TEMAS DE MATEMÁTICAS
(Oposiciones de Enseñanza Secundaria)

TEMA 35

LAS MAGNITUDES Y SU MEDIDA. FUNDAMENTACIÓN DE LOS CONCEPTOS RELACIONADOS CON ELLAS.

TEMA 35

LAS MAGNITUDES Y SU MEDIDA. FUNDAMENTACIÓN DE LOS CONCEPTOS RELACIONADOS CON ELLAS.

1. INTRODUCCIÓN.

El hombre siempre ha sentido curiosidad por el mundo que le rodea. Como demuestran los primeros documentos gráficos, el hombre siempre ha buscado el modo de imponer orden en la enmarañada diversidad de los sucesos observados en la naturaleza. Esta búsqueda del orden ha adquirido una diversidad de formas: una de ellas es la *religión,* otra es el *arte y* una tercera es la *ciencia.* La palabra ciencia tiene su origen en un verbo latino que significa *"saber"* pero ha dejado de significar meramente un conocimiento para referirse más bien a un conocimiento específico del mundo natural y lo que resulta más importante a un conocimiento organizado de un modo especifico y racional.

Aunque las raíces de la ciencia son tan profundas como las de la religión o las del arte, sus tradiciones son mucho más modernas. Solamente en los últimos siglos se han desarrollado métodos para estudiar sistemáticamente la naturaleza. En este estudio se deben incluir las técnicas de observación, reglas para el razonamiento y la predicción, las ideas para la experimentación planificada y los modos de comunicar los resultados experimentales y teóricos, todo ello englobado en lo que se denomina método científico.

La observación de un fenómeno es, en general, incompleta a menos que dé lugar a una información cuantitativa. Para obtener dicha información se requiere la *medición* de una propiedad o atributo de un objeto. Lord Kelvin señaló: *"Nuestro conocimiento es satisfactorio solamente cuando lo podemos expresar mediante números".* La expresión de una propiedad en términos de números, requiere no sólo que utilicemos las matemáticas para mostrar las relaciones entre las diferentes cantidades, sino también tener el conocimiento para operar con estas relaciones.

2. MAGNITUDES Y MEDIDAS.

Se define la *Magnitud* como toda aquella entidad que se puede medir entendiendo por *medir* como comparar la entidad-magnitud con otra de la misma naturaleza que se toma arbitrariamente como unidad. Como entidad podemos entender cualquier cualidad o propiedad de los cuerpos.

Llamaremos Cantidad de Magnitud a la manifestación concreta de una magnitud.

Para determinar las relaciones matemáticas que surgen entre algunas magnitudes, previamente hemos de cuantificarlas o medirlas, es decir, convertirlas en números. La medición es una técnica por medio de la cual asignamos un valor numérico a una propiedad, como resultado de una comparación de dicha propiedad con otra de igual naturaleza que tomamos como patrón, la cual se ha adoptado como unidad. Las unidades de las magnitudes se eligen arbitrariamente procurando que éstas obedezcan los siguientes criterios:

1) *Invariabilidad:* El patrón es inalterable. Es siempre el mismo en cualquier lugar o condición.
2) *Fácil Contrastabilidad:* Debe ser fácil la fabricación de copias del patrón y su comparación con cualquier cantidad de la magnitud a medir.
3) *Carácter Internacional:* El patrón se debe usar a nivel internacional, para facilitar la transmisión de datos.

Establecido el patrón, comparamos éste con la cantidad a medir, diciendo que tiene medida *n* si contiene *n* veces al patrón o unidad. Diremos entonces que *n* es la medida de dicha magnitud.

A partir del patrón o unidad establecido para la medición de magnitudes, podemos obtener fracciones del mismo para realizar medidas que no sean igual a un número exacto de dicho patrón. Está aceptado internacionalmente que el fraccionamiento siga el sistema decimal, con lo que cada unidad de un orden es diez veces más grande que la de orden inmediatamente inferior.

Hemos definido una magnitud como cualquier cualidad o propiedad de los cuerpos que es susceptible de ser medida. Por tanto, no todos los atributos de un objeto son magnitudes. Utilizaremos el criterio de *igualdad y suma* para distinguir aquellas entidades que son magnitudes (longitud, tiempo, masa, carga, energía,...) de aquellas entidades que no son magnitudes (dolor, alegría, inteligencia, voluntad, odio,...). Las magnitudes pueden igualarse entre sí y pueden sumarse para dar magnitudes de igual naturaleza, por consiguiente se pueden considerar como cantidades algebraicas y se pueden someter a los cálculos y procesos matemáticos.

3. TIPOS DE MAGNITUDES.

Las magnitudes se clasifican a menudo en magnitudes fundamentales y magnitudes derivadas. Tal división es arbitraria, puesto que una magnitud determinada puede considerarse como fundamental en una serie de relaciones (un sistema de unidades) y como derivada en otra serie de relaciones (otro sistema de unidades).

Las magnitudes derivadas son aquellas cuyas operaciones de definición se basan en otras magnitudes (fundamentales o derivadas) y las operaciones de definición de una magnitud derivada son conjuntos de operaciones que conducen a un número y una unidad y que pueden incluir cálculos matemáticos. Ejemplos de magnitudes que ordinariamente se consideran como derivadas son: velocidad, definida como el espacio recorrido en un tiempo unidad, aceleración definida como la variación de velocidad en un tiempo unidad, densidad definida como la masa de un cuerpo por unidad de volumen, etc.

Las magnitudes fundamentales son primarias y no se definen en función de otras magnitudes. En Mecánica, las tres magnitudes fundamentales son: longitud *(L),* tiempo (T) y masa (M) y todas las demás magnitudes se deducen a partir de éstas, por ejemplo velocidad $(V=L/T=LT^{-1})$, aceleración $(A=V/T=LT^{-2})$, fuerza $(F=M\cdot A=MLT^{-2})$, trabajo $(W=F\cdot L=ML^2T^{-2})$, etc. Entre paréntesis se han escrito los símbolos que representan las dimensiones de las magnitudes y como puede verse las dimensiones de las magnitudes fundamentales se representan por una sola letra *L, T y M,* mientras que las dimensiones de las magnitudes derivadas se representan por combinaciones u operaciones algebraicas de las dimensiones fundamentales.

Junto a estas magnitudes fundamentales y derivadas, el sistema de unidades se completa con otras unidades suplementarias o auxiliares como son el ángulo plano y el ángulo sólido.

- *Angulo plano,* porción de plano comprendida entre dos semirrectas que tienen un origen común, medida según la apertura de las semirrectas.

- *Angulo sólido,* porción de espacio limitada por una superficie cónica de origen en un punto cuyas generatrices se apoyan en una curva cerrada que no pasa por el origen, medida según la apertura de la superficie cónica. Constituye una generalización a tres dimensiones de la noción de ángulo plano

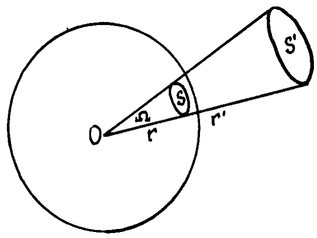

Fig. 1

3.1. Magnitudes Fundamentales.

Es natural que si los resultados de la medición de un fenómeno físico deben proporcionarse a otras personas o deben publicarse, para que puedan ser reproducidos por otros equipos investigadores, es necesario definir un sistema estándar aceptado internacionalmente.

En 1960, la XI Conferencia General de Pesas y Medidas (C.G.P.M.), estableció reglas para decidir un conjunto de patrones correspondientes a las magnitudes fundamentales y se estableció un sistema de unidades que recibió el nombre de SISTEMA INTERNACIONAL (SI) de unidades o Sistema MKS. En este sistema, las unidades de masa, longitud y tiempo son: el Kilogramo (Kg), el metro (m) y el segundo (s) respectivamente.

Otras unidades fundamentales del SI que estableció la Conferencia son: la temperatura (K) -el grado Kelvin-, la intensidad de corriente eléctrica (A) -el amperio- y la intensidad luminosa (C) -la Candela-. Estas seis unidades fundamentales son las unidades básicas del Sistema Internacional (SI).

Posteriormente la XIV C.G.P.M. de 1971 amplió a siete las magnitudes fundamentales con la adopción de la magnitud cantidad de materia y cuya unidad es el mol.

3.1.1. Longitud.

La magnitud Longitud es la extensión del espacio que ocupan los cuerpos. Las medidas de dicha magnitud sirven para apreciar la longitud de los objetos en una sola dimensión.

Desde 1905 en que se celebró en París la III C.G.P M. en la que se instituyeron las unidades patrón, el metro se definía como: *El metro (m) es la longitud que hay a $0^{o}C$ entre dos trazos marcados en una regla de platino iridiado que se conserva en la*

Oficina Museo Internacional de Pesas y Medidas de Sèvres (París) y se denomina metro patrón.

En 1960 la XI C.G.P.M. sin cambiar el modelo de metro patrón lo definió a partir de un fenómeno atómico: *El metro (m) es igual a 1.650.763'73 veces la longitud de onda de la radiación electromagnética (raya roja) emitida por el isótopo ^{86}Kr en su transición entre los estados $2p^{10}$ y $5d^{5}$ en el vacío cuando se calienta a la temperatura del punto triple del nitrógeno.*

La XVII C.G.P.M. de 1984 ha abolido la definición dada por la XI Conferencia, que ha permanecido en vigor desde 1960 y la ha sustituido por la siguiente: *El metro es la longitud del trayecto recorrido por la luz en el vacío durante el tiempo de la fracción 1/299792456 de segundo.* Esta definición ha permitido una realización del metro más precisa y exacta mediante la utilización del láser y además tiene la ventaja de ser indestructible.

3.1.2. Masa.

La Masa, o cantidad de materia que integra los cuerpos, es una magnitud cuya medida vendrá dada a través de mediciones de volumen o capacidades de líquidos.

Igualmente la III C.G.P.M. estableció como unidad de masa, *el kilogramo patrón,* como la masa de un bloque de platino iridiado conservado en el pabellón de Breteuil, de Sèvres (París). El cilindro de Sèvres mide 3'9 centímetros de diámetro y 3'9 centímetros de altura y para todos los propósitos prácticos es igual a la masa de 10^{-3} m^3 de agua destilada a 4ºC (1 litro).

La XI C.G.P.M. de 1960 ratificó como unidad de masa del SI el kilogramo internacional ya definido. Por analogía con el metro, podemos asociar el kilogramo a una propiedad atómica diciendo que un kilogramo es igual a la masa de $5'0188 \cdot 10^{25}$ átomos del isótopo ^{12}C. En realidad, éste es el criterio adoptado al definir la escala internacional de masas atómicas.

3.1.3. Tiempo.

El tiempo es la magnitud sobre la duración de los fenómenos. La unidad de tiempo, *el segundo,* se definió inicialmente como: *la 86400 ava parte (1/86400) del día solar medio*. El día solar es el intervalo entre dos pasos consecutivos del Sol por el meridiano de un mismo lugar de la Tierra. Como la velocidad de la Tierra en su traslación anual alrededor del Sol no es constante, el día va variando algo en el transcurso del año, por eso se toma el promedio de todo el año como día solar medio. También se ha comprobado que por la acción de las mareas la velocidad de rotación de la Tierra alrededor de su eje tampoco es constante y disminuye de forma que el día aumenta un 0'001 segundos cada siglo.

Por ello, la XI C.G.P.M. de 1960 definió el segundo como *la fracción igual a 1/31.556.925'9747 del año tropical 1900*. El año tropical se define como el intervalo de tiempo entre dos pasajes sucesivos de la Tierra a través del Equinoccio Vernal, el que tiene lugar aproximadamente el 21 de marzo de cada año.

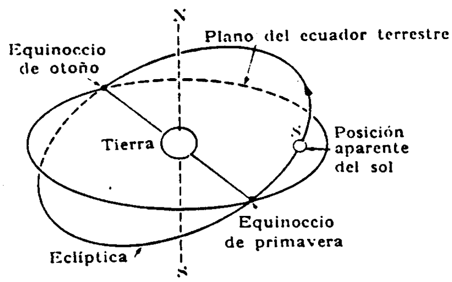

FIG. 2

Si bien este patrón de segundo astronómico es más exacto que el patrón segundo solar medio, se necesitaba un patrón material de segundo comparable a los estándares de metro patrón y kilogramo patrón, lo que se ha logrado plenamente con el patrón atómico de frecuencia, reloj atómico regulado por el comportamiento magnético de los átomos de cesio.

La XIII C.G.P.M. de 1967-68 adoptó para el segundo el patrón atómico de frecuencia con la definición actual, provisional: *El segundo es la duración de 9.192.631.770 períodos de la radiación que corresponde a la transición de dos niveles hiperfinos del estado fundamental del átomo de cesio-133.*

Los relojes atómicos estaban en esa fecha en etapa de rápido desarrollo y esta es la razón por la que se adoptó el segundo de cesio solo de forma temporal. Por ejemplo, el Máser de Hidrógeno promete producir un reloj que tenga un error de sólo un segundo en 33 millones de años.

Como complemento de las unidades fundamentales exponemos los prefijos que la Conferencia de Pesas y Medidas autoriza para designar múltiplos y submúltiplos de las unidades de todas las magnitudes:

MÚLTIPLO/SUBMÚLTIPLO	PREFIJO	ABREVIATURA
10^{18}	Exa	E
10^{15}	Peta	P
10^{12}	Tera	T
10^{9}	Giga	G
10^{6}	Mega	M
10^{3}	Kilo	k
10^{2}	Hecto	h
10^{1}	Deca	da
$10^{0}=1$	Unidad	
10^{-1}	deci	d
10^{-2}	centi	c
10^{-3}	mili	m
10^{-6}	micro	µ
10^{-9}	nano	n
10^{-12}	pico	p
10^{-15}	femto	f
10^{-18}	atto	a

3.2. Magnitudes Derivadas.

Vamos a ver a continuación algunas de las magnitudes derivadas más usuales. La relación completa de las mismas no corresponde a este tema.

3.2.1. Superficie.

Es la magnitud que determina la extensión de un objeto en dos dimensiones (largo y ancho). Su unidad o patrón es el metro cuadrado m^2, que es la representación de un cuadrado que tiene de longitud un metro por cada lado.

A partir de algunos de sus múltiplos se han determinado una serie de medidas agrarias de uso común, como son:

El Área, que equivale a un decámetro cuadrado.

La Hectárea, que equivale a un hectómetro cuadrado.

La Centiárea, que equivale a un metro cuadrado.

3.2.2. Volúmen.

Es la magnitud que determina la extensión de un objeto en sus tres dimensiones (longitud, anchura y profundidad). La unidad o patrón es el metro cúbico, m^3, que es el volumen de un cubo de longitud un metro para cada arista.

3.2.3. Capacidad.

Magnitud que permite medir áridos y líquidos. La unidad o patrón es el Litro, que es la cantidad de líquido que cabe en un decímetro cúbico.

4. ECUACIONES DIMENSIONALES.

La ecuación que relaciona la magnitud derivada con las fundamentales recibe el nombre de Ecuación Dimensional. Para la obtención de estas ecuaciones, partimos de la expresión de la magnitud derivada en función de otras magnitudes, que no tienen porque ser fundamentales. Esta primera expresión se llama Ecuación de Definición. A partir de ella, realizamos sucesivas sustituciones hasta conseguir que las únicas magnitudes intervinientes sean todas fundamentales.

Los símbolos que se utilizan para especificar las dimensiones de las magnitudes fundamentales *longitud, masa y tiempo* son L, M y T, respectivamente. A menudo se utilizarán corchetes [] para representar las dimensiones de una magnitud. Por ejemplo, con esta notación, las dimensiones de la velocidad, v se escriben $[v]=L/T$ y las dimensiones de un área, A serán $[A]=L^2$.

Ejemplos de magnitudes y sus ecuaciones de dimensiones son:

Velocidad v	$[v] = L/T = LT^{-1}$
Aceleración a	$[a] = [v]/T = LT^{-2}$
Fuerza F	$[F] = M\cdot[a] = MLT^{-2}$

Trabajo W $[W]= [F]\cdot L = ML^2T^{-2}$
Energía Cinética EC $[EC] = M\cdot[v]^2 = ML^2T^{-2}$
Potencia P $[P] = [W]/T = ML^2T^{-3}$

4.1. Análisis Dimensional.

En muchos casos es posible que se plantee el problema de deducir o verificar una fórmula específica, a partir de las magnitudes que intervienen. Aunque se hayan olvidado los detalles de la deducción, existe un procedimiento útil y poderoso, conocido como *análisis dimensional*, que puede utilizarse con el fin de ayudar en la deducción o comprobación de la expresión final. También se usa para comprobar la homogeneidad de una ecuación y para minimizar su memorización. El análisis dimensional hace uso del hecho de que "*las dimensiones se pueden tratar como cantidades algebraicas*".

5. MATEMATIZACIÓN DEL CONCEPTO DE MAGNITUD.

5.1. Magnitudes.

DEF Sea C un conjunto y E una relación de equivalencia sobre C. Si definimos en el conjunto cociente C/E una operación suma que verifique las propiedades

1) Conmutativa: $[a]+[b]=[b]+[a] \quad \forall [a],[b]\in C/E$
2) Asociativa: $([a]+[b])+[c]=[a]+([b]+[c]) \quad \forall [a],[b],[c]\in C/E$
3) Elemento Neutro: $\exists [0]\in C/E$ *tal que* $[a]+[0]=[a] \quad \forall [a]\in C/E$

siendo $(C/E,+)$ un semigrupo conmutativo, entonces hemos definido sobre C una Magnitud.

DEF Llamaremos Cantidad a los elementos de C/E.

Sobre un mismo conjunto C se pueden definir diferentes magnitudes. Por ejemplo, si

C={polígonos convexos del plano}

entonces podríamos definir como magnitudes el número de lados, perímetro o Área.

Por tanto, podemos decir que una magnitud es cualquier cualidad o propiedad de los objetos que puede ser medida. Y llamamos cantidad a la manifestación concreta de una magnitud.

Nos podemos plantear como definir la operación suma en el conjunto cociente C/E, siendo C un conjunto sobre el que se ha definido una magnitud. Para definir la suma se suele recurrir a dar algunas reglas que nos sirvan para obtener un elemento de C a partir de la suma de otros dos. La clase de equivalencia del elemento suma será el elemento de C/E obtenido como suma de los otros dos. Es decir:

$$[a],[b]\in C/E \quad \Rightarrow \quad a,b\in C \quad \Rightarrow \quad a+b\in C \quad \Rightarrow \quad [a+b]\in C/E \quad y\ se\ define\quad [a]+[b]=[a+b]$$

Pero para que la suma en el conjunto C/E se pueda definir de esta manera se deben verificar las siguientes condiciones:

1) Dados dos elementos cualesquiera de C/E, siempre hay sendos representantes de ellos en C cuya suma sea posible.
2) La clase de equivalencia a la que pertenece el elemento suma obtenido no depende de los representantes elegidos en C para las clases que se suman en C/E.

Estas dos propiedades reciben el nombre de Propiedad Uniforme de la Adición.

Partiendo de la definición de suma que hemos definido en C/E, podemos definir el producto de un número n por una cantidad al resultado de sumar n veces la misma cantidad. El resultado de multiplicar el número cero por una cantidad es el neutro de la adición.

El inverso del producto no es posible para cualquier magnitud. Si dada una cantidad $[a]\in C/E$ y un número natural n, existe otro $[b]\in C/E$ tal que $n\cdot[b]=[a]$, entonces $[b]=\frac{1}{n}[a]$ siendo $[b]$ el cociente de dividir $[a]$ por n.

Si existe el cociente $\frac{1}{n}[a]$, podemos definir el producto de una cantidad por una fracción $\frac{m}{n}\in\mathbb{Q}$ como $\frac{m}{n}[a]=m\cdot\left(\frac{1}{n}[a]\right)$

Las magnitudes cuyas cantidades son siempre divisibles por cualquier número natural reciben el nombre de magnitudes divisibles.

5.1. Magnitudes Escalares.

DEF Dada una magnitud definida sobre los elemento de un conjunto C mediante una relación de equivalencia E y una adición en C/E, diremos que es Escalar si satisface las siguientes condiciones:

1) Es divisible.
2) Es ordenada.
3) Es arquimediana.

OBS Recordemos que ser ordenada significa:

$$\forall [a],[b]\in C/E \quad con \quad [a]\neq[b] \;\Rightarrow\; [a]<[b] \quad ó \quad [a]>[b]$$

y tiene las propiedades siguientes:

1) Transitiva. $[a]<[b] \quad y \quad [b]<[c] \;\Rightarrow\; [a]<[c]$
2) $[a]<[b] \;\Rightarrow\; [a]+[c]<[b]+[c] \quad \forall [c]\in C/E$

Ser Arquimediana significa que

$$[0]<[a]<[b] \;\Rightarrow\; \exists n\in N \quad tal \quad que \quad n\cdot[a]>[b]$$

El criterio que nos permite decidir si $[a]<[b]$ ó $[a]>[b]$ suele definirse mediante un proceso de comparación de representantes en C de ambas clases elegidos de forma adecuada. Para que sea válida la definición, el resultado no debe depender de los representantes elegidos.

DEF Diremos que una magnitud escalar es absoluta si satisface la siguiente condición:

4) El elemento neutro o cantidad nula es la menor de todas las cantidades.

Es fácilmente deducible de las propiedades de ser ordenada que en una magnitud absoluta no existen cantidades distintas de la nula que sumen la cantidad nula.

DEF Diremos que una magnitud escalar es relativa si satisface la siguiente condición:

4') Existencia de Opuesto.

$$\forall [a]\in C/E \quad \exists [b]\in C/E \quad tal\ que \quad [a]+[b]=[0] \;\Rightarrow\; [b]=-[a]$$

OBS Las magnitudes escalares, tal cual las hemos definido satisfacen los requisitos necesarios para establecer en ellas una teoría de la medida con las propiedades habituales de ésta.

DEF Diremos que una magnitud escalar es continua o real si satisface:

5) El Axioma de Continuidad.

Recordemos que el axioma de continuidad aplicado a esta situación dice: Si las cantidades o elementos de C/E se clasifican en dos clases, de modo que toda cantidad de la primera sea menor que cualquiera de la segunda, entonces existe una única cantidad de separación de ambas clases. Dicha cantidad verifica que es mayor que todas las cantidades del primer conjunto y menor que todas las del segundo conjunto.

Podemos demostrar que el conjunto de cantidades $C/_E$ de una magnitud escalar continua es isomorfo al semigrupo aditivo de los números reales positivos o al grupo aditivo de los números reales, según sea la magnitud absoluta o relativa, respectivamente.

5.2. Medida de Magnitud.

DEF Dada una magnitud con la propiedad de ser divisible, llamaremos unidad a una cantidad $[u]$ no nula elegida de forma arbitraria. Si existe, su opuesta será $-[u]$.

DEF Dada una cantidad $[a]$, si existen $m,n \in \mathbb{N}$ tal que $[a]=\frac{m}{n}[u]$ *o* $[a]=\frac{m}{n}(-[u])$ entonces diremos que la medida de la cantidad $[a]$ es el número racional $\frac{m}{n}$ o $-\frac{m}{n}$ respectivamente.

Si tenemos una magnitud divisible y una unidad $[u]$, existirán cantidades cuyas medidas sean racionales, pero no todas las cantidades han de tener medida racional.

Si la magnitud, además es ordenada y la unidad es mayor que la cantidad nula, la desigualdad entre dos cantidades $\frac{m}{n}[u]$ *y* $\frac{p}{q}[u]$ será cierta siempre y cuando lo sea la desigualdad numérica entre $\frac{m}{n}$ *y* $\frac{p}{q}$.

DEF Si $[a]$ es una cantidad que satisface $\frac{m}{n}[u]<[a]<\frac{m+1}{n}[u]$, diremos que $\frac{m}{n}$ es una medida por defecto y que $\frac{m+1}{n}$ es una medida por exceso, ambas con error menor que $\frac{1}{n}$.

Si podemos obtener dos sucesiones monótonas convergentes de medidas racionales por defecto y por exceso, respectivamente, de la cantidad $[a]$, podríamos definir la medida de $[a]$ como el número real límite de ambas sucesiones. El problema que surge es que la igualdad de medidas no tiene porqué implicar la igualdad de cantidades. Y tampoco podemos asegurar la existencia de cantidades con medida irracional.

Esta dificultad la vamos a evitar trabajando sólo con magnitudes escalares continuas. En este tipo de magnitudes, elegida una unidad $[u]>0$, toda cantidad $[a]$ o bien posee una medida racional o existen dos sucesiones monótonas convergentes por defecto y por exceso que definen un número real, siendo ese número real la medida de la cantidad. Por tanto, dada una cantidad en el conjunto $C/_E$ existe un único número real que sea la medida de dicha cantidad, y recíprocamente, dado un número real, existe una única cantidad en $C/_E$, que tenga por medida el número real.

DEF Llamaremos medición a la operación consistente en determinar las medidas de las cantidades.

5.3. Ejemplo de Magnitud.

Una vez que hemos establecido el concepto de medida y hemos determinado una unidad, las normas que rigen el proceso de medición las debemos de desarrollar de forma particular para cada magnitud a estudiar.

A modo de ejemplo, vamos a realizar el estudio de la magnitud longitud absoluta en los segmentos rectilíneos, analizando su fundamento matemático.

Un segmento rectilíneo viene determinado por un par no ordenado de puntos, que llamaremos extremos. Por tanto, el conjunto C de los segmentos rectilíneos se puede identificar con el conjunto de los pares de puntos. El conjunto C también contiene a los segmentos nulos, que son aquellos en los que coinciden ambos extremos.

La relación que definimos en C viene dada por la congruencia de segmentos. Dos segmentos son congruentes si existe un movimiento que lleva los extremos de uno a coincidir con los del otro. La relación definida la llamaremos E y es fácil comprobar que es de equivalencia.

Tenemos ya definido el conjunto C/E, formado por todas las clases de segmentos congruentes. El siguiente paso es definir la operación de suma de segmentos congruentes. Para ello tendremos en cuenta que fijada una semirrecta de origen O, cualquiera que sea el segmento AB, se puede determinar un punto X de la semirrecta de tal forma que los segmentos OX y AB sean congruentes. Así pues, una vez que tenemos determinada una semirrecta queda establecida una correspondencia biunívoca entre las clases de segmentos congruentes, C/E, y los puntos de la semirrecta (o los segmentos OX siendo X un punto cualquiera de la semirrecta). Ahora vamos a definir la suma en C/E apoyándonos en la biyección anterior.

Tomemos dos segmentos AB y CD, siendo $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ sus clases de equivalencia en C/E. Fijemos una semirrecta con origen en el punto O, siendo OX un elemento de C congruente con AB (OX$\in \overline{AB}$). Tomemos otra semirrecta con origen en X, determinando en ella un punto Y tal que XY es congruente con CD (XY$\in \overline{CD}$). El segmento OY define la clase $\overline{OY}$, que por definición es la suma de las cantidades $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$.

Tal y como hemos definido la suma, es fácil demostrar la propiedad uniforme de la adición, o lo que es lo mismo, que la clase $\overline{OY}$ no depende de la semirrecta elegida. Si elegimos otra semirrecta con origen en O' obtenemos otro punto Y' que verifica:

$$\overline{O'Y'} = \overline{AB} + \overline{CD} = \overline{OY}$$

siendo entonces $\overline{OY}$ congruente con $\overline{O'Y'}$. Luego no depende de la semirrecta elegida.

A partir de esta definición de suma en C/E es inmediato comprobar que verifica las propiedades dadas para que sea $(C/E,+)$ un semigrupo conmutativo. Tomamos como elemento neutro de la operación la clase de los segmentos nulos.

Acabamos de determinar una magnitud sobre C que llamaremos Longitud.

También verifica la propiedad de Divisibilidad. Para comprobarlo, sea $\overline{AB}$ un elemento de C/E. Tomemos una semirrecta con origen en O y tal que OX es congruente con $\overline{AB}$. Si el segmento AB lo dividimos en n partes iguales y proyectamos de forma paralela sobre la semirrecta, obtenemos X_1, X_2,..., X_{n-1} tales que OX_1, X_1X_2,..., $X_{n-1}X$ son congruentes entre sí. Tenemos entonces que:

$$\overline{OX_1}+\overline{X_1X_2}+\ldots+\overline{X_{n-1}X}=\overline{AB} \quad\Rightarrow\quad \overline{OX_1}+\overline{OX_1}+\ldots+\overline{OX_1}=\overline{AB} \quad\Rightarrow$$
$$\Rightarrow\quad n\overline{OX_1}=\overline{AB} \quad\Rightarrow\quad \overline{OX_1}=\frac{1}{n}\overline{AB}$$

Para comprobar que la magnitud satisface la propiedad de Ordenación, hemos de representar las cantidades en una recta determinada. Se deduce fácilmente que, dadas dos cantidades [a] y [b], sólo pueden darse dos situaciones: o bien [a] es suma de [b] más otra cantidad, o bien [b] es suma de [a] más otra cantidad.

De la relación [a]+[0]=[a] deducimos que cualquier elemento no nulo de C/E es mayor que [0]. Por tanto la Longitud es una magnitud Absoluta.

A través de la representación de Longitudes sobre una semirrecta, el axioma geométrico de la continuidad nos permite obtener la continuidad de la magnitud Longitud.

Una vez visto que hemos definido sobre C una magnitud con las propiedades demostradas anteriormente, nos falta por dar una forma de obtener la medida de un segmento. Para ello necesitamos tomar un segmento como unidad o patrón y establecer su medida como la unidad. Sea u ese segmento y [u] su cantidad. La medida de una cantidad de longitud [a] puede obtenerse aplicando el proceso siguiente:

Sea n_1 un número natural tal que verifica:

$$n_1[u] \leq [a] < (n_1+1)[u]$$

Si se verifica la igualdad $n_1[u] = [a]$ la medida de [a] será el número natural n_1 y hemos terminado. Si no se verifica, entonces n_1 es una medida por defecto y

$$[a] = n_1[u] + [r_1] \quad \text{siendo} \quad [r_1]<[u]$$

Sea entonces n_2 otro número natural tal que:

$$n_2[r_1] \leq [u] < (n_2+1)[r_1]$$

De nuevo, si se verifica la igualdad $n_2[r_1] = [u]$ entonces:

$$[a] = \left(n_1 + \frac{1}{n_2} \right)[u]$$

siendo $\left(n_1 + \frac{1}{n_2} \right)$ la medida de [a]. En cambio, si no es cierta la igualdad, la medida es una aproximación por exceso y

$$[u] = n_2[r_1]+[r_2] \text{ con } [r_2]<[r_1]$$

de forma análoga existe un natural n_3 tal que:

$$n_3[r_2] \leq [r_1] < (n_3+1)[r_2]$$

y en el caso de ser cierta la igualdad tenemos que

$$[u] = \left(n_2 + \frac{1}{n_3} \right)[r_1]$$

y por tanto

$$[a] = \left(n_1 + \cfrac{1}{n_2 + \cfrac{1}{n_3}} \right)[u]$$

siendo la expresión encerrada entre paréntesis la medida de [a]. En cambio si la igualdad no se verifica repetiremos el proceso obteniendo, en el paso i:

$$n_i[r_{i-1}] \leq [r_{i-2}] < (n_i+1)[r_{i-1}]$$

y si la igualdad fuese cierta se tendría que:

$$[a] = \left(n_1 + \cfrac{1}{n_2 + \cfrac{1}{n_3 + \dots + \cfrac{1}{n_1}}} \right)[u]$$

Si por el contrario no se verifica la desigualdad seguiríamos el proceso indefinidamente.

Si la medida de [a] con respecto a la unidad [u] es racional, al cabo de un número finito de pasos se obtiene su expresión, pudiendo decir entonces que [a] y [u] son conmensurables.

Si la medida de [a] con respecto a [u] es irracional, este proceso nos da una sucesión de medidas aproximadas, por defecto y por exceso alternativamente, que son las sucesivas reducidas de una fracción continua indefinida, que representa un número irracional que es la medida buscada. Diremos que [a] y [u] son inconmensurables.

6. INCERTIDUMBRE EN LA REALIZACIÓN DE MEDIDAS.

6.1. Conceptos en la teoría de errores.

En todas las ciencias aplicadas se opera con datos numéricos obtenidos mediante medidas y observaciones que nunca pueden ser absolutamente exactas. Medir una magnitud con una precisión infinita carece de significado, pues por mucho cuidado que se ponga en la realización y por muy perfecto que sea el aparato, siempre existirá la posibilidad de efectuarla con mayor precisión.

Por otro lado, al realizar una medida es porque desconocemos su valor exacto, por tanto al valor obtenido en la medida experimental nunca podremos saber en qué grado se acerca al valor exacto o si coincide con él. En muchos casos, en las fórmulas empleadas en las medidas intervienen números irracionales, como π, *e*, logaritmos, funciones trigonométricas, etc., que no pueden tomarse con todas las cifras decimales, lo que influye que los resultados adolezcan de un cierto error.

El efecto de los errores en las medidas se hace aún más acentuado por el hecho de que siempre que se realiza una medida, se perturba el sistema que se desea medir y cambian sus condiciones iniciales.

Todas estas circunstancias nos demuestran que los resultados de las medidas experimentales vienen afectados de una cierta *incertidumbre* que es preciso determinar en cada caso, pues es la que nos indica la calidad de la medida realizada y debe acompañar siempre al resultado. Así, por ejemplo, no es lo mismo dar el resultado de una pesada en la siguiente forma: 3’235 ±0’001 g que en esta otra: 3’2350 ±0’0001 g pues la primera indica que la pesada tiene dos cifras decimales seguras, mientras que la segunda tiene tres. En ambos casos 0’001 y 0’0001 g representan el *error* o *incertidumbre* de nuestra medida.

La aproximación con que ha de efectuarse una medida, esto es, la incertidumbre del resultado, depende del objetivo que se persiga y de la naturaleza misma de la medida, pero, en último termino, lo importante es conocerla de antemano, como error máximo *(cota máxima de error)* de que puede venir afectado el resultado.

El conocimiento del error cometido en una medida experimental tiene gran importancia para saber:

1) La exactitud de los resultados obtenidos.
2) El mínimo de cifras decimales que hay que tomar para resolver problemas, evitando cálculos penosos e inútiles.

6.2. Error Absoluto. Error Relativo.

Un error de 1 gramo cometido en la pesada de unos pocos gramos de un metal precioso, resulta inadmisible, mientras que el mismo error al pesar una tonelada carece de importancia. De ahí la necesidad de definir el error absoluto y el relativo de una medida.

Se llama *error absoluto* de una medida o de un número aproximado a la diferencia, con su signo, entre el valor aproximado a e el calor exacto x:

$$\Delta x = a - x$$

pero, en general, el valor exacto, x es desconocido y en la práctica se adopta para x el valor medio de un gran número de observaciones, o simplemente se asigna a Dx un cierto valor límite o cota superior de error. Así, por ejemplo, cuando realizamos una pesada hasta el centigramo, admitimos que:

$$|\Delta x| \leq 0'01 \text{ g}$$

o bien, cuando tomamos el número π = 3'141 con tres cifras decimales, sabemos que:

$$|\Delta p| \leq 0'001$$

El error absoluto no sirve para juzgar el grado de aproximación o la calidad de una medida. Para esto es preciso definir el *error relativo*, que se define como el *cociente entre el error absoluto Dx y el valor exacto de la magnitud* $\boldsymbol{x}$, o sea:

$$e = \frac{\Delta x}{x}$$

Como x es, en general, desconocido, se determina el límite superior de error relativo ε dividiendo la cota máxima de error absoluto entre el número que resulta sustituyendo por ceros todas las cifras que siguen a la primera significativa del número aproximado de la medida. Así, por ejemplo, la cota máxima de *error relativo* del número π cuando se toma con tres cifras decimales π = 3'141, será:

$$e = \frac{0'001}{3} = \frac{1}{3000} = 0'00033$$

Con frecuencia, los errores relativos se expresan en tanto por ciento, El resultado anterior sería de un 0'033%. La inversa del error relativo da el grado de precisión de la medida.

Bibliografía Recomendada.

Gerald HOLTON y Duane H. ROLLER. Fundamentos de Física Moderna. Editorial. Reverté. BARCELONA.

Marcelo ALONSO y Edward J. FINN. Física. Vol. 1. Mecánica. Addison-Wesley Iberoamericana. MÉJICO.

Joaquín CATALA DE ALEMANY. Física General. SABER, Entidad Española de Librería. VALENCIA..

José Luis GALÁN GARCÍA. Sistemas de Unidades Físicas. Editorial. Reverté. BARCELONA.