TEMAS DE MATEMÁTICAS
(Oposiciones de Secundaria)

TEMA 49

SUPERFICIES DE REVOLUCIÓN. CUADRICAS. SUPERFICIES REGLADAS. PRESENCIA EN LA NATURALEZA, EL ARTE Y EN LA TÉCNICA.

TEMA 49

SUPERFICIES DE REVOLUCIÓN. CUADRICAS. SUPERFICIES REGLADAS. PRESENCIA EN LA NATURALEZA, EL ARTE Y EN LA TÉCNICA.

1. DEFINICIÓN DE SUPERFICIE.

De manera geométrica, podemos definir una superficie como el lugar geométrico de las posiciones sucesivas de una línea, indeformable o no, que se mueve en el espacio siguiendo una ley determinada y continua. La línea anterior recibe el nombre de generatriz.

Supongamos que $R=\{O,\vec{u}_1,\vec{u}_2,\vec{u}_3\}$ es una referencia ortonormal del espacio euclídeo. Un tipo especial de superficie son los planos, que expresados en ecuaciones paramétricas son:

$$\left.\begin{aligned} x &= x_o + a_1\lambda + b_1\mu \\ y &= y_o + a_2\lambda + b_2\mu \\ z &= z_o + a_3\lambda + b_3\mu \end{aligned}\right\} \quad \lambda,\mu\in \mathbb{R}$$

De forma analítica, una superficie se puede definir como sigue:

DEF Llamaremos superficie al conjunto de puntos del espacio E_3 que tiene por ecuaciones paramétricas, según la referencia ortonormal R:

$$\left.\begin{aligned} x &= f_1(\lambda,\mu) \\ y &= f_2(\lambda,\mu) \\ z &= f_3(\lambda,\mu) \end{aligned}\right\}$$

donde f_1, f_2 y f_3 son funciones continuas en los parámetros λ y μ.

Si fuese posible eliminar los parámetros λ y μ, se obtendría una ecuación de la forma

$$F(x,y,z)=0$$

llamada ecuación implícita de la superficie.

Si de la ecuación implícita podemos despejar z

$$z=f(x,y)$$

la ecuación obtenida recibe el nombre de ecuación explícita de la superficie.

Teniendo en cuenta la forma geométrica de definir la superficie, la línea móvil o generatriz puede ser recta o curva y al moverse, suele apoyarse sobre una o más líneas que llamaremos directrices. En general, la directriz puede ser un punto, una línea u otra superficie.

Así pues, podemos clasificar las superficies engendradas de la siguiente manera:

1) Como el lugar geométrico de las posiciones sucesivas de una línea que se mueve en el espacio cambiando de posición, pero no de forma, según una determinada ley.

2) Como el lugar geométrico de las posiciones sucesivas de una línea que cambia tanto de posición como de forma.

3) Como la envolvente de las distintas posiciones de otra superficie que puede mantener su forma o no, y sigue en su movimiento una determinada ley.

Como elementos característicos de una superficie tenemos:

DEF Llamaremos Tangente de una superficie en un punto a la tangente en ese punto a una curva cualquiera que pase por el punto y esté contenida en la superficie.

DEF Si el lugar geométrico de las tangentes a todas las curvas contenidas en la superficie que pasan punto es un plano, éste recibe el nombre de Plano Tangente a la superficie en el punto considerado, y el punto lo llamaremos Punto Ordinario. En caso contrario habrá más de un plano tangente y el punto lo llamaremos Punto Singular.

DEF Diremos que una recta es Normal a la superficie en un punto si es perpendicular al plano tangente a la superficie en el punto considerado.

DEF Llamaremos Plano Normal a la superficie en un punto cualquiera del plano que contenga una recta normal a la superficie en dicho plano.

DEF Llamaremos Sección Normal a la intersección entre el plano normal a la superficie en un punto y al propia superficie. La curvatura de las sección Normal la llamaremos Curvatura Normal.

2. CLASIFICACIÓN DE SUPERFICIES.

Según el criterio que tengamos en cuenta, podemos clasificar de distintas formas las superficies.

a) Según el movimiento de la generatriz.

Si la generatriz describe un giro alrededor de una recta obtenemos las superficies de revolución.

b) Según la forma de la generatriz.

Si la generatriz es una recta las llamaremos Superficies Regladas y si es una curva Superficies No Regladas.

Además, si son desarrollables en un plano diremos que son superficies desarrollables. En caso contrario son no desarrollables o alabeadas.

Todas las superficies no regladas son no desarrollables.

c) Según el Orden de la superficie.

DEF Llamamos Orden de una Superficie al número máximo de puntos que una recta corta a la superficie.

Si el Orden es 2 las superficies se llaman Cuádricas, si es 3 son Cúbicas, si es 4 Cuárticas, etc.

Vamos a desarrollar el tema destacando las superficies más importantes de cada clasificación.

3. SUPERFICIES DE REVOLUCIÓN.

3.1. Superficies de Revolución.

DEF Una superficie de revolución es la engendrada por una cura C generatriz, al girar alrededor de una recta llamada eje de revolución.

Los planos perpendiculares al eje de revolución cortan a la superficie en circunferencias. Los planos que contienen al eje de revolución cortan a la superficie en curvas y pueden considerarse a su vez generatrices de la superficie.

Por convenio, tomaremos un sistema de referencia en el que coincidan uno de los ejes, por ejemplo en OZ, con el eje de revolución de la superficie.

Así, si $P(x, y, z)$ es un punto de la superficie, un giro de eje OZ y ángulo α lo transforma en $P'(x', y', z')$ siendo

$$\left.\begin{array}{l} x' = xCos\alpha - ySen\alpha \\ y' = xSen\alpha + yCos\alpha \\ z' = z \end{array}\right\}$$

y si la curva generatriz C tiene por ecuaciones paramétricas

$$\left.\begin{array}{l} x = f_1(t) \\ y = f_2(t) \\ z = f_3(t) \end{array}\right\}$$

tenemos entonces que la ecuación en forma paramétrica de la superficie es

$$\left.\begin{array}{l} x = f_1(t)Cos\alpha - f_2(t)Sen\alpha \\ y = f_1(t)Sen\alpha + f_2(t)Cos\alpha \\ z = f_3(t) \end{array}\right\} \qquad t, \alpha \in \mathbb{R}$$

Como caso particular tenemos la situación en la que la curva esté contenida en un plano. Entonces elegiremos un sistema de referencia que, además de la condición anterior, verifique que el plano OYZ contiene a C. Entonces, la ecuación de la curva sería

$$\left.\begin{array}{l} x = 0 \\ f(y, z) = 0 \end{array}\right\}$$

Como cada punto de C describe al girar una circunferencia de ecuación

$$\left.\begin{array}{l} x^2 + y^2 = \lambda \\ z = \mu \end{array}\right\}$$

eliminando x, y, z de ambas ecuaciones, llegamos a la ecuación de la superficie

$$F(\lambda, \mu) = 0$$

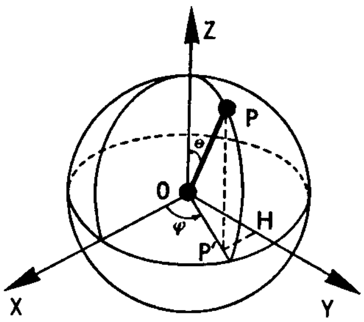
o también

$$F\left(x^2 + y^2, z\right) = 0$$

3.2. Revolución de Curvas.

3.2.1. Esfera.

Es la superficie de revolución obtenida al girar una circunferencia alrededor de uno de sus diámetros.



La circunferencia generatriz podemos suponer que es

$$\left.\begin{array}{l} x = 0 \\ y^2 + z^2 = R^2 \end{array}\right\}$$

De la expresión

$$\left.\begin{array}{l} x^2 + y^2 = \lambda \\ z = \mu \end{array}\right\}$$

y la anterior obtenemos

$$\left.\begin{array}{l} y^2 = l \\ z = m \end{array}\right\} \Rightarrow l + m^2 = R^2 \Rightarrow x^2 + y^2 + z^2 = R^2 \qquad (1)$$

Luego

$$F(l, m) = l + m^2 - R^2$$

o también

$$F\left(x^2 + y^2, z\right) = x^2 + y^2 + z^2 - R^2$$

La ecuación (1) expresa la definición clásica de esfera como:

$$\{P \in E_3 \,/\, d(O, P) = R\}$$

siendo O el centro de la esfera y R su radio.

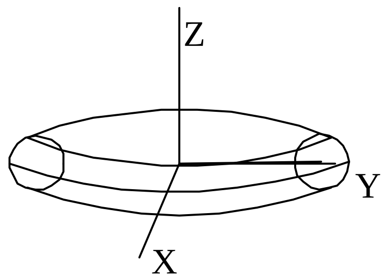
DEF Llamamos diámetro de la esfera a cualquier segmento que une dos puntos de la misma pasando por el centro.

El plano tangente en un punto es la perpendicular al radio que pasa por ese punto. Cualquier plano normal a la esfera pasa por su centro.

Si cortamos la superficie esférica por un plano secante a la misma, obtenemos dos cuerpos llamados segmentos esféricos de una base y las dos partes de la superficie esférica reciben el nombre de casquetes esféricos.

3.2.2. Toro Circular.

El toro circular es la superficie de revolución obtenida al girar una circunferencia alrededor de una recta exterior a la misma y situada en su mismo plano.



La ecuación de la circunferencia generatriz es

$$\left.\begin{array}{l} x = 0 \\ (y - R)^2 + z^2 = r^2 \end{array}\right\} \text{ con } \; r < R$$

Si tenemos en cuenta que

$$\left.\begin{array}{l} x^2 + y^2 = l \\ x = m \end{array}\right\}$$

podemos obtener la ecuación de la superficie como sigue:

$$x^2 + y^2 = l \Rightarrow y = \sqrt{l} \Rightarrow \left(\sqrt{l} - R\right)^2 + m^2 = R^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow l - 2R\sqrt{l} + R^2 + m^2 = R^2 \Rightarrow 2R\sqrt{l} = l + m^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4R^2\, \mathbf{l} = \mathbf{l}^2 + m^4 + 2\,\mathbf{l}m^2 \Rightarrow$$

$$4R^2\left(x^2 + y^2\right) = \left(x^2 + y^2\right)^2 + z^4 + 2z^2\left(x^2 + y^2\right)$$

que es una ecuación algebraica de cuatro grados.

Generalizando, si en lugar de girar una circunferencia, gira otra curva, nos podemos encontrar otros tipos de revolución. Por ejemplo, Toros elípticos, parabólicos o hiperbólicos.

Es más, si la recta generatriz no está en el plano de la curva, la superficie generada recibe el nombre de Toroide.

3.2.3. Elipsoide y Paraboloide de Revolución.

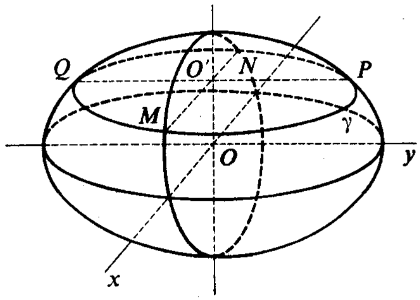
Una elipse o una parabólica engendran al girar alrededor de uno de sus ejes (la elipse) o de su único eje (la parábola) superficies que llamaremos, respectivamente, elipsoide de revolución.

La elipse de ecuación

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

engendra, al girar alrededor del eje z, el elipsoide de ecuación

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1$$

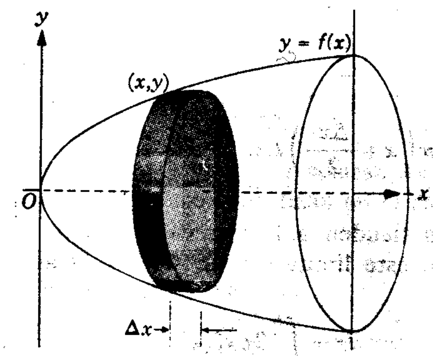


La parábola de ecuación

$$y^2 = 2px$$

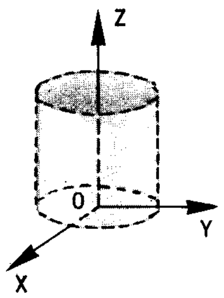
engendra al paraboloide de revolución de ecuación

$$y^2 + z^2 = 2px$$



3.3. Revolución de Rectas.

3.3.1. Cilindro.



El Cilindro es la superficie de revolución obtenida al girar una recta alrededor de un eje paralelo a la misma. Es decir, ambas rectas, la generatriz y el eje de revolución, estarán contenidas en el mismo plano.

Sea el eje revolución el eje OZ y la recta generatriz C tiene por ecuaciones

$$\left.\begin{array}{l} x = 0 \\ y = a \end{array}\right\}$$

Teniendo en cuenta

$$\left.\begin{array}{l} x^2 + y^2 = l \\ z = m \end{array}\right\}$$

entonces

$$y = \sqrt{l} \Rightarrow \sqrt{l} = a$$

y la ecuación del cilindro es

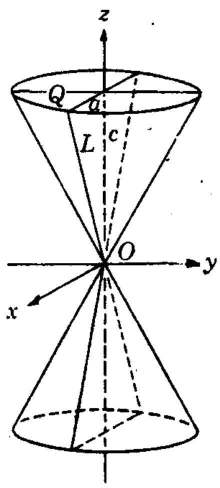
$$x^2 + y^2 = a^2$$

La forma de la ecuación nos dice que estos cilindros también se pueden obtener realizando traslaciones de la circunferencia

$$x^2 + y^2 = a^2$$

contenida en el plano z = 0 (OXY) paralelamente al eje z.

3.3.2. Cono.



Elegimos una referencia $R = \{O, \vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}$ en la que el eje de rotación sea el eje OZ $(\vec{u}_3)$y la recta generatriz C es

$$\left.\begin{array}{l} x = 0 \\ y = mz \end{array}\right\}$$

la cual corta al eje de revolución en el punto O que llamaremos Vértice.

De

$$\left.\begin{array}{l} x^2 + y^2 = l \\ z = m \end{array}\right\}$$

obtenemos

$$y = \sqrt{l} \Rightarrow \sqrt{l} = mm \Rightarrow l = m^2 m^2$$

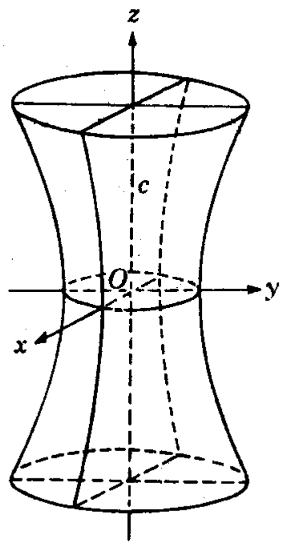
Y la ecuación del Cono es

$$x^2 + y^2 - m^2 z^2 = 0$$

Al ser la generatriz indefinida, como cualquier recta, generará un cono formado por dos ramas unidas por el vértice.

El cono que se obtiene es recto ya que su base es circular.

3.3.3. Hiperboloide de Revolución.



Elegimos un Sistema de Referencia $R = \{O, \vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}$ en la que el eje de revolución sea el eje OZ y la recta generatriz se cruce con el eje OZ, siendo la perpendicular común al eje X.

Así, la recta generatriz tiene por ecuación

$$\left.\begin{array}{l} x = a \\ y = mz \end{array}\right\}$$

Como

$$\left.\begin{array}{l} x^2 + y^2 = l \\ z = m \end{array}\right\}$$

entonces

$$\left.\begin{array}{l} y^2 = l - a^2 \\ z = m \end{array}\right\} \Rightarrow l - a^2 = m^2 z^2$$

y la ecuación del hiperboloide de revolución es

$$x^2 + y^2 - m^2 z^2 = a^2$$

Si cortamos la superficie por planos perpendiculares al eje obtenemos circunferencias, siendo la de menor radio la que obtenemos con el plano z = 0.

Si cortamos la superficie por planos que contengan al eje Z, que tienen por ecuaciones x = Ky, las intersecciones verifican

$$\left.\begin{array}{l} x^2+y^2+m^2z^2=a^2 \\ x=Ky \end{array}\right\} \Rightarrow \left(K^2+1\right)y^2-m^2z^2=a^2$$

que es una hipérbole contenida en el plano x = Ky.

En particular, cualquiera de estas hipérbolas puede servirnos para generar la superficie.

4. CUÁDRICAS.

Al clasificar las superficies según su orden, las cuadricas corresponderían a aquellas que eran de 2º grado. Cualquier cambio de sistema de referencia cambiaría la ecuación, pero no su grado. Así pues, elijamos un sistema de referencia $R=\{O,\vec{u}_1,\vec{u}_2,\vec{u}_3\}$ ortonormal,

DEF Llamaremos Cuádrica a toda superficie cuya ecuación es de la forma

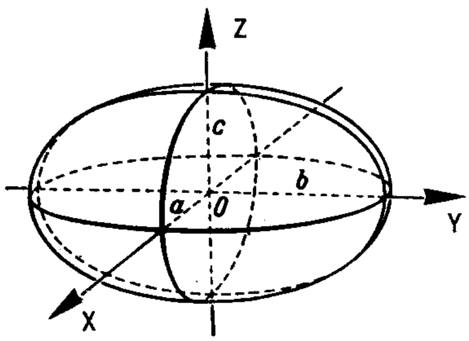
$$a_{11}x^2+a_{22}y^2+a_{33}z^2+2a_{12}xy+za_{13}xz+2a_{23}yz+2ax+2by+2cz+d=0$$

Todas las superficies de revolución en el apartado anterior son cuádrigas, menos el toro circular, que es de cuarto grado.

4.1. Cuádricas con Centro.

Elegido convenientemente un sistema de referencia, diremos que una cuádrica tiene como centro de simetría el origen si al sustituir (x, y, z) por (-x, -y, -z) en la ecuación, se obtiene la misma.

4.1.1. Elipsoide.



La ecuación de la superficie (en un sistema elegido convenientemente) es

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

La superficie corta a los ejes coordenados en los puntos

$$\begin{array}{ll} (a,0,0) & (-a,0,0) \\ (0,b,0) & (0,-b,0) \\ (0,0,c) & (0,0,-c) \end{array}$$

y verifica que el origen es su centro de simetría.

La intersección con un plano paralelo al plano OXY, por ejemplo x = λ, nos da

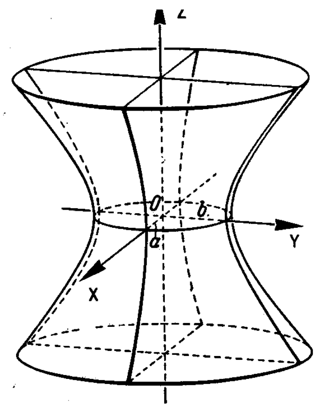
- Intersección vacía si λ > c ó λ < - c
- Un solo punto si λ = c ó λ = - c
- Una elipse de ecuación $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1-\frac{l^2}{c^2}$ si - c < λ < c.

Por simetría, el resultado es el mismo si el elipsoide es intersectado por planos de ecuaciones x = λ o y = λ.

En el caso de que a = b, a = c o b = c, las intersecciones con planos de ecuaciones z = λ, y = λ ó x = λ respectivamente dan, si existen, circunferencias, siendo el elipsoide de revolución.

Si a = b = c el elipsoide degenera en una circunferencia de radio O.

4.1.2. Hiperboloide de una hoja.



La ecuación de esta superficie en un sistema de referencia convenientemente elegido es

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$$

Corta a los ejes en

$$(a,0,0) \qquad (-a,0,0)$$
$$(o,b,o) \qquad (0,-b,0)$$

y no corta al eje Z. También verifica que el origen es su centro de simetría.

La intersección con planos paralelos al plano OXY, de ecuación z = λ, da elipses. En cambio, si los planos son paralelos al OXZ o al OYZ, por ejemplo y = λ ó x = λ respectivamente, obtenemos hipérbolas.

Si escribimos

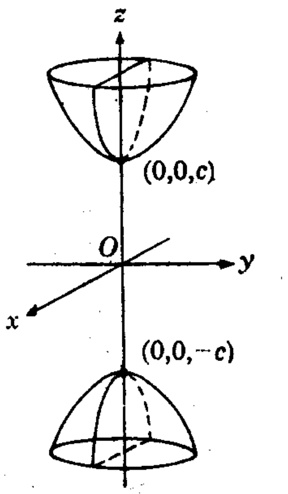
$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1-\frac{y^2}{b^2}\Rightarrow\left(\frac{x}{a}+\frac{z}{c}\right)\left(\frac{x}{a}-\frac{z}{c}\right)=\left(1+\frac{y}{b}\right)\left(1-\frac{y}{b}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{\frac{x}{a}+\frac{z}{c}}{1+\frac{y}{b}}=\frac{1-\frac{y}{b}}{\frac{x}{a}-\frac{z}{c}}=m \qquad \text{y} \qquad \frac{\frac{x}{a}+\frac{z}{c}}{1-\frac{y}{b}}=\frac{1+\frac{y}{b}}{\frac{x}{a}-\frac{z}{c}}=m'$$

Así tenemos que

$$\left(\frac{x}{a}+\frac{z}{c}\right)-m\left(1+\frac{y}{b}\right)=0$$
$$\left(1-\frac{y}{b}\right)-m\left(\frac{x}{a}-\frac{z}{c}\right)=0$$

4.1.3. Hiperboloide de dos hojas.



Su ecuación es

$$-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

Solo corta al eje Z en los puntos

$$(0,0,c) \quad y \quad (0,0,-c)$$

Los planos de ecuación $x = \lambda$ y $y = \lambda$ cortan a la superficie en hipérbolas.

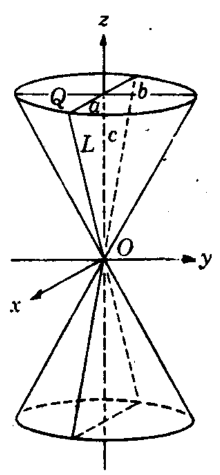
En cambio, los planos de ecuación $z = \lambda$ cortan a la superficie si $\lambda \notin (-a, a)$.

- Si $\lambda = a$ ó $\lambda = -a$, la corta en un punto.

- Si $\lambda > a$ ó $\lambda < -a$, la corta en elipses de ecuación $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{\lambda^2}{c^2}-1$

Igual que las anteriores, el origen es centro de simetría.

4.1.4. Cono.



La ecuación del cono, es un sistema de referencia elegido convenientemente, es

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$$

Corta a los ejes en el punto (0, 0, 0), siendo además su centro de simetría.

Cualquier plano de la forma $z = \lambda$ (paralelo al plano OXY) corta a la superficie en elipses.

Los planos de la forma x = λ e y = λ, paralelos a OYZ y a OXZ respectivamente, cortan al cono determinando hipérbolas. Excepto si pasan por el origen, en el que obtenemos un par de rectas.

Dadas las generatrices

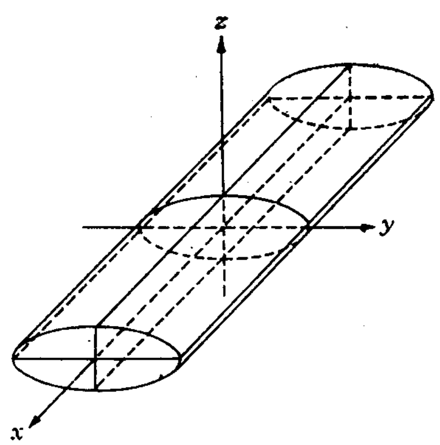
$$\left.\begin{array}{l} x=0 \\ y=\dfrac{b}{c}z \end{array}\right\} \qquad \text{ó} \qquad \left.\begin{array}{l} x=0 \\ y=-\dfrac{b}{c}z \end{array}\right\}$$

los planos paralelos a ellas, que son de la forma

$$cy \pm bz + h = 0 \qquad \text{con} \qquad h \neq 0$$

cortan al cono en parábolas.

4.1.5. Cilindro Elíptico.



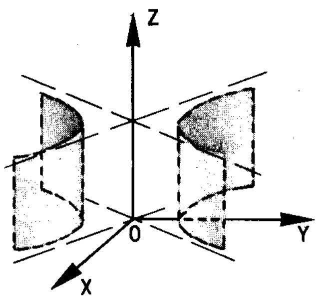
Su ecuación es

$$\frac{y^2}{a^2}+\frac{z^2}{b^2}=1$$

y lo vimos con más detalle en el caso a = b, que es el cilindro de revolución.

Los planos de la forma x = λ cortan al cilindro en elipses, pudiéndose obtener éste por traslación de la elipse a lo lardo del eje X.

4.1.6. Cilindro hiperbólico.



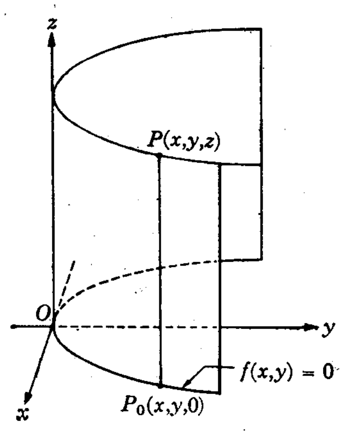
Al igual que el anterior, elegido convenientemente un sistema de referencia, podemos escribir su ecuación como

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$$

Los planos z = λ cortan a esta superficie en hipérbolas.

4.2. Cuádricas sin Centro.

4.2.1. Cilindro Parabólico.



Tiene por ecuación

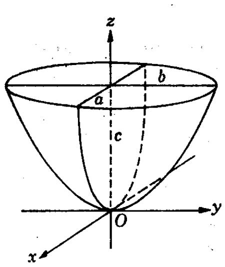
$$y^2 = 2px$$

y como es fácil comprobar, no tiene centro de simetría.

Los planos z = λ cortan a este cilindro en parábolas Concretamente, el plano z = 0 (o también, el OXY) determinan una parábola de ecuación

$$y^2 = 2px$$

4.2.2. Paraboloide Elíptico.



Su ecuación se puede escribir como

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 2cz$$

y corta a los tres ejes en el origen (0, 0, 0).

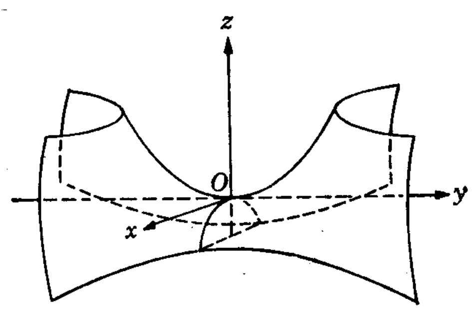
Cualquier plano z = λ corta a la superficie en elipses siempre que

$$\lambda \cdot c > 0$$

En cambio, dado un plano paralelo a OXZ o a OYZ cortará a la superficie en parábolas.

Si a = b, el paraboloide es de revolución.

4.2.3. Paraboloide hiperbólico.



Su ecuación es de la forma

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 2cz$$

y corta a los ejes en el origen de coordenadas.

Cualquier plano de ecuación z = λ cortará a la superficie en hipérbolas, y los planos x = λ e y = λ la cortan en parábolas.

Corrientemente, es conocida como Silla de Montar.

5. SUPERFICIES REGLADAS.

Si clasificamos las superficies según la forma de la generatriz, obteníamos las superficies regladas cuando la generatriz era una recta, y las no regladas cuando era una curva.

Dentro de las superficies regladas podemos distinguir:

5.1. Superficies Regladas Desarrollables.

Son superficies cuya característica más importante es que el plano tangente a cualquier recta contenida en la superficie no varía, pudiendo ser desarrollables en el plano.

El caso más sencillo de superficie reglada desarrollable es el plano. Otras superficies son poliedros, que ya los estudiamos en el tema 45. Veamos pues otras:

5.1.1. Superficies Cónicas.

DEF Sea V un punto y C una curva. Una superficie cónica es el conjunto P de todas las rectas que pasan por V y se apoyan en C.

Si V (x_o, y_o, z_o) y $C\begin{cases} x = f_1(t) \\ y = f_2(t) \\ z = f_3(t) \end{cases}$ entonces, las rectas que pasan por V y se apoyan en C tienen por ecuaciones paramétricas

$$\left.\begin{array}{l} x = x_o + \left(f_1(t) - x_o\right)\cdot \lambda \\ y = y_o + \left(f_2(t) - y_o\right)\cdot \lambda \\ z = z_o + \left(f_3(t) - z_o\right)\cdot \lambda \end{array}\right\} \quad t, \lambda \in \mathbb{R}$$

Si se puede eliminar t y λ obtenemos una ecuación de la forma

$$F(x, y, z) = 0$$

llamada ecuación implícita de la superficie.

5.1.2. Superficies Cilíndricas.

DEF Una superficie Cilíndrica es el conjunto P de rectas que se apoyan en una curva C y son paralelas a una recta de dirección $\vec{u}$.

Si $\vec{u} = (a,b,c)$ y $C = \begin{cases} x = f_1(t) \\ y = f_2(t) \\ z = f_3(t) \end{cases}$ entonces se verifica que para todo punto P de la superficie existe un punto Q de la curva tal que

$$\overrightarrow{QP} = \lambda \vec{u}$$

Entonces, las ecuaciones paramétricas de la superficie son

$$\left.\begin{array}{l} x = f_1(t) + \lambda a \\ y = f_2(t) + \lambda b \\ z = f_3(t) + \lambda c \end{array}\right\} \quad \text{con } t, \lambda \in \mathbb{R}$$

y de nuevo, si es posible eliminar λ y t llegamos a la forma implícita.

5.2. Otras Superficies Regladas.

Una superficie puede generarse también mediante una recta que se apoye en dos curvas, de modo que sea paralela a un plano director.

El caso más destacable es aquel que una de las curvas es una recta. Estas superficies reciben el nombre de Conoides.

Entre estos podemos destacar:

- Conoide de Wallis, que tiene la forma de sombrero de un legionario.

- La superficie helicoidal, que está generada por una recta que se apoya en una hélice y su eje, siendo la recta perpendicular al eje.

6. APLICACIONES.

Son múltiples las aplicaciones que nos podemos encontrar de los distintos tipos de superficies.

6.1. Superficies de Revolución.

a) Paraboloides de Revolución.

Quizá sea una de las aplicaciones más interesantes. Nos los podemos encontrar en las antenas parabólicas, aunque también en los hornos solares o los reflectores. Todos siguen el mismo principio. La antena recibe las ondas, las cuales se proyectan en el foco o polarizador, lo que amplifica la señal.

El fundamento técnico consiste en que los planos que contienen al eje del paraboloide intersecan formando parábolas iguales, y todas ellas con el mismo foco.

b) Esfera.

La esfera está omnipresente en nuestra vida. Los planetas, satélites, estrellas, tienen formas más o menos esféricas.

También a nivel microscópico nos la encontramos. Las células huevo adoptan la forma esférica para guardar el máximo de reserva en el mismo espacio. La tensión superficial de los líquidos también propicia la forma esférica, por ejemplo, las gotas de rocío.

c) Toro.

El toro nos lo podemos encontrar en el arte para formar anillos, en la técnica en las ruedas, ciclotrones o aceleradores de partículas. Incluso en la alimentación lo vemos en los donuts.

d) Otras superficies.

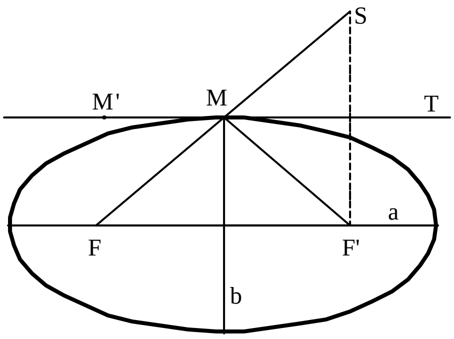
En arquitectura nos encontramos muchas aplicaciones, como por ejemplo para cubrir o cerrar un espacio (bóvedas o cúpulas) o para dar luz a éstas (lunetas). Existen bóvedas cilíndricas o de cañón y de revolución de eje vertical o cúpulas. El luneto es una bóveda pequeña, abierta en otra mayor, para dar luz a ésta. Según la forma de la bóveda tenemos lunetos cilíndricos, cónicos o esféricos.

6.2. Cuádricas.

Una conocida propiedad de la elipse nos proporciona aplicaciones para el elipsoide.

PROP Si M es un punto de la elipse de focos F y F´, la bisectriz exterior del ángulo LFMF´ es tangente a la elipse.

Dem



Si T es la bisectriz de dicho ángulo y S es un punto Simétrico de F´ respecto de T, se tiene que $\overline{FS}$ =2a.

Además, si M´ es otro punto de T, se tiene que

$$\overline{M´F´} + \overline{M´F} = \overline{M´S} + \overline{M´F} > FS = 2a$$

luego M´ no es de la elipse. Entonces el único punto común a la elipse y a T es M, lo que significa que T es tangente.

De esta proposición deducimos que cualquier rayo, ya sea luminoso o sonoro, que proceda de un foco se proyecta en el otro.

Esta propiedad ha sido utilizada desde antiguo en la construcción de bóvedas y teatros. Por ejemplo, la concha del apuntador suele construirse teniendo esto en cuenta.

La forma elipsoidal es una variación de los planetas. Los dirigibles se construyeron con esta forma para ganar penetración, partiendo de la utilidad de la forma esférica.

6.3. Superficies Regladas.

Las aplicaciones más importantes nos las encontramos en ingeniería y arquitectura, dada su sencillez.

Por ejemplo, la cubierta piramidal de torre, formada por al intersección de dos pirámides hexagonales.

También nos encontramos estas superficies en las Pirámides de Egipto

Bibliografía Recomendada.

Geometría y Cónicas. Grupo Cero. Universidad de Valencia.

Geometría Descriptiva. Aut. Izquierdo Asensi, F. Ed. Dossat. S.A.

Matemáticas COU. Aut. Varios. Ed. Ecir.

Matemáticas COU. Aut. Marqués. Ed. Bello.

Curso de Geometría Métrica, Tomo II. Aut. Fernández González, F. Editado por al cátedra de Dibujo Técnico.