TEMAS DE MATEMÁTICAS
(Oposiciones de Secundaria)

TEMA 19

DETERMINANTES. PROPIEDADES. APLICACIÓN AL CALCULO DEL RANGO DE UNA MATRIZ.

TEMA 19
DETERMINANTES. PROPIEDADES. APLICACIÓN AL CALCULO DEL RANGO DE UNA MATRIZ.

1. INTRODUCCIÓN.

El concepto de determinante es posible introducirlo de diferentes formas: Por medio de aplicaciones multilineales alternadas, por inducción o mediante sumas de n! sumandos para un determinante de orden n.

El tema se va a desarrollar utilizando la primera forma, ya que es la más rigurosa de las tres. Tiene como ventaja sobre las otras que nos permite relacionar diversos conceptos y presentar de forma sencilla pero rigurosa las propiedades de los determinantes.

Hemos de destacar que a lo largo del tema la letra K denotará un cuerpo conmutativo con característica de dos.

1.2. Resultados Previos.

En este apartado vamos a refrescar una serie de resultados sobre permutaciones que necesitaremos para desarrollar el tema. Para encontrar las demostraciones y evitar reiteración, remitimos al lector al tema 3 del temario.

DEF Llamaremos S_n al conjunto formado por todas las permutaciones posibles de los elementos del conjunto $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$.

Sea $\{1, 2, 3\}$ un conjunto. Una permutación de dicho conjunto puede ser $\begin{matrix} 1 \to 3 \\ 2 \to 1 \\ 3 \to 2 \end{matrix}$

que se puede expresar como

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

El conjunto S_n podemos definir como una operación como sigue (la representaremos en S_3)

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

PROP El conjunto S_n junto con la operación de producto de permutaciones tiene estructura de grupo.

DEF Una transposición es una permutación en la que todos los elementos quedan fijos menos dos que intercambian su posición.

Las trasposiciones se pueden representar mediante una matriz de orden 1x2, indicando los dos únicos elementos que intercambian su posición

Si $(2,3) \in S_3$ se puede escribir como $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$

PROP Toda permutación se puede escribir como producto de trasposiciones.

PROP Si una permutación se descompone de dos formas distintas como producto de trasposición, ambas descomposiciones verifican que tienen un número par (o impar) de trasposiciones.

DEF Diremos que una permutación es par si se descomponen como un número par de trasposiciones (e impar en caso contrario).

Si $\sigma \in S_n \Rightarrow \begin{cases} E(\sigma) = 1 & si\ \sigma\ es\ par \\ E(\sigma) = -1 & si\ \sigma\ es\ impar \end{cases}$

DEF El número $E(\sigma)$ con $\sigma \in S_n$ recibe el nombre de signatura o signo de la permutación.

PROP $\forall \sigma \in S_n$ con σ una trasposición se verifica que $E(\sigma) = -1$.

Dada una aplicación $f : C \times \overset{n}{\cdots} \times C \to G$ siendo C un conjunto cualquiera y G un grupo, podemos definir

$$\forall \sigma \in S_n \qquad (\sigma \cdot f)(x_1, \ldots\ldots, x_n) = f\left(x_{\sigma(1)}, \ldots\ldots, x_{\sigma(n)}\right)$$

DEF Diremos que f es simétrica si $\forall \sigma \in S_n$ se verifica $\sigma f = f$

DEF Diremos que f es antisimétrica si $\forall \sigma \in S_n$ se verifica $\sigma f = E(\sigma) \cdot f$

PROP $\forall \sigma, \sigma' \in S_n \qquad (\sigma \cdot \sigma') \cdot f = \sigma \cdot (\sigma' f)$

OBS Para saber si una aplicación es simétrica o antisimétrica, teniendo en cuenta la proposición anterior y que toda permutación se descompone como producto de trasposiciones, sólo es necesario conocer su actuación ante las trasposiciones.

PROP Dada $f : C \times \overset{n}{\cdots} \times C \to G\ y\ \forall \tau \in S_n$ trasposición:

1) f es simétrica $\Leftrightarrow \tau f = f$

2) f es antisimétrica $\Leftrightarrow \tau f = -f$

DEF Diremos que f es no degenerada si es una aplicación antisimétrica no nula.

2. FORMAS MULTILINEALES ALTERNADAS.

Sea V un K-espacio vectorial de dimensión n y $V^n = V \times \overset{n}{\ldots} \times V$. Sea W otro K-espacio vectorial.

DEF Diremos que $f: V^n \to W$ n-lineal si es lineal en cada una de sus componentes.

$$f(\vec{v}_1, \ldots, \alpha\vec{v}_i + \beta\vec{v}_i', \ldots, \vec{v}_n) = \alpha f(\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_i, \ldots, \vec{v}_n) + \beta f(\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_i', \ldots, v_n)$$

Si W = K entonces f es una forma n-lineal sobre V.

PROP Sean V y W K-espacios vectoriales. Si $f: V^n \to W$ es n-lineal, se verifica

i) Si $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in K \Rightarrow f(\lambda_1 v_1, \lambda_2 v_2, \ldots, \lambda_n v_n) = \lambda_1 \cdot \ldots \cdot \lambda_n f(v_1, \ldots, v_n)$

ii) Si $\forall i \in \{1, \ldots, n\}$ $v_i = \sum_{j=1}^{n} x_{ij} u_j$ (v_i es combinación lineal de $\{u_1, \ldots, u_n\}$) $\Rightarrow$

$$\Rightarrow f(v_1, \ldots, v_n) = \sum_{j_1=1}^{n} \cdot \sum_{j_2=1}^{n} \cdot \ldots \cdot \sum_{j_n=1}^{n} \lambda_{1j_1} \cdot \lambda_{2j_2} \cdot \ldots \cdot \lambda_{nj_n} \cdot f(u_{j_1}, \ldots, u_{j_n})$$

Dem.

i) $f(\lambda_1 v_1, \lambda_2 v_2, \ldots, \lambda_n v_n) = \lambda_1 f(v_1, \lambda_2 v_2, \ldots, \lambda_n v_n) = \lambda_1 \lambda_2 f(v_1, v_2, \ldots, \lambda_n v_n) = \ldots = $

$= \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \ldots \cdot \lambda_n f(v_1, v_2, \ldots, v_n)$

Por ser lineal respecto de cada una de las variables.

ii) Como $v_i = \sum_{j=1}^{n} \lambda_{ij} u_j \quad \forall i \in \{1, \ldots, n\}$

$$f(v_1 v_2, \ldots, v_n) = f\left(\sum_{j_1=1}^{n} \lambda_{1j_1} u_{j_1}, \sum_{j_2=1}^{n} \lambda_{2j_2} u_{j_2}, \ldots, \sum_{j_n=1}^{n} \lambda_{nj_n} u_{j_n} \right) =$$

$$= \sum_{j_1=1}^{n} \lambda_{1j_1} \cdot \sum_{j_2=1}^{n} \lambda_{2j_2} \cdot \ldots \cdot \sum_{j_n=1}^{n} \lambda_{nj_n} \cdot f(u_{j_1}, u_{j_2}, \ldots, u_{j_n}) =$$

$$\sum_{j_1=1}^{n} \cdot \sum_{j_2=1}^{n} \cdot \ldots \cdot \sum_{j_n=1}^{n} \lambda_{1j_1} \cdot \lambda_{2j_2} \cdot \ldots \cdot \lambda_{nj_n} \cdot f(u_{j_1}, u_{j_2}, \ldots, u_{j_n})$$

DEF Sea $f: V^n \to W$ n-lineal. Diremos que f es alternada (antisimétrica) si $f(v_1, \ldots, v_n) = 0$ cuando $v_i = v_j$ para algún i, j con $i \neq j$. A estas aplicaciones se las llama n-lineal alternada.

PROP Sea f: $V^n \to W$ n-lineal alternada y $\tau \in S_n$ una trasposición ($\tau = (ij)$).

Entonces

$$f\left(v_{\tau(1)}, v_{\tau(2)}, \dots, v_{\tau(n)}\right) = -f\left(v_1, v_2, \dots, v_n\right) \quad \forall \left(v_1, \dots, v_n\right) \in V^n$$

<u>Dem.</u>

Supongamos que $i < j$.

$$f\left(v_{\tau(1)}, \dots, v_{\tau(n)}\right) = f\left(v_1, \dots, v_{i-1}, v_j, v_{i+1}, \dots, v_{j-1}, v_i, v_{j+1}, \dots, v_n\right)$$

Por haber dos vectores repetidos ($v_i + v_j$ en los lugares i y j) y ser f alternada se verifica

$$0 = f\left(v_1, \dots, v_{i-1}, v_i + v_j, v_{i+1}, \dots, v_{j-1}, v_j, v_{j+1}, \dots, v_n\right) =$$

$$= f\left(v_1, \dots, v_{i-1}, v_i, v_{i+1}, \dots, v_{j-1}, v_i, v_{j+1}, \dots, v_n\right) +$$

$$+ f\left(v_1, \dots, v_{i-1}, v_i, v_{i+1}, \dots, v_{j-1}, v_j, v_{j+1}, \dots, v_n\right) +$$

$$+ f\left(v_1, \dots, v_{i-1}, v_j, v_{i+1}, \dots, v_{j-1}, v_i, v_{j+1}, \dots, v_n\right) +$$

$$+ f\left(v_1, \dots, v_{i-1}, v_j, v_{i+1}, \dots, v_{j-1}, v_j, v_{j+1}, \dots, v_n\right) =$$

$$= 0 + f\left(v_1, \dots, v_i, \dots, v_j, \dots, v_n\right) + f\left(v_1, \dots, v_j, \dots, v_i, \dots, v_n\right) + 0$$

Entonces

$$f\left(v_1, \dots, v_j, \dots, v_i, \dots, v_n\right) = -f\left(v_1, \dots, v_i, \dots, v_j, \dots, v_n\right)$$

PROP Sea f: $V^n \to W$ n-lineal anternada y $\sigma \in S_n$. Entonces $\forall(v_1, \dots, v_n =\in V^n$

$$f\left(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(n)} = \varepsilon(\sigma) f\left(v_1, \dots, v_n\right)\right)$$

siendo $\varepsilon(\sigma)$ la signatura de la permutación.

<u>Dem.</u>

$$f\left(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(n)}\right) = f\left(v_{\tau_1 \cdot \tau_2 \cdot \dots \cdot \tau_K(1)}, \dots, v_{\tau_1 \tau_2 \dots \tau_K(n)}\right) =$$

$$\sigma = \tau_1 \cdot \tau_2 \cdot \dots \cdot \tau_K$$

$$\varepsilon(\sigma) = (-1)^K$$

$$= -f\left(v_{\tau_2\cdots\tau_K(1)},\dots\dots,v_{\tau_2\cdots\tau_K(n)}\right) = (-1)^2 f\left(v_{\tau_3\cdots\tau_K(1)},\dots\dots,v_{\tau_3\cdots\tau_K(n)}\right) = \dots\dots =$$

$$= (-1)^K f\left(v_1,\dots,v_n\right) = \varepsilon(\sigma)\, f\left(v_1,\dots,v_n\right)$$

PROP Sea $f: V^n \rightarrow W$ n-lineal y $\sigma \in S_n$, $\forall (v_1,\dots, v_n) \in V^n$ se verifica que $f\left(v_{\sigma(1)},\dots\dots,v_{\sigma(n)}\right) = \varepsilon(\sigma) f\left(v_1,\dots,v_n\right) \Rightarrow$ f es alternada.

<u>Dem.</u>

Sea $(v_1,\dots, v_n) \in V^n$ con $v_i = v_j$ $i \neq j$ $(i < j)$ y sea $\tau \in S_n$ con $\tau = (ij)$

$$\tau \cdot f\left(v_1,\dots,v_n\right) = f\left(v_{\tau(1)},\dots,v_{\tau(n)}\right) = f\left(v_1,\dots,v_j,\dots,v_i,\dots,v_n\right) = f\left(v_1,\dots,v_i,\dots,v_j,\dots,v_n\right)$$

ya que $v_i = v_j$

Por hipótesis $f\left(v_{\tau(1)},\dots\dots,v_{\tau(n)}\right) = -f\left(v_1,\dots,v_i,\dots,v_j,\dots,v_n\right)$

Luego $f\left(v_1,\dots,v_n\right) = -f\left(v_1,\dots,v_n\right) \Rightarrow 2f\left(v_1,\dots,v_n\right) = 0 \Rightarrow f\left(v_1,\dots,v_n\right) = 0$

PROP Sea $f: V^n \rightarrow W$ n-lineal alternada. Si $\{v_1,\dots, v_n)$ es un conjunto linealmente independiente de V, entonces $f(v_1,\dots, v_n) = 0$

<u>Dem.</u>

Si $\{v_1,\dots, v_n\}$ es L. D $\Rightarrow \exists i \in \{1,\dots, n\}/v_i$ es combinación lineal del resto.

$$v_i = \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} \lambda_j v_j$$

$$f\left(v_1,\dots,v_i,\dots,v_n\right) = f\left(v_1,\dots,v_{i-1}, \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq 1}}^{n} \lambda_j v_j, v_{i+1},\dots,v_n\right) =$$

$$= \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} \lambda_j \cdot f\left(v_1,\dots,v_{i-1},v_j,v_{i+1},\dots,v_n\right) =$$

En todos los sumandos aparecen repetidos los v_j y como f es alternada, los sumandos son cero.

$$= \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} \lambda_j \cdot 0 = 0$$

COROLARIO Si V es un K-espacio vectorial con dimV = p < n, entonces cualquiera que sea el espacio vectorial W se verifica que toda aplicación n-lineal alternada f: $V^n \to W$ es nula.

LEMA Sea f: $V^n \to W$ n-lineal alternada, $(v_1,\dots, v_n)\in V^n$ y supongamos que $\forall i\in \{1,\dots, n\}$ v_i es combinación lineal de $\{u_1,\dots, u_n\}$, $v_i = \sum_{j=1}^{n} l_{ij} v_j$. Entonces

$$f(v_1,\dots,v_n) = \left(\sum_{s\in S_n} e(s)\, l_{1s(1)}\cdot\ldots\cdot l_{ns(n)}\right)\cdot f(u_1,\dots,u_n)$$

Dem.

Sabemos que $f(v_1,\dots,v_n) = \sum_{j_1=1}^{n}\cdot\sum_{j_2=1}^{n}\cdot\ldots\cdot\sum_{j_n=1}^{n} l_{1j_1}\cdot l_{2j_2}\cdot\ldots\cdot l_{nj_n}\, f(u_{j_1},u_{j_2},\dots,u_{j_n}) =$

Si en el conjunto de índices $\{j_1,\dots, j_n\}$ tenemos $j_S = j_K$ con $S \neq K$ entonces $f(u_{j_1},\dots,u_{j_S},\dots,u_{j_K},\dots,u_{j_n}) = 0$ por ser f alternada.

Luego los sumandos en donde se repita algún u_{ji} son cero y los podemos eliminar de la suma. Al final nos queda $j_1 = s(1), j_2 = s(2),\dots, j_n = s(n)$ con $\sigma\in S_n$

$$= \sum_{s\in S_n} l_{1s(1)}\cdot\ldots\cdot l_{ns(n)}\, f(u_{s(1)},\dots,u_{s(n)}) = \sum_{s\in S_n} l_{1s(1)}\cdot\ldots\cdot l_{ns(n)}\cdot e(s)\, f(u_1,\dots,u_n)$$

TEOREMA Sea V un K-espacio vectorial de dimensión n. Sea B = $\{u_1,\dots,u_n\}$ base de V y de $w\in W$ (con W K-espacio vectorial). Existe una única aplicación n-lineal alternada f: $V^n \to W$ tal que $f(u_1,\dots, u_n) = w$.

Dem.

- Unicidad.

Sean f, f´: $V_n \to W$ n-lineales alternadas / $f(u_1,\dots, u_n) = w = f´(u_1,\dots, u_n)$.

Sea $(v_1,\dots, v_n)\in V^n$ con $v_i = \sum_{j=1}^{n} l_{ij} u_j$

$$f(v_1,\dots,v_n) = \sum_{s\in S_n} e(s)\, l_{1s(1)}\cdot\ldots\cdot l_{ns(n)}\cdot f(u_1,\dots,u_n) =$$

$$= \sum_{s\in S_n} e(s)\, l_{1s(1)}\cdot\ldots\cdot l_{ns(n)}\cdot f´(u_1,\dots,u_n) = f´(v_1,\dots,v_n)$$

Como tienen igual dominio y rango y actúan igual sobre todos los elementos, son iguales: f = f´

Por tanto, de existir la aplicación, ésta es única.

- Definición de f.

Sea $w \in W$, $f: V^n \to W$ $\forall (v_1, \ldots, v_n) \in V^n$ y $\forall i \in \{1, \ldots, n\}$, $v_i = \sum_{j=1}^{n} l_{ij} u_j$

$$f(v_1, \ldots, v_n) := \left(\sum_{s \in S_n} e(s)\, l_{1s(1)} \cdot \ldots \cdot l_{ns(n)} \right) \cdot w$$

La imagen de la base es

$$f(u_1, \ldots, u_n) = \left(\sum_{s \in S_n} e(s) d_{1s(1)} \cdot \ldots \cdot d_{ns(n)} \right) \cdot w$$

Si $\sigma \neq 1_{Id}$ $\exists i / \sigma(i) \neq i \Rightarrow \delta_{i\sigma(i)} = 0$

Entonces $f(u_1, \ldots, u_n) = (d_{11} \cdot d_{22} \cdot \ldots \cdot d_{nn}) \cdot w = w$ ya que $d_{ii} = 1 \forall i$

- f es n-lineal (elegimos la 1ª variable para comprobarlo y es análogo para el resto).

Sea $v_1 = \sum_{j=1}^{n} l_{1j} u_j$ y $v_1' = \sum_{j=1}^{n} m_j u_j \Rightarrow v_1 + v_1' = \sum_{j=1}^{n} (l_{1j} + m_{1j}) u_j$

$$f(v_1 + v_1', v_2, \ldots, v_n) = \left(\sum_{s \in S_n} e(s) \cdot \left(l_{1s(1)} + m_{1s(2)} \cdot \ldots \cdot l_{ns(n)} \right) \right) \cdot w =$$

Como K es un cuerpo (se verifica la propiedad distributiva)

$$= \left[\left(\sum_{s \in S_n} e(s)\, l_{1s(1)} \cdot \ldots \cdot l_{ns(n)} \right) + \left(\sum_{s \in S_n} e(s) m_{1s(1)} \cdot l_{1s(2)} \cdot \ldots \cdot l_{ns(n)} \right) \right] \cdot w =$$

$$= \left(\sum_{s \in S_n} e(s)\, l_{1s(1)} \cdot \ldots \cdot l_{ns(n)} \right) w + \left(\sum_{s \in S_n} e(s) m_{1s(1)} \cdot l_{1s(2)} \cdot \ldots \cdot l_{ns(n)} \right) w =$$

$$= f(v_1, v_2, \ldots, v_n) + f(v_1', v_2, \ldots, v_n)$$

De forma análoga se demuestra para el producto por un escalar. Por tanto f es lineal.

- f es alternada.

Sea $(v_1, \ldots, v_n) \in V^n$ con $v_i = v_j$ $i \neq j$. Sea $t = (ij)$

$\forall s \in S_n \quad e(s \cdot t) = e(s) e(t) = -e(s)$

Como $v_i = v_j \Rightarrow \quad l_{iK} = l_{jK} \quad \forall K \in \{1,...,n\}$. Tenemos

$l_{ist(i)} = l_{is(j)} = l_{js(j)}$

$l_{jst(j)} = l_{js(i)} = l_{is(i)}$

$-e(s) l_{1st(1)} \cdot \ldots\ldots \cdot l_{is(i)} \cdot \ldots \cdot l_{jst(j)} \cdot \ldots\ldots \cdot l_{nst(n)} =$

$= -e(s) l_{1s(1)} \cdot \ldots\ldots \cdot l_{is(j)} \cdot \ldots\ldots \cdot l_{js(i)} \cdot \ldots\ldots \cdot l_{ns(n)} =$

Como el producto en el cuerpo es conmutativo se puede escribir

$= -e(s) l_{1s(1)} \cdot \ldots\ldots \cdot l_{is(i)} \cdot \ldots\ldots \cdot l_{js(j)} \cdot \ldots\ldots \cdot l_{ns(n)}$

Luego este sumando es igual pero opuesto a

$$e(s) l_{1s(1)} \cdot \ldots\ldots \cdot l_{ns(n)}$$

Pero como $f(v_1,\ldots,v_n) = \left(\sum e(s) l_{1s(1)} \cdot \ldots\ldots \cdot l_{ns(n)}\right) w$

existen varios sumandos. ¿Cómo podemos demostrar que para cada sumando existe su opuesto?

Pues definiendo la siguiente biyección

$$T: A_n \to I_n \qquad t(\sigma) = \sigma\tau$$

siendo A_n el conjunto de las permutaciones pares e I_n las impares. Luego

$$f(v_1,\ldots,v_n) = \left(\sum_{s \in A_n} e(s) l_{1s(1)} \cdot \ldots\ldots \cdot l_{ns(n)} + \sum_{s \in I_n} e(s) l_{1s(1)} \cdot \ldots\ldots \cdot l_{ns(n)} \right) w = 0$$

ya que $e(s) = 0$ si $s \in A_n$ y $e(s) = -1$ si $s \in I_n$

Por tanto f es alternada.

3. DETERMINANTES.

3.1. Determinante de N vectores.

DEF Sea $B = \{u_1,\ldots,u_n\}$ una base del K-espacio vectorial V. Se define el determinante respecto de la base B como la única forma n-lineal alternada

$$\det_B : V^n \to K$$

tal que $\det_B(u_1, u_2, \ldots, u_n) = 1$

DEF Si $(v_1, v_2, \ldots, v_n) \in V^n$, el determinante de los n vectores respecto de la base B es

$$\det_B(v_1, v_2, \ldots, v_n) = \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma)\, \lambda_{1\sigma(1)} \cdot \lambda_{2\sigma(2)} \cdot \ldots \cdot \lambda_{n\sigma(n)}$$

Podemos definir el conjunto de todas las aplicaciones n-lineales como $L_n(V, W) = \{ f \,/\, f : V^n \to W \;\; n-lineal \}$

Este conjunto lo podemos dotar de estructura de K-espacio vectorial de la siguiente manera:

Si $f_1, f_2 \in L_n(V, W)$

Suma: $(f_1 + f_2)(v_1, v_2, \ldots, v_n) = f_1(v_1, v_2, \ldots, v_n) + f_2(v_1, v_2, \ldots, v_n)$

Producto escalar: $(\lambda f_1)(v_1, v_2, \ldots, v_n) = \lambda \cdot f_1(v_1, v_2, \ldots, v_n)$

PROP Sea $B = \{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ una base de V. Se verifica:

i) Si $f: V^n \to K$ es una forma n-lineal alternada, existe $a \in K$ tal que $f = a \cdot \det_B$

ii) Si $f: V^n \to K$ es una forma n-lineal alternada y $f(u_1, u_2, \ldots, u_n) = 0$ entonces $f = 0$.

<u>Dem.</u>

i) Sea $(v_1, v_2, \ldots, v_n) \in V^n$

$$f(v_1, v_2, \ldots, v_n) = \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma)\, \lambda_{1\sigma(1)} \cdot \ldots \cdot \lambda_{n\sigma(n)} \cdot f(u_1, \ldots, u_n) = \det_B(v_1, \ldots, v_n) \cdot f(u_1, \ldots, u_n) =$$

Si llamamos $a = f(u_1, \ldots, u_n)$

$$= a \cdot \det_B(u_1, u_2, \ldots, u_n) = (a \cdot \det_B)(u_1, \ldots, u_n)$$

Luego $f = a \cdot \det_B$

ii) Si $f(u_1, \ldots, u_n) = 0 \Rightarrow f(u_1, \ldots, u_n) = a = 0$

y como $f = a \cdot \det_B \Rightarrow f = 0$

PROP Sea $B = \{u_1, \ldots, u_n\}$ base de V y sea $\{v_1, \ldots, v_n\} \in V$. Los vectores $\{v_1, \ldots, v_n\}$ son linealmente independientes si y solo si $\det_B(v_1, \ldots, v_n) = 0$

Dem.

"$\Rightarrow$"

Si $\{v_1,\dots,v_n\}$ es un conjunto linealmente dependiente entonces existe una aplicación n-lineal alternada tal que $f(v_1,\dots.,v_n)=0$.

Luego si $f=a\cdot\det_B \Rightarrow a\cdot\det_B=0$ siendo a un escalar no nulo.

Entonces $\det_B(v_1,\dots,v_n)=0$

"$\Leftarrow$"

Sea $\det_B(v_1,\dots.,v_n)=0$ y supongamos que $\{v_1,\dots.,v_n\}$ fuese linealmente independientes.

Entonces $\{v_1,\dots.,v_n\}$ serían base de V $\Rightarrow$ $\exists a\in K/\det_B=a\cdot\det_{B'}$ y como $\det_{B'}=1$ tenemos que $a=\det_B(v_1,\dots.,v_n)=0$

Pero esto es una contradicción con el hecho de que el determinante de una base es 1, $\det_B(u_1,\dots.,u_n)=1$.

Luego nuestra hipótesis de que los vectores $\{v_1,\dots,v_n\}$ son linealmente independientes es falsa y por tanto son dependientes.

3.2. Determinantes de un endomorfismo.

DEF Sea V un K-espacio vectorial de dimensión n, sea $B=\{u_1,\dots.,u_n\}$ una base de V y $\varphi:V\to V$ un endomorfismo. Llamaremos determinante de un endomorfismo a

$$\det_B^{\varphi}:V^n\to K \text{ n-lineal alternada}$$

definida por $\det_B^{\varphi}(v_1,v_2,\dots.,v_n)=\det_B(\varphi(v_1),\varphi(v_2),\dots..,\varphi(v_n))$

Puesto que φ es lineal, la función $\det_B^{\varphi}$ es n-lineal. Y como $\det_B$ es alternada también lo es $\det_B^{\varphi}$ (recordemos que si $v_i=v_j \Rightarrow \varphi(v_i)=\varphi(v_j)$)

Por un resultado anterior, al ser la función n-lineal y alternada, sabemos que

$$\exists\lambda\in K/\det_B^{\varphi}=\lambda\cdot\det_B$$

siendo λ el determinante de φ con respecto a la base B.

Como λ n va a depender de la base del espacio que tomemos la llamaremos determinante de un endomorfismo que tomemos.

PROP Si B y B´ son bases de V y $\varphi \in L(V) \Rightarrow \det_B(\varphi) = \det_{B'}(\varphi)$

Dem.

Sean $B = \{u_1,....,u_n\}$ y $B' = \{u_1´,...,u_n´\}$ dos bases de V.

Como $\det_B$ y $\det_{B'}$ son n-lineales alternadas, son proporcionales $\exists m \in K / \det_{B'} = m \cdot \det_B$

$$\det_{B'}^{\varphi} = \det_{B'(\varphi)} \cdot \det_{B'} \qquad (\lambda = \det_{B'}(\varphi))$$

$$\det_{B'}^{\varphi}(u_1´,....,u_n´) = \det_{B'}(\varphi) \cdot \det_{B'}(u_1´,...,u_n´) = \det_{B'}(\varphi) \quad (\det_{B'}(u_1´,......,u_n´) = 1)$$

Entonces

$$\det_{B'}(\varphi) = \det_{B'}^{\varphi}(u_1´,.....,u_n´) = \det_{B'}(\varphi(u_1´),....., \varphi(u_n´)) = m \cdot \det_B(\varphi(u_1´),....., \varphi(u_n´)) =$$

$$= m \cdot \det_B^{\varphi}(u_1´,.....,u_n´) = m \cdot \det_B(\varphi) \cdot \det_B(u_1´,.....,u_n´) = \det_B(\varphi) \cdot m \cdot \det_B(u_1´,.....,u_n´) =$$

$$= \det_B(\varphi) \cdot \det_{B'}(u_1´,.....,u_n´) = \det_B(\varphi)$$

DEF Si $\varphi \in L(V)$ con $\dim V = n$, llamamos determinante de φ, $\det(\varphi)$, a $\det_B(\varphi)$ para alguna base B se V.

PROP Si $\varphi, \Psi \in L(V) \Rightarrow \det(\varphi \circ \Psi) = \det(\varphi) \cdot \det(\Psi)$

Dem.

Sea $B = \{u_1,.....,u_n\}$ base de V

$$\det(\varphi \circ \Psi) = \det_B(\varphi \circ \Psi) = \det_B^{\varphi \circ \Psi}(u_1,.....,u_n) = \det_B(\varphi \circ \Psi(u_1),....., \varphi \circ \varphi(u_n)) =$$

$$= \det_B^{\varphi}(\Psi(u_1),...., \Psi(u_n)) = \det_B(\varphi) \cdot \det_B(\Psi(u_1),...., \Psi(u_n)) = \det_B(\varphi) \cdot \det_B^{\Psi}(u_1,....,u_n) =$$

$$= \det_B(\varphi) \cdot \det_B(\Psi) \cdot \det_B(u_1,....,u_n) = \det_b(\varphi) \cdot \det_B(\Psi) = \det(\varphi) \cdot \det(\Psi)$$

PROP Si $\varphi \in L(V)$

φ es automorfismo $\Leftrightarrow \det(\varphi) \neq 0$

Dem.

"$\Rightarrow$"

Sea φ automorfismo y $B = \{u_1,....,u_n\}$ base de V-

$$\det(\varphi) = \det_B(\varphi) = \det_B^{\varphi}(u_1,,,,,u_n) = \det_B(\varphi(u_1),....,\varphi(u_n)) \neq 0$$

Es distinto de cero ya que al ser B base de V y φ automorfismo $\Rightarrow$ $\{\varphi(u_1),....,\varphi(u_n)\}$ es base de V $\Rightarrow$ $\{\varphi(u_1),....,\varphi(u_n)\}$ es linealmente independiente.

"$\Leftarrow$"

Sea $\det(\varphi) \neq 0$ y $B = \{u_1,....,u_n\}$ base de V.

$0 \neq \det(\varphi) = \det_B(\varphi(u_1),.....,\varphi(u_n)) \Rightarrow \{\varphi(u_1),....,\varphi(u_n)\}$ es linealmente independiente y como dimV = n $\Rightarrow$ $\{\varphi(u_1),....,\varphi(u_n)\}$ es base de V $\Rightarrow$ φ es automorfismo, ya que transforma una base en otra.

PROP Si $\varphi \in GL(V) \Rightarrow \exists \det(\varphi^{-1}) = \dfrac{1}{\det(\varphi)}$

<u>Dem.</u>

$$\left.\begin{array}{l} \det(1_v) = \det(\varphi \circ \varphi^{-1}) = \det(\varphi)\cdot\det(\varphi^{-1}) \\ \\ \det(1_v) = \det_B^{1v}(u_1,....,u_n) = \det_B(1_v(u_1),....,1_v(u_n)) = \det_B(u_1,....,u_n) = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \det(\varphi)\cdot\det(\varphi^{-1}) = 1 \Rightarrow \det(\varphi^{-1}) = \frac{1}{\det(\varphi)}$$

3.2.1. Aplicación Adjunta de un Endomorfismo.

NOTACIÓN La expresión $\det_b(v;_1, v_2,....,\hat{v}_j,.....,v_n)$

Equivale a $\det_B(v; v_1, v_2,.....,v_{j-1}, v_{j+1},....,v_n)$

LEMA Sea V un K-espacio vectorial de dimensión n, $B = \{u_1,....,u_n\}$ base de V y $\{v_1,.......,v_n, v\}$ vectores de V. Se verifica.

$$\sum_{j=1}^{n} (-1)^{j-1}\cdot\det_B(v, v_1,....,\hat{v}_j,.....,v_n)\cdot v_j = \det_B(v_1,....,v_n)\cdot v$$

<u>Dem.</u>

Vamos a distinguir dos casos, según sea el conjunto $\{v_1,....,v_n\}$ linealmente independiente o dependiente.

a) Si $\{v_1,.....,v_n\}$ es L. I. $\Rightarrow$ $\{v_1,....,v_n\}$ es base $\Rightarrow$ $\exists\, \lambda_1,...., \lambda_n \in K / v = \sum_{K=1}^{n} \lambda_K v_K$

$$\sum_{j=1}^{n}(-1)^{j-1}\cdot\det_B(v,v_1,....,\hat{v}_j,....,v_n)\cdot v_j=\sum_{j=1}^{n}(-1)^{j-1}\cdot\det_B\left(\sum_{K=1}^{n}l_K v_K,v_1,...,\hat{v}_j,....,v_n\right)v_j=$$

$$=\sum_{j=1}^{n}(-1)^{j-1}\left(\sum_{K=1}^{n}l_K\cdot\det_B(v_K,v_1,....,\hat{v}_j,...,v_n)\right)\cdot v_j=$$

Si K = j nos encontramos con dos vectores iguales y el determinante es cero por ser una aplicación alternada.

$$=\sum_{j=1}^{n}(-1)^{j-1}\cdot l_j\cdot\det_B(v_j,v_1,.....,\hat{v}_j,....,v_n)\cdot v_j=$$

Realizamos j – 1 trasposiciones y situamos el vector v_j en su lugar

$$=\sum_{j=1}^{n}(-1)^{j-1}\cdot l_j\cdot(-1)^{j-1}\cdot\det_B(v_1,...,v_j,....,v_n)\cdot v_j=\sum_{j=1}^{n}\left((-1)^{j-1}\right)^2\cdot l_j\cdot\det_B(v_1,....,v_n)\cdot v_j=$$

$$=\sum_{j=1}^{n}l_j\det_B(v_1,....,v_n)\cdot v_j=\det_B(v_1,....,v_n)\cdot\sum_{j=1}^{n}l_j v_j=\det_B(v_1,....,v_n)\cdot v$$

b) Si $\{v_1,....,v_n\}$ es L. D. $\Rightarrow$ $\det_B(v_1,....,v_n)=0\Rightarrow$

$$\Rightarrow\det_B(v_1,....,v_n)\cdot v=0$$

Comprobemos pues, que el primer miembro es nulo

$$\sum_{j=1}^{n}(-1)^{j-1}\cdot\det_B(v,v_1,....,\hat{v}_j,....,v_n)\cdot v_j=0\quad\text{(Comprobar)}$$

Como $\{v_1,....,v_n\}$ L. D. $\Rightarrow$ $\exists v_i$ que es combinación lineal del resto.

Supongamos que es el primero $\Rightarrow$ $v_1=\sum_{K=2}^{n}l_K v_K$

$$\sum_{j=1}^{n}(-1)^{j-1}\cdot\det_B(v,v_1,....,\hat{v}_j,....,v_n)\cdot v_j=$$

$$=\det_B(v,\hat{v}_1,v_2,....,v_n)\cdot v_1+\sum_{j=2}^{n}(-1)^{j-1}\cdot\det(v,v_1,...,\hat{v}_j,....,v_n)\cdot v_j=$$

$$=\det_B(v,\hat{v}_1,v_2,.....,v_n)\cdot\sum_{K=2}^{n}l_K v_K+\sum_{j=2}^{n}(-1)^{j-1}\cdot\det_B\left(v,\sum_{K=2}^{n}l_K v_K,....,\hat{v}_j,...,v_n\right)v_j=$$

$$= \sum_{K=2}^{n} \lambda_K \cdot \det_B(v,\hat{v}_1,v_2,\dots,v_n) \cdot v_K + \sum_{j=2}^{n}(-1)^{j-1}\cdot\left(\sum_{K=2}^{n}\lambda_K \det_B(v,v_K,\dots,\hat{v}_j,\dots,v_n)\right)\cdot v_j =$$

Si K = j nos encontramos con dos vectores iguales y el determinante es cero por ser una aplicación alternada.

$$= \sum_{K=2}^{n} \lambda_K \cdot \det_B(v,\hat{v}_1,.v_2,\dots,v_n) \cdot v_K + \sum_{j=2}^{n}(-1)^{j-1}\cdot\lambda_j \det_B(v,v_j,v_2,\dots,\hat{v}_j,\dots,v_n)\cdot v_j =$$

Para colocar v_j en su sitio hemos de realizar j – 2 trasposiciones

$$= \sum_{K=2}^{n} \lambda_K \det_B(v,\hat{v}_1,v_2,\dots,v_n) \cdot v_K + \sum_{j=2}^{n}(-1)^{j-1}\cdot\lambda_j\cdot(-1)^{j-2}\cdot\det_B(v,v_2,\dots,v_j,\dots,v_n)\cdot v_j =$$

$$= \sum_{K=2}^{n} \lambda_K \det_B(v,\hat{v}_1,v_2,\dots,v_n) \cdot v_K + \sum_{j=2}^{n}(-1)\cdot\left((-1)^{j-2}\right)^2\cdot\lambda_j\cdot\det_B(v,v_2,\dots,v_j,\dots,v_n)\cdot v_j =$$

$$= \sum_{K=2}^{n} \lambda_K \det_B(v,\hat{v}_1,v_2,\dots,v_n) \cdot v_K - \sum_{j=2}^{n}\lambda_j \det_B(v,v_2,\dots,v_n)\cdot v_j = 0$$

Vamos a construir ahora la aplicación adjunta.

Sea V un K-espacio vectorial con dimV = n y $B=\{u_1,\dots,u_n\}$ base de V.

Tomemos $\varphi \in L(V)$ y definamos la aplicación $\emptyset: V^n \to L(V)$ como

$$\forall (v_1,\dots,v_n)\in V^n \quad \emptyset(v_1,\dots,v_n)\in L(V) \Rightarrow \emptyset(v_1,\dots,v_n): V\to V$$

$$\forall v\in V \qquad \emptyset(v_1,\dots,v_n)(v) = \sum_{j=1}^{n}(-1)^{j-1}\cdot\det_B(v;\varphi(v_1),\dots,\varphi(\hat{v}_j),\dots,\varphi(v_n))\cdot v_j$$

PROP Ø es la única aplicación n-lineal alternada que lleva la base a un endomorfismo.

<u>Dem.</u>

- Comprobemos que Ø está bien definida ($\emptyset(v_1,\dots,v_n)$ es un endomorfismo)

$$\forall (v_1,\dots,v_n)\in V^n \quad \forall \lambda,\mu\in K \quad \forall v,v'\in V$$

$$\emptyset(v_1,\dots,v_n)(\lambda v+\mu v') = \sum_{j=1}^{n}(-1)^{j-1}\cdot\det_B(\lambda v+\mu v',\varphi(v_1),\dots,\varphi(\hat{v}_j),\dots,\varphi(v_n))\cdot v_j =$$

$$= \sum_{j=1}^{n}(-1)^{j-1}\cdot\left[\lambda\cdot\det_B(v,\varphi(v_1),\dots,\varphi(\hat{v}_j),\dots,\varphi(v_n)) + \mu\det_B(v',\varphi(v_1'),\dots,\varphi(\hat{v}_j),\dots,\varphi(v_n))\right]\cdot v_j =$$

$$= \lambda \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j-1} \det_B\left(v, \varphi(v_1),.., \varphi(\hat{v}_j),..., \varphi(v_n)\right) v_j + \mu \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j-1} \det_B\left(v', \varphi(v_1),..., \varphi(\hat{v}_j),..., \varphi(v_n)\right) \cdot v_j =$$

$$= \lambda\, Ø(v_1,..., v_n)(v) + \mu Ø(v_1,..., v_n)(v')$$

- Ø es n-lineal.

(Veámoslo para la 1ª variable, ya que el resto es análogo).

$$\forall \lambda, \mu \in K \quad \forall v_1, v_1' \in V \quad \forall v \in V$$

$$Ø(\lambda v_1 + \mu v_1', v_2,..., v_n)(v) 0 \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j-1} \cdot \det_B\left(v, \varphi(\lambda v_1 + \mu v_1'), \varphi(v_2),..., \varphi(\hat{v}_j),..., \varphi(v_n)\right) \cdot v_j =$$

$$= \det_B\left(v, \varphi(v_2),..., \varphi(v_n)\right) \cdot (\lambda v_1 + \mu v_1') + \sum_{j=2}^{n} (-1)^{j-1} \det_B\left(v, \varphi(\lambda v_1 + \mu v_1'),..., \varphi(\hat{v}_j),..., \varphi(v_n)\right) \cdot v_j =$$

$$= \lambda \cdot \det_B\left(v, \varphi(v_2),..., \varphi(v_n)\right) v_1 + \mu \cdot \det_B\left(v, \varphi(v_2),..., \varphi(v_n)\right) \cdot v_2 +$$

$$+ \sum_{j=2}^{n} (-1)^{j-1} \cdot \left[\lambda \det_B\left(v, \varphi(v_1),..., \varphi(\hat{v}_j),..., \varphi(v_n)\right) + \mu \det_B\left(v, \varphi(v_1'),..., \varphi(\hat{v}_j),..., \varphi(v_n)\right)\right] v_j =$$

$$= \lambda \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j-1} \det_B\left(v, \varphi(v_1),.., \varphi(\hat{v}_j),..., \varphi(v_n)\right) v_j + \mu \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j-1} \det_B\left(v, \varphi(v_1'),..., \varphi(\hat{v}_j),..., \varphi(v_n)\right) v_j =$$

$$= \lambda\, Ø(v_1,..., v_n)(v) + \mu Ø(v_1', v_2,.., v_n)(v) = \left[\lambda\, Ø(v_1,..., v_n) + \mu Ø(v_1',..., v_n)\right](v)$$

- Ø es Alternada.

Sea $v_i = v_K$ con $i \neq K$ y $i < K$

Hemos de comprobar que Ø$(v_1,\ldots, v_n) = 0$ (matriz nula)

$$\forall v \in V \qquad Ø(v_1,..., v_n)(v) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j-1} \cdot \det_B\left(v, \varphi(v_1),..., \varphi(\hat{v}_j),..., \varphi(v_n)\right) \cdot v_j =$$

Si $j \neq i, K \Rightarrow$ hay dos vectores iguales.

$$= (-1)^{i-1} \cdot \det_B\left(v, \varphi(v_1),..., \varphi(\hat{v}_i),..., \varphi(v_n)\right) \cdot v_i + (-1)^{K-1} \cdot \det_B\left(v, \varphi(v_1),..., \varphi(\hat{v}_K),..., \varphi(v_n)\right) \cdot v_K =$$

Ahora desplazamos $\varphi(v_i)$ al lugar $\varphi(v_K)$. El número de trasposiciones es K-(i – 1) y ambos determinantes son iguales.

Veamos el signo

$$= \left[(-1)^{i-1} + (-1)^{K-1}\cdot(-1)^{K-i+1}\right]\det_B(v, \varphi(\hat{v}_i),\ldots,\varphi(v_n))\cdot v_i =$$

$$= \left[(-1)^{i-1} + (-1)^{K-1}\cdot(-1)^{K+1}\cdot(-1)^{-i}\right]\det_B(v, \varphi(v_1),\ldots., \varphi(\hat{v}_i),\ldots,\varphi(v_n))\cdot v_i = 0$$

Ya que: $(-1)^{i-1} + (-1)^{K-1}\cdot(-1)^{K+1}\cdot(-1)^{-i} = (-1)^{i-1} + (-1)^{-i} = 0$

DEF Llamaremos adjunta de φ respecto de B a la imagen de Ø de la base de V

$$ad_B(\varphi) = Ø(u_1,\ldots, u_n)$$

Y $ad_B(\varphi) \in L(V)$

PROP $ad_B(\varphi)$ no depende de la base tomada

Dem.

Dadas $B=\{u_1,\ldots,u_n\}$ y $B'=\{u_1',\ldots,u_n'\}$ bases de V, hemos de comprobar que $ad_B(\varphi) = ad_{B'}(\varphi)$. Sea Ø: $V^n \to L(V)$ respecto de B y Ø´: $V^n \to L(V)$ respecto de B´.

$$ad_{B'}(\varphi)(v) = Ø'(u_1',\ldots,u_n')(v) = \sum_{j=1}^{n}(-1)^{j-1}\cdot\det_{B'}(v, \varphi(u_1'),\ldots,\varphi(\hat{u}_j'),\ldots,\varphi(u_n'))u_j' =$$

Dadas B y B´ bases de V $\exists!\ \lambda \in K / \det_{B'} = \lambda \det_B$

$$= \sum_{j=1}^{n}(-1)^{j-1}\cdot\lambda\cdot\det_B(v, \varphi(u_1'),\ldots,\varphi(\hat{u}_j'),\ldots,\varphi(u_n'))u_j' =$$

$$= \lambda\sum_{j=1}^{n}(-1)^{j-1}\cdot\det_B(v, \varphi(u_1'),\ldots,\varphi(\hat{u}_j'),\ldots,\varphi(u_n'))u_j' = \lambda\cdot Ø(u_1',\ldots,u_n')(v) =$$

$$= \lambda\cdot\det_B(u_1',\ldots.,u_n')\cdot ad_B(\varphi)(v) = \det_{B'}(u_1',\ldots,u_n')\cdot ad_B(\varphi)(v) = ad_B(\varphi)(v)$$

ya que $\det_{B'}(u_1',\ldots.,u_n') = 1$

Por tanto $ad_{B'}(\varphi) = ad_B(\varphi)$ y no depende de la base elegida.

DEF Sea $\varphi \in L(V)$. Se define la aplicación adjunta de φ, ad(φ), como $ad_B(\varphi)$ para alguna base de B de V.

PROP Sea $\varphi \in L(V)$, con dimV = n. Se verifica:

1) $\varphi \circ ad(\varphi) = \det(\varphi)\circ 1v$

2) $ad(\boldsymbol{j}) \circ \boldsymbol{j} = \det(\boldsymbol{j}) \circ 1v$

<u>Dem.</u>

1) $\forall v \in V$

$(\boldsymbol{j} \circ ad(\boldsymbol{j}))(v) = \boldsymbol{j}(ad(\boldsymbol{j})(v)) =$

Sea $B = \{u_1, \ldots, u_n\}$ una base de V.

$$= \boldsymbol{j}\,(Ø\,(u_1,\ldots,u_n)(v)) = \boldsymbol{j}\left(\sum_{j=1}^{n}(-1)^{j-1}\cdot\det{}_B\left(v, \boldsymbol{j}(u_1),\ldots., \boldsymbol{j}(\hat{u}_j),\ldots., \boldsymbol{j}(u_n)\right)\cdot u_j\right) =$$

$$= \sum_{j=1}^{n}(-1)^{j-1}\cdot\det{}_B\left(v, \boldsymbol{j}(u_1),\ldots, \boldsymbol{j}(\hat{u}_j),\ldots, \boldsymbol{j}(u_n)\right)\cdot \boldsymbol{j}(u_j) =$$

Aplicando el último Lema

$$= \det{}_B(\boldsymbol{j}(u_1),\ldots, \boldsymbol{j}(u_n))\cdot v = \det{}_B(\boldsymbol{j})\cdot\det{}_B(u_1,\ldots,u_n)\cdot v = \det(\boldsymbol{j})\cdot v =$$

$$= (\det(\boldsymbol{j})\cdot 1v)(v)$$

Entonces $\boldsymbol{j} \circ ad(\boldsymbol{j}) = \det(\boldsymbol{j}) \circ 1v$

2) $(ad(\boldsymbol{j}) \circ \boldsymbol{j})(v) = ad(\boldsymbol{j})(\boldsymbol{j}(v)) = \varphi(u_1,\ldots., u_n)(\boldsymbol{j}(v)) =$

$$= \sum_{j=1}^{n}(-1)^{j-1}\cdot\det{}_B\left(\boldsymbol{j}(v), \boldsymbol{j}(u_1),\ldots, \boldsymbol{j}(\hat{u}_j),\ldots., \boldsymbol{j}(u_n)\right)u_j =$$

$$= \sum_{j=1}^{n}(-1)^{j-1}\cdot\det{}_B^{j}\left(v, u_1,\ldots., \hat{u}_j,\ldots, u_n\right)\cdot u_j = \sum_{j=1}^{n}(-1)^{j-1}\cdot\det(\boldsymbol{j})\cdot\det{}_B\left(v, u_1,\ldots, \hat{u}_j,\ldots, u_n\right)\cdot u_j =$$

$$= \det(\boldsymbol{j})\cdot\det{}_B(u_1,\ldots,u_n)(v) = \det(\boldsymbol{j})\cdot v = (\det(\boldsymbol{j}) \circ 1v)(v)$$

Entonces $ad(\boldsymbol{j}) \circ \boldsymbol{j} = \det(\boldsymbol{j}) \circ 1v$

COROLARIO Si φ es un automorfismo entonces

$$\boldsymbol{j}^{-1} = \frac{ad(\boldsymbol{j})}{\det(\boldsymbol{j})} = \det(\boldsymbol{j})^{-1}\cdot ad(\boldsymbol{j})$$

3.3. Determinante de una matriz.

DEF Sea A$\in$M$_n$(K). Se define el determinante de la matriz A, $|A|$, como el determinante de las filas de A consideradas como elementos de K^n y respecto de al base canónica de K$_n$.

Si $A=(a_{ij})$ la fila i-ésima es $a_{i\bullet}=(a_{i1},a_{i2},....,a_{in})$

$$|A|=\det_B(a_{1\bullet},a_{2\bullet},....,a_{n\bullet})=\sum_{s\in S_n}e(s)\cdot a_{1s(1)}\cdot a_{2s(2)}\cdot....\cdot a_{ns(n)}$$

siendo $B=\{e_1,e_2,....,e_n\}$

En el caso de una matriz cuadrada de orden 2

$$S_2=\{1_{S_2},(1,2)\}\Rightarrow\left|\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{pmatrix}\right|=a_{11}a_{12}-a_{12}a_{21}$$

y en el caso de una matriz de orden 3

$$S_3=\{1_{S_3},(1,2),(1,3),(2,3),(1,2,3),(1,3,2)\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\left|\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{pmatrix}\right|=a_{11}a_{22}a_{33}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{11}a_{23}a_{32}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{32}a_{21}$$

PROP Si A$\in$ M$_n$(K) $\Rightarrow |A|=|A^t|$

<u>Dem.</u>

Sea $A=(a_{ij})$ y $A^t=(b_{ij})$ con $b_{ij}=a_{ji}\quad\forall 1\le i,j\le n$

$$|A|=\sum_{s\in S_n}e(s)a_{1s(1)}\cdot a_{2s(2)}\cdot....\cdot a_{ns(n)}=$$

Sabemos que $\exists s^{-1}\in S_n\,/\,s^{-1}\circ s=1_{Id}$

$$=\sum_{s\in S_n}e(s)\cdot a_{(s^{-1}\cdot s)(1)s(1)}\cdot a_{(s^{-1}\cdot s)(2)s(2)}\cdot.....\cdot a_{(s^{-1}\cdot s)(n)s(n)}=$$

Podemos establecer una aplicación biyectiva

$$S_n \to S_n$$
$$s \to s^{-1}$$

y se verifica $e(s) = e(s^{-1})$

$$= \sum_{s^{-1} \in S_n} e(s^{-1}) a_{s^{-1}(1)1} a_{s^{-1}(2)2} \cdot \ldots\ldots \cdot a_{s^{-1}(n)n} =$$

Sea $b = s^{-1}$

$$= \sum_{b \in S_n} e(b) a_{b(1)1} a_{b(2)2} \ldots\ldots\ldots a_{b(n)n} = \sum_{b \in S_n} e(b) \cdot b_{1b(1)} \cdot b_{2b(2)} \cdot \ldots\ldots \cdot b_{nb(n)} = |A^t|$$

PROP Sea $A \in M_n(K)$. Se verifica

1) Si un determinante tiene dos filas o dos columnas iguales el determinante es cero.

2) Si se multiplica una fila o columna por un escalar, queda el determinante multiplicado por ese escalar.

3) Si a una fila o columna se le suma una combinación lineal del resto, el determinante no varía.

Dem.

Inmediatas, sin más que tener en cuenta que las filas (o columnas) de A se consideran vectores de K^n y que el determinante es una función n-lineal alternada.

PROP Sea $\varphi \in L(V)$, $B = \{u_1, \ldots, u_n\}$ base de V y A la matriz asociada a φ respecto de B. Entonces

$$\det(j) = |A|$$

Dem.

$$\det(j) = \det_B(j(u_1), \ldots, j(u_n)) = \sum_{s \in S_n} e(s) b_{1s(1)} \cdot \ldots\ldots \cdot b_{ns(n)} =$$

Siendo $(b_{j1}, b_{j2}, \ldots, b_{jn})$ las coordenadas de $\varphi(u_j)$ respecto de B y la fila j-ésima de A.

$$= |A|$$

OBS Si en lugar de escribir $\varphi(u_j)$ por filas lo hiciésemos por columnas tendríamos que es igual, $\det(j) = |A^t| = |A|$

COROLARIO Si A, B$\in$ M$_n$(K) $\Rightarrow$ $|A\cdot B| = |A|\cdot|B|$

Dem.

Sean $j, \Psi \in L(V)$ con A matriz asociada a φ y B a Ψ

$$|A|\cdot|B| = \det(j)\cdot\det(\Psi) = \det(j \circ j) = |A\cdot B|$$

COROLARIO $|A| \neq 0 \Leftrightarrow A$ es inversible

Dem.

Sea φ$\in$L(V) con A matriz asociada.

A es inversible $\Leftrightarrow$ φ es automorfismo $\Leftrightarrow$ $\det(j) \neq 0 \Leftrightarrow |A| \neq 0$

COROLARIO Si A es inversible, entonces $|A^{-1}| = \dfrac{1}{|A|}$

Dem.

Sea φ$\in$L(V) con A matriz asociada

$$\left.\begin{array}{r}\det\left(j^{-1}\right) = \dfrac{1}{\det(j)} \\ A^{-1} \textit{ es la matriz asociada a } j^{-1}\end{array}\right\} \Rightarrow |A^{-1}| = \frac{1}{|A|}$$

3.3.1. Matriz Asociada a Ad(j).

Sea φ$\in$L(V), A la matriz asociada a φ y denotemos por A(ad(φ)) a la matriz asociada a Ad(φ).

Vamos a obtener A(ad(φ))

Sabemos que $j \circ ad(j) = \det(j)\cdot 1v$

Luego $A\cdot A(ad(j)) = |A|\cdot I_n$

Sea V un K-espacio vectorial de dimensión n y $B = \{u_1,\ldots,u_n\}$ base de V. Sabemos que $ad(j) = Ø(u_1,\ldots.,u_n)$ y sea $A(ad(j)) = (b_{ij})$

Por una lado tenemos $ad(\boldsymbol{j})(u_j) = \sum_{i=1}^{n} b_{ij} u_i$ (escribiendo por columnas) y por otro $ad(\boldsymbol{j})(u_j) = \O(u_1,...,u_n)(u_j) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i-1} \cdot \det_B(u_j, \boldsymbol{j}(u_1),..., \boldsymbol{j}(\hat{u}_j),..., \boldsymbol{j}(u_n)) \cdot u_i =$

$$= \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i-1} \cdot (-1)^{i-1} \cdot \det(\boldsymbol{j}(u_1),..., \boldsymbol{j}(u_{i-1}), u_j, \boldsymbol{j}(u_{i+1}),..., \boldsymbol{j}(u_n)) \cdot u_i$$

Hemos obtenido dos expresiones del mismo vector, y como B es base, han de ser iguales. Entonces

$$b_{ij} = \det_B(\boldsymbol{j}(u_1),..., \boldsymbol{j}(u_{i-1}), u_j, \boldsymbol{j}(u_{i-1}),..., \boldsymbol{j}(u_n)) \qquad \forall 1 \le i, j \le n$$

Ahora vamos a desarrollar el miembro de la derecha para obtener una expresión más operativa par b_{ij}.

Definimos un endomorfismo auxiliar $\varphi_{ij} \in L(V)$ $\forall 1 \le i, j \le n$ como

$$\boldsymbol{j}_{ij}(u_K) = \begin{cases} \boldsymbol{j}(u_K) & si \quad K \ne i \\ u_j & si \quad K = i \end{cases}$$

$$\det_B(\boldsymbol{j}(u_1),.., \boldsymbol{j}(u_{i-1}), u_j, \boldsymbol{j}(u_{i+1}),..., \boldsymbol{j}(u_n)) = \det_B(\boldsymbol{j}_{ij}(u_1),..., \boldsymbol{j}_{ij}(u_{i-1}), \boldsymbol{j}_{ij}(u_i), \boldsymbol{j}_{ij}(u_{i+1})..., \boldsymbol{j}_{ij}(u_n)) =$$

$$= \det(\boldsymbol{j}_{ij}) = |A(\boldsymbol{j}_{ij})|$$

donde por $A(\varphi_{ij})$ representamos la matriz asociada a la aplicación φ_{ij} .

Sea $A = (a_{ij})$ la matriz asociada de φ.

La matriz $A(\varphi_{ij})$ es:

$$A(\boldsymbol{j}_{ij}) = \begin{pmatrix} A(\boldsymbol{j}_{11}) & A(\boldsymbol{j}_{12}) & ..... & A(\boldsymbol{j}_{1n}) \\ A(\boldsymbol{j}_{21}) & A(\boldsymbol{j}_{22}) & ..... & A(\boldsymbol{j}_{2n}) \\ ..... & ..... & ..... & ..... \\ A(\boldsymbol{j}_{n1}) & A(\boldsymbol{j}_{n2}) & ..... & A(\boldsymbol{j}_{nn}) \end{pmatrix}$$

y teniendo en cuenta $(\varphi_{ij})(u_K)$ corresponden a la columna K, tenemos que

$$A(\boldsymbol{j}_{ij}) = \begin{pmatrix} a_{11} & ..... & a_{1,i-1} & 0 & a_{1,i+1} & ..... & a_{1n} \\ ..... & ..... & ..... & ..... & ..... & ..... & ..... \\ a_{j1} & ..... & a_{j,i-1} & 1 & a_{j,i+1} & ..... & a_{jn} \\ ..... & ..... & ..... & ..... & ..... & ..... & ..... \\ a_{11} & ..... & a_{n,i-1} & 0 & a_{n,i+1} & ..... & a_{nn} \end{pmatrix}$$

El determinante es

$$\left|A(\varphi_{ij})\right| = (-1)^{i-1}\cdot(-1)^{j-1}\cdot\begin{vmatrix} 1 & a_{j1} & ..... & a_{j,i-1} & a_{j,i+1} & ..... & a_{jn} \\ 0 & a_{11} & ..... & a_{1,i-1} & a_{1,i+1} & ..... & a_{1n} \\ ..... & ..... & ..... & ..... & ..... & ..... & ..... \\ ..... & ..... & ..... & ..... & ..... & ..... & ..... \\ 0 & a_{n1} & ..... & a_{n,i-1} & a_{n,i+1} & ..... & a_{nn} \end{vmatrix} =$$

Renombremos los elementos de la matriz $A(\varphi_{ij}) = (C_{ij})_{1\le i,j\le n}$

$$= (-1)^{i+j}\cdot(-1)^{-2}\cdot\left(\sum_{\sigma\in S_n}\varepsilon(\sigma)\cdot C_{1\sigma(1)}\cdot.....\cdot C_{n\sigma(n)}\right) =$$

Como el determinante de una matriz y su traspuesta coinciden

$$= (-1)^{i+j}\cdot\left(\sum_{\sigma\in S_n}\varepsilon(\sigma)\cdot C_{\sigma(1)1}\cdot.....\cdot C_{\sigma(n)n}\right) =$$

y al ser la primera columna toda nula menos su primer elemento resulta que

$$C_{\sigma(1)1} = \begin{cases} 0 & \sigma(1)\ne 1 \\ 1 & \sigma(1) = 1 \end{cases}$$

$$= (-1)^{i+j}\left(\sum_{\substack{\sigma\in S_n \\ \sigma(1)=1}}\varepsilon(\sigma)C_{\sigma(n)n}\right) = (-1)^{i+j}\cdot\left(\sum_{\sigma\in S_{n-1}}\varepsilon(\sigma)C_{\sigma(2)2}\cdot....\cdot C_{\sigma(n)n}\right) =$$

$$= (-1)^{i+j}\cdot\left|Dji\right|$$

siendo D_{ji} la matriz que se obtiene de A eliminando la fila j y columna i

Por tanto $b_{ij} = (-1)^{i+j}\cdot\left|D_{ij}\right|$

DEF Sea $A\in M_n(K)$ con $A = (a_{ij})$. Llamamos menor complementario de a_{ij} al determinante de D_{ij}.

DEF Sea $A\in M_n(K)$ con $A = (a_{ij})$. Llamamos adjunto de a_{ij} a $b_{ij} = (-1)^{i+j}\cdot\left|D_{ij}\right|$

DEF Llamaremos matriz adjunta de $A\in M_n(K)$ a $\overline{A} = (b_{ij})$

Con esta nueva terminología tenemos que

$$A(ad(\boldsymbol{j})) = \overline{A}^t$$

OBS Si φ es un automorfismo y A es su matriz asociada, sabemos que A es inversible y

$$A^{-1} = A(\boldsymbol{j}^{-1}) = \frac{1}{|A|} \cdot \overline{A}^t \text{ ya que } \boldsymbol{j}^{-1} = \frac{ad(\boldsymbol{j})}{\det(\boldsymbol{j})}$$

3.3.2. Desarrollo de un determinante por los adjuntos de una línea.

PROP Sea $A \in M_n(K)$ con $A = (a_{ij})$. Si (b_{ij}) es la matriz de adjuntos se verifica:

1) $|A| = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot b_{ij}$ (desarrollo por los adjuntos de la fila i)

2) $|A| = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} b_{ij}$ (desarrollo por los adjuntos de la columna j).

<u>Dem.</u>

Vamos a realizar la demostración para 2) pues son análogas ya que $|A| = |A^t|$

2) $|A| = \sum_{s \in S_n} e(s) a_{1s(1)} \cdot a_{2s(2)} \cdot \ldots \cdot a_{n(s)n} =$

Llevando el elemento que queremos sacar factor común a la fila 1 y columna 1 tenemos que

$$= a_{1j} \cdot (-1)^{j-1} \cdot \sum_{\substack{s \in S_n \\ s(1)=j}} e(s) a_{2s(2)} \cdot \ldots \cdot a_{ns(n)} + a_{2j} \cdot (-1)^{j} \cdot \sum_{\substack{s \in S_n \\ s(2)=j}} e(s) a_{1s(1)} \cdot a_{3s(3)} \cdot \ldots \cdot a_{ns(n)} + \ldots +$$

$$+ a_{nj} \cdot (-1)^{n+j-2} \cdot \sum_{\substack{s \in S_n \\ s(n)=j}} e(s) a_{1s(1)} a_{2s(2)} \cdot \ldots \cdot a_{n-1,s(n-1)} =$$

Definimos $s_i \in S_{n-1}$ como $s_i(K) = \begin{cases} s(K) & K \neq i \\ i & K = i \end{cases}$

$$= a_{1j} \cdot (-1)^{1+j} \cdot \sum_{s \in S_{n-1}} e(v_1) a_{2s_1(2)} \cdot a_{3s_1(3)} \cdot \ldots \cdot a_{ns_1(n)} + a_{2j} \cdot (-1)^{2+j} \cdot \sum_{s_2 \in S_{n-1}} e(s_2) a_{1s_2(1)} \cdot a_{3s_2(3)} \cdot \ldots \cdot a_{ns_2(n)} +$$

$$+ \ldots + a_{nj} \cdot (-1)^{n+j} \cdot \sum_{s_n \in S_n} e(s_n) a_{1s_n(1)} \cdot a_{2s_n(2)} \cdot \ldots \cdot a_{n-1,s_n(n-2)} =$$

$$= a_{1j} b_{1j} + a_{2j} b_{2j} + \ldots + a_{nj} b_{nj} = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} b_{ij}$$

COROLARIO La suma de los productos de una fila por los adjuntos de una paralela vale cero.

4. APLICACIÓN AL CALCULO DEL RANGO DE UNA MATRIZ.

Sabemos que las columnas de una matriz (o filas) de $M_n(K)$ son linealmente independientes (consideradas como vectores de K^n) si y solo si su determinante es no nulo.

DEF Dada una matriz $A \in M_{mxn}(K)$ con $A = (a_{ij})$ y $m \geq n$ se verifica:

rang A = n $\Leftrightarrow$ A tiene al menos un menor de orden n no nulo.

Dem.

"$\Rightarrow$"

Si rang(A) = n $\Rightarrow$ En A existen n filas linealmente independientes y por tanto su determinante es no nulo.

"$\Leftarrow$"

Supongamos que A tiene un menor de orden n cuyo determinante es no nulo. Como el intercambio de filas no altera el rango, podemos suponer sin pérdida de generalidad que

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots\cdots & a_{1n} \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ a_{n1} & \cdots\cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \neq 0$$

Por tanto las n primeras filas son linealmente independientes y rang (A) $\geq$ n

Pero como A tiene n columnas $\Rightarrow$ rang(A) $\leq$ n

Entonces rang(A) = n

DEF Sea A una matriz de orden m x n y D un menor de orden p obtenido de dicha matriz. Llamamos orlados del menor D a todos los menores de orden p + 1 que contienen a D.

PROP Sea $A \in M_{mx(n+1)}(K)$ con $A = (a_{ij})$.

$$\text{Rang}(A) = n \Leftrightarrow \begin{cases} A \text{ tiene un menor } D \text{ de orden } n \text{ no nulo} \\ \text{Todos los orlados de } D \text{ son nulos} \end{cases}$$

Dem.

"$\Rightarrow$"

Si rang(A) = n, por la proposición anterior A tiene un menor D de orden n no nulo.

Como A tiene n + 1 columnas, la única columna que no está en el menor D es combinación lineal de las otras. Y como esa columna estará en todos los orlados de D, éstos serán nulos.

"$\Leftarrow$"

Por hipótesis, al ser D un menor no nulo de orden n, A tiene n filas linealmente independientes.

Como todos los orlados son nulos, las demás filas serán combinación lineal de esas n.

Luego rang(A) = n.

Bibliografía recomendada.

Curso de algebra y geometría. Juan de Burgos. Ed: Alhambra

Algebra lineal y geometria. Ed: Univ. de Barcelona

Algebra linea. Juan de Burgos. Ed: McGraw-Hill

Algebra lineal. F. Puerta. Ed: Univ. de Barcelona.1975

Linear Algebra. W. Greub. Ed: Springer-Verlag