TEMAS DE MATEMÁTICAS
(Oposiciones de Secundaria)

TEMA 56

EVOLUCIÓN HISTÓRICA DE LA GEOMETRÍA.

TEMA 56

EVOLUCIÓN HISTÓRICA DE LA GEOMETRÍA.

1. INTRODUCCIÓN.

Comencemos indicando que la palabra “Geometría” significa, en griego, “medir la tierra”. Se cree que la geometría surgió a orillas del río Nilo, cuando surgió la necesidad de medir las tierras de labranza después de las crecidas para poder fijar el impuesto a pagar al faraón.

La Geometría surgió a través de un lento proceso de abstracción de las formas de la Naturaleza, las cuales estaban idealizadas. Así, fueron apareciendo los conceptos de recta, curva, círculo, triángulo, superficie, volumen. Este proceso de observación se vio estimulado por la necesidad de controlar la Naturaleza, de servirse de ella. Por tanto, la geometría se desarrolló por las necesidades de dividir la tierra, de construir, etc.

2. LAS CIVILIZACIONES MÁS ANTIGUAS.

2.1. Egipto.

La civilización egipcia se desarrolló considerablemente desde tiempos muy remotos. Ya hemos dicho que los egipcios disponían de un estímulo muy especial y era el Nilo. Ya desde el 5.000 a.C., el río, con sus inundaciones, borraba los mojones de separación y era necesario distribuir las tierras todos los años. Este hecho provocó que se reemplazara el calendario lunar por el solar.

Uno de los primeros textos matemáticos existentes es el “Manual de Ahmes” que data del 1.700 a.C. y se titula “Orientaciones para conocer todas las cosas oscuras”. Es un manual para la formación de funcionarios reales. Está escrito en lenguaje jeroglífico y, a pesar de sus equivocaciones (quizá el que lo escribió no sabía lo que estaba escribiendo), contiene una colección de problemas de cálculo de capacidades de contenedores y almacenes, áreas de porciones de tierras, dimensiones de terraplenes, etc. Estos problemas nos ilustran sobre la evolución de la ciencia como resultado de las necesidades de la sociedad paleolítica y urbana.

Un mural de hace 3.000 años nos muestra a los agrimensores llevando una cuerda con 12 nudos equidistantes. Al transformar dicha cuerda en un triángulo rectángulo se transforma en un instrumento muy útil para fijar los lindes de los terrenos.

Entre sus conocimientos sobre geometría encontramos fórmulas de superficies del triángulo y del rectángulo, volúmenes de pilas de grano, y en forma aproximada, el valor de π:

$$p \approx \left(\frac{16}{9}\right)^2 \approx 3'16$$

También disponían de una palabra especial para la función Cotangente, ya que la usaban muy a menudo en la construcción de las pirámides. Obtenían geométricamente las raíces cuadradas y es posible que conocieran el Teorema de Pitágoras para los datos 3, 4 y 5. A su vez, trazaban ángulos rectos, eran capaces de dividir la circunferencia en seis partes, pero lo más notable era que también la dividían en 5 y 7 partes (construcción de pentágonos y heptágonos), aunque los métodos eran sólo aproximados. Se especula también con que conocieran el “segmento áureo”, por los datos de Herodoto sobre la Gran Pirámide.

A pesar de las opiniones de matemáticos como Aristóteles, que afirmaba que las matemáticas se originaron en Egipto porque la clase sacerdotal disponía de tiempo para el estudio, se puede deducir de lo anterior que la matemática egipcia era eminentemente práctica.

Es más, la matemática egipcia no consiguió abstraer los casos particulares a una teoría general. Cada método lo ilustran con un ejemplo y lo resuelven para cada caso particular. Y lo mismo sucederá con la matemática babilónica. Para obtener la generalización tendremos que esperar a los Griegos.

2.2. Babilonia.

La civilización babilónica no es menos antigua que la egipcia y sus conocimientos matemáticos son, hasta cierto punto, paralelos. Es característico en ellos el empleo del sistema sexagesimal y los estudios astronómicos. Aun hoy utilizamos la base 60 en mediciones de ángulos y tiempos. En Geometría sus conocimientos no fueron abundantes ni profundos. Conocían el área del triángulo, del rectángulo y del trapecio, volúmenes de prismas rectos y pirámides de base cuadrada. También disponían de nociones sobre triángulos semejantes y conocían algún caso particular del teorema de Pitágoras.

2.3. India.

La matemática en la antiquísima civilización hindú fue poco notable en estas primeras épocas y más bien fue de carácter fantástico.

2.4. China.

La civilización china, con dinastías anteriores al 3.000 a.C. (los tres reyes sabios de Confucio), probablemente tuvo grandes conocimientos prácticos, pero nada ha podido ser comprobado. Ello se debe a que en el año 213 a.C. un emperador retrógrado, Shi-Huang Ti (el gran emperador amarillo) hizo quemar todos los libros científicos.

3. GRECIA.

3.1. Los Comienzos de la Matemática Griega.

Alrededor del año 900 a.C. se efectúa el paso de la Edad del Bronce a la Edad del Hierro en el mediterráneo oriental y tienen lugar grandes cambios en la organización de estos pueblos, declinando culturas como la cretense, egipcia y mesopotámica. Aparecen nuevas formas sociales, como la polis griega, que ya no sólo vive del campo, sino sobre todo del comercio. En esta ascensión de la matemática griega, son adelantadas las ciudades del Asia Menor, recogiendo el legado (sobre todo egipcio) por parte de Thales de Mileto y Pitágoras.

Los griegos se distinguieron en dos campos: los números o aritmética y la geometría. Sobre todo en esta última, que vive su primera época de oro.

En Grecia, la matemática se convierte en una ciencia deductiva, partiendo de axiomas, postulados y definiciones, para llegar a teoremas. Eso fue debido gracias a su excepticismo y razón, lo que posibilitó la formulación, por primera vez, de los dos procesos mentales vitales para el progreso matemático: la abstracción y la demostración.

Distinguieron entre dos clases de premisas, las generales, que llamaron axiomas, y las específicas, que llamaron postulados. La Inducción surgió como un nuevo proceso mental (el tercero) a fin de poder disponer de premisas para comenzar. También procede de los griegos el "método de reducción al absurdo" como forma de demostrar los teoremas.

3.1.1. Thales de Mileto.

Fue Thales de Mileto el primer griego que estableció directrices para el estudio de la geometría, en términos abstractos, independientemente de cualquier aplicación práctica. Formó parte de los siete sabios de Grecia y el primero de la llamada escuela jónica.

Vivió en la primera mitad del siglo VI a.C. y como comerciante viajó a Egipto y aprendió sus conocimientos. A él se le atribuyen conocimientos geométricos que, probablemente, eran ya conocidos. Lo más importante es que, como toda la matemática griega posterior, hace demostraciones y afirmaciones generales, no para cada ejemplo particular.

A él se le asigna el concepto de lugar geométrico, y los teoremas:

- Los ángulos de la base de un triángulo isósceles son iguales.
- Todo diámetro divide a la circunferencia en dos partes iguales.
- Los ángulos opuestos por el vértice son iguales.
- Todo ángulo inscrito en una semicircunferencia es recto

3.1.2. Pitágoras.

Pitágoras, natural de la isla de Samos (Asia Menor), estudió con Thales. Fue un hombre de gran personalidad, y se pasó la primera parte de su vida viajando, tratando así de aumentar sus conocimientos matemáticos. En la segunda mitad del siglo VI a.C. fundó la escuela pitagórica en Cretona (Italia Meridional). Se dedicaba al estudio de la medicina, la filosofía y las matemáticas. Su pensamiento era idealista y los números tenían propiedades mágicas. Su símbolo de hermandad era la estrella de cinco puntas y el secreto de sus investigaciones era riguroso.

Para los pitagóricos, la geometría era, en consonancia con su concepción metafísica, una geometría de cuerpos sólidos y de figuras planas.

Por número entendían el número entero y, al descubrir los irracionales, provocó tal crisis en la aritmética griega que terminaron inclinándose por la geometría. Obtuvieron $\sqrt{2}$ y $\sqrt{3}$ como hipotenusas de determinados triángulos y les apareció π al medir la longitud de la circunferencia.

En Geometría, Pitágoras introdujo los conceptos de elipse, parábola e hipérbola. También conocían los cinco poliedros regulares, aunque se piensa que cuatro de ellos ya eran conocidos de antes. Dieron una forma de construir el dodecaedro y el icosaedro. Conocían la propiedad de que sólo tres polígonos regulares (triángulo, cuadrado y hexágono) recubrían el plano, lo que lleva a pensar que dedujeron que la suma de los ángulos de un triángulo equivalía a dos rectos.

Claro está, a todos estos conocimientos tenemos que añadir el teorema de Pitágoras, que se piensa que fue el propio Pitágoras quien lo formuló en su forma general.

3.1.3. La Escuela de Atenas.

En el siglo V a.C. Atenas adquirió la preeminencia tras la victoria sobre los persas y tiene lugar una época de florecimiento científico. Se funda la Escuela de Atenas, que vivirá los siglos V y IV a.C. y entre cuyos representantes encontramos a Anaxágoras, Hipócrates, Menecmo, Demócrito, Platón, Eudoxio. Contemporáneos a éstos tenemos al pitagórico Arquitas y a Zenón de Elea.

Anaxágoras de Esmirna llegó a Atenas y fue amigo de Pericles. Se piensa que se ocupó de la cuadratura del círculo, pero no se disponen de referencias precisas. En aquella época se plantearon tres problemas que se hicieron famosos y clásicos y de los que, en el siglo XIX, se demostraría su imposibilidad por métodos de regla y compas. Los problemas eran:

- La duplicación del cubo.
- La trisección del ángulo.
- La cuadratura del círculo.

Hipócrates de Chios trabajó sobre la cuadratura del círculo, logrando la cuadratura de las lúnulas que llevan su nombre, ejemplo práctico de la cuadratura. En estos intentos se descubrieron multitud de curvas y superficies nuevas. Fue el autor del primer tratado de matemáticas elementales que se conoce. Planteó las siguientes razones para resolver la duplicación del cubo:

$$a : x = x : y = y : 2^a$$

de donde:

$$x^3 = 2a^3$$

por lo que se estudiaron las medias geométricas

Menecmo también llevó a cabo la duplicación del cubo por el procedimiento anterior. Y estudió las secciones cónicas.

Arquitas de Tarento fue contemporáneo de Menecmo. Se preocupó de la duplicación del cubo y fue uno de los primeros autores en escribir sobre mecánica.

Demócrito de Abdera (Tracia) se adelantó a Arquímedes en el estudiode volúmenes de pirámides y conos, mediante el procedimiento de descomposición en capas cada vez más delgadas, antecedente del cálculo infinitesimal.

Zenón de Elea se hizo famoso por ser el autor de las "aporías". En ellas planteaba las insuficiencias del pensamiento lógico, las cuales no se resolvieron hasta la formalización del concepto de límite por Cauchy en el siglo XIX. Entre las más conocidas tenemos las paradojas de Aquiles y la tortuga y también la de la flecha.

Platón fue discípulo de Sócrates y podemos decir de él que fue el fundador de la escuela ateniense. Su preocupación fueron fundamentalmente los números.

Más interés para la geometría tiene Eudoxio, que resolvió la crisis planteada por los inconmensurables, estableciendo una teoría de proporciones de segmentos. Ello significó que la aritmética dejo de servir para la geometría, al no introducirse el concepto paralelo de número irracional. Los griegos desarrollaron a partir de ese instante una geometría totalmente separada del cálculo numérico. A Eudoxio se le atribuye el llamado "Axioma Arquimediano" que dice que dadas dos magnitudes A y B, siendo B la menor y no nula, se puede obtener un múltiplo de B que sea mayor que A. Su descubrimiento indica la penetración del espíritu científico de la época.

3.2. La Escuela de Alejandría.

En el año 338 a.C. Grecia es unificada por Filipo de Macedonia y la península pierde su impulso científico. Alejandro Magno, hijo de Filipo, conquista todo el Oriente y funda la ciudad de Alejandría, en el delta del Nilo, pero muere en 323 aC. Sus sucesores en Egipto, los Ptolomeos, harán de Alejandría la capital de su imperio y el centro cultural de Oriente, que pervivirá hasta que el Califa Omar toma Egipto en el año 642 d.C.

En Alejandría se fundó una biblioteca y un museo, donde centenares de sabios y estudiosos enseñaron y aprendieron, gracias a que se universalizó el idioma griego. En ese ambiente científico hemos de destacar a tres grandes matemáticos: Euclides, Arquímedes y Apolonio.

3.2.1. Euclides.

Euclides fue maestro en la universidad de Alejandría y pasó a la posteridad como autor de los "Elementos". Esta obra se compone de 13 libros y 465 proposiciones, constituyendo una de las obras más perfectas del pensamiento matemático. Recoge todo el saber geométrico y aritmético, exponiéndolo en forma de riguroso tratado a partir de sus cinco axiomas en geometría.

Los libros I, II, IV y V tratan de líneas, áreas y figuras planas regulares simples, siguiendo a los pitagóricos.

El libro III trata de los círculos, siguiendo a Hipócrates.

El libro V elabora el trabajo de Eudoxio sobre las proporciones, que necesita otras partes del trabajo.

El libro VI trata de la semejanza de figuras.

Los libros VII, VIII y IX tratan de la teoría de números: máximo común divisor, mínimo común múltiplo, algoritmo de Euclides, etc. Es muy curiosa y nada fácil su teoría de los números perfectos.

El libro X habla de los irracionales, en particular de los de la forma

$$\sqrt{\sqrt{a} \pm \sqrt{b}}$$

con a y b naturales. En este libro aparece el método de demostración de Eudoxio y la escuela ateniense y el principio del descenso infinito.

El libro XI trata de la geometría del espacio.

El libro XII es importantísimo, ya que trata del método exhaustivo de nuevo y demuestra el área del círculo.

El libro XIII trata de la construcción de los cinco cuerpos geométricos regulares de Pitágoras, siendo el último de ellos el dodecaedro.

Otros dos libros, a veces añadidos en ediciones posteriores, son respectivamente de Hippias y de Damasceno. El primero de ellos fue un astrónomo del siglo II d.C. y el segundo fue del siglo VI d.C.

Los elementos han sido la fuente de geometría que ha estudiado Europa y su profundidad no ha sido sobrepasado hasta el siglo XIX.

Un detalle que merece la pena destacar es el “axioma de las paralelas”. Durante mucho tiempo pareció evidente, pero todo intento de demostración cometía errores. Finalmente, en el siglo XIX, Lobachebski y Bolyai mostraron dos geometrías no euclídeas, ya que no verificaban dicho axioma.

Euclides escribió otros libros de menor importancia, como son “Datos” y “División de Figuras”.

3.2.2. Arquímedes.

Arquímedes de Samos vivió en Siracusa (Sicilia), donde murió a manos de los romanos. Había vivido en Alejandría y aprendió el saber de entonces. Es considerado como el mayor matemático de la antigüedad.

Fue un gran calculista, mejorando la determinación del número π hasta alcanzar cinco cifras decimales exactas. Como mecánico descubrió la ley de la palanca y en hidráulica el principio que lleva su nombre.

En geometría podemos destacar obras suyas como “De las Espirales”, “De la medida del Círculo”, “De la Esfera y el Cilindro” y “De los Conoides y los Esferoides”. Es en los dos últimos donde nos podemos encontrar con las fórmulas de superficie y volumen de la esfera, superficies de revolución de segundo grado, superficie de la elipse, etc. También podemos destacar otra obra sobre “Las Líneas Espirales” donde su tratamiento de las tangentes es propio del cálculo infinitesimal. También calculó el área limitada por una parábola.

Precisamente fue el cálculo del volumen de la esfera de lo que más orgulloso se sentía. Lo obtuvo viendo que era igual a dos terceras partes del volumen del cilindro cincunscrito más pequeño.

Su método era tan riguroso que perduró como modelo de demostración. Pero hemos de resaltar que a los resultados solía llegar por procedimientos más intuitivos, como el mismo reconocía. También parece ser de Arquímedes la llamada Fórmula de Herón, para el cálculo del área del triángulo en función de sus lados.

3.2.3. Apolonio.

Apolonio de Perga escribió, hacia el año 200 a.C., su teoría de las secciones cónicas. Fue una obra tan completa que hasta nuestros días no se ha podido añadir algo. consta de ocho libros y se definen y estudian en ellos la elipse, la parábola y la hipérbola, asíntotas, diámetros conjungados, ejes, tangentes, polos, polares, haces de rectas, focos, etc.

También nos podemos encontrar en dichos estudios sobre rectas normales e incluso sobre la evoluta.

Además fue astrónomo y aritmético, y se le considera uno de los matemáticos más importantes de la antigüedad.

3.3. Matemáticos Griegos Tardíos.

Con Apolonio finaliza la edad de oro de la geometría en Alejandría. En el año 146 a.C. Grecia cayó en poder de Roma y en el 45 a.C. cayó la ciudad de Alejandría. Entre los matemáticos dedicados a la geometría de esta época podemos destacar varios.

Menelao de Alejandría (siglo I d.C.) demostró teoremas de Geometría, uno de los cuales lleva su nombre. Se le debe una “Esférica”, donde aparece por primera vez el triángulo esfércio.

Ptolomeo vivió a lo largo del siglo II d.C. Escribió trece libros traducidos al árabe bajo el nombre de “Almagesto”. Resumen los conocimientos astronómicos de su tiempo y tratan lo que hoy entendemos como seno de un ángulo, son fórmulas como Sen(a±b) y tablas en intervalos de 30º.

Esta época de poco relieve bajo la dominación romana pareció reavivarse en Alejandría en el siglo III d.C. con matemáticos como Herón, Pappus y Diofanto.

En geometría podemos destacar a Pappus, que fue notable por comentar las obras de épocas anteriores, siendo en más de un caso, lo único que sabemos de ellas. Estudiando el volumen y superficie de cuerpos de revolución, descubrió los cuerpos que hoy en día llamamos de Guldin, matemático del siglo XVII.

En el siglo IV d.C. nos encontramos con Teón de Alejandría, que editó y comentó la obra de “Los Elementos” de Euclides. Y su hija, Hipatía, se ocupó de las cónicas de Apolonio.

4. ROMA.

El interés por la ciencia del pueblo romano fue prácticamente nulo. Los agrimensores sabían algo de geometría, cosas rudimentarias. Valga como ejemplo que cuando César quiso reformar el calendario tuvo que llamar a Sosígenas, un sabio de Alejandría.

Durante el siglo V dC. desaparece el imperio de Occidente. Los romanos, que parece que habían empezado a interesarse por las matemáticas, al convertirse al cristianismo, volvieron la espalda de nuevo a la ciencia. Ello fue debido a que el espíritu científico helenístico era contrario al cristianismo, que lo ligaba al paganismo.

5. LA EDAD MEDIA.

Desde el declinar de la matemática griega hasta el renacimiento de las ciencias en Europa en los siglos XVI y XVII, recorremos una época de más de mil años de poca fertilidad matemática. El mayor interés reside en la transmisión de los conocimientos antiguos a la edad moderna. El otro dato importante due la adopción del sistema de numeración moderno.

5.1. La India.

La India tuvo un interés casi nulo por la geometría y sus preocupaciones fueron más bien algebraicas y astronómicas. A ellos se debe un progreso fundamental y es el sistema de numeración decimal con valor relativo a la posición de los números. Este sistema fue transmitido por los árabes y potenciaría el renacimiento científico europeo.

Está sin decidir si los conocimientos matemáticos que aparecen hacia el siglo V d.C. en la India estuvieron influidos por los griegos mediante Alejandro Magno, o si se deben al contacto con Babilonia.

En los escritos que se han encontrado se proponen reglas para la construcción de los altares destinados a los sacrificios. Entre estos escritos nos podemos encontrar:

En los Siddhauta paraceren por primera vez las funciones circulares seno y coseno.

Aryabhata, en su obra Aryabhatiya, da reglas para el cálculo de áreas y volúmenes, donde algunas de ellas son exactas y otras aproximadas.

Bhaskara hace una demostración tanto gráfica como empírica del teorema de Pitágoras, así como de otros resultados, entre los que podemos citar la equivalencia entre un triángulo y un rectángulo de bases iguales, y entre un círculo y el rectángulo cuyos lados son el lado y la semicircunferencia.

5.2. Los Árabes.

Conquistadores en el siglo VII dC. de los dominios de la cultura helenística y extendiéndose hasta España y la India por uno y otro lado, tuvieron inclinación por las matemáticas, que copiaron al árabe de los antiguos manuscritos. De allí pasó al latín en el siglo XII principalmente gracias a la Escuela de Traductores de Toledo, bajo el reino de Alfonso X El Sabio.

Pero la geometría no les interesó mucho, aunque las obras de la antigüedad se las debemos en gran parte a ellos, como los “Elementos” o el “Almagesto”. Trabajaron el Álgebra y la astronomía y transmitieron a occidente el sistema de numeración hindú.

La primera figura árabe fue Al-Khuwarizmi, que vivió durante el siglo IX. Además de su “Álgebra”, que ya comentamos en otro tema de historia, también escribió una “Geometría” y tablas astronómicas donde aparece la función seno.

Los astrónomos árabes del siglo X ya usaban senos, tangentes y cotangentes en sus cálculos y trataron de problemas esféricos. Hubo comentarios a la Geometría de Euclides, una cuadratura de la parábola y del paraboloide. El poeta y matemático Omar Khayam usaba en problemas algebraicos intersecciones de cónicas.

Abu-al-Wafa escribió un libro sobre construcciónes geométricas como polígonos y poliedros. El persa Nasir Eddin, en el siglo XIII estudió la trigonometría independientemente de la astronomía, usando el teorema de Menelao.

5.3. La Edad Media Latina.

En la época de la caída de Roma ante los bárbaros, Boecio parece que escribió una Geometría (quizá una falsificación tardía) y estableció el Quadrivium o cuatro caminos: Aritmética, Música, Geometría y Astronomía. Su influencia en los estudios de la edad media fue notable.

De todos modos, la Geometría fue prácticamente olvidada en occidente y la Aritmética se redujo casi exclusivamente a las teorías de cálculos con el ábaco, al modo romano.

En el siglo XI la cultura árabe comienza a mostrar signos de decadencia, asomando un despertar cultural en el mundo cristiano, tanto en Oriente como en Occidente. Habrá que esperar al siglo XII para que aparezcan las traducciónes del árabe y la pujanza de las Universidades vaya recobrando su saber antiguo.

Es a partir de esta época, y hasta el siglo XV, podemos destacar a:

- Leonardo de Pisa, conocido como Fibonacci, (1170-1240), escribe “Práctica Geometriae”.
- Campano de Novara, en 1482, tradujo la obra de Euclides “Los Elementos”, Más que traducir, se dedicó fundamentalmente a comentar la obra.
- Jordanus Nemorarius, que escribió sobre Geometría y Álgebra.
- Nicolás de Cusa se ocupó de la cuadratura del círculo.
- Johannes Muller, también conocido como Regiomontano, escribió tablas de doble entrada para la tangente de un ángulo. A él se le debe el Teorema de los senos.
- J. Widmann (1489) escribió una obra en tres volúmenes. La parte dedicada a la geometría es muy irregular. Podemos destacar el cálculo de forma correcta del radio del círculo circunscrito a un triángulo, conocido un lado, su altura y la proyección de uno de los otros dos lados sobre él.
- Luca Pacioli fue el autor de una obra de carácter enciclopédico en la que resumió todo el saber geométrico de la época.

En el imperio de Oriente, el siglo V reunió en Atenas la escuela neoplatónica y se puede citar a Proclo. Fue disuelta por Justiniano acusada de defender el paganismo. La ciencia se fue perdiendo, pero de todas formas, desde el siglo X funcionó en Constantinopla una escuela científica. Cuando los turcos ocuparon Constantinopla en 1453, los emigrados griegos a occidente aportaron muchas obras de la antigüedad y contribuyeron al despertar científico.

6. LA EDAD MODERNA.

6.1. Siglo XVI.

En este siglo tiene lugar en Europa un florecimiento científico considerable, que prepara el de siglos posteriores. Se trabaja intensamente en Álgebra, donde Tartaglia, del Ferro y Cardano resuelven las ecuaciones de tercer y cuarto grado. Se trabaja en Cálculo, con el trascendental descubrimiento de los logaritmos por John Napier. También se producen avances en Astronomía, de la mano de Tycho Brahe, Galileo, Copérnico, Kepler. Pero en Geometría no se producen progresos. Se editan y estudian las obras antiguas y se trata la cuadratura del círculo y otros temas semejantes.

Se obtiene la fórmula:

$$\frac{2}{\pi}=\sqrt{\frac{1}{2}}\cdot\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}\cdot\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}}\cdots$$

debida a Vieta, llegándose a calcular π con 28 cifras decimales exactas.

6.2. Siglo XVII.

6.2.1. La Geometría Analítica.

La gran novedad del siglo XVII es el empleo de coordenadas referidas a dos ejes arbitrarios del plano. de forma que todo punto puede representarse por un par de números. Esta es la obra que inician los matemáticos franceses Rene Descartes y Pierre de Fermat.

Descartes publicó en 1657 su famoso “Discurso del Método” cuya última sección, “Geometría”, trata de esta innovación que recibiría con el tiempo el nombre de Geometría Analítica. Dos son las ideas fundamentales:

- El concepto de coordenadas referidas a un par de ejes arbitrarios (no necesariamente rectangulares).
- La Relación entre ecuaciones con dos incógnitas y los lugares geométricos del plano, es decir, la ecuación $f(x,y)=0$, indeterminada como ecuación algebraica, representa una curva del plano cuyos puntos son aquellos que sus coordenadas satisfacen la ecuación.

El inconveniente principal de la época fue que tanto Descartes como sus contemporáneos rehuyeron el uso de coordenadas negativas. Por otra parte, fue corriente en este siglo no dibujar más que un solo eje: el de abcisas. . El mérito de Descartes estuvo en la introducción de la notación moderna, similar a la actual. A pesar de todo, su estilo era bastante oscuro.

Fermat hizo un trabajo similar pero de exposición más clara, aunque la notación fuese la antigua de los algebristas. Su obra se publicó en 1679 y se llamo “isagoge”.

Influidos por Descartes, Wallis escribió un tratado sobre las secciones cónicas y Jan de Witt sobre el trazado de curvas de segundo grado.

La introducción de coordenadas en el estudio analítico de la Geometría motivó la reanudación de estudios sobre la resolución gráfica de ecuaciones, en los que trabajaron también Descartes y Fermat.

Newton y Leibnitz se basaron en la Geometría Analítica para inventar el Cálculo Infinitesimal. El primero demostró analíticamente algunos teoremas de Geometría, como el de los diámetros de una curva de grado n.

La aplicación al espacio tridimensional resultó lenta. El tema lo trato Juan Bernouilli a finales del siglo. Las superficies se estudiaron a través de secciones planas, que pueden tratarse con dos coordenadas.

Por último, podemos destacar que el uso de coordenadas fue, en cierto sentido, introducido por Apolonio. Éste describía las cónicas por medio de las propiedades de las distancias de cada punto a los ejes (o sea, coordenadas) de forma que ecuaciones como la reducida de la parábola están ya implícitamente en sus trabajos. Pero una diferencia notable está en que nunca usó un sistema de referencia de dos ejes arbitrarios, es decir, independientes de la figura. En realidad, mucho del trabajo de este siglo consistió en traducir al lenguaje algebraico moderno los resultados de Apolonio. Veremos que a mediados del siglo siguiente, el XVIII, la Geometría superaba claramente a Apolonio y se aplicaba a multitud de cuestiones.

6.2.2. La Geometría Proyectiva.

Iniciada por el arquitecto francés Gerard Desargues, estudió la proyección central de los cuerpos geométricos y, en especial, las secciones cónicas, publicando la "perspectiva Abreviada" en 1639. Encontró poco interés y la obra fue prácticamente olvidada hasta 1845 en que se descubrió una copia de la obra. A este mismo tema se dedicó también el filósofo Blaise Pascal.

6.3. Siglo XVIII.

En este siglo podemos destacar, aparte de otros temas que veremos a continuación, a Euler, que publicó el Teorema sobre poliedros que lleva su nombre, aunque el enunciado ya era conocido por Descartes.

Saccheri contempla la posibilidad de que el quinto postulado de Euclides sea verdadero, por exclusión de las otras dos posibilidades. también Lambert estudió las posibilidades de geometría no euclídea.

La Geometría Descriptiva fue iniciada por Monge, con la representación de figuras en planta y alzado, un estudio tan perfecto que no se superó durante 50 años.

6.3.1. Geometría Analítica Plana.

El avance resultó ser lento, pues inicialmente se usaban las ecuaciones en coordenadas para representar puntos y no se usaba el hecho de que la ecuación manifiesta las propiedades de la curva.

Newton estudió sistemáticamente las curvas de tercer orden y las clasificó en tipos. También clasificó las curvas algebraicas por el grado y estudio las secciones cónicas.

La obra más influyente en la materia fue la "Introductio" de Leonard Euler, de 1748, de Basilea, que es una exposición completa de la Geometría Analítica de su tiempo. Estudia y clasifica las cónicas refiriéndolas a unos ejes y no al diámetro, rompiendo en este tema definitivamente con Apolonio. También habla de curvas trascendentes.

Otro libro clave fue la "Introducción al Análisis de las líneas curvas" del suizo Gabriel Cramer. Su método de representación de curvas con el estudio de puntos singulares de orden superior en el origen es aún utilizado (método de Newton-Cramer). Por diversos autores se estudiaron multitud de curvas particulares.

6.3.2. Geometría Analítica Espacial.

El avance es todavía más lento. Juan Bernouilli y Leibnitz usaron, a finales del siglo XVII, coordenadas en el espacio. Euler estudió los cambios de coordenadas ortogonales e introdujo los tres ángulos llamados de Euler. Después lo amplió al cambio de coordenadas n dimensionales.

Gaspar Monge estudia en 1771 la ecuación del plano y trata problemas de puntos y rectas en el espacio. Problemas análogos fueron estudiados por Lagrange.

6.3.3. Geometría Diferencial.

Euler, Juan Bernouilli y Clairaut trabajaron sobre las geodésicas y la curvatura de las superficies, dando las ecuaciones diferenciales de las primeras. Euler estudia el plano osculador y conjuntamente con Monge estudia las superficies desarrollables. Monge estudió el teorema de la curvatura en una superficie, llamado hoy teorema de Meusnier. Sin embargo, el concepto de curvatura media tendrá que esperar al Gauss en 1823. También trabajó Monge sobre los radios de curvatura y las líneas de curvatura.

Finalmente, se trató el tema de representación de superficies para fines cartográficos. Lambert estudió la proyección estereográfica y Euler y Lagrange estudiaron la proyección Mercator.

7. EDAD CONTEMPORÁNEA.

La edad de oro de la Geometría puede datarse entre la publicación de la “Geometría Descriptiva” de Monge en 1795 y del “Programa de Erlangen” de Félix Klein en 1872. Se efectúan progresos que llevan a la Geometría a cumplir en algunas ramas todos sus objetivos.

7.1. Geometría Descriptiva.

Se recupera el trabajo iniciado por Desargues en el siglo XVII sobre proyecciones centrales. Monge, al desarrollar la descriptiva y la proyección ortogonal prepara el terreno.

La figura más destacada es Víctor Poncelet, oficial del ejército de Napoleón. Prisionero en Rusia, usa extensamente los elementos (punto, recta, plano) del infinito, colocando a la Geometría en el marco del espacio proyectivo. Se distinguen las propiedades métricas de las proyectivas y se estudian las relaciones anharmónicas. Brianchon y Gergonne estudian las polares respecto a una forma cuadrática y la dualidad, como también Möbius y Plücker harán en la Geometría Analítica.

Además, Poncelet para al espacio proyectivo complejo e introduce los puntos cíclicos, con lo que se consigue la unidad de tratamiento, independiente de los casos de figura.

Se estudian las transformaciones proyectivas, homologías, involuciones. Esta geometría se orienta en sentido sintético, es decir, prescindir totalmente de las coordenadas, y tiene figuras de relieve de Jacobo Steingr y Miguel Chasles, suiza y francés respectivamente. La obra es culminada por Cristian von Staudt, que en su "Geometría de la posición" (1847), prescinde de los escalares en su tratamiento de la Geometría. Esto abre, con el tiempo, el camino a geometrías sobre un cuerpo cualquiera. Hacia 1850 la Geometría sintética llega a su apogeo.

7.2. Geometría Analítica.

El tomo IV del clásico "Curso de Matemáticas" de Lacroix expone todo el conocimiento del siglo XVIII. Al comienzo, pesada y falta de elegancia, referida a conceptos no intrínsecos (por una causa de los ejes arbitrarios), se convertirá en medio siglo en un poderoso instrumento de las más variadas disciplinas.

Hacen avances Gergonne, Bibillier y Lame, pero se deba más a Möbius, que introduce las coordenadas baricéntricas en su "Cálculo baricéntrico" (1827) y a Julio Plücker que introduce las coordenadas homogéneas y con ellas el tratamiento analítico de los elementos del infinito. Este introduce por dualidad las coordenadas plückerianas y ambos estudian las colineaciones y las propiedades proyectivas.

Plücker introduce también la Geometría Analítica los puntos imaginarios.

Ambas tendencias geométricas realizan así un estudio a fondo y en cierto sentido definitivo de las cónicas (y cuádricas) y haces correspondientes, pasando a estudiar curvas y superficies de segundo y tercer grado con gran detalle.

Pero serán Cayley y Silvester, británicos, quienes darán el impulso final a la geometría analítica con la teoría de los invariantes, poniéndola a la altura de lo sintético.

Por eso, Félix Klein, en su "Programa de Erlangen" pide el fin de la querella entre la tendencia analítica y sintética, pues si el uso de la geometría referida a unos ejes arbitrarios justificaba el que fuera tachado de defectuoso, la aplicación racional del método, dice Klein, está de sobra justificada.

Una vez desarrollada la teoría de los invariantes, la geometría "elemental" se convierte en un diccionario para expresar los resultados de formas bilineales, siendo el cálculo de los invariantes un procedimiento bastante mecánico. Por eso, la geometría elemental llega a su cénit y al mismo tiempo muere como campo de investigación.

Las nuevas orientaciones serán el avanzar en la teoría de las formas bilineales. Todo lo referente al rango, como el famoso teorema de Silvester, será aclarado por Fröbenius, Éste y Pfaff estudian las formas alternadas.

Por último, una generalización que llevará a cabo en el siglo XX será el espacio de Hilbert y el concepto de forma hermítica, introducido por Hermite. Para terminar el siglo XIX, Hilbert realiza su magnífica obra "Fundamentos de la Geometría", que estudia a fondo la axiomática y recoge el estado de la ciencia.

No podemos terminar sin comentar a Willian R. Hamilton, irlandés, inventor del álgebra de los cuaterniones.

7.3. Geometría Diferencial.

a) Curvas.

“Las aplicaciones del análisis a la geometría”, de Monge, influyeron hasta mediados del siglo. Se definieron y calcularon todos los elementos del triedro intrínseco en un punto de una curva, siendo muy importantes las fórmulas de Frenet (1847).

b) Superficies.

Los avances son fundamentales. Gauss publicó unas notables “Disquisiciones sobre superficies curvas” y estudió el primer tensor fundamental. También descubrió el “Teorema Egregium” sobre la curvatura, que el definió, estudiando a su vez el segundo tensor fundamental. Mainardi y Codazzi completaron sus fórmulas sobre estos tensores.

Dupin introdujo los conceptos de tangentes principales y la indicatriz de su nombre. También Hamilton hizo estudios sobre este tema.

7.4. Geometrías no Euclídeas.

Por fin, en el siglo XIX se resolvió negativamente la disputa sobre la dependencia lógica del postulado de las paralelas de Euclides.

Legendre y Gauss se dedican al tema. El primero intentó probarlo. Quiso demostrar que la suma de los ángulos de un triángulo no puede ser menor que dos rectos y no pudo conseguirlo. Gauss llegó a formular las bases de la Geometría Hiperbólica pero no lo publicó “por temos al escándalo que produciría”, como se supo tras su muerte.

El mérito de su publicación corresponde a Lobachevski (1829). El sistema era idéntico al de Gauss. En 1832 publicó un resultado análogo el húngaro Bolyai.

Con la lectura por Riemann en 1854 de su tesis “Sobre las Hipótesis que sirven de fundamento a la Geometría”, no sólo se admiten las posibilidades anteriores, sino que se amplía el marco de la Geometría al estudio de los espacios más generales.

La Geometría no Euclídea tuvo su aplicación física en la relatividad de Einstein.

8. SIGLO XX.

Del siglo XX citaremos sólo los dos campos de investigación corrientes relacionados con la Geometría:

- Geometría Algebraica. Estudia todo lo relativo a curvas, superficies y sus generalizaciones a espacios de más dimensiones, de entes definidos por polinomios en varias variables.
- Geometría Diferencial, donde las ideas de Elie Cartan le han devuelto la vitalidad un tanto apagada (fibrados, jets, haces, etc.).

Bibliografía Recomendada.

La Matemática: Su contenido, Método y Significado. Aut.: Alexandrov, Kolmogorov, y otros. Ed. Alianza.

Elementos de Historia de las Matemáticas. Aut.: N. Bourbaki. Ed. Alianza.

El Mundo de las Matemáticas. J. Newman. Ed Grijalbo.