TEMAS DE MATEMÁTICAS
(OPOSICIONES DE SECUNDARIA)

TEMA 5

EL NÚMERO RACIONAL.

TEMA 5

<u>EL NÚMERO RACIONAL.</u>

1. INTRODUCCIÓN.

En el tema 1 construimos el conjunto $\mathbb{N}$ y lo dotamos de las operaciones de suma y producto, constituyendo $(\mathbb{N},+)$ un semigrupo abeliano. En el Tema 4, tuvimos que ampliar el conjunto $\mathbb{N}$. El motivo era que ecuaciones del tipo $x+m=n$ con $m>n$ no tenían solución en $\mathbb{N}$. Creamos el conjunto $\mathbb{Z}$, ampliación del $\mathbb{N}$, con más operaciones suma y producto que eran extensión de las de $\mathbb{N}$. $(\mathbb{Z},+,\bullet)$ tenía estructura de anillo conmutativo con elementos de integridad. Es más, vimos que era un dominio de integridad y todos sus ideales principales,

Ahora, en $\mathbb{Z}$, nos encontramos con el siguiente problema:

Sean $a,b\in\mathbb{Z}$ tal que a no divide a b y $a\neq 0$. Entonces las ecuaciones de la forma: $ax=b$ no tienen solución en $\mathbb{Z}$.

La solución está en construir un nuevo conjunto que amplíe $\mathbb{Z}$, y que las operaciones de suma y producto que definamos en él sean extensión de las de $\mathbb{Z}$. En la construcción de este nuevo conjunto, también hemos de poner como condición que sea el menor de todos los posibles.

Comenzaremos el tema con la construcción de ese conjunto que llamaremos $\mathbb{Q}$, y a sus elementos *números racionales*, y comprobaremos que $(\mathbb{Q},+)$ es un grupo abeliano. Luego definiremos el producto de números racionales, siendo $(\mathbb{Q}^*,\bullet)$ grupo multiplicativo. Enlazaremos ambas operaciones con la propiedad distributiva para terminar afirmando que $(\mathbb{Q},+,\bullet)$ es un grupo conmutativo.

En la segunda parte del tema comprobaremos que podemos definir una relación de orden en $\mathbb{Q}$, que $\mathbb{Q}$ es extensión de $\mathbb{Z}$ y diversas propiedades más.

Terminaremos viendo los números racionales enteros, es decir, aquellos que tienen cifras decimales.

2. EL CUERPO DE LOS NÚMEROS RACIONALES.

2.1. Construcción de $\mathbb{Q}$.

DEF Llamaremos $\mathbb{Z}^*$ al conjunto de los enteros sin el cero. $\mathbb{Z}^*=\mathbb{Z}-\{0\}$

DEF Establecemos en el conjunto $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}^*$ la siguiente relación R.

Sean $(a,b),(c,d)\in \mathbb{Z}\times\mathbb{Z}^*$. Entonces $(a,b)R(c,d)\Leftrightarrow ad=bc$

PROP La relación R definida en $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}^*$ es una relación de equivalencia

Dem:

1) Reflexiva: $(a,b)R(a,b) \Leftrightarrow ab=ba$ lo cual es cierto ya que el producto en $\mathbb{Z}$ es conmutativo.

2) Simétrica: $(a,b)R(c,d) \Rightarrow ad=bc \Rightarrow bc=ad \Rightarrow cb=da \Rightarrow (c,d)R(a,b)$

3) Transitiva: $(a,b)R(c,d) \Rightarrow ad=bc$
$(c.d)R(e,f) \Rightarrow cf=de$

multiplicando la primera ecuación por f, obtenemos:

$adf=bcf \Rightarrow$ Como $cf=de$ $\quad adf=bde \Rightarrow$ como $d\neq 0$ $\quad af=be \Rightarrow (a,b)R(e,f)$

La relación R en $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}^*$ es una relación de equivalencia.

DEF Definimos un conjunto $\mathbb{Q}$ como $\mathbb{Q}=\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}^*/R$ y llamaremos a cada clase de equivalencia de $\mathbb{Q}$, número racional, siendo $\mathbb{Q}$ el conjunto de los números racionales.

Si $p\in\mathbb{Q}$ y (a,b) es un elemento de la clase de p, por convenio se escribe $p=\frac{a}{b}$ y si tomásemos otro elemento de la misma clase (c,d) entonces $p=\frac{c}{d}$ verificándose que

$$a.d=b.c$$

DEF Al término $\frac{a}{b}$ se le llama *fracción* siendo *a* el numerador y *b* el denominador.

PROP El conjunto $\mathbb{Q}$ es una extensión del conjunto $\mathbb{Z}$.

Dem

Sea $f: \mathbb{Z}\to\mathbb{Q}$

$$a \longrightarrow [(a,1)]$$

Basta comprobar que f es inyectiva para que $\mathbb{Z}\subset\mathbb{Q}$.

Sean $a,b\in\mathbb{Z}$ con $f(a)=f(b) \Rightarrow [(a,1)]=[(b,1)] \Rightarrow a.1=b.1 \Rightarrow a=b$ c.q.d.

2.2. El grupo aditivo de los números racionales.

DEF Sean $[(a,b)],[(c,d)]\in\mathbb{Q}$, se define la suma como sigue:

$$[(a,b)]+[(c,d)]=[(ad+bc,bd)]$$

OBS La definición también la podíamos haber hecho de la siguiente manera:

$$\text{Sean } p,q\in\mathbb{Q} \Rightarrow\ p+q=\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{ad+bc}{bd}$$

OBS La operación está bien definida ya que $b.d\in\mathbb{Z}^*$ puesto que $b,d\in\mathbb{Z}^*$ y el producto es una operación interna

PROP La operación suma definida anteriormente no depende del representante elegido.

Dem:

Sean $[(a,b)]=[(a',b')] \Rightarrow ab'=ba'$
$[(c,d)]=[(c',d')] \Rightarrow cd'=dc'$

$$[(a,b)]+[(c,d)]= [(ad+bc,bd)]=\ldots$$

Como $ab'=ba' \Rightarrow$ multiplicando por dd' queda $dd'ab'=dd'ba'$
Como $cd'=dc' \Rightarrow$ multiplicando por bb' queda $bb'cd'=bb'dc'$

Sumando ambas ecuaciones: $dd'ab'+bb'cd'=dd'ba'+bb'dc'$

y reordenando términos queda: $(ad+bc)b'd'=(a'd'+b'c')bc=\ldots$

$$\ldots=[(a'd'+b'c',b'd')]=[(a',b')]+[(c',d')]$$

OBS Podemos realizar la demostración en términos de fracciones en lugar de clases de equivalencia, con sólo cambiar $[(a,b)]=\frac{a}{b}$ y el resto igual.

PROP La operación suma definida anteriormente verifica las siguientes propiedades:

a) Conmutativa
b) Asociativa.
c) Elemento Neutro
d) Elemento Opuesto

Dem.

Las dos primeras propiedades las vamos a demostrar utilizando clases de equivalencia y las dos últimas mediante fracciones. Dejemos al lector como ejercicio la posibilidad de hacerlo al revés.

1) Conmutativa.

Sean $[(a,b)],[(c,d)]\in \mathbb{Q}$

$[(a,b)]+[(c,d)]=[(ad+bc,bd)]=\ldots$

aplicando la conmutatividad de la suma y del producto de números enteros
…=[(cb+da,db)]=[(c,d)]+[(a,b)]

2) Asociativa:

Sean: [(a,b)], [(c,d)], [(e,f)] $\in \mathbb{Q}$,

$\left([(a,b)]+[(c,d)]\right)$+[(e,f)]=[(ad+bc,bd)]+[(e,f)]=[(adf+bcf+bde, bdf)]=…

…=[(a,b)]+[(cf+de,df)]=[(a,b)]+ $\left([(c,d)]+[(e,f)]\right)$

3) Elemento Neutro:

Sea $e\in\mathbb{Q}$ el elemento neutro. Se debe verificar que $\forall p\in\mathbb{Q}$:

$$p+e = p = e+p$$

Sea $p=\frac{a}{b}$ si $e=\frac{c}{d}$ $\Rightarrow$ $p+e = e+p=\frac{ad+bc}{bd}$

y como p+e=p $\Rightarrow$ $\frac{ad+bc}{bd}=\frac{a}{b}$ $\Rightarrow$ $\left.\begin{matrix} ad+bc=a \\ bd=b \end{matrix}\right\}$ $\Rightarrow$

e bd=b obtenemos d=1 (pues $b\in\mathbb{Z}^*$)

y de a+bc=a $\Rightarrow$ bc=0 y como $b\in\mathbb{Z}^*$ se deduce que c=0. Luego $e=\frac{0}{1}$

Pero no es el único posible ya que $(0,1)\in[(0.1)] \Rightarrow$ e puede ser un elemento cualquiera de esa clase.

4) Elemento Opuesto.

Debe verificarse que $\forall p\in\mathbb{Q}$ $\exists q\in\mathbb{Q}$ / p+q =0

Representaremos q por $-p$

Si $p=\frac{a}{b}$ comprobaremos que $-p=\frac{-a}{b}=\frac{a}{-b}=$

$p+(-p)=\frac{a}{b}+\frac{(-a)}{b}=\frac{ab+b(-a)}{b^2}=\frac{0}{b^2}=\frac{0}{1}=0$ $\left(\text{pues } (0,b^2)\in[(0,1)]\right)$

CONCLUSIÓN

($\mathbb{Q}$,+) es un grupo conmutativo.

2.3. El grupo multiplicativo de los números Racionales.

DEF Sean [(a,b)], [(c,d)]$\in \mathbb{Q}$. Definimos el producto de Números Racionales:

$$[(a,b)]*[(c,d)]=[(ac,bd)]$$

OBS La operación producto se podía haber definido mediante fracciones de la siguiente forma:

Sean: $p,q\in\mathbb{Q}$ con $p=\frac{a}{b}$ y $q=\frac{c}{d}$. Entonces: $p.q=\frac{a.c}{b.d}$

OBS La operación está bien definida ya que $b.d\in\mathbb{Z}^*$

PROP La operación producto definida anteriormente no depende del representante elegido:

Dem Sean $[(a,b)]=[(a',b')] \Rightarrow ab'=ba'$

$[(c,d)]=[(c',d')] \Rightarrow cd'=dc'$

$[(a,b)]\bullet[(c,d)]=[(ac,bd)]=\ldots$

Como $ab'=ba'$ y $cd'=dc'$ multiplicando miembro a miembro ambas ecuaciones obtenemos:

$$ab'cd'=ba'dc'$$

y reordenando los términos: $ac.b'd'=bd.a'c'$

$$\ldots=[(a'c',b'd')]=[(a',b')]\bullet[(c',d')]$$

OBS Al igual que con la suma, podemos realizar la demostración en términos de fracciones en lugar de clases de equivalencia.

PROP La operación producto definida anteriormente verifica las siguientes propiedades:

1) Conmutativa
2) Asociativa.
3) Elemento Neutro.
4) Elemento Simétrico.

Dem.

Las dos primeras propiedades las vamos a demostrar utilizando clases de equivalencia y las dos últimas mediante fracciones.

1) Conmutativa.

Sean $[(a,b)],[(c,d)] \in \mathbb{Q}$
$[(a,b)] \bullet [(c,d)] = [(ac,bd)] = [(ca,db)] = [(c,d)] \bullet [(a,b)]$

2) Asociativa:

Sean: $[(a,b)], [(c,d)], [(e,f)] \in \mathbb{Q}$,

$\left([(a,b)] \bullet [(c,d)]\right) + [(e,f)] = [(ac,bd)] \bullet [(e,f)] = [((ac) \bullet e, (bd) \bullet f)] = \ldots$

$\ldots = [(a \bullet (ce), b \bullet (df)] = [(a,b)] \bullet [((ce,df)] = [(a,b)] \bullet \left([(c,d)] \bullet [(e,f)]\right)$

3) Elemento Neutro:

Debe existir $e \in \mathbb{Q}$ tal que $p.e=p=e.p \quad \forall p \in \mathbb{Q}$.

Por la propiedad conmutativa demostrada antes, tenemos que $p.e=e.p$ luego sólo hemos de ver que $p.e=p$.

i) Si $p=0=\frac{0}{1} \Rightarrow p.e=\frac{0}{1}.\frac{e_1}{e_2}=\frac{0e_1}{1e_2}=\frac{0}{e_2}=0=p$

ii) Si $p \neq 0$ entonces $p=\frac{a}{b}$ con $a \neq 0$.

$p.e=\frac{a}{b}.\frac{e_1}{e_2}=\frac{a}{b} \Rightarrow \frac{ae_1}{be_2}=\frac{a}{b} \Rightarrow ae_1b=abe_2 \Rightarrow abe_1=abe_2$

y como $ab \neq 0 \Rightarrow e_1=e_2$ entonces $e=\frac{e_1}{e_1}$ pero como $[(e_1,e_1)]=[(1,1)]$

podemos definir $e=\frac{1}{1}$ y lo demostraremos por $e=1$

4) Elemento Simétrico.

$$\forall p \in \mathbb{Q}-\{0\} \qquad \exists p \in \mathbb{Q} / p.q=1$$

Si $p=\frac{a}{b}$ y $q=\frac{c}{d} \Rightarrow p.q=1$ se traduce por $\frac{ac}{bd}=\frac{1}{1}$

Basta tomar $c=b$ y $d=a$ para que $ac.1=bd.1$ sea $ab=ba$ y por tanto se verifique la igualdad

El número $q=\frac{b}{a}$ lo demostraremos por p^{-1}

$$p.p^{-1}=1$$

CONCLUSIÓN

$(\mathbb{Q}-\{0\},\bullet)$ tiene estructura de grupo multiplicativo conmutativo

2.4. El Cuerpo de los números racionales.

Una vez visto que $(\mathbb{Q},+)$ y $(\mathbb{Q}^*,\bullet)$ tienen estructura de grupo abeliano respecto de sus operaciones, veamos como podemos relacionar la suma y el producto de los números racionales.

PROP En $\mathbb{Q}$ se verifica la propiedad distributiva del producto respecto de la suma.

Dem

Hemos de probar que $\forall p,q,r\in\mathbb{Q}$ se verifica $(p+q).r=p.r+q.r$

Sean: $a,c,e\in\mathbb{Z}$ y $b,d,f,e\in\mathbb{Z}^*$ tales que $p=\frac{a}{b}$, $q=\frac{c}{d}$ y $r=\frac{e}{f}$

$$(p+q).r=\left(\frac{a}{b}+\frac{c}{d}\right).\frac{e}{f}=\frac{ad+bc}{bd}\cdot\frac{e}{f}=\frac{ade+bce}{bdf} \qquad (1)$$

$$p.r+q.r=\frac{a}{b}\cdot\frac{e}{f}+\frac{c}{d}\cdot\frac{e}{f}=\frac{ae}{bf}+\frac{ce}{df}=\frac{aedf+bfce}{bfdf} \qquad (2)$$

Para ver que (1) y (2) representan el mismo número racional, aplicaremos la relación de equivalencia:

$$(ade+bce).bfdf=(aedf+bfce).bdf$$

Simplificando, ya que $b,d,f\in\mathbb{Z}^*$

$$(ade+bce).f=aedf+bfce$$

y al multiplicar por *f* en el primer miembro, comprobamos que la igualdad es cierta. Por tanto (1) y (2) son iguales, y por extensión:

$$(p+q).r=pr+qr$$

CONCLUSIÓN

Como $(\mathbb{Q},+)$ es un grupo abeliano, $(\mathbb{Q}^*,\bullet)$ es un grupo abeliano y se verifica la propiedad distributiva del producto respecto de la suma, podemos afirmar que $(\mathbb{Q},+,\bullet)$ tiene estructura de grupo conmutativo. Diremos que $\mathbb{Q}$ es el Cuerpo de los Números Racionales.

3. $\mathbb{Q}$ COMO AMPLIACIÓN DE $\mathbb{Z}$.

Anteriormente comprobamos que el conjunto $\mathbb{Q}$ suponía una extensión del conjunto $\mathbb{Z}$. Ahora vamos a comprobar que el cuerpo $(\mathbb{Q},+,\bullet)$ es una extensión del anillo $(\mathbb{Z},+,\bullet)$.

Para ello vamos a definir una función φ entre $(\mathbb{Z},+,\bullet)$ y $(\mathbb{Q},+,\bullet)$ tal que sea un homomorfismo inyectivo.

DEF Sea $\varphi:(\mathbb{Z},+,\bullet) \rightarrow (\mathbb{Q},+,\bullet)$ una aplicación definida por $\forall a\in\mathbb{Z}$

$$\varphi(a)=\frac{a}{1}\in\mathbb{Q}$$

PROP La aplicación φ es un homomorfismo inyectivo.

Dem

1) φ es inyectiva. $\forall a,b\in\mathbb{Z}$ $\quad \varphi(a)=\varphi(b) \Rightarrow \frac{a}{1}=\frac{b}{1} \Rightarrow a=b$

2) $\forall a,b\in\mathbb{Z}$ $\quad \varphi(a+b)=\frac{a+b}{1}=\frac{a.1+b.1}{1.1}=\frac{a}{1}+\frac{b}{1}=\varphi(a)+\varphi(b)$

3) $\forall a,b\in\mathbb{Z}$ $\quad \varphi(a\cdot b)=\frac{a\cdot b}{1}=\frac{a\cdot b}{1\cdot 1}=\frac{a}{1}\cdot\frac{b}{1}=\varphi(a)\cdot\varphi(b)$

Por tanto, $\varphi(\mathbb{Z})\subset\mathbb{Q}$ es un subanillo de $\mathbb{Q}$ isomorfo a $\mathbb{Z}$, o lo que es lo mismo, $\mathbb{Z}$ es una inmersión en $\mathbb{Q}$ ó $\mathbb{Q}$ es una extensión de $\mathbb{Z}$.

OBS Esta aplicación φ nos permite identificar el entero $a\in\mathbb{Z}$ con el racional $\frac{a}{1}\in\mathbb{Q}$ $\forall a\in\mathbb{Z}$

PROP La aplicación φ conserva el orden de $\mathbb{Z}$.

Dem

Sean $a,b\in\mathbb{Z}$ tales que $a\leq b$

Entonces $b-a\geq 0$ que es lo mismo que $b+(-a)\geq 0$ y equivalente a: $\frac{b+(-a)}{1}\geq\frac{0}{1}$

y $\frac{b+(-a)}{1}\geq 0 \Rightarrow \frac{b}{1}+\frac{-a}{1}\geq 0 \Rightarrow \frac{b}{1}\geq\frac{a}{1} \Rightarrow \varphi(b)\geq\varphi(a)$

Luego si $a\leq b \Rightarrow \varphi(a)\leq\varphi(b)$ por tanto φ es un morfismo de orden.

Como en $\mathbb{Q}$ se conservan las operaciones de suma y producto y el orden definido en $\mathbb{Z}$, podemos decir que $\mathbb{Q}$ es una ampliación efectiva de $\mathbb{Z}$.

4. RELACION DE ORDEN EN $\mathbb{Q}$.

Acabamos de ver que en un subanillo de $\mathbb{Q}$ existe un orden entre sus elementos, que es el que proviene de $\mathbb{Z}$. Vamos a extender dicho orden a todo el cuerpo $\mathbb{Q}$. Veremos, por tanto, que $\mathbb{Q}$ es un cuerpo ordenado.

DEF Un número racional es positivo si puede encontrarse un representante del mismo con numerador y denominador positivo.

PROP Si $p\in\mathbb{Q}$ es positivo y $p=\frac{a}{b}$, entonces se verifica que signo(a)=signo(b).

<u>Dem</u>

Sea $p=\frac{a}{b}=\frac{a'}{b'}$ con $p\in\mathbb{Q}$ positivo

Si $\frac{a}{b}=\frac{a'}{b'} \Rightarrow$ a.b'=b.a'

Como p es positivo, tenemos que *a* y *b* son positivos

Entonces para que se verifique a.b'=b.a' debe ocurrir que a' y b' tengan el mismo signo, ya sea positivo o negativo.

DEF El subconjunto de $\mathbb{Q}$ formado por todos los números racionales positivos lo representaremos por $\mathbb{Q}^+$.

DEF Sean $p,q\in\mathbb{Q}$. Diremos que $p\leq q$ si $q+(-p)\in \mathbb{Q}^+\cup\{0\}$

OBS La relación $\leq$ tiene sentido entre los números racionales, ya que hemos comprobado anteriormente que la suma de números racionales no depende de los representantes elegidos.

PROP La relación $\leq$ es una relación de orden en $\mathbb{Q}$.

<u>Dem</u>

1) Reflexiva: $\forall p\in\mathbb{Q}$ $\quad p\leq p \Rightarrow p+(-p)=0 \in \mathbb{Q}^+\cup\{0\}$

2) Antisimétrica: $\forall p,q\in\mathbb{Q}$ $\quad$ Si $p\leq q$ y $q\leq p \Rightarrow$

$\Rightarrow p+(-q)\in\mathbb{Q}^+\cup\{0\}$ y $q+(-p) \in\mathbb{Q}^+\cup\{0\} \Rightarrow [p+(-q)]+[q+(-p)]\in\mathbb{Q}^+\cup\{0\}$

Pero: $p+(-q)+q+(-p)=0$

Si la suma de dos números racionales positivos o cero da cero es porque ambos han de ser nulos.

$$\Rightarrow p+(-q)=0=q+(-p) \Rightarrow p=q$$

3) Transitiva: $\forall p,q,r\in\mathbb{Q}$ $\quad$ Si $p\leq q$ y $q\leq r \Rightarrow$

$\Rightarrow$ $p+(-q)\in\mathbb{Q}^+\cup\{0\}$ y $q+(-r)\in\mathbb{Q}^+\cup\{0\}$ $\Rightarrow$ $[p+(-q)]+[q+(-r)]\in\mathbb{Q}^+\cup\{0\}$ es decir:

$$p+(-r)\in\mathbb{Q}^+\cup\{0\} \Rightarrow p\leq r$$

PROP La relación $\leq$ es una relación de orden total.

Dem

Hay que ver que $\forall p,q\in\mathbb{Q}$ se verifica $p\leq q$ ó $q\leq p$

Si $p\neq q \Rightarrow q-p\in\mathbb{Q}$. Sea $\frac{a}{b}$ un representante de q-p: $q-p=\frac{a}{b}$

Si signo(a)=Signo(b) $\Rightarrow$ $q-p\in\mathbb{Q}^+$ $\Rightarrow$ $p\leq q$

Si signo(a)$\neq$Signo(b) $\Rightarrow$ $p-q\in\mathbb{Q}^+$ $\Rightarrow$ $q\leq p$

Por tanto $(\mathbb{Q},\leq)$ es un cuerpo ordenado.

5. PROPIEDADES DE $\mathbb{Q}$.

5.1. Propiedades de las Fracciones.

PROP Se verifica $\forall a\in\mathbb{Q}$ y $b,c\in\mathbb{Z}^*$

1) $\frac{-a}{b}=\frac{a}{-b}$

2) $\frac{a.c}{b.c}=\frac{a}{b}$

Dem

Si ambas fracciones son iguales es porque pertenecen a la misma clase

$$\frac{-a}{b}=\frac{a}{-b} \Rightarrow (-a).(-b)=b.a \Rightarrow ab=ba$$

$$\frac{a.c}{b.c}=\frac{a}{b} \Rightarrow acb=bca$$

Como ambas igualdades de fracciones verifican la relación de equivalencia $\Rightarrow$ son iguales

OBS Por convenio, si p es un número racional negativo, se puede escribir como

$$p=-\frac{a}{b} \quad \text{con } a,b\in\mathbb{Z}^+$$

PROP Todo número racional tiene un representante con denominador positivo.

Dem

Sea $p \in \mathbb{Q}$ con $p = \frac{a}{b}$

Caso 1) Si $a=0 \Rightarrow p=0 \Rightarrow p = \frac{0}{1}$

Caso 2) Si signo(a)=signo (b) puede ocurrir que sean ambos positivos o negativos

i) Si son positivos ya está demostrado

ii) Si son negativos escribimos $p = \frac{-a}{-b}$ con $a,b \in \mathbb{N}$

Sabemos $\frac{-1}{-1} \in [(1,1)]$ que es la clase del neutro del producto en $\mathbb{Q}$.
Al multiplicar p por el neutro nos da de nuevo p, aunque con otro representante :

$p.\frac{-1}{-1} = p \Rightarrow \frac{-a}{-b}.\frac{-1}{-1} = \frac{a}{b}$ cuyo denominador es positivo.

Caso 3) Si signo(a)≠signo (b)

Si $b \in \mathbb{N} \Rightarrow p = \frac{-a}{b}$ con $a,b \in \mathbb{N}$ y ya está.

Si $b \notin \mathbb{N} \Rightarrow p = \frac{a}{-b}$ con $b \in \mathbb{N}$ y por la prop. anterior $\frac{a}{-b} = \frac{a}{-b} \cdot \frac{-1}{-1} = \frac{-a}{b} \Rightarrow$

$$\Rightarrow p = \frac{-a}{b} \quad \text{con } a,b \in \mathbb{N}$$

Luego, en cualquier caso, siempre podemos elegir para $p \in \mathbb{Q}$ un representante cuyo denominador sea positivo.

COROLARIO Sea $p,q \in \mathbb{Q}$ con $p = \frac{a}{b}$, $q = \frac{c}{d}$ y b, d positivos.

$$\text{Si } p \leq q \Rightarrow bc - ad \geq 0$$

Dem

Dados $p,q \in \mathbb{Q}$ elegimos representantes con denominador positivo:

$$p=\frac{a}{b} \text{ y } q=\frac{c}{d} \quad \text{con b, d positivos}$$

Como $p\leq q \Rightarrow q+(-p)\in \mathbb{Q}^{+}\cup\{0\}$

$$q+(-p)=\frac{c}{d}-\frac{a}{b}=\frac{bc-ad}{bd}\in \mathbb{Q}^{+}\cup\{0\}$$

Si $\frac{bc-ad}{bd}=0 \Rightarrow bc-ad=0$ (1)

Si $\frac{bc-ad}{bd}\neq 0 \Rightarrow \frac{bc-ad}{bd}\in \mathbb{Q}^{+} \Rightarrow$ signo (bc-ad)=signo(bd)

Y como b,d son positivos $\Rightarrow$ bd es positivo $\Rightarrow$ $bc-ad>0$ (2)

De (1) y (2) $bc-ad\geq 0$ c.q.d.

PROP Dos números racionales cualesquiera siempre pueden escribirse con el mismo denominador.

Dem

Sean $p,q\in \mathbb{Q}$ con $p=\frac{a}{b}$ y $q=\frac{c}{d}$.

Por un resultado anterior, podemos afirmar que

$$p=\frac{a}{b}=\frac{ad}{bd} \quad \text{y} \quad q=\frac{c}{d}=\frac{cb}{db} \quad \text{c.q.d.}$$

PROP Para todo número racional siempre podemos encontrar un representante tal que su numerador y denominador sean coprimos.

Dem

Sean $p\in \mathbb{Q}$ con $p=\frac{a}{b}$

Como a y b son números enteros, aplicamos el teorema fundamental de la aritmética y los descomponemos de forma única como producto de números primos. Los factores primos los reordenamos (usando la propiedad conmutativa del producto de números naturales) situando al principio los que sean comunes a ambos (si los hay). En caso de que *a* y/o *b* fuesen primos, sólo tendrá un factor y con exponente unidad.

$$a=p_1^{á_1}......p_n^{á_n}.q_1^{â_1}......q_m^{â_m}$$

$$b=p_1^{\alpha_1'}......p_n^{\alpha_n'}.r_1^{\gamma_1}......r_s^{\gamma_s}$$

Como: $$p=\frac{a}{b}=\frac{p_1^{\alpha_1}......p_n^{\alpha_n}.q_1^{\beta_1}......q_m^{\beta_m}}{p_1^{\alpha_1'}......p_n^{\alpha_n'}.r_1^{\gamma_1}......r_s^{\gamma_s}}$$

Aplicando la propiedad demostrada antes, que: $\frac{ac}{bc}=\frac{a}{b}$

nos queda: Si $\alpha_i-\alpha_i'>0 \Rightarrow$ el factor $p_i^{\alpha_i-\alpha_i'}$ aparece en el numerador.

Si $\alpha_i-\alpha_i'=0 \Rightarrow$ No aparece el número primo p_i

Si $\alpha_i-\alpha_i'<0 \Rightarrow$ el factor $p_i^{\alpha_i'-\alpha_i}$ aparece en el denominador.

Los factores $q_j^{\beta_j}$ quedan en el numerador $\forall j:1,\ldots,m$

Los factores $r_k^{\gamma_k}$ quedan en el denominador $\forall k:1,\ldots,s$

El numerador y el denominador son coprimos ya que no tienen divisores comunes salvo la unidad.

DEF Dado $p\in\mathbb{Q}$ con $p=\frac{a}{b}$ y mcd(a,b)=1 diremos que la fracción que representa a p es irreductible o que es un representante canónico de la clase de p.

5.2. $\mathbb{Q}$ es numerable.

PROP El conjunto $\mathbb{Q}$ de los números racionales es numerable.

Dem

Vamos a establecer una biyección entre los elementos de $\mathbb{N}^*$ que sabemos que es numerable y los elementos de $\mathbb{Q}^+$. Con esto conseguiremos demostrar que $\mathbb{Q}$ también es numerable, ya que $\mathbb{Q}=\mathbb{Q}^-\cup\{0\}\cup\mathbb{Q}^+$.

Lo haremos de una manera gráfica. Nos creamos una tabla de tal forma que al elemento a_{ij} le corresponde el número racional: $a_{ij}= j/i$

Posteriormente, volvemos a escribir la tabla en diagonal, comenzando por a_{11} como primera diagonal, a_{12} y a_{21} como segunda diagonal y así sucesivamente. Cuando lleguemos a un elemento cuya fracción haya sido considerada anteriormente, se salta. La tabla primera sería:

$$\begin{array}{ccccc}
\frac{1}{1} & \frac{2}{1} & \frac{3}{1} & \frac{4}{1} & \ldots\ldots \\
\frac{1}{2} & \frac{2}{2} & \frac{3}{2} & \frac{4}{2} & \ldots\ldots \\
\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{3}{3} & \frac{4}{3} & \ldots\ldots \\
\frac{1}{4} & \frac{2}{4} & \frac{3}{4} & \frac{4}{4} & \ldots\ldots \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\ldots
\end{array}$$

Una vez reducida queda:

$$\begin{array}{ccccc}
\frac{1}{1} & \frac{2}{1} & \frac{3}{1} & \frac{4}{1} & \ldots\ldots \\
\frac{1}{2} & \frac{1}{1} & \frac{3}{2} & \frac{2}{1} & \ldots\ldots \\
\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{1} & \frac{4}{3} & \ldots\ldots \\
\frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{3}{4} & \frac{1}{1} & \ldots\ldots \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\ldots
\end{array}$$

y la biyección sería $\varphi:\mathbb{N}-\{0\}\to\mathbb{Q}^+$

$$\varphi(1)=\frac{1}{1},\quad \varphi(2)=\frac{2}{1},\quad \varphi(3)=\frac{1}{2},\quad \varphi(4)=\frac{3}{1},\quad \varphi(5)=\frac{1}{3},\ \ldots.$$

5.3. $\mathbb{Q}$ es arquimediano

PROP Sean $p,q\in\mathbb{Q}$ con $q\neq 0$. Entonces: $\exists n\in\mathbb{Z} / p<q\cdot n$

Dem

Sea $p=\frac{a}{b}$ y $q=\frac{c}{d}\neq 0$

Por una propiedad anterior, vamos a suponer b y d positivos. Como la propiedad a demostrar se verifica en $\mathbb{Z}$ ($\mathbb{Z}$ es Arquimediano) y $ad,bc\in\mathbb{Z} / ad<(bc)\cdot n$ $\Rightarrow$

$$\Rightarrow\quad ad<(bc)\cdot n \quad\Rightarrow\quad (bc)\cdot n-ad>0$$

pero sabemos que, como $bd>0$ $\Rightarrow$ $\frac{(bc)\cdot n-ad}{bd}>0$ $\Rightarrow$

$$\Rightarrow\quad \frac{cn}{d}-\frac{a}{b}>0 \quad\Rightarrow\quad \frac{c}{d}\cdot n>\frac{a}{b} \quad\Rightarrow\quad q\cdot n>p$$

5.4. $\mathbb{Q}$ es Denso.

Dem

Para demostrar que $\mathbb{Q}$ es denso, hemos de ver que ningún número racional tiene anterior ni siguiente. Es decir:

$$\forall p,q \in \mathbb{Q} \quad \text{con } p<q \quad \text{existen } r,s,t \in \mathbb{Q} / r<p<s<q<t$$

Comprobémoslo:

Como podemos conseguir que p y q estén representados por fracciones con el mismo denominador, sean:

$$p=\frac{a}{d} \quad \text{y} \quad q=\frac{b}{d} \quad \text{y como} \quad p<q \quad \Rightarrow \quad a<b$$

$$\text{Si } a<b \quad \Rightarrow \quad a+1\leq b \quad \Rightarrow \quad 2a+2\leq 2b \quad \Rightarrow \quad 2a+1<2b$$

Sean $$\frac{a-1}{d}<\frac{a}{d}=\frac{2a}{2d}<\frac{2a+1}{2d}<\frac{2b}{2d}=\frac{b}{d}<\frac{b+1}{d}$$

Tomamos: $$r=\frac{a-1}{d}, \quad s=\frac{2a+1}{2d}, \quad t=\frac{b+1}{d}$$ c.q.d.

5.5. Propiedades de Monotonía.

PROP Sean $p,q\in\mathbb{Q}$ con $p\leq q$. Se verifica:

i) $p+r\leq q+r \quad \forall r\in\mathbb{Q}$

ii) $s.p\geq s.q$ si $s<0$

$s.p=s.q=0$ si $s=0$

$s.p\leq s.q$ si $s>0$

Dem

i) $p\leq q \Rightarrow$ Por definición de la relación $\leq$ se verifica que:

$$q+(-p)\in\mathbb{Q}^{+}\cup\{0\}$$

$$q+(-p)=q+(-p)+r+(-r)=q+r+(-p)+(-r)=q+r+(-(p+r))$$

entonces: $q+r+(-(p+r))\in\mathbb{Q}^{+}\cup\{0\} \quad \Rightarrow \quad p+r\leq q+r$

ii) Sean $p=\frac{a}{b}$, $q=\frac{c}{d}$, $s=\frac{e}{f}$ con b,d y f positivos.

Como $p\le q \Rightarrow bc-ad\ge 0$ y $s.p=\frac{ae}{bf}$; $s.q=\frac{ce}{df}$

- Si $s=\frac{e}{f}$ es positivo $\Rightarrow$ Signo(e)=Signo(f) $\Rightarrow$ $e.f>0$

$bc-ad\ge 0$ $\quad bc-ad\in \mathbb{Z}^+\cup\{0\}$

$ef>0$ $\quad e.f\in\mathbb{Z}$ luego:

$$e.f.(bc-ad)\in \mathbb{Z}^+\cup\{0\}$$

Pero: $ef.(bc-ad)=bc.ef-ad.ef=ce.bf-ae.df\in\mathbb{Z}^+\cup\{0\} \Rightarrow$

$$\Rightarrow ce,bf-ae.df\ge 0 \Rightarrow sp\le sq$$

- Si $s=0 \Rightarrow s.p=0$ y $s.q=0 \Rightarrow sp=sq=0$
- Si $s=\frac{e}{f}$ es negativo $\Rightarrow$ Signo(e)$\neq$Signo(f) $\Rightarrow ef<0 \Rightarrow -ef>0$

$$\left.\begin{array}{r} bc-ad\ge 0 \\ -ef>0 \end{array}\right\} \Rightarrow -ef.(bc-ad)\in\mathbb{Z}^+\cup\{0\}$$

$-ef.(bc-ad)=ad.ef-bc.ef=ae.df-ce.bf\in\mathbb{Z}^+\cup\{0\} \Rightarrow ae.df-ce.bf\ge 0 \Rightarrow s.p\ge s.q$

COROLARIO

Sean $p,q,r,s\in\mathbb{Q}$ con $0<p<q$ y $0<r<s \Rightarrow 0<pr<qs$ y $0<p+r<q+s$

<u>Dem</u>

Como $0<p<q$ y $0<r<s$

$$\left.\begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} p<q \\ r>0 \end{array}\right\}\Rightarrow pr<qr \\ \left.\begin{array}{l} r<s \\ q>0 \end{array}\right\}\Rightarrow qr<qs \end{array}\right\}\Rightarrow pr<qs$$

Análogamente
$$\left.\begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} p<q \\ r \end{array}\right\}\Rightarrow p+r<q+r \\ \left.\begin{array}{l} r<s \\ q \end{array}\right\}\Rightarrow q+r<q+s \end{array}\right\}\Rightarrow p+r<q+s$$

PROP Sea $p\in\mathbb{Q}$. $p>0 \Rightarrow \frac{1}{p}>0$

<u>Dem</u>

Supongamos que $\frac{1}{p} < 0 \;\Rightarrow\;$ Signo(p)$\neq$Signo$\left(\frac{1}{p}\right) \;\Rightarrow\; p \cdot \frac{1}{p} < 0$

Pero $p \cdot \frac{1}{p} = 1 > 0$ contradicción, luego $\frac{1}{p} > 0$

5.6. Valor Absoluto de $\mathbb{Q}$.

Sabemos que si $p \in \mathbb{Q}$, debe ocurrir que $p>0$ ó $p=0$ ó $p<0$.

DEF Definimos el valor absoluto de $p \in \mathbb{Q}$, y se representa por $|p|$ como:

$$|p| = \begin{cases} p & \text{si } p \geq 0 \\ -p & \text{si } p < 0 \end{cases}$$

PROP Dados $p,q \in \mathbb{Q}$,

1) $|p| \geq 0$ y $|p|=0 \;\Leftrightarrow\; p=0$

2) $|p.q| = |p|.|q|$

3) $|p+q| \leq |p|+|q|$

Dem

1) $|p| \geq 0$ ya que si
- $p \geq 0 \;\Rightarrow\; |p| = p \geq 0$
- Si $p<0 \;\Rightarrow\; |p| = -p > 0$

$|p|=0 \;\Leftrightarrow\; p=0$ tiene una demostración trivial

2) $$|p.q| = \begin{cases} p.q & p.q \geq 0 \\ -p.q & p.q < 0 \end{cases} \qquad (1)$$

$$|p|.|q| = \begin{cases} p.q & \text{si } p \geq 0 \;\; q \geq 0 \\ -p.q & \text{si } p < 0 \;\; q \geq 0 \\ p.(-q) & \text{si } p \geq 0 \;\; q < 0 \\ (-p)(-q) & \text{si } p < 0 \;\; q < 0 \end{cases} = \begin{cases} p.q & \text{si } p.q \geq 0 \\ -p.q & \text{si } p.q < 0 \\ -p.q & \text{si } p.q < 0 \\ p.q & \text{si } p.q \geq 0 \end{cases} \qquad (2)$$

Las expresiones (1) y (2) son iguales.

3) Es fácil ver que $p \leq |p|$ con sólo sustituir $|p|$ por su función, y que $-|p| \leq p$

$$\text{Luego:}\quad \left.\begin{array}{r} \left.\begin{array}{r} p \le |p| \\ q \le |q| \end{array}\right\} \Rightarrow p+q<|p|+|q| \\ \left.\begin{array}{r} -|p| \le p \\ -|q| \le q \end{array}\right\} \Rightarrow -|p|-|q| \le p+q \end{array}\right\} \Rightarrow\ |p+q| \le |p|+|q|$$

OBS El valor absoluto en $\mathbb{Q}$ es una extensión del valor absoluto definido en $\mathbb{Z}$.

5.7. Supremo e Ínfimo.

Sea $(\mathbb{Q},<)$ un cuerpo ordenado

DEF Sea $A\subset\mathbb{Q}$ un subconjunto y sea $x\in\mathbb{Q}$. Diremos que x es Cota Superior de A si $\forall a\in A\ \ a\le x$.

DEF Sea $A\subset\mathbb{Q}$ un subconjunto y sea $y\in\mathbb{Q}$. Diremos que y es Cota Inferior de A si $\forall a\in A\ \ y\le a$.

Si existe una cota superior para el conjunto $A\subset\mathbb{Q}$, diremos que A está acotado superiormente.

Si existe una cota inferior para el conjunto $A\subset\mathbb{Q}$, diremos que A está acotado inferiormente.

Si $A\subset\mathbb{Q}$ está acotado es que lo está superior e inferiormente.

DEF Dado $A\subset\mathbb{Q}$, definimos el extremo superior de A como la mínima de todas sus cotas superiores.

DEF Dado $A\subset\mathbb{Q}$, definimos el extremo inferior de A como la máxima de todas sus cotas inferiores.

DEF Dado $x\in\mathbb{Q}$, diremos que x es el máximo de $A\subset\mathbb{Q}$ si x es cota superior de A y $x\in A$. Se denota por $x=\max(A)$.

DEF Dado $y\in\mathbb{Q}$, diremos que y es el mínimo de $A\subset\mathbb{Q}$ si y es cota inferior de A e $y\in A$. Se denota por $y=\min(A)$.

6. NÚMEROS DECIMALES.

6.1. Expresión Decimal de los Números Racionales.

DEF Llamaremos número decimal a un número de la forma:

$$a+\sum_{i=1}^{\infty}\frac{c_i}{10^i} \quad \text{con} \quad 0\le c_i\le 9$$

y se representa por: $a'c_1c_2c_3\ldots$

donde *a* recibe el nombre de "parte entera" del número decimal y c_i son los decimales.

PROP Todo número racional se puede expresar como un número decimal.

Dem

Sea $p\in\mathbb{Q}^+$ con $p=\frac{m}{n}$ fracción irreducible y m,n positivos.

$\exists a,r_1\in\mathbb{Z}$ tal que $m=a.n+r_1$ con $0\leq r_1<n$ $\underline{a}$ es la parte entera del nº decimal

Tomando ahora $10r_1$ y n $\exists c_1,r_2\in\mathbb{Z}/10r_1=c_1.n+r_2$ con $0\leq r_2<n$

Es claro que $0\leq c_i\leq 9$ ya que: $0\leq r_1<n \Rightarrow 0\leq 10r_1<10n \Rightarrow$

$$\Rightarrow 0\leq c_1.n+r_2<10n \Rightarrow 0\leq r_2<10n-c_1.n \Rightarrow 0\leq r_2<(10-c_1)n$$

$$\left.\begin{array}{r}(10-c_1)n>0\\ n>0\end{array}\right\} \Rightarrow 10-c_1>0 \Rightarrow c_1<10 \Rightarrow c_1\leq 9$$

y como m y n son positivos $\Rightarrow$ a es positivo o cero $\Rightarrow c_1\geq 0$

Repitiendo el proceso para $10r_2$ y n $\exists c_2,r_3\in\mathbb{Z}/10r_2=c_2.n+r_3$ con $0\leq r_3<n$

Y así sucesivamente:

$$10r_i=c_i.n+r_{i+1} \qquad \forall i$$

Entonces p se puede escribir como $a'c_1c_2c_3\ldots$

Si $p\in\mathbb{Q}^-$, $-p\in\mathbb{Q}^+ \Rightarrow p=-a'c_1c_2c_3\ldots$

DEF Un número decimal es exacto si tiene un número finito de cifras decimales.

PROP Un número racional es de la forma $\frac{b}{10^n}$ si y sólo si es un número decimal exacto.

Dem

"$\Rightarrow$"

Como $b\in\mathbb{Z}$, sea $b=b_0+10b_1+10^2b_2+10^3b_3+\ldots+10^nb_n$ la descomposición polinómica de b en base 10

por hipótesis $p\in\mathbb{Q}$ es $p=\frac{b}{10^n}=\frac{b_0+10b_1+10^2b_2+10^3b_3+\ldots+10^nb_n}{10^n}=\ldots$

$$\ldots=\frac{b_0}{10^n}+\frac{b_1}{10^{n-1}}+\frac{b_2}{10^{n-2}}+\frac{b_3}{10^{n-3}}+\ldots+\frac{b_i}{10^{n-i}}+\ldots+b_n$$

El número decimal es $b_n,b_{n-1},b_{n-2},\ldots b_0$ siendo b_n la parte entera y $b_{n-1}\ldots b_0$ la parte decimal, que es finita.

"$\Leftarrow$"

Sea el número decimal exacto $a'c_1c_2c_3\ldots c_n$ entonces:

$$a'c_1c_2c_3\ldots c_n=a+\frac{c_1}{10}+\frac{c_2}{10^2}+\ldots+\frac{c_n}{10^n}=\frac{a.10^n+c_1.10^{n-1}+c_2.10^{n-2}+\ldots+c_n}{10^n}$$

Si tomamos $b=a.10^n+c_1.10^{n-1}+c_2.10^{n-2}+\ldots+c_n$ $\Rightarrow$ $b\in\mathbb{Z}$ y el decimal es de la forma:

$$\frac{b}{10^n}$$

<u>Ejemplos</u>:

1) Sea $p=\dfrac{43452}{10^4}$ $\Rightarrow$ $p=4'3452$

2) Sea el número decimal exacto: $3'14159$ $\Rightarrow$ $3'14159=\dfrac{314159}{10^5}$

PROP Sea $p\in\mathbb{Q}$ con $p=\dfrac{a}{b}$. P es un número decimal exacto si y sólo si

$$b=2^m.5^n \text{ con } m,n\in\mathbb{N}$$

<u>Dem</u>

"$\Rightarrow$"

Si p es un decimal exacto $\Rightarrow$ $p=\dfrac{c}{10^n}$ $\Rightarrow$ $b=10^n$ $\Rightarrow$ $b=2^n5^n$

"$\Leftarrow$"

Sea $p=\dfrac{a}{2^m5^n}$ $\Rightarrow$ $p=\dfrac{a}{2^m5^n}=\dfrac{a}{2^m5^n}\cdot\dfrac{2^n5^m}{2^n5^m}$ $\Rightarrow$ $p=\dfrac{a.2^n.5^m}{2^{n+m}5^{n+m}}$ $\Rightarrow$

$$\Rightarrow\ p=\frac{a.2^n.5^m}{10^{n+m}}\ \Rightarrow\ p \text{ es un decimal exacto.}$$

<u>COROLARIO</u>

Sea $p \in \mathbb{Q}$ con $p = \frac{a}{b}$. p es un número decimal con infinitas cifras decimales si y sólo si dado $b = p_1^{a_1} . p_2^{a_2} .... p_n^{a_n}$ $\exists i{:}1,2,\ldots,n \,/\, p_i \neq 2$ y $p_i \neq 5$ (la descomposición de b tiene algún factor distinto de 2 y 5).

OBS Como $p = \frac{a}{b}$ $\Rightarrow$ $\exists c_0, r_1 \in \mathbb{Z} / a = c_0 b + r_1$ $\Rightarrow$ $\frac{a}{b} = c_0 + \frac{r_1}{b}$

Repetimos para $10r_1$ y b $\Rightarrow$ $\exists c_1, r_2 \in \mathbb{Z} / 10r_1 = c_1 b + r_2$ $\Rightarrow$ $\frac{r_1}{b} = \frac{1}{10}\left(c_1 + \frac{r_2}{b}\right)$

Entonces $\frac{a}{b} = c_0 + \frac{c_1}{10} + \frac{r_2}{10b}$

y así sucesivamente.

Como b tiene algún factor que no es ni 2 ni 5, este proceso continúa indefinidamente.

- $r_i \neq 0$ $\forall i$, ya que si $\exists j \in \mathbb{N} / r_i = 0$ $\Rightarrow$ $\frac{a}{b} = \sum_{i=0}^{j-1} \frac{c_i}{10^i}$ y tendría finitas cifras decimales, lo cual es falso.
- Como $r_i < b$ $\forall i$, los restos se repetirán al cabo de b-1 divisiones, como mucho.

DEF Llamaremos periodo al conjunto más pequeño de cifras decimales que se repiten indefinidamente en un número decimal.

<u>NOTACIÓN</u> El periodo, en un número decimal, se representa por un arco que los abarca a todos, por encima. Por ejemplo: $3'1\overset{\frown}{4} = 3'14444$.

DEF Un número decimal se llama periódico mixto si hay cifras decimales delante del periodo.

DEF Un número decimal se llama periódico puro si no hay cifras decimales antes del periodo.

OBS Todo número racional se puede representar como un número decimal exacto, o periódico mixto o periódico puro. El recíproco también es cierto.

<u>Ejemplos</u>:

1) 0’434343…$= 0'\overleftrightarrow{43}$ $\Rightarrow$ Si $x = 0'\overleftrightarrow{43}$ entonces $100x = 43'\overleftrightarrow{43}$

$100x = 43 + x$ $\Rightarrow$ $99x = 43$ $\Rightarrow$ $x = \frac{43}{99}$ $\Rightarrow$ $\frac{43}{99} = 0'\overleftrightarrow{43}$

Advertencia: se utiliza la notación $\overleftrightarrow{\ }$ para indicar el periodo del número

2) $0'12\overline{34}$ $\Rightarrow$ Si $x = 0'12\overline{34}$ entonces $100x = 12'\overline{34}$

100x es periódico puro

$$\left.\begin{array}{r} 10000x = 1234'\overline{34} \\ 100x = 12'\overline{34} \end{array}\right\} \Rightarrow \quad 9900x=1222 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{1222}{9900} \quad \Rightarrow \quad \frac{1222}{9900} = 0'12\overline{34}$$

Existe un caso particular que hemos de resaltar: el periodo está formado solamente por el número 9.

Si $x = 0'\overset{\frown}{9}$ $\Rightarrow$ $10x = 9'\overset{\frown}{9}$ $\Rightarrow$ $10x=9+x$ $\Rightarrow$ $9x=9$ $\Rightarrow$ $x=1$ obtenemos $1 = 0'\overset{\frown}{9}$

Para que esto tenga sentido, necesitamos una topología en $\mathbb{Q}$ que permita asegurar el paso al límite. Eso podemos hacerlo teniendo en cuenta el orden definido en $\mathbb{Q}$ y la densidad de $\mathbb{Q}$.

Así podemos asegurar que la sucesión 0’9, 0’99, 0’999, 0’9999, … tiene por límite 1.

BIBLIOGRAFIA RECOMENDADA.

Análisis Matemático I. Aut. J.A. Fernández Viña. Ed. Tecnos.

Análisis Matemático. Aut. M. de Guzmán – B. Rubio. Ed. Pirámide.

Principios de Análisis Matemático. Aut. W. Rudin. Ed. McGraw-Hill.

Introducción al Análisis Matemático. Aut. J. M. Ortega. Ed. Labor.