TEMAS DE MATEMÁTICAS (OPOSICIONES DE SECUNDARIA)

TEMA 36

PROPORCIONES NOTABLES. EL NÚMERO ÁUREO.

1. Introducción.
2. Magnitudes
3. Longitud de segmentos rectilíneos.
4. Proporcionalidad de segmentos.
5. Segmentos proporcionales.
6. Proporciones notables.
   6.1. Cuarto proporcional.
   6.2. Tercero proporcional
   6.3. Cuaterna armónica.
   6.4. Media proporcional.
7. Sección áurea de un segmento
8. Historia y aplicaciones del número áureo.

TEMA 36

PROPORCIONES NOTABLES. EL NÚMERO ÁUREO.

1. INTRODUCCIÓN.

En este tema pretendemos definir el concepto de longitud de un segmento, así como establecer las relaciones o proporciones más importantes que existen entre ellos y que son básicas para el estudio de la geometría de figuras y en ramas tan importantes como la geometría proyectiva.

También abordaremos la existencia de una proporción entre segmentos tan importante como la proyección áurea, tanto desde el punto de vista histórico, ya que para los griegos era la relación perfecta, como desde el punto de vista científico (biología, matemáticas, etc.).

2. MAGNITUDES.

Definición

Sea A un conjunto. Diremos que en dicho conjunto A definimos una magnitud si podemos establecer una relación de equivalencia, que denominaremos R, en A, de manera que se defina un conjunto cociente A/R sobre el cual definimos la operación suma con las siguientes propiedades.

a) Conmutativa: $\overline{x}+\overline{y}=\overline{y}+\overline{x} \qquad \forall \overline{x},\overline{y}\in A/R$

b) Asociativa: $\overline{x}+\left(\overline{y}+\overline{z}\right)=\left(\overline{x}+\overline{y}\right)+\overline{z} \qquad \forall \overline{x},\overline{y},\overline{z}\in A/R$

c) Existencia de elemento neutro: existe el elemento $\overline{0}\in A/R$ tal que:

$$\overline{a}+\overline{0}=\overline{0}+\overline{a}=\overline{a} \qquad \forall \overline{a}\in A/R$$

Nota: A las clases de equivalencia de A/R, [a] se les llama cantidades y todos los elementos que pertenecen a una misma clase de equivalencia diremos que tienen la misma cantidad.

Con esta definición podemos definir, sobre un mismo conjunto, distintas magnitudes, por ejemplo: sobre el conjunto de polígonos regulares, podemos definir las magnitudes: área, número de lados, número de vértices, etc.

3. LONGITUD DE SEGMENTOS RECTILÍNEOS.

Definición:

Sea R una recta cualquiera. Se define un segmento de dicha recta como los puntos que unen dos puntos P, Q cualesquiera de dicha recta. Por lo tanto, se define un segmento cualquiera de extremos P y Q como los puntos de la recta que pasa por P y Q, que además están entre ellos. Lo denotaremos por $\overline{PQ}$.

Diremos que dos segmentos $\overline{PQ}$ y $\overline{AB}$ son congruentes si podemos establecer un movimiento que haga corresponder los puntos inicial y final de uno con los del otro. Esta congruencia es una relación de equivalencia y a cada clase de equivalencia la llamaremos *longitud*, por eso diremos que dos segmentos son congruentes si tienen la misma longitud.

Fijada una semirrecta de origen O, si tomamos un segmento cualquiera $\overline{AB}$, podemos encontrar un punto X sobre la semirrecta de manera que $\overline{OX}$ y $\overline{AB}$ sean congruentes. Además si $\overline{OX}$ y $\overline{OY}$ son segmentos congruentes, se tiene que X=Y.

Utilizando la propiedad que acabamos de exponer podemos definir una suma en el conjunto cociente A/R de manera que dados dos segmentos cualesquiera $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$, si tomamos una semirrecta con origen O, tenemos que:

$$\overline{AB} \sim \overline{OX} \text{ y además } \overline{XY} \sim \overline{CD} \text{ y por lo tanto: } \quad \overline{OY} = \overline{AB} \sim \overline{CD}$$

<u>Nota</u>: Lo anterior es cierto siempre y cuando Y no esté entre O y X.

La operación suma verifica las propiedades:

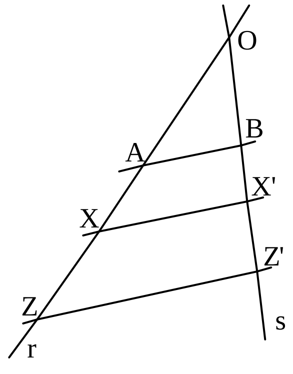
- Conmutativa
- Asociativa
- Existencia de elemento neutro.
- La longitud es divisible, es ordenada y es continua.
- Si tomamos una unidad de longitud $\overline{u}$, tomada una longitud $\overline{a}$ se tiene que existe $a \in \mathbb{R}^+$ tal que a es la medida de $\overline{a}$ sobre $\overline{u}$. Si a es un número irracional entonces se dice que $\overline{a}$ es inconmensurable con $\overline{u}$.

4. PROPORCIONALIDAD DE SEGMENTOS.

<u>Definición</u>:

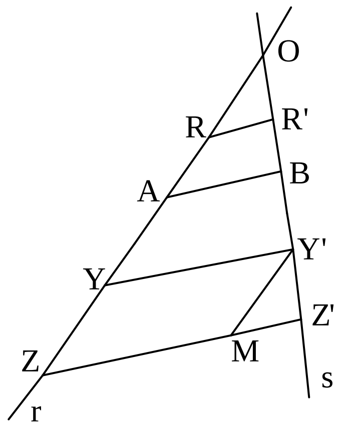
Se llama proporcionalidad de segmentos a toda aplicación biyectiva del conjunto de cantidades de longitud en sí mismo de modo que conserve el orden, la igualdad y exista correspondencia en la suma.

<u>Teorema fundamental de la proporcionalidad</u>:
Dados dos longitudes $\overline{a}$ y $\overline{b}$, si tomamos dos rectas r y s con un punto común O y sobre ellas $\overline{OA} = \overline{a}$, $\overline{OB} = \overline{b}$ y se hace corresponder al segmento $\overline{OX}$ el segmento $\overline{OX}'$ tal que la recta XX' sea paralela a la recta AB y además se obtiene una proporcionalidad, esta proporcionalidad no depende de las rectas.



Demostración:

Sean Y, Z puntos de *r* e Y' y Z' puntos de *s* de modo que YY' y ZZ' sean paralelas a AB. Entonces el segmento $\overline{YZ}$ le corresponde el segmento $\overline{Y'Z'}$ en la correspondencia anterior. Haremos $\overline{OR} = \overline{YZ}$ y tenemos R' sobre *s* de modo que RR' sea paralela a AB.



Trazamos por Y' la recta Y'M paralela a *r*. Los triángulos ORR' e Y'MZ' son congruentes luego $\overline{OR'} = \overline{Y'Z'}$

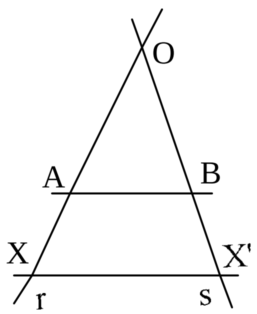
Veamos ahora que a la suma de segmentos le corresponde un segmento que es suma de los correspondientes a los sumandos. Consideremos:

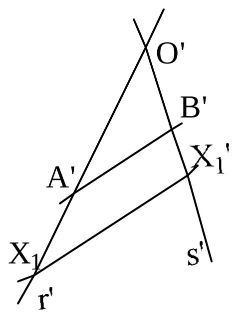
$$\overline{OY} = \overline{OX} + \overline{XY} \quad \Rightarrow \quad \text{se verifica} \quad \overline{OY'} = \overline{OX'} + \overline{X'Y'}$$

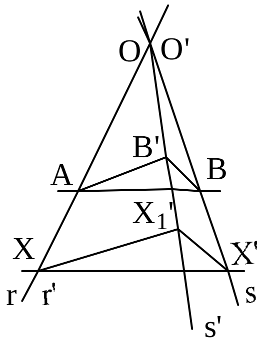
La correspondencia en la igualdad es trivial, luego la correspondencia establecida es una proporcionalidad.

Esta proporcionalidad es independiente de las rectas *r* y *s* elegidas.

Si tomamos otro par de rectas *r'*, *s'* que se cortan en O' y $\overline{O'A'} = \bar{a}$, $\overline{O'B'} = \bar{b}$ $\Rightarrow$ $\overline{O'X_1} = \overline{OX}$ veremos que $\overline{O'X_1'} = \overline{OX'}$ con lo que quedará probado.







Llevemos a coincidir, mediante un movimiento, la recta *r'* de modo que O' coincida con O y A' coincida con A. Se tiene que X coincide con X_1

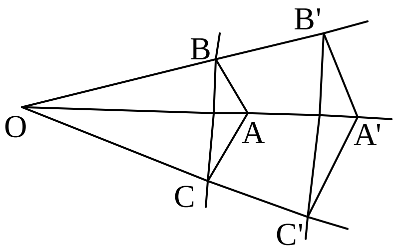
Tenemos que: AB' es paralelo a XX_1'
AB es paralelo a XX'

Entonces por el teorema reducido de Desargues se tiene que BB' es paralela a X_1'X' y como el triángulo OBB' es isósceles, también lo es el OX'X_1' $\Rightarrow$ $\overline{OX'} = \overline{OX_1'}$.

Nota. Para demostrar este teorema hemos utilizado el teorema reducido de Desargues, el cual vamos a demostrar a continuación.

Teorema reducido de Desargues.

Si en un plano tenemos dos triángulos ABC y A'B'C' tales que las rectas AA', BB' y CC' se cortan en O y además AB   A'B', AC   A'C' entonces también se cumple que BC   B'C'.



Demostración

Tracemos por O una recta que cumpla que no está contenida en el plano de los triángulos dados y en ella marcamos los puntos A_1 y A_1' tales que AA_1 es paralela a A'A_1'.

Como se cumple que el plano A_1AB es paralelo al plano A_1'A'B' $\Rightarrow$ A_1B A_1'B' y como el plano A_1AC es paralelo al plano A_1'A'C' $\Rightarrow$ A_1C A_1'C'.

Como las rectas A_1B y A_1C son paralelas respectivamente a A_1'B' y A_1'C' $\Rightarrow$ el plano ABC es paralelo a A'B'C' por lo tanto tenemos que: BC   B'C'

5. SEGMENTOS PROPORCIONALES.

Definición.

Dados los segmentos $\overline{a}_1, \overline{a}_2, ..., \overline{a}_r$ se dice que son proporcionales a $\overline{a}_1', \overline{a}_2', ..., \overline{a}_r'$ si hay una proporcionalidad que transforma $\overline{a}_i$ en $\overline{a}_i'$ donde $i \in \{1, ... r\}$

Para comprobarlo basta tomar dos rectas cualesquiera *r* y *s* tales que ambas incidan en un mismo punto O. Tomaremos sobre la recta *r*, *r* segmentos de longitudes $\overline{a}_1, \overline{a}_2, ..., \overline{a}_r$ consecutivamente y en la recta *s*, *r* segmentos de longitudes $\overline{a}_1', \overline{a}_2', ..., \overline{a}_r'$ y comprobamos que las rectas que unen los puntos $\overline{a}_i$ con $\overline{a}_i'$ son paralelas.

Teorema Si $\overline{a}$ y $\overline{b}$ son proporcionales a $\overline{a}'$ y $\overline{b}'$ entonces $\overline{a}$ y $\overline{a}'$ son proporcionales a $\overline{b}$ y $\overline{b}'$.

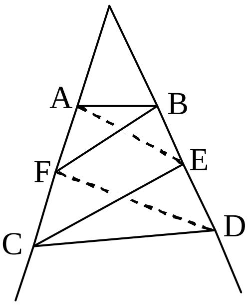
Demostración

Tomaremos sobre *r* los segmentos $\overline{OA} = \overline{a}$ y $\overline{OB} = \overline{b}$ y sobre *s* los segmentos $\overline{OA'} = \overline{a}'$ y $\overline{OB'} = \overline{b}'$. Utilizando la hipótesis AA'   BB' tomaremos $\overline{OA''} = \overline{OA'}$ sobre *r* y $\overline{OB''} = \overline{OB}$ sobre *s*. Por ser las rectas A'A" y BB" perpendiculares a la bisectriz del ángulo AOA' tenemos que A'A"   BB". Entonces AB"   A"B' por la configuración de Pappus, por lo tanto $\overline{OA}$ y $\overline{OB}$ son proporcionales a $\overline{OB''}$ y $\overline{OB'}$ si, y sólo si $\overline{a}$ y $\overline{a}'$ son proporcionales a $\overline{b}$ y $\overline{b}'$.

Configuración de Pappus:

Si AB   CD y FB   CE entonces:

AE   FD



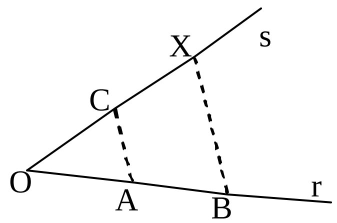
6. PROPORCIONES NOTABLES.

6.1. Cuarto proporcional.

Si tomamos 3 segmentos $\overline{a}$, $\overline{b}$ y $\overline{c}$, se define el cuarto proporcional de los segmentos $\overline{a}$, $\overline{b}$ y $\overline{c}$ como el segmento $\overline{x}$, que es único, que verifica la condición siguiente:

$$\frac{\overline{a}}{\overline{b}} = \frac{\overline{c}}{\overline{x}}$$

Nota. Se expresa geométricamente como



$$\left.\begin{array}{l}\overline{OA} = \overline{a} \\ \overline{OB} = \overline{b}\end{array}\right\} \text{ en } r$$

$$\overline{OC} = \overline{c} \quad \text{en } s$$

Como se ve, trazando la paralela a la recta AC que pasa por B obtenemos un punto X de corte con la recta *s*, tal que $\overline{OX} = \overline{x}$ es el segmento buscado.

6.2.Tercero proporcional.

Sean $\overline{a}$ y $\overline{b}$ dos segmentos cualesquiera., Se llama tercero proporcional de $\overline{a}$ y $\overline{b}$ al segmento $\overline{x}$, que es único, tal que:

$$\frac{\overline{a}}{\overline{b}} = \frac{\overline{b}}{\overline{x}}$$

Nota: Su construcción es igual a la del cuarto proporcional, pero siendo $\overline{c} = \overline{b}$.

6.3.Cuaterna armónica.

Definición

Sean A, B y X tres puntos alineados. El segmento $\overline{XA}$ con la unidad $\overline{XB}$, que se escribe:

$$\frac{\overline{XA}}{\overline{\mathrm{XB}}}$$

es positivo cuando X no está entre A y B y negativo en caso contrario. Este concepto definido así, lo llamaremos razón simple de 3 puntos.

Definición

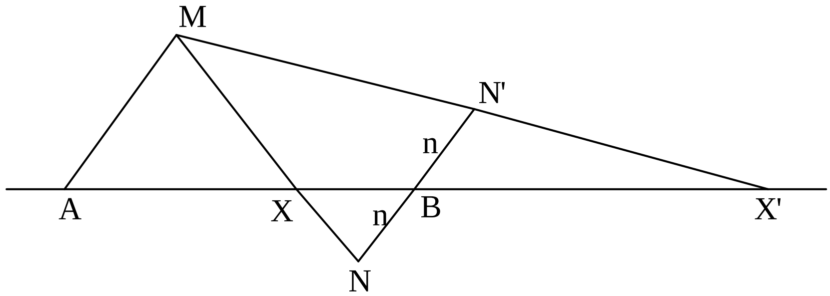
Sean A, B, X, X' cuatro puntos alineados. Se dice que estos puntos forman una cuaterna armónica si:

$$\frac{\overline{XA}}{\overline{XB}} = -\frac{\overline{X'A}}{\overline{X'B}}$$

En este caso se dirá que X y X' están armónicamente separados por A y B.

Construcción del cuarto armónico:

Sean A, B, X y X' los cuatro puntos alineados (con X entre A y B)



Tracemos 2 rectas paralelas por A y B y fijemos un punto M en la primera recta. La recta MX corta a la segunda en N. Determinamos N' tal que BN'=BN. La recta MN' corta a AB en X' que es el cuarto armónico.

En efecto, las rectas MX y AB determinan su proporcionalidad:

$$\frac{\overline{XA}}{\overline{XB}} = \frac{m}{n}$$

pero la recta MN' y AB también, luego

$$\frac{\overline{X'A}}{\overline{X'B}} = \frac{m}{n} \qquad \Rightarrow \qquad \frac{\overline{XA}}{\overline{XB}} = -\frac{\overline{X'A}}{\overline{X'B}}$$

6.4.Media proporcional.

Dados dos segmentos $\overline{a}$ y $\overline{b}$, se llama media proporcional de $\overline{a}$ y $\overline{b}$ al segmento $\overline{x}$ tal que

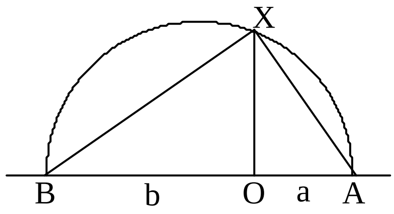
$$\frac{\overline{a}}{\overline{x}} = \frac{\overline{x}}{\overline{b}}$$

La construcción puede hacerse del modo siguiente: se trazan segmentos de longitud $\overline{a}$ y $\overline{b}$ sobre una recta tal que $\overline{OA} = \overline{a}$ y $\overline{OB} = \overline{b}$ y O separe A y B.

Se traza la circunferencia de diámetro AB.

La recta perpendicular a $\overline{AB}$ por O corta a la circunferencia en X y $\overline{OX} = \overline{x}$ pues la semejanza de los triángulos OBX y OAX garantiza

$$\frac{\overline{a}}{\overline{x}} = \frac{\overline{x}}{\overline{b}}$$



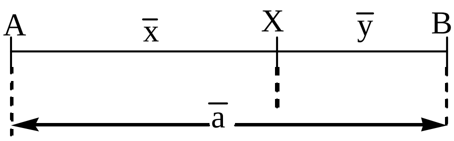
7. SECCIÓN ÁUREA DE UN SEGMENTO.

Definición.

Se dice que un punto X que se encuentra en un segmento $\overline{AB}$ divide a dicho segmento en media y extrema razón cuando la parte mayor $\overline{AX}$ es media proporcional de la parte menor $\overline{XB}$ y del segmento total $\overline{AB}$.

Definición

La parte mayor $\overline{x}$ del segmento que está dividido recibe el nombre de segmento o sección áurea, es decir:



donde $\overline{x}+\overline{y}=\overline{a}$, entonces tendremos

$$\frac{\overline{a}}{\overline{x}} = \frac{\overline{x}}{\overline{y}}$$

La parte menor $\overline{y}$ también es segmento áureo de la parte mayor, es decir:

$$\frac{\overline{a}}{\overline{x}} = \frac{\overline{x}}{\overline{y}} \quad \Rightarrow \quad \frac{\overline{a}-\overline{x}}{\overline{x}-\overline{y}} = \frac{\overline{x}}{\overline{y}} \quad \Rightarrow \quad \frac{\overline{y}}{\overline{x}-\overline{y}} = \frac{\overline{x}}{\overline{y}}$$

Proporción áurea

La razón de esa proporción $f = \overline{a}/\overline{x}$ es conocida por el nombre de “sección” desde la época de Grecia. En el Renacimiento, el monje Lucca Pacioli la llamó “durna proporción” y fue finalmente Leonardo da Vinci el que la llamó “sección áurea”.

Su valor es:

$$\frac{\overline{a}}{\overline{x}} = \frac{\overline{x}}{\overline{a}-\overline{x}} \quad \Rightarrow \quad \overline{a}^2 - \overline{a}.\overline{x} = \overline{x}^2 \quad \Rightarrow \quad \overline{a}^2 - \overline{a}.\overline{x} - \overline{x}^2 = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \overline{a} = \frac{\overline{x} \pm \sqrt{\overline{x}^2 + 4\overline{x}^2}}{2} = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)\overline{x} \quad \Rightarrow \quad \frac{\overline{a}}{\overline{x}} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \quad \Rightarrow \quad f = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

8. HISTORIA Y APLICACIONES DEL NÚMERO ÁUREO.

Desde la antigüedad, los filósofos y geómetras creyeron en la existencia de una proporción privilegiada, que posteriormente los artistas del Renacimiento denominaron el *número de oro*. Existe una armonía, que algunos estiman perfecta, entre dos magnitudes, particularmente dos dimensiones, cuando ambas están entre sí, en la misma proporción que la mayor de ellas y la suma de las dos.

Si *x* e *y* son estas magnitudes, siendo *x* la menor, se tiene:

$$\frac{x}{y} = \frac{y}{x+y}$$

Para encontrar la proporción que relacione *x* con *y* basta resolver la ecuación anterior para x=1 resultando, como anteriormente se ha demostrado que:

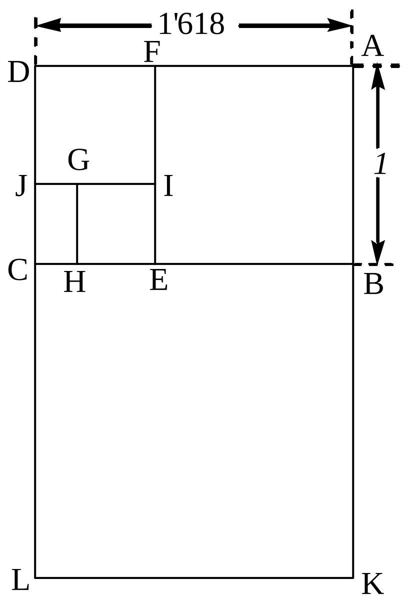
$$f = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

Como $\sqrt{5}$ es irracional, el número de oro lo es también y vale aproximadamente:

1’618033989…

El rectángulo cuyos lados guardan esta proporción tiene propiedades dignas de mencionar. Se presta prácticamente a una separación ilimitada de rectángulos semejantes cada vez menores, es decir, contiene en germen un desarrollo en fracciones continuas.

Si en un rectángulo ABCD, trazado siguiendo la proporción del número de oro, se construye sobre el lado AB, lado menor, un cuadrado ABEF, queda delimitado un rectángulo FECD semejante al primero; continuando con el mismo procedimiento, que puede seguirse indefinidamente, se obtienen siempre rectángulos IECJ, luego GHCJ,… de proporciones ideales. A la inversa, construyendo un cuadrado BKLC sobre el lado mayor BC de un rectángulo perfecto ABCD, se obtiene otro rectángulo perfecto AKLD, y así sucesivamente.



El número de oro parece ser una de las claves estructurales del universo visible, aunque la ciencia moderna no comparte esta creencia. Se le encuentra en la espiral logarítmica que a su vez es la forma que adoptan algunas nebulosas o el perfil de algunas conchas animales, en la disposición periódica de las hojas sobre el tallo de los vegetales; en el cuerpo humano, en el que el ombligo divide a su eje longitudinal en dos partes según la proporción áurea., etc.

En la antigüedad el número de oro fue a la vez símbolo cosmológico, fórmula mágica y clave de diversas construcciones geométricas utilizadas sobre todo en arquitectura. En geometría aparece en varios lugares de la teoría de los pentágonos regulares convexos o estrellados. Se encuentra su trazo también en ciertos elementos de la pirámide de Keops, en el Erecteion, y sobre todo en el Partenón, tanto por las proporciones del conjunto como por los detalles estructurales, en especial los concernientes a los capiteles.

El número de oro ha sido la clave de la armonía numérica de obras maestras de la escultura y de la pintura. Algunos artistas han extendido estas experiencias a la música y a la poesía.