TEMAS DE MATEMÁTICAS
(Oposiciones de Secundaria)

TEMA 39

GEOMETRÍA DEL TRIÁNGULO

TEMA 39

GEOMETRÍA DEL TRIÁNGULO

1. GENERALIDADES.

1.1. Conceptos Elementales.

DEF Triángulo es la figura del plano formada por tres segmentos rectilíneos que tienen, dos a dos, un extremo común.

Como definiciones equivalentes de triángulo tenemos las dos siguientes:

DEF2 Triángulo es la figura del plano formada por una poligonal cerrada de tres lados.

DEF3 Triángulo es un polígono convexo de tres lados y tres ángulos.

Los ángulos convexos formados por cada dos lados se llaman ángulos del triángulo, o ángulos internos, y los adyacentes a éstos son los ángulos externos. Los segmentos que forman el triángulo son los lados del mismo. Todos los triángulos, por definición, están compuestos por tres lados y tres ángulos.

Notación. Los lados de un triángulo se denotarán con letras minúsculas y los ángulos con mayúsculas, teniendo un ángulo y su lado opuesto la misma letra.

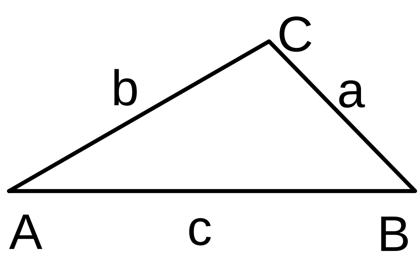


Fig. 1.

DEF Llamamos Perímetro del triángulo a la suma de las longitudes de sus tres lados.

1.2. Clases de Triángulos.

Podemos realizar dos clasificaciones diferentes de los triángulos, según nos basemos en sus lados o en sus ángulos.

1) Clasificación de los triángulos en función de sus lados.

- Equilátero. Tienen los tres lados iguales.
- Isósceles. Tienes dos lados iguales.
- Escaleno. Tienen todos los lados de diferente longitud.

2) Clasificación de los Triángulos en función de sus ángulos.
- Rectángulos. Tienen un ángulo recto.

- Obtusángulos. Tienen un ángulo obtuso.
- Acutángulos. Tienen los tres ángulos agudos.

1.3. Rectas Notables del Triángulo.

DEF Llamaremos Base del triángulo a uno cualquiera de sus lados.

DEF Llamaremos Altura de un triángulo al segmento perpendicular trazado desde el vértice opuesto a la base o a su prolongación.

DEF Llamaremos Mediana al segmento que une un vértice con el punto medio del lado opuesto.

DEF Llamaremos Bisectriz Interior a la recta que divide un ángulo cualquiera del triángulo en dos ángulos iguales y queda limitada por el lado opuesto.

DEF Llamaremos Bisectriz Exterior a la bisectriz de un ángulo exterior.

Dado que un vértice del triángulo tiene dos ángulos externos, opuestos entre si, sus bisectrices son parte de una misma recta, la cual es perpendicular a la bisectriz interior de dicho ángulo.

DEF Llamaremos Mediatriz de un triángulo a toda recta perpendicular a un lado cualquiera que pasa por su punto medio.

1.4. Resultados inmediatos.

TEOREMA

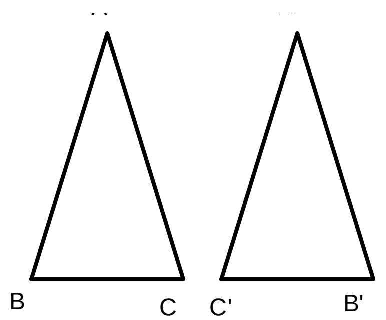
Un triángulo es isósceles si y sólo si tiene dos ángulos iguales.

Dem.

“⇒”

Sabemos que un triángulo isósceles tiene dos lados iguales. Demostraremos que los dos ángulos opuestos a los dos lados iguales son iguales.

Sea ABC un triángulo isósceles, siendo b=c. Consideremos el triángulo A’B’C’ simétrico de ABC respecto de la bisectriz del ángulo A.



Este triángulo verifica que b’=c’

Si realizamos un movimiento de forma que A’ coincida con A y A’C’ con su igual AB, dado que A’=A, el lado A’B’ también coincidirá con su igual AC.

Por tanto, los dos triángulos isósceles coincidirán y $\angle C' = \angle B$. Y como $\angle C = \angle C'$, tenemos que $\angle B = \angle C$.

"$\Leftarrow$"

Supongamos ahora que el triángulo ABC dibujado verifica que $\angle B = \angle C$. Sea A'B'C' igual que antes y mediante un movimiento situamos A' sobre A y C'B' sobre BC. La recta C'A' tendrá la misma dirección que BA ya que $\angle B = \angle C'$ y la recta B'A' tendrá la dirección de CA por ser $\angle C = \angle B'$.

Entonces AB=A'C' y A'C'=AC luego AB=AC y por tanto ABC es isósceles.

TEOREMA

La bisectriz del ángulo determinado por los dos lados iguales de un triángulo isósceles es a la vez la altura, la mediana y la mediatriz del vértice que determina al lado opuesto.

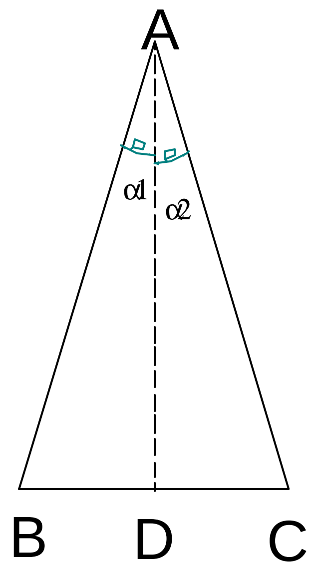
<u>Dem.</u>

Consideremos el triángulo isósceles ABC, donde AB=AC. La bisectriz de $\angle A$ forma con los lados AB y AC los ángulos α_1 y α_2 y corta a BC en el punto D. Por construcción $\alpha_1 = \alpha_2$.

La simetría con respecto a la recta que contiene al segmento AD transforma el triángulo en sí mismo. De este resultado podemos deducir:

1) BD=CD, luego D es el punto medio de BC.

2) $\angle BDA = \angle CDA$, luego $AD \perp BC$. Por tanto AD es la mediatriz.



<u>1.5. Criterios de Igualdad de Triángulos.</u>

DEF Dados dos triángulos ABC y A'B'C', diremos que son congruentes si existe un movimiento que transforma uno en otro. Obtenemos así que los lados y ángulos homólogos serán congruentes, pudiendo escribir

$$AB=A'B' \qquad AC=A'C' \qquad BC=B'C' \qquad \angle A=\angle A' \qquad \angle B=\angle B' \qquad \angle C=\angle C'$$

A partir de esta definición podemos determinar la congruencia de dos triángulos con sólo realizar un movimiento. El problema está en que en gran cantidad de situaciones no podremos realizar dicho movimiento. Es por ello que la congruencia se deducirá comprobando la igualdad entre los lados y los ángulos de ambos triángulos.

Para simplificar algo más el problema de determinar si dos triángulos son congruentes, vamos a ver cuatro criterios (llamados criterios de igualdad) en los cuales partiremos de menos igualdades y comprobaremos que se verifican el resto.

Dos triángulos ABC y A’B’C’ son congruentes si verifican alguno de los criterios siguientes:

a) Criterio 1. Tienen iguales dos lados y el ángulo que lo forman.

Supongamos que AB=A’B’, AC=A’C’ y ∠A=∠A’

El movimiento que lleva AB sobre A’B’ y el semiplano que contiene a C sobre el semiplano que contiene a C’, transforma ∠A en ∠A’ y la recta AC en A’C’.

Así pues, los tres vértices se transforman en sus homólogos y por lo tanto los triángulos son congruentes.

b) Criterio2. Tienen iguales un lado y los dos ángulos contiguos.

Sea AB=A’B’, ∠A=∠A’ y ∠B=∠B’

El movimiento que lleva AB sobre A’B’ de forma que coincidan los semiplanos que contienen a C y C’, transforma el primer triángulo en el segundo, por tanto son congruentes.

c) Criterio 3. Tienen iguales, respectivamente, los tres lados.

Sea AB=A’B’, AC=A’C’ y BC=B’C’

Vamos a probar que uno de los triángulos es congruente con el simétrico del otro, y de aquí deduciremos la congruencia entre ambos.

Apliquemos al triángulo A’B’C’ un movimiento tal que el lado A’B’ coincida con AB y el semiplano que contiene a C’ sea distinto del semiplano que contiene a C. El triángulo obtenido del movimiento es ABC’’, verificándose que

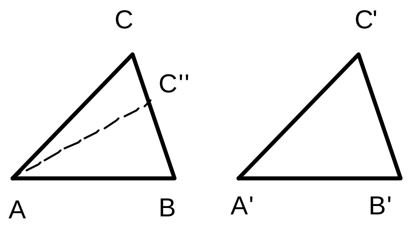
AC=A’C’=AC’’ y BC=B’C’=BC’’

Así pues, A equidista de C y C’’, al igual que B. Por tanto AB es la mediatriz del segmento CC’’ y la simetría respecto de dicha mediatriz hace coincidir el triángulo ABC con ABC’’.

Por tanto ABC es congruente con ABC’’ y este con A’B’C’, Luego ABC es congruente con A’B’C’.

d) Criterio 4. Tienen iguales dos lados de diferente longitud y el ángulo opuesto al mayor de ellos.

Sea AB=A’B’, AC=A’C’ con AC>AB y ∠B=∠B’



Apliquemos al triángulo A’B’C’ un movimiento que transforme A’B’ en AB y el semiplano que contiene a C’ en el semiplano que contiene a C. Como $\angle B=\angle B'$, las rectas que contienen a BC y a B’C’ coinciden.

Sólo nos queda por demostrar que el punto C’ se transforma en C. Supongamos que C’ se transforma en C’’. Entonces

$$AC''=A'C'=AC$$

El triángulo ACC’’ es isósceles, verificándose que $\angle C=\angle C''$ y $\angle C''>\angle B$ por ser $\angle C''$ exterior al triángulo ABC’’. Entonces AB>AC’’ y como AC’’=AC obtenemos que AB>AC lo cual es una contradicción.

En la demostración hemos aplicado un teorema, que demostraremos más adelante, que dice que a ángulos mayores se oponen lados mayores.

Si el punto C’’, obtenido como transformación de C’, fuese exterior a BC, llegaríamos a deducir que $\angle C'>\angle B'$, entonces A’B’>A’C’, lo cual también contradice la hipótesis.

Por tanto C’’=C y ambos triángulos son congruentes.

Una vez vistos los cuatro criterios de igualdad, podemos particularizarlos para triángulos rectángulos, quedando sus enunciados de la siguiente forma:

a) Criterio 1. Dos triángulos rectángulos de catetos respectivamente iguales son congruentes.
b) Criterio 2. Dos triángulos rectángulos que tienen, respectivamente, un cateto y un ángulo agudo (contiguo u opuesto), son congruentes.
c) Criterio 3. Dos triángulos rectángulos que tienen, respectivamente, los tres lados iguales, son congruentes.
d) Criterio 4. Dos triángulos rectángulos que tienen, respectivamente, iguales un cateto y la hipotenusa, son congruentes.

1.6. Relaciones entre Ángulos y Lados.

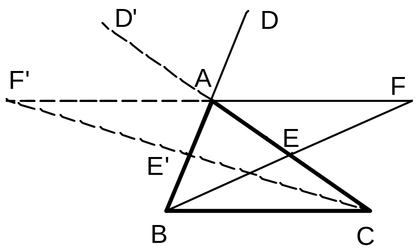
TEOREMA

Dado un triángulo, se verifica:

1) Un ángulo externo es mayor que cualquiera de los ángulos internos no adyacentes.
2) A mayor lado se opone mayor ángulo.
3) A mayor ángulo se opone mayor lado.

<u>Dem.</u>

1) Consideraremos el triángulo ABC de la figura.



En primer lugar demostraremos que el ángulo externo DAC es mayor que el interno ACB. Trazamos la recta BF que corta al segmento AC en su punto medio, E, y determinamos F como EF=BE. Posteriormente dibujamos el segmento AF.

Los triángulos AEF y CEB son congruentes ya que tienen iguales los ángulos en E y los lados que los forman. Por tanto

$$\angle ACB = \angle FAC$$

y como

$$\angle FAC < \angle DAC$$

resulta

$$\angle ACB < \angle DAC$$

En segundo lugar demostraremos que el ángulo externo DAC es también mayor que el ángulo interno ABC

Realizando un proceso similar obtenemos F’ como CE’=E’F’ siendo E’ el punto medio de AB. Y llegamos a que

$$\angle F'AB < \angle D'AB$$

y como

$$\angle F'AB = \angle ABC$$

obtenemos

$$\angle ABC < \angle D'AB$$

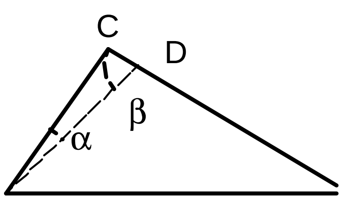
y siendo

$$\angle D'AB = \angle D'AC$$

resulta

$$\angle ABC < \angle DAC$$

2) Consideremos el triángulo ABC de la figura.



Supongamos que el lado BC es mayor que AC, BC > AC. Probemos que el ángulo A es mayor que el ángulo B, $\angle A > \angle B$.

Como el segmento BC es mayor que AC, elijamos en él un punto D que verifique

$$CD=AC$$

El triángulo ACD es isósceles por construcción, siendo los ángulos α y β iguales. Por el apartado anterior, el ángulo β es mayor que B ya que β es externo al triángulo ABD. Y como el ángulo α es menor que el ángulo A tenemos

$$\angle A > \alpha = \beta > \angle B$$

Luego

$$\angle A > \angle B$$

3) La demostración de este apartado la realizaremos por reducción al absurdo.

Consideraremos el triángulo del apartado anterior con $\angle A > \angle B$.

Supongamos que $BC \leq AC$

Tenemos dos situaciones:

a) BC=AC. Entonces el triángulo sería isósceles y por tanto $\angle A = \angle B$, lo cual es falso.
b) BC < AC. Aplicando el apartado anterior obtenemos $\angle A < \angle B$, lo cual también es falso.

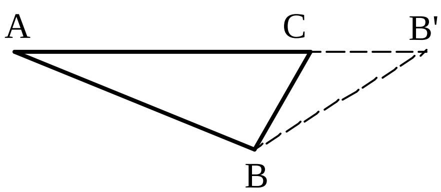
Por tanto BC > AC

TEOREMA

Todo lado de un triángulo es menor que la suma de los otros dos.

<u>Dem.</u>

Vamos a realizar la demostración para el lado mayor.



Supongamos que AB es el lado mayor. Sobre la prolongación del segmento AC situamos un punto B' que verifique CB=CB'.

Entonces el triángulo BCB' es isósceles, y se verifica

$$\angle AB'B = \angle CBB'$$

y como

$$\angle CBB' < \angle ABB'$$

ya que C es interior al segmento AB', llegamos a que $\angle AB'B < \angle ABB'$

Por tanto, en el triángulo AB'B, sabiendo que a menor ángulo se opone menor lado, se tiene

$$AB < AB' \Rightarrow AB < AC+BC$$

TEOREMA

Todo lado de un triángulo es mayor que la diferencia de los otros dos.

<u>Dem.</u>

La demostración es inmediata sin más que tener en cuenta el teorema anterior.

Si $AB < AC+BC \Rightarrow AC > AB-BC$

2. PUNTOS Y RECTAS NOTABLES DEL TRIÁNGULO.

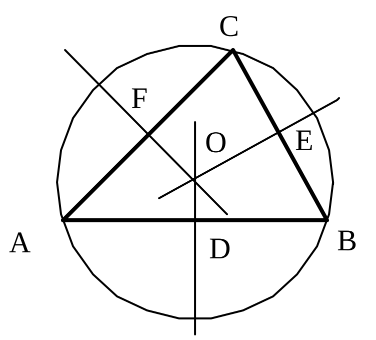
2.1. Circunferencia Circunscrita. Circuncentro.

Sabemos que tres puntos no alineados, A, B y C, determinan una circunferencia que los contiene. El centro de la circunferencia es el punto de intersección de las mediatrices de los segmentos AB, BC y AC.

TEOREMA

Las mediatrices de un triángulo se cortan en un punto equidistante de los tres vértices, llamado circuncentro.

<u>Dem.</u>



Sea el triángulo ABC, y los puntos D, E y F son los puntos medios de cada uno de los lados. Como AB y BC no son paralelos, sus mediatrices se cortan en un punto, que llamaremos O.

El punto O equidista de A y B, pues se encuentra en la mediatriz del lado AB.

Igualmente equidista de B y C por estar en la mediatriz del lado BC. Por tanto, equidista de A y C y eso significa que se encuentra en la mediatriz del lado AC.

Por tanto, O es la intersección de las tres medianas, y está a la misma distancia de los tres vértices

DEF Llamamos Circuncentro de un triángulo al punto intersección de sus tres mediatrices.

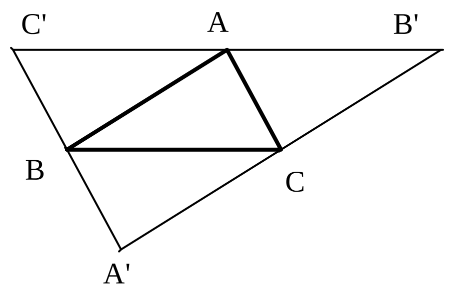
DEF Llamamos Circunferencia Circunscrita de un triángulo a la circunferencia con centro en el Circuncentro y que pasa por los tres vértices.

2.2. Ortocentro.

TEOREMA

Las paralelas a los lados de un triángulo ABC que pasan por los vértices opuestos forman otro triángulo A'B'C' de lados dobles de los del primero y cuyos puntos medios son A, B y C.

Dem.



Sea B'C' la paralela a BC que pasa por A, A'C' la paralela a AC que pasa por B y A'B' la paralela a AB que pasa por C. Las tres rectas se cortan dos a dos en los puntos A', B' y C' determinando un triángulo.

Los vértices ABCB' determinan un polígono de cuatro lados y como los lados son paralelos dos a dos tenemos que AB=B'C y AB'=BC.

De forma análoga ABA'C es otro paralelogramo y AB=CA'.

Entonces AB=B'C=CA', luego 2AB=A'B' y A es el punto medio de A'B'.

Igualmente, podemos demostrar para el resto de lados que el triángulo A'B'C' tiene los lados de longitud doble que los del triángulo ABC, siendo A, B y C sus puntos medios.

La consecuencia qie obtenemos del teorema anterior es que las alturas del triángulo ABC se corresponden con las mediatrices de A'B'C'

Debido a que las mediatrices se cortan en un punto, podemos afirmar que las alturas del triángulo ABC se cortan en un punto.

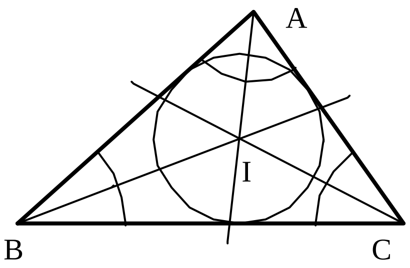
DEF Llamamos Ortocentro al punto donde se cortan las tres alturas de un triángulo.

2.3. Circunferencia Inscrita. Incentro.

TEOREMA

Sea ABC un triángulo. Las bisectrices de sus ángulos internos se cortan en un punto interior del mismo y equidistante de sus lados.

Dem.



Sean D, E y F los puntos de los lados del triángulo que se obtienen como intersección de las bisectrices de un ángulo en el lado opuesto. Se verifica que:

$$\angle BAD + \angle ABE = 0'5\cdot\angle A + 0'5\cdot\angle B < \angle A + \angle B < 180^{\circ}$$

Entonces, las bisectrices de los ángulos A y B se cortan, ya que forman con la secante común AB ángulos cuya suma es menor de 180º. Sea I el punto de corte. Como el punto I pertenece a la bisectriz AD, equidista de AB y AC, y por estar en la bisectriz BE también equidista de AB y BC, luego está en la bisectriz CF.

DEF Llamaremos Incentro al punto donde se cortan las tres bisectrices de un triángulo.

DEF Llamaremos Circunferencia Inscrita de un triángulo a la única circunferencia interior con centro en el Incentro y tangente a los tres lados.

2.4. Circunferencias Exinscritas. Exincentros.

DEF Llamaremos Exincentros a los puntos exteriores de un triángulo que equidistan de las rectas que contienen a cada uno de los tres lados.

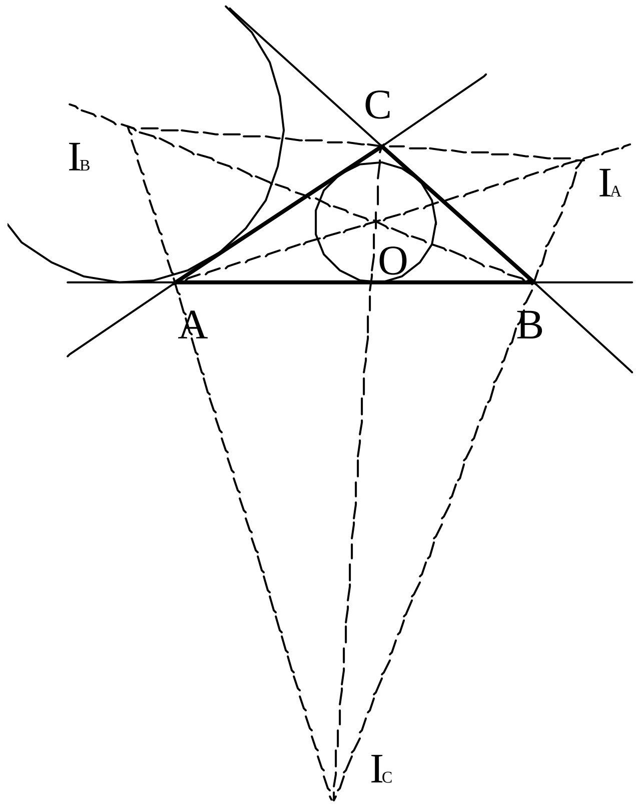
Para obtener los exincentros, que son tres, realizaremos el siguiente proceso:

Tomemos las bisectrices de los ángulos exteriores A y C. Dado que son ángulos concexos, sus mitades suman menos de 180º y por tanto las bisectrices se cortan en un punto I_B que equidista de las rectas de los tres lados, por tanto pertenece a la bisectriz del ángulo interior B.

El proceso lo podemos repetir, obteniendo I_A e I_C.

Cada dos vértices exteriores de un triángulo se cortan en un punto con la bisectriz interior del tercer vértice. Si, por ejemplo, trazamos por I_B perpendiculares a los lados o sus prolongaciones, cortarán al lado AC y a las prolongaciones de AB y BC.

DEF Llamaremos Circunferencia Exinscrita a aquella con centro en un exincentro y tangente a los lados del triángulo o sus prolongaciones.

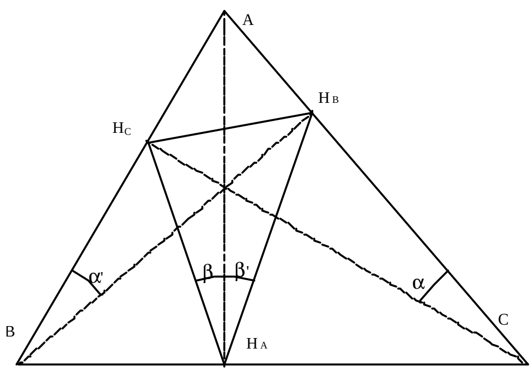


2.5. Triángulo Órtico.

TEOREMA

Las alturas de todo triángulo ABC acutángulo son bisectrices interiores del triángulo H_A, H_B y H_C, cuyos vértices son los pies de sus alturas.

Dem.



Comprobemos que $\angle H_CH_AA = \angle AH_AH_B$, lo cual es lo mismo que $\beta=\beta'$. Con eso demostraremos que la recta AH_A es la bisectriz del vértice H_A.

El triángulo BH_CC es rectángulo, al igual que BH_BC, luego los cuatro puntos están en una misma circunferencia, siendo iguales los ángulos inscritos en ella: $\alpha=\alpha'$.

De forma análoga, el triángulo CH_BH es rectángulo, al igual que HH_AC, luego los cuatro puntos están en una misma circunferencia, siendo iguales los ángulos inscritos en ella: $\alpha=\beta$. El punto H es la intersección de las tres alturas.

Y repitiendo de nuevo el proceso demostraríamos que $\alpha'=\beta'$. Por tanto llegamos a probar que $\beta=\beta'$.

DEF Llamaremos Triángulo Órtico al triángulo $H_AH_BH_C$, siendo sus vértices los puntos de corte de las alturas de un triángulo ABC acutángulo con sus lados.

La consecuencia de todo del teorema anterior es:

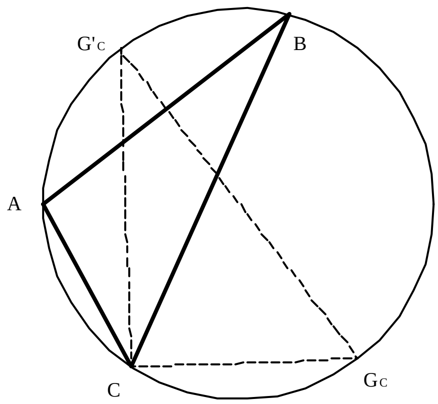
"*Los lados de un triángulo acutángulo son las bisectrices exteriores de su triángulo órtico. Los vértices de un triángulo son los exincentros de su triángulo órtico.*"

De forma similar a la anterior demostraríamos que, si el triángulo es obtusángulo, las alturas son una bisectriz interior y dos exteriores y los lados son las bisectrices restantes del triángulo órtico.

En el caso de que el triángulo fuese rectángulo, no existe su triángulo órtico

2.6. Seis Puntos Notables de la Circunferencia Circunscrita.

La circunferencia cincunscrita a un triángulo ABC contiene los puntos de intersección de la mediatriz de cada lado con las bisectrices que pasan por el vértice opuesto.

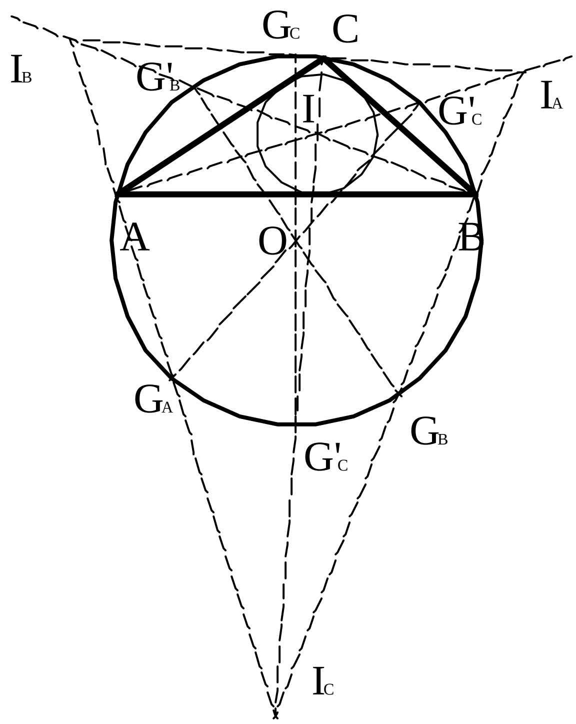


Sean G_C y G_C' los puntos medios de los arcos de la circunferencia con extremos en A y B. Por dichos puntos pasan a la vez el diámetro perpendicular al lado AB (la mediatriz de AB) y las bisectrices interior y exterior del ángulo C (aplicando las propiedades de un ángulo inscrito en una circunferencia).

Consideremos el triángulo de vértices I_A, I_B e I_C, siendo dichos puntos los exincentros del triángulo de vértices ABC. El triángulo I_BCI_C es rectángulo en C y el triángulo I_BBI_C es rectángulo en B. Ambos triángulos están formados por bisectrices cuyos lados pasan por I_B e I_C. Por tanto, los cuatro puntos están en una circunferencia de diámetro I_BI_C, y cuyo centro está en la mediatriz de BC, que llamamos G_A.

Análogamente I_AI es el diámetro de una circunferencia que pasa por B y C por ser rectos los ángulos $\angle ICI_A$ y $\angle IBI_A$. El punto de intersección de la mediatriz de BC con I_AI es el centro o punto medio de I_AI. Por tanto:

La circunferencia circunscrita a un triángulo contiene los puntos medios de los lados del triángulo de los exincentros, así como los puntos medios de los segmentos que unen éstos con el Incentro.



2.7. Circunferencia de Fenerbach.

Sea ABC un triángulo no rectángulo (ya que éstos no tienen triángulo órtico). Si aplicamos las propiedades que hemos visto a su triángulo órtico obtenemos que la circunferencia que pasa por los pies de las alturas de un triángulo contiene los puntos medios de sus lados así como los puntos medios de los segmentos de altura comprendidos entre cada vértice y el ortocentro.

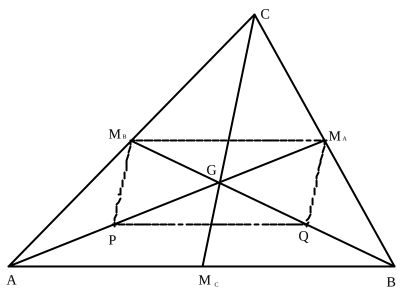
DEF La circunferencia anterior recibe el nombre de Circunferencia de los nueve puntos, o Circunferencia de Fenerbach o Circunferencia de Euler.

2.8. Baricentro de un triángulo.

TEOREMA

Las medianas de un triángulo se cortan en un punto que dista de cada vértice el doble que del punto medio del lado opuesto.

Dem.



Consideremos las medianas del triángulo que pasan por los vértices A y B. La mediana que pasa por A determina un punto M_A en el lado opuesto, y la mediana que pasa por B determina M_B en su lado opuesto. Ambas medianas se cortan en G.

Si tenemos en cuenta los segmentos AG y BG, sean P y Q, respectivamente, sus puntos medios. Demostremos que $PG=GM_A$ y que $QG=GM_B$.

En el triángulo ABC, el segmento de extremos M_AM_B es la paralela media a AB, lo cual significa que es paralelo a AB y de longitud mitad que AB. Si consideramos el triángulo ABG, deducimos algo similar. El segmento PQ es la paralela media a AB. Por tanto, el cuadrilátero determinado por los puntos PQM_AM_B es un paralelogramo, ya que tiene dos lados iguales y paralelos. El punto G es el punto donde se cruzan las diagonales de dicho paralelogramo. Por tanto se verifica que $PG=QM_A$ y que $QG=GM_B$, por tanto $PG=2GM_A$ y $QG=GM_B$.

Aplicando el mismo razonamiento para una de estas medianas y la tercera no considerada, obtenemos que se cortan en el mismo punto G y verifica la misma relación, demostrando así la tesis del teorema.

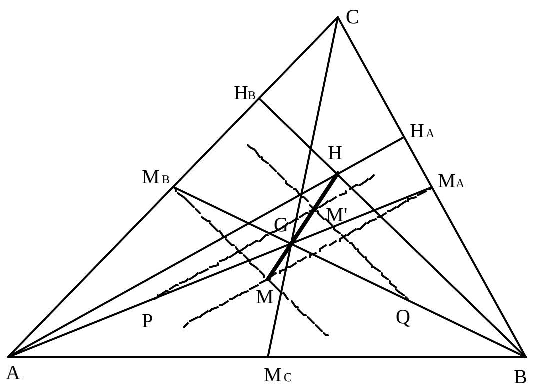
DEF Llamaremos Baricentro al punto donde se cortan las tres medianas de un triángulo.

2.9. La Recta de Euler.

TEOREMA

Dado un triángulo ABC cualquiera, se verifica que el Baricentro está alineado con el ortocentro y el circuncentro y a doble distancia del primero que del segundo.

Dem.



Vamos a trazar la recta que pasa por dos de ellos y comprobaremos que también pasa por el tercero, verificando entre ellos las distancias que se indican.

Tracemos por A y B las alturas correspondientes, que sabemos que se cortan en el ortocentro H, e igualmente tracemos las medianas, que se cortan en baricentro G. Sean P y Q los puntos medios respectivamente de AG y BG. Si trazamos por P una paralela a la altura de A y por Q una paralela a la altura de B, se cortan en un punto M’ de GH,siendo además su punto medio, ya que son las paralelas medias de AGH y GBH.

Si ahora, de forma simétrica, trazamos por M_A otra paralela a la altura de A y por M_B otra paralela a la altura de B, se cortan en M, coincidiendo esas rectas con las mediatrices del triángulo, y por tanto M es el circuncentro del triángulo.

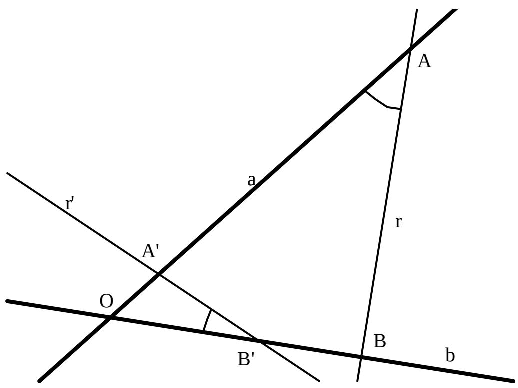
Por simetría se obtiene que M y M' están a la misma distancia de G GM=GM' y como M' era el punto medio de GH tenemos GM'= ½GH, luego obtenemos que

$$GM = \frac{1}{2}GH$$

estando los tres puntos alineados.

3. RELACIONES MÉTRICAS EN UN TRIÁNGULO.

3.1. Rectas Antiparalelas.



Sean a y b dos rectas secantes, cortándose en un punto O. Sean r y r' otras dos rectas que cortan a las dos anteriores, respectivamente en A y B y en A' y B', verificándose que los dos pares AA' y BB' están a un mismo lado o a distinto lado de O y que los ángulos ∠OAB y ∠OB'A' son iguales.

Verificándose todas las condiciones anteriores, diremos que las rectas r y r' son antiparalelas de a y b.

Además se verifica que los ángulos ∠OBA y ∠OA'B' son iguales, por ser suplementarios de los anteriores respecto de ∠AOB.

Por todo lo anterior podemos ver que la recta r forma con las rectas a y b ángulos iguales a los que forma la recta r' con b y a. Por tanto la relación de antipàralelismo es recíproca: las rectas a y b son también antiparalelas de r y r'.

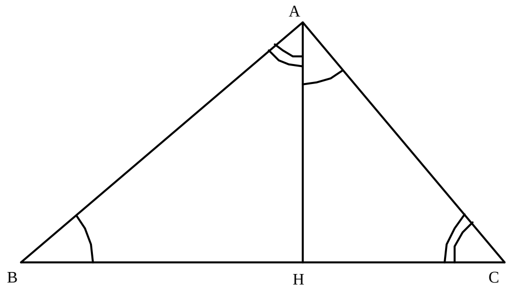
Si consideramos los triángulos AOB y B'OA', vemos que son semejantes por tener iguales los ángulos homólogos, y entonces:

$$\frac{\overline{OA}}{\overline{OB}} = \frac{\overline{OB'}}{\overline{OA'}} \quad \text{o también} \quad \overline{OA}\cdot\overline{OA'} = \overline{OB}\cdot\overline{OB'}$$

Visto lo anterior, podemos enunciar la siguiente proposición, la cual ya estaría demostrada.

PROP Dos rectas concurrentes en O, a y b, son cortadas por dos antiparalelas respecto de ellas, r y r', en puntos, A y B y también A' y B', cuyo producto de distancias a O es el mismo en ambas rectas, $\overline{OA}\cdot\overline{OA'} = \overline{OB}\cdot\overline{OB'}$.

3.2. Triángulos Rectángulos.



En el triángulo rectángulo ABC, rectángulo en A, las dos rectas determinadas, una de ellas por los puntos de la altura AH sobre la hipotenusa BC y la otra por el cateto AC, son antiparalelas respecto de las rectas determinadas por la propia hipotenusa y el otro cateto, ya que ∠AHB=∠CAB=90º

Por tanto, si lo anterior también lo aplicamos a los triángulos ABH y ACH, los cuales son rectángulos, se verifica que $\overline{BA}^2 = \overline{BC}\cdot\overline{BH}$ y $\overline{CA}^2 = \overline{CH}\cdot\overline{CB}$

Así pues, a partir de lo anterior podemos enunciar el siguiente teorema:

TEOREMA. Teorema del Cateto.

Cada cateto de un triángulo rectángulo es medio proporcional entre la hipotenusa y su proyección sobre ella.

TEOREMA. Teorema de la Altura.

La altura sobre la hipotenusa de un triángulo rectángulo es media proporcional entre los segmentos en que divide a ésta.

Dem.

De la semejanza entre los triángulos ABH y CAH , que tienen iguales los ángulos homólogos ∠ABH y ∠CAH se deduce:

$$\frac{\overline{HB}}{\overline{HA}} = \frac{\overline{HA}}{\overline{HC}} \quad \text{y por tanto} \quad \overline{HA}^2 = \overline{HB}\cdot\overline{HC}$$

TEOREMA

Si se verifica que $\overline{HA}^2 = \overline{HB}\cdot\overline{HC}$ siendo ABH y CAH dos triángulos rectángulos, entonces el triángulo ABC es rectángulo.

Dem.

De la igualdad se deduce que los triángulos ABH y CAH son semejantes y por tanto

$\angle$BAH = $\angle$ACH = 90º - $\angle$CAH $\Rightarrow$ $\angle$BAC = 90º

3.3. Teorema de Pitágoras.

TEOREMA. Teorema de Pitágoras.

El cuadrado de la longitud de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de las longitudes de los catetos.

Dem.

Si el triángulo ABC es rectángulo en A se verifica que:

$$\left.\begin{array}{l} \overline{BA}^2 = \overline{BC}\cdot\overline{BH} \\ \overline{CA}^2 = \overline{CB}\cdot\overline{CH} \end{array}\right\} \Rightarrow \overline{BA}^2 + \overline{CA}^2 = \overline{BC}\cdot\left(\overline{BH} + \overline{HC}\right) = \overline{BC}\cdot\overline{BC} = \overline{BC}^2$$

3.4. Generalización del Teorema de Pitágoras.

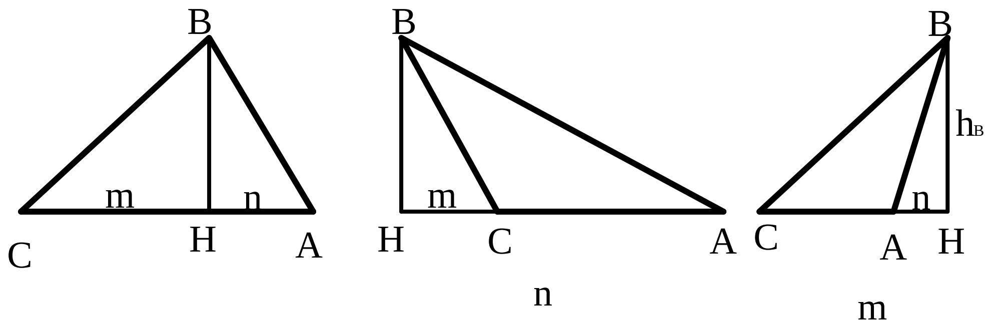
Vamos a tratar ahora de generalizar el teorema de Pitágoras que acabamos de ver para cualquier tipo de triángulo, no necesariamente rectángulo.

TEOREMA

El cuadrado de un lado opuesto a un ángulo (agudo u obtuso) de un triángulo oblicuángulo es igual a la suma de los cuadrados de los otros dos mas o menos el doble producto de uno de ellos por la proyección del otro sobre él. El signo dependerá del ángulo elegido.

Dem.

Sean los triángulos 1-2-3 de la figura, numerados de izquierda a derecha.



Llamemos a cada lado por la letra de su vértice opuesto, en minúscula. Sean m y n las medidas de los segmentos CH y AH, con H el pie de la altura sobre la base del triángulo y h la longitud de dicha altura. Entonces tenemos que:

Figuras 1 y 2: $a^2 = m^2 + h^2 = (b-n)^2 + c^2 - n^2 = b^2 + c^2 - 2bn$

Figura 3: $a^2 = m^2 + h^2 = (b+n)^2 + c^2 - n^2 = b^2 + c^2 + 2bn$

Es decir $a^2 = b^2 + c^2 \pm 2bn \quad siendo \begin{cases} + & si\ \angle A > 90^o \\ - & si\ \angle A < 90^o \\ n = 0 & si\ \angle A = 90^o \end{cases}$

COROLARIO

Dadas las medidas de los tres lados de un triángulo, se verifica:

1) Será acutángulo si el cuadrado del lado mayor es menor que la suma de los cuadrados de los otros dos.
2) Será recto si el cuadrado del lado mayor es igual que la suma de los cuadrados de los otros dos.
3) Será obtusángulo si el cuadrado del lado mayor es mayor que la suma de los cuadrados de los otros dos

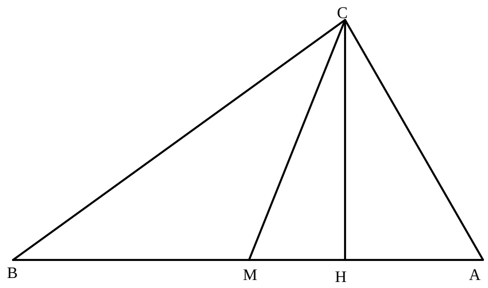
3.5. Suma y Diferencia de los cuadrados de dos lados de un triángulo.

PROP Se verifica:

1) La suma de los cuadrados de dos lados es igual al doble de la suma de los cuadrados de la mitad del tercer lado y de la mediana correspondiente.

2) La diferencia de los cuadrados de dos lados es igual al doble del producto del tercer lado por la distancia de su punto medio al pie de la altura correspondiente.

Dem.



Aplicando el teorema anterior para expresar los cuadrados de los dos lados a y b, con a mayor que b, de un triángulo ABC, en función de la mitad del tercer lado c y de la mediana correspondiente, m_c, tenemos:

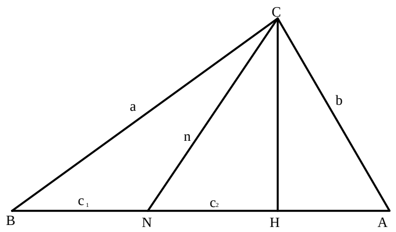
En el triángulo BMC $\Rightarrow$ $a^2 = \left(\frac{c}{2}\right)^2 + m_c^2 + 2\cdot\frac{c}{2}\cdot\overline{MH}$

En el triángulo MCA $\Rightarrow$ $b^2 = \left(\frac{c}{2}\right)^2 + m_c^2 - 2\cdot\frac{c}{2}\cdot\overline{MH}$

De ambas expresiones deducimos que

$$a^2 + b^2 = 2\left(\frac{c}{2}\right)^2 + 2m_c^2$$
$$a^2 - b^2 = 2\cdot c\cdot\overline{MH}$$

3.6. Teorema de Stewart.



Podemos obtener una fácil generalización del resultado del punto anterior aplicando cálculos análogos a una oblicua cualquiera al lado c, CN=c interior al triángulo y distinta de la mediana.

Si llamamos c_1=BN y c_2=NA, tenemos que:

$$\left.\begin{array}{l} a^2 = c_1^2 + n^2 + 2c_1\overline{NH} \\ b^2 = c_2^2 + n^2 - 2c_2\overline{NH} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} c_2a^2 = c_2c_1^2 + c_2n^2 + 2c_1c_2\overline{NH} \\ c_1b^2 = c_1c_2^2 + c_1n^2 - 2c_1c_2\overline{NH} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$c_1b^2 + c_2a^2 = c_2c_1^2 + c_2^2c_1 + c_1n^2 + c_2n^2 = c_1c_2(c_1 + c_2) + n^2(c_1 + c_2) \quad \Rightarrow$$

$$c_1b^2 + c_2a^2 = (c_1c_2 + n^2)\cdot c$$

Si asignamos signos a los segmentos sobre la recta AB y designamos por $\overline{AB}$ la longitud de AB con signo, la igualdad se convierte en:

$$\overline{BN}\cdot\overline{CA}^2 + \overline{NA}\cdot\overline{CB}^2 + \overline{AB}\cdot\overline{CN}^2 + \overline{BN}\cdot\overline{NA}\cdot\overline{AB} = 0$$

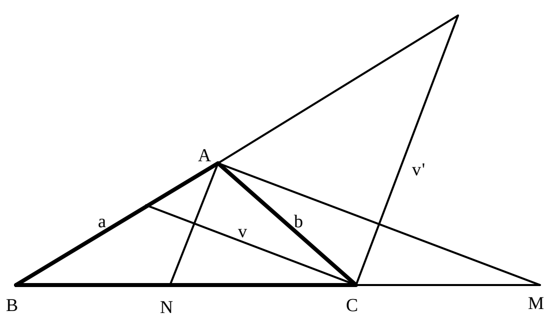
la cual se conoce como Teorema de Stewart.

3.7. Propiedad Métrica de las Bisectrices.

TEOREMA

1) Toda bisectriz interior divide al lado opuesto en dos segmentos proporcionales a los lados que concurren con ella.
2) Si una bisectriz exterior de un triángulo corta al lado opuesto, las distancias de su pie a los extremos de dicho lado son proporcionales a los lados concurrentes con la bisectriz y que pasan por ellos.

Dem.



Sea el triángulo ABC. Llevemos sobre la prolongación del lado a, y a continuación de C, el segmento CM=b. El triángulo ACM es isósceles. La bisectriz v’ es perpendicular a AM y a la bisectriz v de ACB, que es paralela a AM.

Por el teorema de Thales

$$\frac{BV}{a}=\frac{VA}{b}=\frac{c}{a+b}$$

Por tanto, toda bisectriz interior divide al lado opuesto en dos segmentos proporcionales a los lados que concurren con ella, cuya expresión en función de los lados es:

$$BV=\frac{ac}{a+b} \qquad y \qquad VA=\frac{bc}{a+b}$$

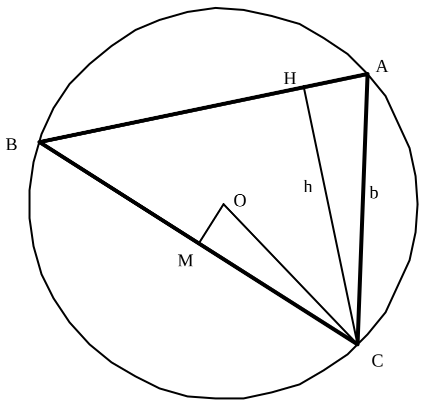
Llevando sobre el lado a, y a partir de C, el segmento CN=b, ahora AN es paralela a la bisectriz exterior v' y tendremos:

$$\frac{BV'}{a}=\frac{AV'}{b}=\frac{c}{a-b}$$

por tanto, si una bisectriz exterior de un triángulo corta al lado opuesto, las distancias de su pie a los extremos de dicho lado son proporcionales a los lados concurrentes con la bisectriz y que pasan por ellos y una expresión en función de los lados es:

$$BV'=\frac{ac}{a-b} \qquad y \qquad AV'=\frac{bc}{a-b}$$

3.8. Radio de la Circunferencia Circunscrita.



El ángulo ∠BAC es mitad del ángulo central ∠BOC, y por tanto, igual al ∠MOC, limitado por OC y el diámetro perpendicular a BC. De aquí resulta la semejanza de triángulos rectángulos MOC y HAC. Por tanto:

$$\frac{r}{a/2}=\frac{b}{h} \quad \Rightarrow \quad r=\frac{ab}{2h}$$

Sabiendo que la altura:

$$h=\frac{2}{c}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

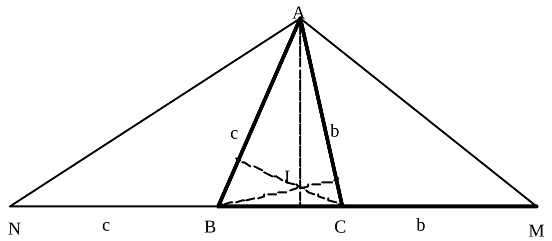
siendo:

$$p=\frac{a+b+c}{2}$$

resulta:

$$r=\frac{abc}{4\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}$$

Demostremos ahora la expresión que hemos utilizado para la altura h.



Llevando los lados c y b a la prolongación del lado a, respectivamente, a partir de los vértices B y C, obtenemos NM=a+b+c. Sea P el punto de corte de la altura del triángulo ABC con la base BC.

Por ser AM y AN paralelas a las bisectrices interiores de C y B, el triángulo ANM es semejante al IBC. Por tanto, sus alturas H=AP y h=IP son proporcionales a sus respectivas bases MN=2p y BC=a. Luego:

$$\frac{H}{h}=\frac{2p}{a} \quad \Rightarrow \quad H=\frac{2p}{a}h$$

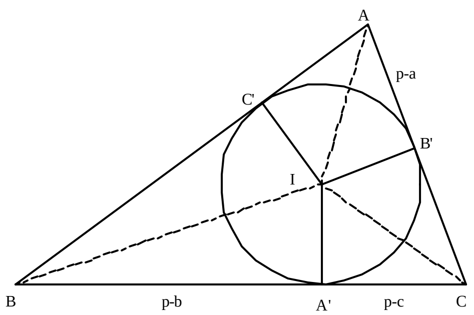
y como:

$$h=\sqrt{\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p}}$$

tenemos:

$$H=\frac{2}{a}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

Además se verifica que h es el radio de la circunferencia circunscrita. Comprobemoslo:



Los tres puntos de contacto A', B' y C' de la circunferencia inscrita en un triángulo ABC divide a sus lados en seis segmentos cuya suma es el perímetro 2p=a+b+c. Como AC'=AB', CB'=CA' y BA'=BC', tenemos que:

p=BC'+AC'+CA'=c+CA luego

CA'=p-c AC'=p-a y BA'= p-b

Considerando la circunferencia exinscrita tangente al lado AC en B'', siendo A'' y C'' los puntos de tangencia con las rectas AB y BC, se tiene, análogamente

$$BC'' = BA'' \Rightarrow BA + AB'' = BC + CB''$$

y como la suma de ambos miembros es el perímetro, cada uno de ellos vale p. Por tanto

$$BA'' = BC'' = p$$

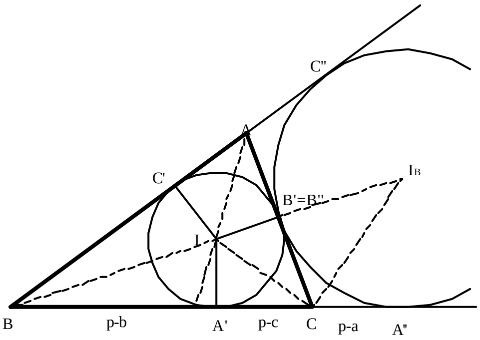
de donde

$$CB'' = CA'' = p-a$$

y análogamente:

C’C’’ = A’A’’ = p-(p-b) = b

B’B’’ = CB’-CB’’ = (p-c)-(p-a) = a-c



Por otra parte, los triángulos IBA’ e I_BBA’’ son semejantes. Llamando r al radio de la circunferencia inscrita y ρ al de la exinscrita, tenemos:

$$\frac{r}{\rho}=\frac{p-b}{p}$$

Los triángulos IA’C y CA’’I_B también son semejantes por tener iguales los ángulos ∠ICA’ y ∠CI_BA’’. Entonces:

$$\frac{r}{p-c}=\frac{p-a}{\rho} \quad \Rightarrow \quad r\cdot\rho=(p-a)(p-c)$$

sustituyendo en la expresión anterior tenemos que

$$r^2\cdot p=(p-a)(p-b)(p-c)$$

luego

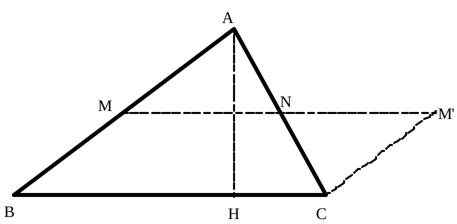
$$r=\sqrt{\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p}}$$

4. ÁREA DEL TRIÁNGULO.

TEOREMA

Toda área de un triángulo es equivalente a un paralelogramo de igual base y mitad de altura.

Dem.



Sea ABC un triángulo cualquiera. Sean M y N los puntos medios de los lados AB y AC respectivamente. El triángulo MAN es congruente con M’CN, y por suma de áreas, el triángulo ABC será equivalente al paralelogramo BMM’C de igual base y mitad de altura.

Como el área de un paralelogramo es igual al producto de su base y se altura, obtenemos que el área del triángulo es:

$$A_T = \frac{\overline{BC} \cdot \overline{AH}}{2}$$

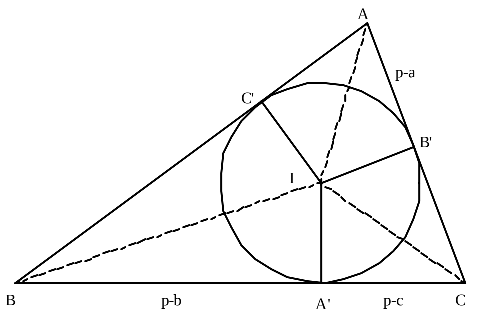
COROLARIO

El área de un triángulo es equivalente a la de un paralelogramo de igual altura y mitad de base.

COROLARIO

El área de un triángulo es equivalente a la mitad del área de un paralelogramo de igual altura e igual base.

FÓRMULA DE HERÓN



El área del triángulo ABC puede expresarse como suma de las áreas de los triángulo IBC, IAC e IAB.

$$A_{IBC} = \frac{[(p-b)+(p-c)]\cdot r}{2} = \frac{r}{2}\cdot[2p-(b+c)]$$
$$A_{IAC} = \frac{[(p-a)+(p-c)]\cdot r}{2} = \frac{r}{2}\cdot[2p-(a+c)]$$
$$A_{IAB} = \frac{[(p-a)+(p-b)]\cdot r}{2} = \frac{r}{2}\cdot[2p-(a+b)]$$

Por tanto

$$A_{ABC} = \frac{r}{2}[6p-(2a+2b+2c)] = \frac{r}{2}[6p-4p] = r\cdot p$$

y como:

$$r = \sqrt{\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p}}$$

resulta:

$$A_{ABC} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

Bibliografía Recomendada.

Elementos de Geometría Racional. Tomo 1. Rey Pastor, Puig Adam.

Curso de Geometría Métrica. Volumen 1. Puig Adam.