TEMAS DE MATEMATICAS
(Oposiciones de Secundaria)

TEMA 22

LA FUNCIÓN EXPONENCIAL Y LOGARITMICA DE VARIABLE REAL. SITUACIONES REALES EN LAS QUE APARECEN.

TEMA 22

LA FUNCIÓN EXPONENCIAL Y LOGARITMICA DE VARIABLE REAL. SITUACIONES REALES EN LAS QUE APARECEN.

1. LA FUNCIÓN EXPONENCIAL DE BASE a.

1.1. Potencias de Exponente Natural.

Dado un número real positivo, a, podemos definir una función

$$f_a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^+$$
$$n \to a^n$$

siendo a^n el producto de a por si mismo n veces.

Es fácil comprobar que $f_a : (\mathbb{N}, +) \to \mathbb{R}^+, \cdot)$ es un homomorfismo:

$\forall n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ tenemos que $f_a(n_1 + n_2) = a^{n_1+n_2} = a^{n_1} \cdot a^{n_2} = f_a(n_1) \cdot f_a(n_2)$

En los siguientes apartados iremos extendiendo el dominio de la f_a a $\mathbb{Z}$ y a $\mathbb{Q}$ hasta llegar a definirla sobre $\mathbb{R}$, y siempre verificando que sigue siendo un homomorfismo.

1.2. Potencias de Exponente Entero.

Sea $f_a : (\mathbb{Z}, +) \to (\mathbb{R}^+, \cdot)$ con f_a homomorfismo de grupos. f_a verifica que $\forall z_1, z_2 \in \mathbb{Z}$ $f_a(z_1 + z_2) = f_a(z_1) \cdot f_a(z_2)$.

Sabiendo que f_a es un homomorfismo, se cumple:

1) $f_a(z) = f_a(z + 0) = f_a(z) \cdot f_a(0) \quad \forall z \in \mathbb{Z} \Rightarrow f_a(0) = 1$

2) $1 = f_a(0) = f_a(z - z) = f_a(z) \cdot f_a(-z) \Rightarrow f_a(-z) = \dfrac{1}{f_a(z)}$

Si escribimos $f_a(z) = a^{-z} \quad \forall z \in \mathbb{Z}^+$, por convenio podemos decir que $f_a(-z) = \dfrac{1}{a^z} = a^{-z} \quad \forall z \in \mathbb{Z}^+$.

Así conseguimos extender el dominio de f_a de $\mathbb{N}$ a $\mathbb{Z}$.

1.3. Potencias de Exponente Racional.

Sea $r \in Q$ un número racional. Entonces $r = \dfrac{p}{q}$ siendo $\dfrac{p}{q}$ un representante cualquiera de r, con $p \in \mathbb{Z}$ y $q \in \mathbb{Z} - \{0\}$.

Sabemos que $f_a(1) = a$ por ser $1 \in \mathbb{N}$, y que f_a debe ser un homomorfismo.

$$a = f_a(1) = f_a\left(q \cdot \frac{1}{q}\right) = \left[f_a\left(\frac{1}{q}\right)\right]^q$$

Entonces $f\left(1/q\right)$ debe ser un número real tal que su potencia de grado q sea a. Comprobemos que ese número existe.

PROP Sea $g: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ con $g(x) = x^n$. Esta función verifica:

1) Es continua.

2) Es estrictamente creciente en $\mathbb{R}$.

3) $\lim_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$

4) Es un homomorfismo de grupos.

<u>Dem.</u>

1) La función g(x) es continua por ser un polinomio.

2) Sean $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^+$ con $x_1 < x_2$.

$$g(x_2) - g(x_1) = x_2^n - x_1^n = (x_2 - x_1)\left(x_2^{n-1} + x_2^{n-2} \cdot x_1 + \ldots.. + x_2 x_1^{n-2} + x_1^{n-1}\right) > 0$$

3) Como $n \in \mathbb{N} \Rightarrow 1 \le n \ \ \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow x \le g(x) \ \ \forall n \in \mathbb{N}$

con $x > 1$ y como $\lim_{x \to +\infty} x = +\infty \le \lim_{x \to +\infty} g(x) \Rightarrow \lim_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$

4) Hemos de comprobar que $(x_1 \cdot x_2)^n = x_1^n \cdot x_2^n$

La demostración la hacemos por inducción.

n = 1 $\quad (x_1 \cdot x_2)^1 = x_1 \cdot x_2$

n = 2 $\quad (x_1 \cdot x_2)^2 = (x_1 \cdot x_2)(x_1 \cdot x_2) = x_1^2 \cdot x_2^2$

Suponemos cierto $(x_1 x_2)^{n-1} = x_1^{n-1} \cdot x_2^{n-1}$

Para n $\quad (x_1 x_2)^n = (x_1 x_2)^{n-1}(x_1 x_2) = \left(x_1^{n-1} x_2^{n-1}\right)(x_1 \cdot x_2) = x_1^n \cdot x_2^n$

Luego la igualdad es cierta y $g(x_1 \cdot x_2) = g(x_1) \cdot g(x_2)$

De todo esto obtenemos como conclusión que g(x) es un isomorfismo, existiendo por tanto su inversa

H: $\mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ con $(g \circ h)(x) = x = (h \circ g)(x)$

Denotaremos como h(x) = $x^{1/n}$

Luego $\forall a \in \mathbb{R}^+$ h(a) = $a^{1/n}$ siendo $a^{1/n}$ el número que verifica que su potencia de grado n es a.

Podemos escribir que $f\left(\frac{1}{q}\right) = a^{\frac{1}{q}}$ y $a = \left[f\left(\frac{1}{q}\right)\right]^q = \left(a^{\frac{1}{q}}\right)^q$

Si r∈Q con $r = \dfrac{p}{q}$ tenemos que

$$f_a(r) = f_a\left(\frac{p}{q}\right) = f_a\left(p \cdot \frac{1}{q}\right) = \left[f_a\left(\frac{1}{q}\right)\right]^p = \left(a^{\frac{1}{q}}\right)^p$$

y ahora sólo nos queda comprobar que el resultado obtenido no depende del representante elegido para r.

Sea $r = \dfrac{p}{q} = \dfrac{P'}{q'}$ dos representantes de r. Verifican que pq´ = p´·q

$$f_a(r) = f_a\left(\frac{p}{q}\right) = \left(a^{\frac{1}{q}}\right)^p$$

$$f_a(r) = f_a\left(\frac{p'}{q'}\right) = \left(a^{\frac{1}{q'}}\right)^{p'}$$

Veamos que ambas expresiones son iguales:

$$\left[f_a\left(\frac{p}{q}\right)\right]^{qq'} = \left[f_a\left(\frac{1}{q}\right)\right]^{pqq'} = \left(\left[f_a\left(\frac{1}{q}\right)\right]^q\right)^{pq'} = a^{pq'}$$

$$\left[f_a\left(\frac{p'}{q'}\right)\right]^{qq'} = \left[f_a\left(\frac{1}{q'}\right)\right]^{p'qq'} = \left(\left[f_a\left(\frac{1}{q'}\right)\right]^{q'}\right)^{p'q} = a^{p'q}$$

y como pq´ = p´q, ambas expresiones coinciden.

Por convenio, denotaremos $f_a\left(\frac{p}{q}\right) = a^{\frac{p}{q}}$ con p∈$\mathbb{Z}$ y q∈$\mathbb{Z}^*$.

PROP Si a > 1, entonces $\lim\limits_{n\to+\infty} a^n = +\infty$

Dem.

Si a > 1 $\Rightarrow$ a = 1 + x con x > 0.

Por tanto $a^n = (1+x)^n = 1 + nx + \binom{n}{2}x^2 + \binom{n}{3}x^3 + \ldots\ldots > 1 + nx$

Y como $\lim\limits_{n\to\infty}(1+nx) = +\infty \Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} a^n = +\infty$

PROP La función $f_a: Q \to \mathbb{R}$ con $f_a(r) = a^r$ verifica las siguientes propiedades:

1) $a^{r_1}\cdot a^{r_2} = a^{r_1+r_2} \quad \forall r_1, r_2 \in \mathbb{Q}$ (Es homomorfismo de grupos).

2) $\left(a^{r_1}\right)^{r_2} = a^{r_1\cdot r_2} \quad \forall r_1, r_2 \in \mathbb{Q}$

3) f_a es estrictamente creciente si a > 1 y estrictamente decreciente si 0 < a < 1.

4) f_a es continua $\forall r \in Q$.

Dem.

1) Sean $r_1 = \dfrac{p_1}{q_1}$ y $r_2 = \dfrac{p_2}{q_2}$ con $p_1, p_2 \in \mathbb{Z}$ y $q_1, q_2 \in \mathbb{Z}^*$

$$\left(a^{r_1}\cdot a^{r_2}\right)^{q_1\cdot q_2} = \left(a^{r_1}\right)^{q_1 q_2}\cdot\left(a^{r_2}\right)^{q_1 q_2} = \left(a^{\frac{p_1}{q_1}}\right)^{q_1 q_2}\cdot\left(a^{\frac{p_2}{q_2}}\right)^{q_1 q_2} = a^{p_1 q_2}\cdot a^{p_2 q_1} =$$

Como $p_1q_2 \in$ y $p_2q_1 \in \mathbb{Z}$ tenemos

$$= a^{p_1 q_2 + p_2 q_1} = \left(a^{\frac{p_1 q_2 + p_2 q_1}{q_1 q_2}}\right)^{q_1 q_2} = \left(a^{r_1+r_2}\right)^{q_1\cdot q_2}$$

Por tanto $a^{r_1+r_2} = a^{r_1}\cdot a^{r_2} \quad \forall r_1, r_2 \in Q$

2) Análogamente a la anterior.

3) Ya hemos comprobado en este mismo apartado que la función g(x) = x^n es creciente $\forall n \in \mathbb{N}$ y g: $\mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$, e igualmente $h(x) = \sqrt[n]{x}$ es también creciente $\forall n \in \mathbb{N}$ y h: $\mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$.

Como g(x) y h(x) son crecientes, si $a > 1 \Rightarrow a^n > 1^n = 1$ y $\sqrt[m]{a} > 1 \Rightarrow \sqrt[m]{a^n} > 1$

Entonces si $r_1 < r_2 \Rightarrow r_2 - r_1 > 0 \Rightarrow a^{r_2 - r_1} > 1 \Rightarrow \left(a^{r_2 - r_1}\right) \cdot a^{r_1} > 1 \cdot a^{r_1} \Rightarrow a^{r_2 - r_1} \cdot a^{r_1} > a^{r_1} \Rightarrow$

$\Rightarrow a^{r_2} > a^{r_1} \qquad \forall r_1, r_2 \in \mathbb{Q}$ con $r_1 < r_2 \Rightarrow$ f_a es creciente para asi $a > 1$.

De forma análoga, si $a < 1 \Rightarrow d = \frac{1}{a} > 1$ $y\ si\ r_1 < r_2\ con\ r_1, r_2 \in \mathbb{Q}$ tenemos que $\left(\frac{1}{a}\right)^{r_1} < \left(\frac{1}{a}\right)^{r_2} \Rightarrow a^{r_1} > a^{r_2} \quad \forall r_1, r_2 \in \mathbb{Q} \Rightarrow$ f_a es decreciente para $a < 1$.

4) Como $a^y - a^x = a^x\left(a^{y-x} - 1\right)$ tenemos que cuando y $\rightarrow$ x, si se verifica que $a^{y-x} - 1 \rightarrow 0$ podemos asegurar que $a^y \rightarrow a^x$.

Por tanto, para demostrar la continuidad de f_a en Q, basta demostrarlo en el origen (r = 0).

Sea $\varepsilon > 0$ y $a > 1 \Rightarrow \exists n \in \mathbb{N} / 1 + n\varepsilon > a$

$(1 + \varepsilon)^n > 1 + n\varepsilon > a \Rightarrow 1 + \varepsilon > a^{1/n}$

Y por tanto $\varepsilon > a^{1/n} - 1 > 0$

Luego $\forall e \in Q$ con $0 \le r < \frac{1}{n}$ sabiendo que f_a es creciente tenemos

$$\left|a^r - 1\right| < e$$

Además, como $0 < a^{1/n} - 1 < e \Rightarrow 0 < a^{1/n} - 1 < e \cdot a^{1/n}$.

Y dividiendo por $a^{1/n}$ $\quad 0 < 1 - a^{-1/n} < e$

Entonces $\forall r \in Q$ con $-\frac{1}{n} < r \le 0$ se verifica $0 \le 1 - a^r < e$

Uniendo ambas partes:

$\forall e > 0 \quad \exists d > 0 / \forall r \in Q$ con $|r| < d \Rightarrow \left|a^r - 1\right| < e$

Luego f_a es continua en r = 0 y por lo visto el inicio también lo es $\forall r \in Q$.

Para demostrarlo con a < 1, basta tomar $d = \frac{1}{a} > 1$ y como f_d es creciente $\forall r \in Q$ queda que f_a es continua para todo valor a positivo.

1.4. Potencias de Exponente Real.

El homomorfismo $f_a: Q \to \mathbb{R}$ definido en el punto anterior vamos a extenderlo de forma única de tal manera que su dominio sea $\mathbb{R}$. Tengamos en cuenta que $\forall x \in \mathbb{R}$ $\exists (q_i) \in Q$ con $(q_i)_{i\in\mathbb{N}}$ un representante de x.

PROP Si $(q_i)_{i\in\mathbb{N}} \subset Q$ es una sucesión racional de Cauchy entonces $\left(a^{q_i}\right)_{i\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ es una sucesión de Cauchy.

Dem.

Sea a > 1 (si a = 1 trivial)

Como q_i es de Cauchy $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_o \in \mathbb{N} / \left|q_i - q_j\right| < \varepsilon$ si $n \geq n_o$

$$\Rightarrow \left|a^{q_i} - a^{q_j}\right| = \left|a^{q_i}\right|\left|1 - a^{q_j - q_i}\right| \leq K\left|1 - a^{q_j - q_i}\right| \leq (*)$$

porque como q_i es de Cauchy $\Rightarrow$ está acotado $\Rightarrow \left|a^{q_i}\right| \leq K$

$$(*) \leq K\left|1 - a^{\varepsilon}\right|$$

y como ε es tan pequeño como queramos, entonces a^{ε} es tan cercano a 1 como nos de la gana $\Rightarrow K\left|1 - a^{\varepsilon}\right| < \varepsilon'(1)$

$\Rightarrow \forall \varepsilon' > 0 \quad \exists \varepsilon > 0$ (que verifique la propiedad (1) y por tanto $\exists n_o \in \mathbb{N} / \left|a^{q_i} - a^{q_j}\right| < \varepsilon'$ si $n \geq n_o$

$\Rightarrow a^{q_i}$ es de Cauchy en $\mathbb{R}$. (Análogamente si a < 1).

Como conclusión tenemos que $\left(a^{q_i}\right)$ es de Cauchy y por tanto define un único número real que denotaremos por a^x.

Esta definición no depende del representante elegido, pues si $(q_i') \subset Q$ es otra sucesión de Cauchy que representa a x, se verificará que

$$q_i - q_i' \to 0 \Rightarrow a^{q_i - q_i'} \to 1$$

ya que $a^{q_i'} \cdot \left(a^{q_i - q_i'}\right) = a^{q_i}$

y por tanto $\left(a^{q_i}\right)_{i\in\mathbb{N}}$ y $\left(a^{q_i'}\right)_{i\in\mathbb{N}}$ tienen el mismo límite, definiendo el mismo número real.

PROP La función $f_a: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ definida por $f_a(x) = a^x$ verifica las siguientes propiedades:

1) f_a es estrictamente creciente si $a > 1$ y estrictamente decreciente si $a < 1$.

2) $f_a : (\mathbb{R}, +) \to (\mathbb{R}^+, \cdot)$ es un homomorfismo de grupos.

3) f_a es continua.

4) $\left(a^{x_1}\right)^{x_2} = a^{x_1 \cdot x_2}$ y $(ab)^x = a^x \cdot b^x$

5) Si a > 1 $\begin{cases} \lim\limits_{x \to +\infty} a^x = +\infty \\ \lim\limits_{x \to -\infty} a^x = 0 \end{cases}$ y si a < 1 $\begin{cases} \lim\limits_{x \to +\infty} a^x = 0 \\ \lim\limits_{x \to -\infty} a^x = +\infty \end{cases}$

Dem.

1) Sea $a > 1$.

Si $x_1 < x_2 \Rightarrow \exists r, s \in Q / x_1 < r < s < x_2$

Sean $(q_i)_{i\in \mathbb{N}} \subset \mathbb{Q}$ y $(q_i')_{i\in \mathbb{N}} \subset \mathbb{Q}$ representantes de x_1 y x_2 respectivamente.

Como $x_1 = \lim q_i$ e $x_2 = \lim q_i \Rightarrow$

$\exists n_o \in \mathbb{N} / \forall i \geq n_o \qquad q_i < r < s < q_i'$

Por tanto

$$a^{q_i} < a^r < a^s < a^{q_i'} \quad \forall i \geq n_o$$

Y entonces

$$a^{x_1} < a^r < a^s < a^{x_2}$$

Siendo f_a creciente estrictamente.

El caso $a < 1$ se demuestra de forma análoga, basta tomar

$$d = \frac{1}{a} > 1$$

2) Sea $f_a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$

Si $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ sean $(q_i)_{i\in \mathbb{N}} \subset Q$ y $(q_i')_{i\in \mathbb{N}} \subset Q$ dos representantes de x_1 y x_2.
Entonces $(q_i + q_i')_{i\in \mathbb{N}}$ es un representante de $x_1 + x_2$

Luego $\left(a^{q_i}\right)_{i\in \mathbb{N}}$, $\left(a^{q_i'}\right)_{i\in \mathbb{N}}$ y $\left(a^{q_i + q_i'}\right)_{i\in \mathbb{N}}$ son representantes de x_1, x_2 y $x_1 + x_2$ respectivamente.

Como $f_a: Q \to \mathbb{R}^+$ es un homomorfismo de grupos, se verifica

$$a^{q_i + q_i'} = a^{q_i} \cdot a^{q_i'}$$

entonces

$$a^{x_1 + x_2} = a^{x_1} \cdot a^{x_2} \qquad \forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}$$

Y como $f_a(x_1 + x_2) = a^{x_1 + x_2} = a^{x_1} \cdot a^{x_2} = f_a(x_1) \cdot f_a(x_2)$

Entonces $f_a: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ es homomorfismo.

3) Análogamente al caso de la función exponencial racional, basta que demostremos que f_a es continua x = 0.

Sabemos que $\forall \boldsymbol{e} > 0 \quad \exists \boldsymbol{d} > 0 / \forall q \in Q \quad |q| < \boldsymbol{d} \Rightarrow |a^q - 1| < \boldsymbol{e}$

$\forall x \in \mathbb{R}$ con $|x| < \boldsymbol{d} \quad \exists r, s \in Q / -\boldsymbol{d} < r < x < s < \boldsymbol{d}$

- Si a > 1

$$a^r < a^x < a^s$$

Entonces $1 - \boldsymbol{e} < a^r < a^x < a^s < 1 + \boldsymbol{e}$

Y $\forall \boldsymbol{e} > 0 \quad \exists \boldsymbol{d} > 0 / \forall x \in \mathbb{R}$ con $|x| < \boldsymbol{d} \Rightarrow |a^x - 1| < \boldsymbol{e}$

- Si a < 1

$$a^r > a^x > a^s$$

Entonces $1 - \boldsymbol{e} < a^s < a^x < a^r < 1 + \boldsymbol{e}$

Y $\forall \boldsymbol{e} > 0 \quad \exists \boldsymbol{d} > 0 / \forall x \in \mathbb{R}$ con $|x| < \boldsymbol{d} \Rightarrow |a^x - 1| < \boldsymbol{e}$

4) $\left(a^{x_1}\right)^{x_2} = a^{x_1 \cdot x_2}$

Sea $(q_i)_{i \in \mathbb{N}} \subset Q$ un representante de x_1 y $(q_i')_{i \in \mathbb{N}} \subset Q$ de x_2.

Entonces $\lim q_i = x_1$ y $\lim q_i' = x_2$

Como $\left(a^{q_i}\right)^{q_i'} = a^{q_i \cdot q_i'}$ (ya visto en el punto anterior) y si tenemos en cuenta que:

1) $\mathit{lim}\ a^{q_i} = a^x$

2) $g(x) = x^{q_i'}$ es continua $\forall q_i' \in Q$

tenemos que

$$\left(a^{x_1}\right)^{q_i'} = a^{x_1 q_i'}$$

y como f_a es continua

$$\left(a^{x_1}\right)^{x_2} = a^{x_1 \cdot x_2}$$

- $(ab)^x = a^x \cdot b^x$

Inmediata.

5) Para $a > 1$.

Que $\lim\limits_{x\to+\infty} a^x = +\infty$ es consecuencia de $\lim\limits_{n\to+\infty} a^n = +\infty$ y que f_a es creciente.

$$\lim_{x\to-\infty} a^x = \lim_{x\to+\infty} a^{-y} = \lim_{y\to+\infty} \frac{1}{a^y} = 0$$

De forma análoga se demuestra para $a < 1$.

PROP La función exponencial de base a ($a \neq 1$), $f_a : (\mathbb{R}, +) \to (\mathbb{R}^+, \cdot)$ es un isomorfismo de grupos.

Dem.

1) Como $a^{x_1+x_2} = a^{x_1} \cdot a^{x_2} \Rightarrow f_a$ es homomorfismo.

2) $f_a(x) = a^x$ es estrictamente creciente $\Rightarrow$ Inyectiva f_a es continua y Rec $f_a = \mathbb{R}^+ \Rightarrow$ suprayectiva.

Si f_a es homomorfismo y biyectiva $\Rightarrow f_a$ es Isomorfismo.

2. LA FUNCIÓN LOGARITMO DE BASE a.

En el punto anterior hemos demostrado que la función

$$f_a : (\mathbb{R}, +) \to (\mathbb{R}^+, \cdot)$$

$$x \to f_a(x) = a^x$$

es un isomorfismo de grupos. Por tanto existe la función recíproca de f_a, f_a^{-1}, que llamaremos función Logaritmo en base a, y se denota por $f_a^{-1} \equiv \log_a$.

$$f_a^{-1} : (\mathbb{R}^+, \cdot) \to (\mathbb{R}, +)$$

$$x \to f_a^{-1}(x) = \log_a x$$

verificándose

$$a^{\log_a(x)} = x = \log_a a^x$$

ya que

$$\left(f_a \circ f_a^{-1}\right)(x) = x = \left(f_a^{-1} \circ f_a\right)(x)$$

PROP La función $\log_a : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ verifica las siguientes propiedades:

1) $\log_a$ es estrictamente creciente si $a > 1$ y estrictamente decreciente si $a < 1$.

2) $\log_a : (\mathbb{R}^+, \cdot) \to (\mathbb{R}, +)$ es un homomorfismo de grupos.

3) $\log_a$ es continua.

4) Si $a > 1$ $\begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty} \log_a x = +\infty \\ \lim\limits_{x\to-\infty} \log_a x = -\infty \end{cases}$ y si $a < 1$ $\begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty} \log_a x = -\infty \\ \lim\limits_{x\to-\infty} \log_a x = +\infty \end{cases}$

<u>Dem.</u>

1) Sea $a > 1$ y $x_1 < x_2$

Sabemos que $a^{x_1} < a^{x_2}$ ya que la función a^x es creciente estrictamente.

$$x_1 = a^{\log_a x_1} = \log_a a^{x_1}$$

$$x_2 = a^{\log_a x_2} = \log_a a^{x_2}$$

Supongamos que $\log_a x_1 \geq \log_a x_2$

Entonces $a^{\log_a x_1} \geq a^{\log_a x_1} \Rightarrow x_1 \geq x_2$ lo que es una contradicción.

Luego $\log_a x_1 \leq \log_a x_2$ y la función $\log_a x$ es una función estrictamente creciente.

De forma análoga se demuestra $a < 1$.

2) Como $a^0 = 1 \Rightarrow \log_a 1 = 0$ ($f_a^{-1}(e) = e$ transforma el neutro en el neutro).

$\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}^+$

$$\left.\begin{array}{r} x_1 \cdot x_2 = a^{\log_a x_1 x_2} \\ x_1 \cdot x_2 = a^{\log_a x_1} \cdot a^{\log_a x_2} = a^{\log_a x_1 + \log_a x_2} \end{array}\right\} \Rightarrow a^{\log_a x_1 \cdot x_2} = a^{\log_a x_1 + \log_a x_2} \Rightarrow$$

Al ser a^x una función inyectiva se verifica

$$\log_a x_1 \cdot x_2 = \log_a x_1 + \log_a x_2$$

que es lo mismo que:

$$f_a^{-1}(x_1 \cdot x_2) = f_a^{-1}(x_1) + f_a^{-1}(x_2)$$

3) Inmediata.

4) Los límites son inmediatamente deducibles sin más que tener en cuenta que $\log_a x$ y a^x son funciones recíprocas.

PROP Se verifica:

1) $\log_a y^x = x \cdot \log_a y \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad \forall y > 0$

2) $\log_a y = \log_b y \cdot \log_a b \quad \forall a, b, y > 0$

<u>Dem.</u>

1) $y^x = \left(a^{\log_a y}\right)^x = a^{x \cdot \log_a y}$

Entonces

$$\log_a y^x = \log_a a^{x \cdot \log_a y} = x \cdot \log_a y$$

Luego

$$\log_a y^x = x \log_a y$$

2) Sabemos que $y = b^{\log_b y}$

Entonces $\log_a y = \log_a b^{\log_b y}$

Y aplicando el apartado anterior

$$\log_a b^{\log_b y} = \log_b y \cdot \log_a b$$

Luego

$$\log_a y = \log_b y \cdot \log_a b$$

Hay un caso especial de funciones exponenciales, que son aquellas en las que la base es el número e. Estos son muy útiles a la hora de hacer estudios físicos ya que aparecen con gran frecuencia en los problemas de crecimiento de poblaciones.

La función recíproca de la exponencial f(x) = e^x, es el logaritmo en base e de x, o también llamado logaritmo neperiano de x (en honor a Juan Neper), Lnx. En concreto, para los matemáticos, el logaritmo en base e es el mas importante debido en gran parte a que es la integral de la función $f(x)=\frac{1}{x}$, aunque esto se salga del tema, pero su utilización es muy grande y la tendencia natural es a manejarlos con mayor frecuencia que ninguno, pudiendo transformar cualquier otro logaritmo en neperiano mediante la expresión:

$$\log_a x=\frac{\ln x}{\ln a}$$

3. FUNCIÓN POTENCIAL.

DEF Llamamos función potencial a f: $\mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ con f(x) = x^r siendo $r\in \mathbb{R}^+$.

La definición tiene sentido ya que $r\in \mathbb{R}^+$ y como $x\in \mathbb{R}^+$ el símbolo x^r podría ser considerado de forma puntual como la función exponencial de base x.

PROP La función potencial f(x) = x^r verifica las siguientes propiedades:

1) Es estrictamente creciente si r > 0 y estrictamente decreciente.

2) Si r < 0 f: $(\mathbb{R}^+, \cdot) \to (\mathbb{R}^+, \cdot)$ f(x) = x^r es un homomorfismo de grupos.

3) Es continua en todo su dominio.

4) Si $r>0\begin{cases}\lim\limits_{x\to 0^+} x^r=0\\ \lim\limits_{x\to +\infty} x^r=+\infty\end{cases}$ y si $r<0\begin{cases}\lim\limits_{x\to 0^+} x^r=+\infty\\ \lim\limits_{x\to +\infty} x^r=0\end{cases}$

Dem.

Esta proposición casi en su totalidad la tenemos demostrada antes en el caso de que r sea un natural. Demostrémosla ahora con $r\in \mathbb{R}$.

Si tenemos en cuenta que $x^r=a^{r\cdot\log_a x}$

Podemos definir $g(x)=a^x$ y $h(x)=r\cdot\log_a x$

Verificándose que $f(x)=(g\circ h)(x)$

1) Si elegimos a < 1, g(x) es estrictamente creciente y h(x) también en caso de que r > 0. Si r < 0 entonces h(x) es estrictamente decreciente. Al componer ambas funciones, se demuestra lo que queríamos.

2) f(x) = x^r es un homomorfismo de grupos por ser composición de dos homomorfismos.

Por tanto $f(x_1 \cdot x_2) = f(x_1) \cdot f(x_2)$

Y es $(x_1 \cdot x_2)^r = x_1^r \cdot x_2^r$

3) f(x) = x^r es continua por ser composición de funciones continuas en todo su dominio.

4) Inmediato.

4. SITUACIONES REALES EN LAS QUE APARECEN.

4.1. Función Exponencial.

a) La desintegración atómica.

$$N(t) = N_o \cdot e^{-Kt} \text{ siendo}$$

N_o = número de átomos inicial (t = 0)

K = constante de desintegración del elemento.

b) Enfriamiento de un cuerpo.

$$f(t) = be^{-Kt} + e^{-kt} \int_a^t K \cdot M(n) \cdot e^{Kn} dn$$

K = constante.

b = temperatura en t = a.

M(t) = temperatura ambiental.

c) Caída de un cuerpo en un medio resistente.

$$f(t) = \frac{mg}{K} + \frac{gm^2}{K^2}\left(e^{-\frac{Kt}{m}} - 1\right)$$

d) Crecimiento de Poblaciones.

La función exponencial aparece al calcular el crecimiento de una población donde la tasa de crecimiento se mantiene constante, pudiendo ser positiva o negativa.

$$P = P_o \cdot e^{Kt}$$

P_o = tamaño inicial de la población.

K = tasa de crecimiento.

t = tiempo transcurrido.

Con el paso del tiempo, diversos factores influyen en el crecimiento de la población haciendo que la función exponencial de adapte a la función logística, moderando su crecimiento (o decrecimiento).

Las funciones logísticas tienen como expresión

$$c(t) = \frac{B}{1 + A \cdot e^{-Kt}}$$

e) Problemas de Interés Compuesto y Continuo.

En los problemas de interés compuesto, disponemos de un capital inicial que va incrementándose al añadirle los intereses producidos. Si el capital inicial es C_o y el interés es I, el capital C que tendremos al cabo de t años será

$$C = C_o (1 + I)^t$$

llamado capital compuesto.

Si los intereses se devengan cada instante (cada infinitésimo de tiempo) la expresión para el capital C es

$$C = \lim_{n \to \infty} C_o \left(1 + \frac{I}{n}\right)^{nt} = C_o \cdot e^{rt}$$

llamado capital continuo.

4.2. Función Logarítmica.

a) La Escala de Richter.

La escala de Richter es una escala logarítmica de base 10 que mide la fuerza o intensidad de los terremotos. Al ser su base 10, un terremoto de intensidad 5 es 10 veces mayor que otro de intensidad 4, 100 veces mayor que otro de intensidad 3 y así sucesivamente.

Teniendo en cuenta esto, un terremoto de escala 8´4 es 5´01 veces más intenso que otro de escala 7´7, ya que

$$\frac{10^{8'4}}{10^{7'7}} = 10^{0'7} \approx 5'01$$

b) pH.

El pH de una solución es la medida de su acidez, y mide la concentración de iones $[H^+]$, que son los átomos de hidrógeno por litro.

$$pH = \log_{10} \frac{1}{\left[H_3O^+\right]}$$

c) Regla de Cálculo.

La regla de Cálculo sirvió, hasta la aparición de las calculadoras, para simplificar operaciones complicadas. Se apoya en las propiedades de los logaritmos que permiten traducir productos en sumas, cocientes en restas, potencias y raíces en productos y cocientes, etc.

Bibliografía Recomendada.

Análisis Matemático I. Aut. J.A. Fernández Viña. Ed. Tecnos

Lecciones de Cálculo Infinitesimal I. Aut. R. Molina Legaz, M. Franco. Ed. Universidad de Murcia.

Principios de Análisis Matemático. Aut. W. Rudin. Ed. McGraw-Hill

Curso de Análisis Matemático I. Aut. E.L. Luna. Ed. Edunsa, 1991.

Calculus. Aut. M. Spivak. Ed. Reverté.

Análisis Matemático. Aut. M. de Guzmán, B. Rubio. Ed. Pirámide.

Calculus. Aut. Apostol. Ed. Reverté

Introducción al Análisis Matemático. Aut. J.M. Ortega. Ed. Labor