC\right)=\frac{\left|\overrightarrow{AD}\cdot\left(\overrightarrow{AB}\,x\,\overrightarrow{AC}\right)\right|}{\left\|\overrightarrow{AB}\,x\,\overrightarrow{AC}\right\|}$$

de donde, trivialmente $V=\frac{1}{6}\left|\det\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD}\right)\right|$

Bibliografía Recomendada.

Curso de Álgebra y Geometría. Aut. Juan de Burgos. Ed. Alambra Universidad.

Álgebra Lineal. Aut. F. Puerta. Ed. Univ. Politécnica de Barcelona.

Matemáticas COU teoría, tomo 1. Aut.: Vizmanos-Anzola.

Matemáticas COU. Aut.: J. García - S. Rellicer. Ed. Marfil.

En general cualquier texto del antiguo COU