TEMAS DE MATEMÁTICAS
(Oposiciones de Secundaria)

TEMA 33

EVOLUCIÓN HISTÓRICA DEL CÁLCULO DIFERENCIAL.

TEMA 33

EVOLUCIÓN HISTÓRICA DEL CÁLCULO DIFERENCIAL.

1. INTRODUCCIÓN.

El análisis matemático va a ser la rama de la matemática que nos proporcione métodos para la investigación cuantitativa de los procesos de cambio, movimiento y dependencia de una magnitud con respecto a otras. Inicialmente apareció con un ropaje geométrico que le impidió progresar, quizá debido a la influencia de las obras de Descartes "*Discurso del Método*" y "*Geometría*". Cuando pudo desprenderse de dicho ropaje, avanzó rápidamente.

2. ORÍGENES DEL ANÁLISIS. ÉPOCA GRIEGA.

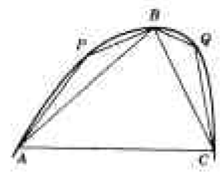
A finales del siglo V a. C. quedaban en la matemática griega algunos problemas sin resolver. Entre ellos podemos destacar el de la comparación de figuras curvilíneas y rectilíneas. Fue Eudoxo quien encontró la solución. Matemáticos anteriores a él habían propuesto que lo mejor era intentar inscribir y circunscribir figuras rectilíneas a la figura curvilínea, aumentando el número de lados convenientemente para una mayor aproximación. Pero no sabían como terminar el razonamiento, ya que desconocían la idea de límite (y sería desconocida durante dos milenios más). Según Arquímedes, fue Eudoxo quien dio el Lema que lleva el nombre de Arquímedes y que sirve como base al método de exhausción, el equivalente griego del cálculo integral.

Los griegos hicieron uso de esta propiedad para la demostración de teoremas sobre áreas y volúmenes de figuras curvilíneas. El propio Eudoxo demostró que el volumen de un cono es la tercera parte del cilindro de la misma base y altura.

La método de exhausción se puede considerar como el primer teorema relativo a la medida de figuras curvilíneas conocido, lo cual apunta a que Eudoxo se puede considerar como el verdadero padre del cálculo integral, la máxima contribución de los miembros de la Academia platónica hecha a la matemática.

Arquímedes (siglo III a. C) escribió *Sobre las espirales*, un libro de difícil comprensión. En él nos podemos encontrar varios tratados sobre el método de exhausción, siendo el más popular el de *La cuadratura de la parábola.* Cuando lo escribió, las secciones cónicas se conocían casi un siglo antes, pero se necesitó de su genio para progresar en el cálculo de áreas relacionadas con ellas.

Concretamente, en la proposición 17 de dicho tratado consigue cuadrar un segmento de parábola. La demostración que realiza por el método de exhausción es larga y compleja, pero llega a demostrar que el área de un segmento parabólico APBQC es cuatro tercios de un triángulo que tenga la misma base y la misma altura.



Parece ser que Arquímedes no pudo hallar el área de un segmento de elipse o de hipérbola. En realidad, el cálculo del área de un arco de parábola actualmente no involucra nada peor que sencillos polinomios de segundo grado. En cambio, las integrales que aparecen en los segmentos de elipses o hipérbolas implican funciones transcendentes.

También podemos decir que Arquímedes, en su trabajo *Sobre conoides y esferoides*, calcula el área de la elipse de semiejes a y b. Y en el mismo tratado muestra cómo calcular los volúmenes de los segmentos que se obtienen al cortar un elipsoide, paraboloide o hiperboloide de revolución por un plano perpendicular al eje principal. El método que utiliza Arquímedes es muy similar al actual.

Y por último, podemos decir que en el tratado *Sobre la esfera y el cilindro* encontramos una proposición equivalente a

$$\int_0^{p} \operatorname{sen} x\,dx = 1 - \cos \boldsymbol{p} = 2$$

y en la siguiente demuestra otra que es equivalente a la integración de la función seno.

3. SIGLO XVII.

3.1. Galileo, Kepler y Cavalieri.

Fueron Galileo, Kepler y Stevin matemáticos que necesitaban de los métodos de Arquímedes para resolver sus problemas. Pero querían evitar las sutilezas lógicas del método de Exhauscion. Las modificaciones que realizaron de los antiguos métodos infinitesimales llevaron finalmente al cálculo infinitesimal propiamente dicho, siendo Stevin uno de los primeros en sugerir algunas modificaciones. Stevin estaba interesado en las aplicaciones físicas de la idea de infinitos elementos infinitamente pequeños, mientras que Kepler los necesitaba para aplicarlos a la astronomía. En su segunda ley astronómica (el radio vector que va del Sol a un planeta barre áreas iguales en tiempos iguales) el problema relativo al área lo resuelve suponiendo que estaba constituida por triángulos infinitamente pequeños con un vértice en el Sol y los otros dos en puntos infinitamente próximos sobre la órbita del planeta. Así, Kepler aplicó un tipo de cálculo integral muy rudimentario.

Fue en 1612 cuando Kepler, debido a que fue un año de vino excepcionalmente bueno, comenzó a calcular volúmenes de sólidos de revolución, comenzando por los toneles de vino. Reunió sus investigaciones sobre volúmenes de revolución en un libro que publicó en 1615 llamado "*Medida de los volúmenes de toneles*" (Stereometria doliorum).

Una de las aportaciones de Galileo fue en el cálculo de áreas. Estudió la Cicloide, e intentó hallar el área bajo uno de sus arcos. Lo más que pudo hacer fue trazar la curva sobre una chapa metálica, recortarla y pesarla, obteniendo como conclusión que su área era aproximadamente tres veces el área del círculo generador (como luego se demostró).

Cavalieri fue discípulo de Galileo. Se concentró principalmente en un teorema geométrico que expresado en notación moderna sería

$$\int_0^{a} x^n\,dx = \frac{a^{n+1}}{n+1}$$

Tanto el enunciado como la demostración del teorema son muy diferentes de los actuales, ya que Cavalieri comparaba potencias de segmentos que son paralelos a la base de un paralelogramo, con las correspondientes potencias de los segmentos en uno cualquiera de los dos triángulos en que una diagonal divide al paralelogramo.

3.2. Fermat y Descartes.

Descartes observó que todas las propiedades de una curva, tales como la medida del área encerrada por ella o la dirección de su tangente, estaban completamente determinadas cuando se daba su ecuación en dos incógnitas. Tenía mucha razón al afirmar que el problema de hallar la tangente a una curva era de gran importancia, pero el método que desarrolla en *La géomètrie* no era tan directo ni fácil de aplicar como el que desarrollo Fermat aproximadamente al mismo tiempo.

Fermat descubrió un método muy ingenioso para la obtención de los puntos en los que una función polinómica de la forma y=f(x) toma valores máximo y mínimo. Fermat comparaba el valor de f(x) en un cierto punto con el valor de f(x+E) en un punto próximo. Vio que en general los valores serían claramente diferentes, pero en un máximo o un mínimo, la diferencia sería casi imperceptible. Por lo tanto, para hallar dichos puntos, Fermat iguala f(x) a f(x+E), teniendo en cuenta que serán casi iguales. Cuanto más pequeño sea E más se aproximará a ser una verdadera igualdad. Así pues, después de dividir todo por E hace E=0. El resultado le permite calcular las abcisas de los puntos máximos y mínimos de la función. Esa es la esencia de lo que ahora conocemos por diferenciación pues lo que hizo Fermat es equivalente a

$$\lim_{E \to 0} \frac{f(x+E) - f(x)}{E}$$

e igualar ese límite a cero. También descubrió como aplicar su procedimiento de los valores próximos de la variable para hallar la tangente a una curva algebraica de la forma y=f(x). Por tanto tendríamos que darle la razón a Laplace cuando aclamaba a Fermat como el verdadero descubridor del Cálculo Diferencial.

Así mismo, Fermat obtuvo un teorema relativo al área encerrada bajo curvas de la forma $y=x^n$. Amplió los resultados de Cavalieri ya que lo demostró para todo n distinto de –1, incluyendo valores fraccionarios. La demostración consistía esencialmente, en aproximar el área mediante sumas de infinitos rectángulos circunscritos (lo que consideraríamos como suma superior).

3.3. Wallis y Barrow.

Wallis publicó en 1655 su obra *Arithmetica infinitorum*. Llegó al resultado

$$\int_0^1 x^m dx = \frac{1}{m+1}$$

por inducción incompleta, eliminando el marco geométrico que había necesitado Cavalieri en su demostración.

Barrow escribió en 1670 el tratado *Lectiones geometricae*, en el que ocupaban un lugar importante los problemas de tangentes. En él explicó un método de determinación de tangentes que es prácticamente idéntico al que se usa actualmente en el cálculo diferencial. El método se parece mucho al de Fermat, pero en él aparecen dos cantidades, en vez de la única que usa Fermat representada por la letra E. Dichas cantidades equivalen a los términos modernos Δx e Δy.

De todos los matemáticos que anticiparon fragmentos del cálculo diferencial e integral, Barrow fue el que más se aproximó al nuevo análisis que se avecinaba. Ocupaba la cátedra lucasiana en Cambrigde y, cuando fue nombrado capellán del rey Carlos II de Inglaterra, a propuesta de él mismo le sucedió Newton.

3.4. Newton y Leibniz.

En la obra de Newton *De Analysi* encontramos la primera exposición sistemática del principal descubrimiento de Newton, el cálculo. El más importante maestro de Newton fue Barrow, y formuló un método sistemático de diferenciación similar al que su maestro publicó unos años después. También demuestra en esa obra que el área bajo la curva $y = ax^{m/n}$ viene dada por

$$A = \frac{n}{m+n} ax^{\frac{m+n}{n}}$$

Dicha área la calculó al revés. Supuso que el área era esa y obtuvo que tenía que ser de la función y. Parece ser que fue la primera vez en la historia de la matemática que se calculaba un área mediante el proceso inverso de lo que llamamos diferenciación, aunque dicho proceso podía ser ya conocido por otros matemáticos. Es por ello por lo que Newton puede ser considerado como el verdadero inventor del cálculo, porque fue capaz de explotar la relación inversa existente entre pendiente y área mediante su nuevo análisis infinito.

En la exposición que hace Newton de sus métodos infinitesimales, consideraba a las variables x e y como cantidades que fluyen o “fluentes” y a sus derivadas “fluxiones” o velocidades de variación, denotándolas por $\dot{x}$ e $\dot{y}$. Duplicando los puntos representaba fluxiones de fluxiones (derivadas segundas).

Newton no fue el primero en efectuar diferenciaciones e integraciones, ni tampoco el primero en ver las relaciones que existían entre estas dos operaciones, expresado en el teorema fundamental del cálculo. Su descubrimiento consistió en la consolidación de estos elementos en un algoritmo general aplicable a todas las funciones, tanto algebraicas como trascendentes.

Con el método de las fluxiones Newton resolvió los siguientes problemas:

a) Determinación del centro y del radio de curvatura de una función.
b) Trazado de tangentes.
c) Obtención de máximos y mínimos, anulando la fluxión.
d) Determinación de los puntos de inflexión, determinando el máximo o el mínimo del coeficiente angular de la tangente.

Leibniz llegó a la conclusión de que estaba en posesión de un método de gran importancia (el método de las fluxiones según Newton) por su generalidad varios años después que su colega Newton. Pero sostuvo que era necesario desarrollar un lenguaje y una notación adecuados para tratar estos nuevos problemas. La notación que eligió fue muy acertada. Se decidió a representar por *dx* y *dy* las diferencias más pequeñas posibles (diferenciales) de la *x* y de la *y*. Igualmente, al principio escribía *omn.y* para representar la suma de ordenadas bajo una curva, pero más tarde lo cambió por el símbolo $\int ydx$, siendo el símbolo una S esbelta, inicial de la palabra suma.

Tanto Newton como Leibniz obtuvieron propiedades de las derivadas, cada uno con su notación. Newton llegó a saber que

$$Z = xy \quad \Rightarrow \quad \dot{Z} = \dot{x}y + x\dot{y}$$

Leibniz se preguntó si d(xy)=dx·dy, siendo su respuesta negativa, pero obteniendo a cambio la expresión correcta a la expresión general

$$d^n(xy)$$

Newton y Leibniz desarrollaron rápidamente los dos su nuevo análisis hasta incluir las diferenciales o fluxiones de orden superior.

Pero esas no fueron sus únicas contribuciones a la matemática. En las publicaciones de Newton *Method of Fluxions* y *De Analysi* nos encontramos con un método de resolución aproximada de ecuaciones, conocido actualmente como método de Newton. Y en la primera de las dos publicaciones anteriores también nos encontramos con lo que más tarde se llamaría "el paralelogramos de Newton" y que resultaba útil para los desarrollos en series infinitas y para el trazado de curvas.

4. SIGLO XVIII.

4.1. La Familia Bernoulli y L´Hospital

Nunca, a lo largo de la historia de la matemática, ha producido una familia tantos matemáticos famosos como la familia Bernoulli. Más o menos una docena de miembros de esa familia consiguieron destacar en matemáticas y física.

Fue Jean Bernoulli quien, en 1692, instruyó en la nueva disciplina leibziana a un joven marqués francés llamado L´Hospital, firmando con él un pacto por el cual se comprometía a enviarle a L´Hospital sus descubrimientos en matemáticas a cambio de un salario. Entre las cosas que publicó L´Hospital fruto del acuerdo anterior es una regla que hoy en día lleva su nombre. Jean Bernoulli había descubierto que si f(x) y g(x) son funciones diferenciables en x=a tales que f(a)=g(a)=0 y existe el límite

$$\lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} \quad \Rightarrow \quad \lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Esta conocida regla la incorporó L'Hospital en el primer texto sobre calculo diferencial que apareció escrito, *Analyse des infiniment petits*, publicado en París en 1696. Este libro, cuya influencia se extiende a lo largo de la mayor parte del siglo XVIII, se basa en dos postulados:

a) Se pueden tomar como iguales dos cantidades que difieren sólo en una cantidad infinitamente pequeña.
b) Una curva puede ser considerada como formada por segmentos de línea recta infinitamente pequeños de determinan, por medio de los ángulos que forman unos con otros, la curvatura de la curva.

Las fórmulas diferenciales básicas para las funciones algebraicas las obtiene L'Hospital a la manera de Leibniz, y las aplica al cálculo de tangentes, máximos y mínimos, puntos de inflexión, curvaturas y límites en forma indeterminada.

Jean Bernoulli era consciente de las relaciones que existían entre las funciones trigonométricas inversas y los logaritmos de números imaginarios, descubriendo en 1702 la relación siguiente, al estudiar ciertas ecuaciones diferenciales:

$$\operatorname{arctg} z = \frac{1}{i} \ln \sqrt{\frac{1+iz}{1-iz}}$$

4.2. Cotes, Stirling, Maclaurin, Taylor y Rolle.

Roger Cotes fue un matemático que murió joven dejando gran cantidad de trabajos incompletos. Uno de ellos versaba sobre integración de funciones racionales mediante descomposición en fracciones parciales.

Stirling completó la clasificación que realizó Newton sobre las curvas cónicas, añadiendo algunas más que se le pasaron a Newton. También obtuvo asíntotas verticales de funciones racionales, igualando el denominador a cero.

Maclaurin obtuvo sorprendentes resultados en geometría y por tanto resulta sorprendente que se le recuerde en relación a una parte del análisis en la que se le anticiparon varios matemáticos. La llamada serie de Maclaurin es sólo un caso especial de la serie más general de Taylor.

La serie que lleva su nombre la publicó Taylor en su obra *Methodus incrementorum*. En esta obra también nos encontramos con otros temas del cálculo, como soluciones singulares de ecuaciones diferenciales, o fórmulas que relacionan las derivadas de una función con las derivadas de la función inversa, por ejemplo:

$$\frac{d^2x}{dy^2} = -\frac{\frac{d^2y}{dx^2}}{\left(\frac{dy}{dx}\right)^3}$$

Michel Rolle fue uno de los matemáticos que cuestionó la validez de los nuevos métodos propuestos por L'Hospital. Pero se le recuerda más por el teorema que lleva su nombre, que publicó en 1691.

4.3. Euler.

La obra de Euler marcó toda una época. Podemos afirmar que Euler hizo por el análisis infinitesimal de Newton y Leibniz lo que Euclides había hecho por la geometría de Eudoxo o lo que Viète había hecho por el álgebra de Al-Khowarizmi. Euler cogió el cálculo diferencial y el método de fluxiones y los integró en una rama más general de la matemática llamada "Análisis" o estudio de los procesos infinitos. La obra de Euler *Introductio in analysin infinitorum* se puede considerar como la piedra angular del nuevo análisis. Este importante tratado en dos volúmenes fue la fuente de la que se nutrieron los matemáticos de la segunda mitad del siglo. Desde ese momento, la idea de función pasó a ser la idea fundamental del análisis.

El primer volumen de la obra de Euler trata de procesos infinitos: productos infinitos, fracciones continuas infinitas y gran cantidad de series infinitas. Esta obra es una generalización de los puntos de vista de Newton, Leibniz y los Bernoulli, los cuales mostraron un gran interés por las series infinitas. Al contrario que los anteriores, Euler obtuvo resultados que los anteriores persiguieron sin éxito, como por ejemplo obtener la suma de los inversos de los cuadrados perfectos.

La gran imaginación que puso Euler en el tratamiento de las series le llevó a descubrir algunas relaciones sorprendentes entre el análisis y la teoría de números. Demostró que la divergencia de la serie armónica implica el teorema euclídeo de la existencia de infinitos números primos.

Una de las más interesantes ecuaciones diferenciales que se estudiaron en el siglo XVIII es la que D'Alembert llamó ecuación de Riccati:

$$y' = p(x)y^2 + q(x)y + r(x)$$

Esta ecuación fue estudiada por muchos matemáticos entre los que se encontraban algunos Bernoulli, así como Jacopo Riccati y su hijo Vincenzo. Pero fue Euler el que se dio cuenta que si se conoce una solución particular v=f(x), entonces la sustitución $y = v + \frac{1}{z}$ convierte a la ecuación de Ricatti en una ecuación diferencial lineal en z, de forma que se puede hallar una solución general.

4.4. Legendre y Lagrange.

Los campos en los que Legendre hizo contribuciones importantes fueron numerosos, entre los que encontramos el cálculo, la teoría de las ecuaciones diferenciales, la teoría de funciones, etc. Escribió un tratado en tres volúmenes, *Exercises du calcul intégral*, que rivalizó con los de Euler por su amplitud y autoridad. Creó algunas herramientas muy útiles para los físicos matemáticos, como las funciones que llevan su nombre, que son soluciones de la ecuación diferencial de Legendre

$$\left(1 - x^2\right)y'' - 2xy' + n(n+1)y = 0$$

Las soluciones polinómicas de esta ecuación para valores naturales de n se conocen con el nombre de polinomios de Legendre. También centro parte de sus esfuerzos en reducir las integrales elípticas a tres formas canónicas que por eso llevan su nombre.

Lagrange escribió dos cursos para sus alumnos. El primero era de álgebra y el segundo, llamado *Théorie des fonctions analytiques*, de análisis. En ese curso nos encontramos con el nombre de *derivada* que utilizamos actualmente.

La primera contribución de Lagrange y quizá la más importante, fue el cálculo de variaciones. Se trata de una nueva rama de la matemática y, en su forma más simple, de lo que trata es de determinar una cierta relación funcional y=f(x) tal que una integral

$$\int_a^b g(x,y)dx$$

tome un valor máximo o mínimo.

También introdujo Lagrange el método de variación de las constantes en la resolución de ecuaciones diferenciales no homogéneas.

5. SIGLO XIX.

5.1. Gauss

Una de las aportaciones más importantes de Gauss a la Matemática fue demostrar que toda función polinómica igualada a cero posee al menos una raíz, ya sea real o compleja.

Su aportación más brillante al análisis fue el siguiente teorema: Si en el plano complejo o de Gauss dibujamos una curva cerrada simple, y si una función f(z) de la variable compleja z=x+iy es analítica (es decir, tiene derivada) en todo punto de la curva y en todo punto interior, entonces la integral de línea de f(z) tomada a lo largo de la curva es cero.

También aportó resultados sobre las funciones elípticas, y consecuentemente, sobre integrales elípticas.

5.2. Cauchy.

Cauchy escribió, como profesor de la Escuela Politécnica, escribio varios libros entre los que destacamos tres, que dieron al cálculo infinitesimal elemental la forma actual. Prescindiendo de la geometría y de los infinitésimos que se habían usado hasta entonces, formuló una definición de límite casi tan precisa como la definición moderna: *Cuando los sucesivos valores que toma una variable se aproximan indefinidamente a un valor fijo, de manera que terminan por diferir de él en tan poco como queramos, este último valor se llama límite de todos los demás.*

En el cálculo de Cauchy, los conceptos de función y de límite de una función son los conceptos fundamentales. Para definir la derivada de la función y=f(x) con respecto a x, le da a la variable x un incremento Δx=i y forma el cociente:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+i) - f(x)}{i}$$

y al límite de este cociente de diferencias cuando i tiende a cero, lo define como la derivada f'(x) de y con respecto a x. La diferencial, que había desempeñado un papel muy importante, la relega a una posición secundaria.

También dio una definición de función continua: *la función f(x) es continua entre límites dados de la variable x, si entre estos límites un incremento infinitamente pequeño i de la variable x siempre da lugar a un incremento infinitamente pequeño f(x+i) – f(x) de la función misma.*

5.3. Bolzano.

Ideas muy parecidas a la obra de Cauchy también las desarrollaba de forma casi paralela un cura checoslovaco llamado Bolzano. Las analogías en su aritmetización del cálculo, en sus definiciones de límite, derivada, continuidad y convergencia fueron sólo una coincidencia. Bolzano publicó en 1817 un libro dedicado a dar una demostración puramente aritmética o analítica del teorema del valor intermedio para funciones continuas, lo que exigía un planteamiento no geométrico de la idea de continuidad de una función o una curva.

También descubrió que existen funciones patológicas que no se comportan como habían supuesto los matemáticos que lo harían. Así, dio el primer ejemplo de función continua en un intervalo que no poseía derivada en ningún punto de dicho intervalo. Dicho ejemplo pasó inadvertido, pasando dicho mérito a Weierstrass 30 años más tarde.

5.4. Fourier y Dirichlet.

La contribución más importante de Fourier fue la idea de que cualquier función se puede expresar por una serie de la forma

$$y = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{i=1}^{\infty} a_i \cos ix + \sum_{i=1}^{\infty} b_i \operatorname{sen} ix$$

serie que hoy se conoce por el nombre de serie de Fourier. Los coeficientes del desarrollo se pueden obtener como

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx \qquad a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nxdx \qquad b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\operatorname{sen} nxdx$$

Dirichlet dio la primera demostración rigurosa de la convergencia de una serie de Fourier para una función que cumpla ciertas restricciones, conocidas como condiciones de Dirichlet.

5.5. Riemann

Riemann fue el sucesor de Dirichlet en la universidad de Gotinga. Obtuvo varios teoremas que relacionaban la teoría de números con el análisis clásico. En análisis contribuyó a los refinamientos en la definición de integral, al énfasis que puso en las ecuaciones de Cauchy-Riemann y a las superficies de Riemann.

5.6. La Aritmetización del Análisis.

La palabra clave del análisis es la de "función", y fue en la clarificación de este término como fue surgiendo la tendencia de la aritmetización. En 1872 se publicaron importantes trabajos que contribuyeron a la aritmetización del análisis, siendo sus autores Mèray, Weierstrass, Heine, Cantor y Dedekind. Terminaron con medio siglo de investigaciones entorno a la idea de función y de número. Durante esos cincuenta años hubo dos causas que impidieron un avance efectivo. La primera era la falta de confianza al realizar operaciones con series infinitas, y la otra era la ausencia de una definición precisa del concepto de número real. De hecho, la aritmetización plena y correcta del análisis se hizo posible cuando los matemáticos entendieron los números reales como "estructuras intelectuales" y no como magnitudes heredadas de la geometría.

Mèray fue el primero en comenzar a publicar sus resultados. Hasta ese momento se definía el límite de una sucesión como un número real y luego se definían los números reales como límite de sucesiones de racionales. Este matemático renunció a usar la condición externa de convergencia, y utilizando solamente el criterio de Cauchy describió la convergencia sin hacer referencia a los irracionales.

Weierstrass también trató de separar el análisis de la geometría y basarlo únicamente en el concepto de número. Pero para ello resultaba necesario dar una definición de número irracional independiente del concepto de límite. Solucionó el problema de la existencia del límite de una sucesión convergente identificando la solución misma con el número límite.

La teoría de Heine se parece mucho a la de Mèray afirmando que las sucesiones que no convergen a números racionales se las considera que definen números irracionales.

Dedekind introdujo sus cortaduras para definir los números reales. Y Cantor se dio cuenta de que no todos los conjuntos infinitos son del mismo tamaño (por ejemplo los naturales y los reales), definiendo el concepto de potencia del conjunto.

6. SIGLO XX.

6.1. Poincaré.

La tesis doctoral de Poincaré versó sobre los teoremas de existencia de soluciones de ecuaciones diferenciales. Esto le llevó al estudio de las propiedades de las funciones automorfas. Una función automorfa f(z), con z variable compleja, es una función analítica en un dominio D, excepto en los polos correspondientes, y que es invariante bajo un grupo infinito numerable de transformaciones de Möbius.

6.2. Hilbert.

Hilbert presentó, en el congreso de París de 1900, 23 problemas que según su criterio debían de estar entre los que ocupasen la atención de los matemáticos a lo largo del nuevo siglo que comenzaba. Como ejemplo diremos que el primero de esos 23 problemas se refería a la estructura del continuo de los números reales, que algo ya habían estudiado anteriormente Cauchy, Bolzano y Cantor, entre otros.

Bibliografía Recomendada.

Análisis Matemático I. Aut. J.A. Fernández Viña. Ed. Tecnos

Principios de Análisis Matemático. Aut. W. Rudin. Ed. McGraw-Hill

Curso de Análisis Matemático I. Aut. E.L. Luna. Ed. Edunsa, 1991.

Calculus. Aut. M. Spivak. Ed. Reverté.

Calculus. Aut. Apostol. Ed. Reverté

Historia de la Matemática. Aut.: Carl B. Boyer. Ed.: Alianza Editorial.