TEMAS DE MATEMÁTICAS
(Oposiciones de Secundaria)

TEMA 27

DESARROLLO DE UNA FUNCIÓN EN SERIE DE POTENCIAS. TEOREMA DE TAYLOR APLICACIONES AL ESTUDIO LOCAL DE FUNCIONES.

TEMA 27

DESARROLLO DE UNA FUNCIÓN EN SERIE DE POTENCIAS. TEOREMA DE TAYLOR APLICACIONES AL ESTUDIO LOCAL DE FUNCIONES.

1. INTRODUCCIÓN.

Los matemáticos consideran como funciones elementales, entre otras, los polinomios, e^x, log x, sen x y cos x, las cuales hemos descrito en temas anteriores. Pero de todas ellas, solo los polinomios pueden calcularse de forma sencilla para cualquier valor de la variable independiente x. Eso es debido a que si p(x) es un polinomio, entonces

$$p(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$$

Recordemos que la función e^x se calcula como inversa de log x. Y esta última viene definida por

$$\log x = \int_1^x \frac{1}{t}\, dt$$

También tenemos que la función cos x se define como un número y tal que

$$Y = \cos x \quad \Rightarrow \quad A(y) = \frac{x}{2} \qquad \forall x \in [0, p]$$

Y como la función A(y) es

$$A(y) = \frac{y\sqrt{1-y^2}}{2} + \int_y^1 \sqrt{1-t^2 dt}$$

tendremos que

$$\frac{y\sqrt{1-y^2}}{2} + \int_y^1 \sqrt{1-t^2 dt} = \frac{x}{2}$$

OBS Omitimos como extiende la función cos x de $[0, p]$ a $\mathbb{R}$.

Y recordemos que la definición de la función sen x es

$$\text{sen}\, x = \sqrt{1-\cos^2 x}$$

En este tema vamos a tratar de aproximar estas funciones "elementales", y en general todas aquellas que cumplan unas determinadas condiciones, por funciones polinómicas en las proximidades de un punto.

2. POLINOMIO DE TAYLOR DE GRADO N.

Sea f(x) una función derivable en x = a hasta el orden n inclusive. Vamos a encontrar un polinomio de grado no superior a n, $P_n(x)$, cuyo valor x = a coincida con el valor de f(x) en x = a y los valores de sus derivadas también coincidan, en x = a, con las derivadas de f(x) hasta el orden n-ésimo.

Entonces tenemos que

$$P_n(a) = f(a) \qquad P_n'(a) = f'(a) \qquad P_n''(a) = f''(a) \;\ldots\ldots\; P_n^{n)}(a) = f^{n)}(a) \qquad (1)$$

Escribamos el polinomio en forma de potencias de (x – a):

$$P_n(x) = a_o + a_1(x-a) + a_2(x-a)^2 + a_3(x-a)^3 + \ldots + a_n(x-a)^n$$

Los coeficientes de $P_n(x)$ los calculamos teniendo en cuenta las condiciones (1).

Primero veamos el valor de $P_n(x)$ y sus derivadas en x = a

$P_n(a) = a_o$

$P_n'(a) = a_1$

$P_n''(a) = 2 \cdot a_2$

$P_n'''(a) = 3! \cdot a_3$

.

.

.

$P_n^{n)}(a) = n!\, a_n$

Y aplicando las condiciones (1) obtenemos

$$a_o = f(a), \quad a_1 = f'(a), \quad a_2 = \frac{1}{2!} f''(a), \quad a_3 = \frac{1}{3!} f'''(a), \cdots, a_n = \frac{1}{n!} f^{n)}(a)$$

El polinomio $P_n(x)$ queda como

$$P_n(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \frac{f'''(a)}{3!}(x-a)^3 + \cdots + \frac{f^{n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

DEF Llamamos Polinomio de Taylor de grado n para f en x = a al polinomio $P_n(x) = \sum_{i=0}^{n} \frac{f^{i)}(a)}{i!}(x-a)^i$

OBS Siendo riguroso, tendríamos que haber denotado al polinomio como $P_{n,a,f}(x)$, aunque nos conformaremos con $P_{n,a}(a)$.

2.1. Polinomios de Taylor de algunas funciones elementales.

En general, las funciones elementales tienen polinomios de Taylor bastante sencillos, aunque los coeficientes parezcan depender de la función f de forma complicada.

Sea, en primer lugar, f(x) = sen x.

f(0) = sen 0 = 0

f´(0) = cos 0 = 1

f´´´(0) = - sen 0 = 0

f´´´(0) = - cos 0 = -1

A partir de $f^{IV}(0)$ las derivadas se repiten con un ciclo de 4. Los coeficientes a_K toman valores

$$0,\ 1,\ 0,\ -\frac{1}{3},0,\frac{1}{5!},0,-\frac{1}{7!},0,\frac{1}{9!},.....$$

Y el polinomio de Taylor de grado 2n + 1 para sen x en x = 0 es

$$P_{2n+1,0}(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + ... + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

Para no reiterarnos, repitiendo los cálculos de manera análoga para f(x) = cos x en x = 0, obtenemos que el polinomio de Taylor de grado 2n de f(x) = cos x es x = 0 es

$$P_{2n,0}(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + ... + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

El polinomio de Taylor de la función f(x) = log x no puede calcularse en x = 0 ya que es un punto que no pertenece al dominio. Tomaremos x = 1.

$$f(1) = \log 1 = 0$$

$$f´(1) = \frac{1}{1} = 1$$

$$f´´(1) = \frac{-1}{1^2} = -1$$

$$f´´´(1) = \frac{2}{1^3} = 2$$

Y en general, como $f^{i)}(x) = \frac{(-1)^{i-1} \cdot (i-1)!}{x^i}$ tenemos que $f^{i}(1) = (-1)^{i-1} \cdot (i-1)!$

Siendo el polinomio de Taylor

$$P_{n,1}(x) = (x-1) - \frac{(x-1)^2}{2} + \frac{(x-1)^3}{3} + ... + (-1)^{n-1} \cdot \frac{(x-1)^n}{n}$$

Si tomamos la función f(x) = log(x + 1) si se puede calcular su polinomio en x = 0 y es

$$P_{n,0}(x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + ... + (-1)^{n-1} \cdot \frac{x^n}{n}$$

La inversa de la función logaritmo, e^x, tiene una expresión para el polinomio de Taylor en x = 0 muy sencilla, debido a que

$$(e^x)^{K)} = e^x$$

y entonces

$$P_{n,0}(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + ... + \frac{x^n}{n!}$$

Pero no todas las funciones elementales tienen polinomios de Taylor tan sencillos. Nos podemos encontrar con otras funciones cuyas derivadas sean complicadas o se vayan complicando conforme aumentamos el orden. Por ejemplo, la función arctgx, que tiene por derivadas

$$\text{arctg}'\, x = \frac{1}{1+x^2} \quad \Rightarrow \quad \text{arctg}'(0) = 1$$

$$\text{arctg}''\, x = \frac{-2x}{(1+x^2)^2} \quad \Rightarrow \quad \text{arctg}''(0) = 0$$

$$\text{arctg}'''\, x = \frac{(1+x^2)^2 \cdot (-2) + 2x \cdot 2(1+x^2) \cdot 2x}{(1+x^2)^4} \Rightarrow \text{arctg}'''(0) = -2$$

Y conforme aumentamos el orden, mas complicada es la derivada.

2.2. Propiedades del polinomio de Taylor.

De momento tenemos definido el polinomio de Taylor de f(x) en x = a de grado n como aquel que tiene las n primera derivadas coincidentes en x = a con f(x), además de P(a) = f(a). Esta relación entre el polinomio y f(x), veremos que es mucho mas profunda de lo que parece.

Para empezar, sea $P_{1,a}(x)$ el polinomio de Taylor de f(x) en x = a de grado 1. Entonces

$$P_{1,a}(x) = f(a) + f'(a)(x-a)$$

A partir de esta expresión, cambiándola de signo y sumando f(x) y después dividiendo por x – a llegamos a

$$\frac{f(x) - P_{1,a}(x)}{x-a} = \frac{f(x) - f(a)}{x-a} - f'(a)$$

Y como sabemos que la definición de derivada en un punto es

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x-a}$$

obtenemos como conclusión que

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - P_{1,a}(x)}{x-a} = 0$$

De esta expresión deducimos que la distancia entre f(x) y $P_{1,a}(x)$ no solo se hace pequeña cuando $x \to a$ sino que incluso es más pequeña comparándola con la distancia entre x y a. Generalicemos este resultado que hemos obtenido para n = 1 a cualquier valor del grado del polinomio.

TEOREMA Sea f(x) una función n veces derivable en x = a y sea $P_{n,a}(x)$ el polinomio definido como

$$P_{n,a}(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i (x-a)^i \qquad \text{con} \qquad a_i = \frac{f^{i)}(a)}{i!}$$

Entonces

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - P_{n,a}(x)}{(x-a)^n} = 0$$

<u>Dem.</u>

Si desarrollamos el cociente tenemos

$$\frac{f(x) - P_{n,a}(x)}{(x-a)^n} = \frac{f(x) - \sum_{i=0}^{n} a_i (x-a)^i}{(x-a)^n} = \frac{f(x) - \sum_{i=0}^{n-1} \frac{f^{i)}(a)}{i!}(x-a)^i}{(x-a)^n} - \frac{f^{n)}(a)}{n!}$$

Definamos las funciones

$$Q(x) = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{f^{i)}(a)}{i!}(x-a)^i \qquad \text{y} \qquad g(x) = (x-a)^n$$

Con estas funciones, tenemos que demostrar

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x) - Q(x)}{g(x)} = \frac{f^{n)}(a)}{n!}$$

Si nos fijamos en la definición de Q(x), vemos que

$$Q^{i)}(a) = f^{i)}(a) \qquad \forall i \leq n-1$$

Y la función g(x) verifica

$$g^{i)}(x) = \frac{n!(x-a)^{n-k}}{(n-K)!}$$

Por tanto, tenemos que se verifica

$$\lim_{x\to a}\left(f(x) - Q(x)\right) = f(a) - Q(a) = 0$$

$$\lim_{x\to a}\left(f'(x) - Q'(x)\right) = f'(a) - Q'(a) = 0$$

$$\vdots$$

$$\lim_{x\to a}\left(f^{n-2)}(x) - Q^{n-2)}(x)\right) = f^{n-2)}(a) - Q^{n-2)}(a) = 0$$

y también

$$\lim_{x\to a} g(x) = \lim_{x\to a} g'(x) = \ldots\ldots\ldots = \lim_{x\to a} g^{n-2)}(x) = 0$$

Entonces, el límite a calcular es una indeterminación de la forma $\frac{0}{0}$, que resolveremos aplicando la regla de L´Hôpital, hasta un total de n – 1 veces.

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x) - Q(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x) - Q'(x)}{g'(x)} = \ldots\ldots = \lim_{x\to a} \frac{f^{n-1)}(x) - Q^{n-1)}(x)}{g^{n-1)}(x)} =$$

Sabemos que $Q^{n-1)}(x) = f^{n-1)}(a)$ y que $g^{n-1)}(x) = n!\,(x-a)$. Sustituyendo

$$= \lim_{x\to a} \frac{f^{n-1)}(x) - f^{n-1)}(a)}{n!(x-a)} = \frac{1}{n!} \cdot \lim_{x\to a} \frac{f^{n-1)}(x) - f^{n-1)}(a)}{x-a} = \frac{1}{n!} \cdot f^{n)}(a)$$

c.q.d.

La tesis del teorema anterior nos permite dar la siguiente definición:

DEF Dos funciones f y g se dice que son iguales hasta el orden n en x = a si

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - g(x)}{(x-a)^n} = 0$$

Según esta definición, el teorema 1 dice que el polinomio de Taylor de f(x) de grado n en x = a, $P_{n,a}(x)$, y f(x) son iguales hasta el orden n en x = a.

Podríamos dar una definición alternativa para el polinomio de Taylor, como aquel polinomio de grado ≤ n que cumpla las propiedad anterior, que sabemos que es único. La proposición siguiente nos demuestra la unicidad.

PROP Sean P y Q dos polinomios en x – a, de grado ≤ n, y supongamos que P y Q son iguales hasta el orden n en x = a. Entonces P = Q.

Dem.

Definamos el polinomio R(x) = P(x) – Q(x).

R(x) es un polinomio de grado ≤ n:

$$R(x) = \sum_{K=0}^{n} r_i (x-a)^n$$

Si demostramos que R(x) verifica

$$\lim_{x \to a} \frac{R(x)}{(x-a)^n} = 0$$

entonces R = 0.

La hipótesis para R(x) nos garantiza que se verifica

$$\lim_{x \to a} \frac{R(x)}{(x-a)^i} = 0 \qquad 0 \le i \le n$$

Para i = 0 la condición es

$$\lim_{x \to a} R(x) = 0$$

y como

$$\lim_{x \to a} R(x) = \lim_{x \to a} \sum_{i=0}^{n} r_i (x-a)^i = r_o$$

entonces $r_o = 0$ y

$$r(x) = \sum_{i=1}^{n} r_i (x-a)^i$$

Para i = 1

$$\lim_{x \to a} \frac{R(x)}{x-a} = 0$$

y el cociente

$$\frac{R(x)}{x-a} = \sum_{i=1}^{n} r_i (x-a)^{i-1} = r_1 + r_2 (x-a) + \ldots\ldots + r_n (x-a)^{n-1}$$

siendo

$$\lim_{x \to a} \frac{R(x)}{x-a} = r_1$$

Por tanto $r_1 = 0$

Reiterando el proceso obtendremos

$$r_o = r_1 = r_2 = \ldots\ldots\ldots = r_n = 0$$

y por tanto R = 0.

COROLARIO Sea f(x) una función derivable n veces en x = a y sea P(x) un polinomio en x – a de grado ≤ n, tan que f(x) y P(x) son iguales hasta el orden n en x = a. Entonces $P(x) = P_{n,a}(x)$.

Dem.

Inmediata.

Si f(x) tiene n derivadas en x = a, el corolario anterior nos muestra un método para hallar el polinomio de Taylor. Utilicémoslo ahora para hallar el polinomio de Taylor de la función arctg x que dejamos pendiente.

Sabemos que la función arctg x se puede expresar por medio de la ecuación

$$\text{arctg}\, x = \int_0^x \frac{1}{1+t^2}\, dt$$

Si realizamos la división que indica el cociente:

$$\frac{1}{1+t^2} = 1 - t^2 + t^4 - t^6 + t^8 + ... + (-1)^n \cdot t^{2n} + \frac{(-1)^{n+1} \cdot t^{2n+2}}{1+t^2}$$

y entonces

$$\operatorname{arctg} x = \int_0^x \left(1 - t^2 + t^4 - t^6 + t^8 + ... + (-1)^n t^{2n}\right) dt + \int_0^x (-1)^{n+1} \cdot \frac{t^{2n+2}}{1+t^2} dt =$$

$$= x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + ... + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + (-1)^{n+1} \cdot \int_0^x \frac{t^{2n+2}}{1+t^2} dt$$

Aplicando el corolario anterior, el polinomio que acabamos de obtener es el polinomio de Taylor de grado n en x = 0 para arctg x siempre que se verifique.

$$\lim_{x \to 0} \frac{\int_0^x \frac{t^{2n+2}}{1+t^2} dt}{x^{2n+1}} = 0$$

Y la expresión anterior es cierta si tenemos en cuenta que:

$$\left| \int_0^x \frac{t^{2n+2}}{1+t^2} dt \right| \leq \left| \int_0^x t^{2n+2} dt \right| = \frac{|x|^{2n+3}}{2n+3}$$

2.3. Teorema de Taylor.

Volviendo a la expresión obtenida para la función arctg x

$$\operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + ... + (-1)^n \cdot \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + (-1)^{n+1} \cdot \int_0^x \frac{t^{2n+2}}{1+t^2} dt$$

y recordando la acotación obtenida para el último sumando

$$\left| \int_0^x \frac{t^{2n+2}}{1+t^2} dr \right| \leq \frac{|x|^{2n+3}}{2n+3}$$

podemos afirmar que si $|x| \leq 1$ entonces el último sumando tiene un valor máximo de $\frac{1}{2n+3}$, pudiéndose hacer tan pequeño como se quiera tan sólo aumentando n.

Es decir, podemos usar el polinomio de Taylor para calcular el valor de la función arctg x con $|x| \leq$ 1 con tanta aproximación como queramos.

Los teoremas de Taylor permiten extender el resultado obtenido a otras funciones.

Los resultados obtenidos en el punto anterior han examinado el comportamiento del polinomio de Taylor $P_{n,a}(x)$ para n fijo, cuando x tiende hacia x = a. A partir de ahora dejaremos x fijo y variaremos el valor de n.

DEF Llamaremos resto del polinomio de Taylor $P_{n,a}(x)$ de la función f(x) a la función $R_{n,a}(x)$ que verifica

$$f(x) = P_{n,a}(x) + R_{n,a}(x)$$

En el caso de la función arctg x hemos visto que

$$R_{2n+1,0}(x) = (-1)^{n+1} \cdot \int_0^x \frac{t^{2n+2}}{1+t^2}\,dt$$

Sería deseable obtener una expresión para $R_{n,a}(x)$ que nos permitiera estimar fácilmente su magnitud. Vamos a ver que dicha expresión existe y que encierra una integral, como en el caso de al arctg x.

Vamos a obtener dicha expresión den dos formas diferentes. La segunda de ellas recibirá el nombre de Teorema de Taylor, y la primera que vamos a ver es la constructiva.

Para n = 0 tenemos que

$$f(x) = f(a) + R_{o,a}(x)$$

y por el teorema fundamental del cálculo infinitesimal podemos decir

$$f(x) = f(a) + \int_a^x f'(t)\,dt$$

con lo que

$$R_{0,a}(x) = \int_a^x f'(t)\,dt$$

Para obtener $R_{1,a}(x)$ partiremos de la fórmula anterior aplicando integración por partes:

$$R_{0,a}(x) = \int_a^x f'(t)\,dt =$$

$$\begin{array}{ll} u' = f'(t) & u' = f''(t)dt \\ dv = dt & v = t - x \end{array}$$

Escribimos v(t) = t – x ya que - x es una constante al ser x fijo.

$$= \left[f'(t)(t-x)\right]_a^x - \int_a^x f''(t)(t-x)\,dt = -f'(a)(a-x) - \int_a^x f''(t)(t-x)\,dt$$

Sustituyendo

$$f(x) = f(a) + R_{0,a}(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \int_a^x f''(t)(x-t)dt$$

por lo tanto

$$R_{1,a}(x) = \int_a^x f''(t)(x-t)dt$$

Si repetimos el proceso para $R_{1,a}(x)$ tomando

$$u(t) = f''(t) \qquad u'(t) = f'''(t)dt$$
$$v'(t) = (x-t)dt \quad v(t) = \frac{-(x-t)^2}{2}$$

obtenemos

$$R_{1,a}(x) = \frac{f''(a)(x-a)^2}{2} + \int_a^x \frac{f'''(t)}{2}(x-t)^2\,dt$$

siendo

$$R_{2,a}(x) = \int_a^x \frac{f'''(t)}{2}\cdot(x-t)^2\,dt$$

Reiterando el proceso n veces llegamos a que si $f^{n+1)}(x)$ es continua [a, x] entonces

$$R_{n,a}(x) = \int_a^x \frac{f^{n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n\,dt$$

El teorema de Taylor es la segunda forma de obtener una expresión para el resto que vamos a ver. Tiene como ventaja que no exige como hipótesis que $f^{n+1)}(x)$ sea continua.

TEOREMA Teorema de Taylor.

Sea f(x) una función con derivadas hasta el orden n + 1 en [a, x] y $R_{n,a}(x)$ definido como

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \ldots\ldots + \frac{f^{n)}(a)}{n!}(x-a)^n + R_{n,a}(x)$$

Entonces

1) $R_{n,a}(x) = \dfrac{f^{n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n(x-a)$ para algún $t \in (a, x)$

2) $R_{n,a}(x)=\dfrac{f^{n+1)}(t)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$ para algún t∈(a, x)

3) Si $f^{n+1)}(x)$ es integrable sobre [a, x] entonces $R_{n,a}(x)=\int_0^x \dfrac{f^{n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n\,dt$

<u>Dem.</u>

1) Sea x un nº fijo. Entonces $\forall t\in[a,x]$

$$f(x)=f(t)+f'(t)(x-t)+........+\frac{f^{n)}(t)}{n!}(x-t)^n+S(t)\quad \forall t\in[a,x]$$

Derivemos la expresión anterior como función de t.

El primer miembro:

$$\frac{df(x)}{dt}=0$$

y cada sumando $\dfrac{f^{K)}(t)}{K!}(x-t)^K$ tiene por derivada

$$\frac{d\left(\dfrac{f^{K)}(t)}{K!}\cdot(x-t)^K\right)}{dt}=\frac{f^{K)}(t)}{K!}\cdot K\cdot(x-t)^{K-1}\cdot(-1)+\frac{f^{K-1)}(t)}{K!}(x-t)^K=$$

$$=-\frac{f^{K)}(t)}{(K-1)!}(x-t)^{K-1}+\frac{f^{K+1)}(t)}{K!}(x-t)^K$$

Sustituyendo tendremos

$$0=f'(x)+\left[' f'(t)+\frac{f''(t)}{1!}(x-t)\right]+\left[-\frac{f''(t)}{1!}(x-t)+\frac{f'''(t)}{2!}(x-t)^2\right]+.........+$$

$$+\left[-\frac{f^{n)}(t)}{(n-1)!}(x-t)^{n-1}+\frac{f^{n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n\right]+S'(t)$$

Teniendo en cuenta que se cancela casi todos los sumando, nos queda

$$S'(t)=-\frac{f^{n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n$$

Aplicando el teorema de Valor Medio de la función S(t) sobre [a, x] existe un t∈(a, x) tal que

$$S'(t) = \frac{S(x) - S(a)}{x - a}$$

por lo que

$$\frac{S(x) - S(a)}{x - a} = -\frac{f^{n+1)}(t)}{n!}(x - t)^n$$

Si recordamos que

$$S(t) = R_{n,t}(x)$$

tenemos que

$$S(x) = R_{n,x}(x) = 0$$
$$S(a) = R_{n,a}(x)$$

Por tanto, sustituyendo

$$\frac{0 - R_{n,a}(x)}{x - a} = -\frac{f^{n+1)}(t)}{n!}(x - t)^n$$

y despejando

$$R_{n,a}(x) = \frac{f^{n+1)}(t)}{n!}(x - t)^n (x - a)$$

que llamaremos forma de Cauchy del resto.

2) Aplicando el teorema del valor medio de Cauchy a S y g(t) = $(x - t)^{n+1}$ existe algún t∈ (a, x) tal que

$$\left(S(x) - S(a)\right)g'(t) = \left(g(x) - g(a)\right)S'(t)$$

Sustituyendo g(x) = 0

g(a) = $(x - a)^{n+1}$

g´(t) = - (n + 1) $(x - t)^n$

obtenemos

$$R_{n,a}(x) = \frac{f^{n+1)}(t)}{(n+1)!}(x - a)^{n+1}$$

que es la forma de Lagrange del Resto.

3) Si $f^{n+1)}$ es integrable sobre [a, x] aplicando el teorema fundamental del cálculo integral

$$S(x) - S(a) = \int_a^x S´(t)$$

y sustituyendo S´(t) por su valor

$$S(x) - S(a) = -\int_a^x \frac{f^{n+1)}(t)}{n!} \cdot (x-t)^n \, dt$$

que nos da

$$R_{n,a}(x) = \int_a^x \frac{f^{n+1)}(t)}{n!} \cdot (x-t)^n \, dt$$

Como aplicación del teorema anterior, vamos a escribir de nuevo el polinomio de Taylor con el resto integral para las siguientes funciones:

$$\operatorname{sen} x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - ...... + (-1)^4 \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \int_0^x \frac{\operatorname{sen}^{2n+2)}(t)}{(2n+1)!} (x-t)^{2n+1} dt$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - .... + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \int_0^x \frac{\cos^{2n+2)}(t)}{(2n)!} (x-t)^{2n} dt$$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + ... + \frac{x^n}{n!} + \int_0^x \frac{e^t}{n!} (x-t)^n dt$$

Las integrales que hemos obtenido son demasiado complicadas como para resolverlas. Y más cuando sabemos que su valor será el de la función menos el del polinomio. Lo que sí es fácil de hacer, y lo dejamos como ejercicio, es acotarlas superiormente.

3. DESARROLLO DE UNA FUNCIÓN EN SERIE DE POTENCIAS.

DEF Llamaremos serie de potencia a una serie de funciones de la forma

$$\sum_{K=0}^{\infty} a_K x^K$$

donde $\{a_o, a_1, ..., a_n, ...\}$ son números constantes llamados coeficientes de al serie.

El dominio de convergencia de una serie de potencias es un cierto intervalo que en algunos casos podría reducirse a un punto.

TEOREMA. Teorema de Abel.

1) Si una serie de potencias converge para un cierto valor x_0 no nulo, entonces converge absolutamente $\forall x, \quad |x| < |x_o|$.

2) Si la serie diverge para cierto valor de x_0', entonces diverge $\forall x \quad |x| > |x_o'|$.

Dem.

1) Por hipótesis, la serie numérica

$$a_0 + a_1 x_0 + a_2 x_0^2 + \ldots + a_n x_0^n + \ldots$$

converge, su término general

$$a_n x_0^n \to 0, \quad \text{cuando} \quad n \to \infty$$

pero esto significa que existe un número M positivo tal que todos los términos de la serie son menores en valor absoluto que M.

Sea la serie

$$a_0 + a_1 x_0 \left(\frac{x}{x_0} \right) + a_2 x_0^2 \left(\frac{x}{x_0} \right)^2 + \ldots + a_n x_0^n \left(\frac{x}{x_0} \right)^n + \ldots \qquad (1)$$

y consideremos la serie de valores absolutos de sus términos

$$|a_0| + |a_1 x_0| \left| \frac{x}{x_0} \right| + |a_2 x_0^2| \left| \frac{x}{x_0} \right|^2 + \ldots + |a_n x_0^n| \left| \frac{x}{x_0} \right|^n + \ldots \qquad (2)$$

Los términos de esta serie son menores que los términos correspondientes a la serie

$$M + M \left| \frac{x}{x_0} \right| + M \left| \frac{x}{x_0} \right|^2 + \ldots + M \left| \frac{x}{x_0} \right|^n + \ldots \qquad (3)$$

Cuando $|x| < |x_0|$, la serie (3) es una progresión geométrica de razón $\frac{x}{x_0} < 1$, siendo por tanto convergente. Entonces la serie (2) también es convergente, por ser menor que (3). Y de aquí se deduce que la serie (1) también es convergente absolutamente.

2) Supongamos que la serie

$$a_0 + a_1 x + a_2 x + \ldots + a_n x + \ldots$$

diverge en un cierto punto x'_0. Entonces esta serie también será divergente para cualquier x que verifique $|x| > |x'_0|$, ya que si la serie fuese convergente para ese valor de x, aplicando el apartado 1 también sería convergente en x'_0, lo cual sería una contradicción.

c.q.d.

El Teorema de Abel nos permite determinar los puntos tanto de convergencia de la serie, como de divergencia.

Si la serie converge en x_0, entonces todos los puntos $x \in \left(-|x|, |x_o|\right)$ son puntos de convergencia absoluta. Y análogamente, si $x_0´$ es un punto de divergencia, también lo serán todos $x \in \left(-\infty, -|x_o´|\right) \cup \left(|x_o´|, +\infty\right)$.

Por tanto, tenemos

COROLARIO El dominio de convergencia de una serie de potencias es un intervalo con centro el origen de coordenadas.

DEF Llamaremos radio de convergencia de una serie de potencias a R, que verifica que $\forall$ x$\in$E(0, R) la serie es convergente y $\forall x \notin$ [-R, R] la serie es divergente.

El caso de que x = R ó x = - R se resuelve de forma particular para cada función.

Sea f(x) una función derivable hasta el orden n + 1 en un entorno de x = a. Entonces podemos escribir que

$$f(x) = f(a) + f´(a)(x-a) + \ldots\ldots + \frac{f^{n}(a)}{n!}(x-a)^n + \frac{1}{n!}\int_a^x f^{n+1)}(t)(x-t)^n\,dt$$

Si la función f(x) es de clase C^∞ en un entorno de x = a (tiene infinitas derivadas), podemos tomar n arbitrariamente grande en la fórmula de Taylor.

DEF Dada una función f(x) de clase C^∞ en un entorno del punto x = a, llamaremos desarrollo de f(x) en serie de Taylor a la expresión

$$f(x) = \sum_{K=0}^{\infty} \frac{f^{K)}(a)}{K!}(x-a)^K$$

Si en la fórmula de Taylor dejamos x fijo y tomamos límites cuando n tiende a infinito, la serie convergerá solo en el caso de que se verifique que $\lim_{n\to\infty} R_{n,a}(x) = 0$.

PROP Si $\lim_{n\to\infty} R_{n,a}(x) = 0 \Leftrightarrow$ la serie de Taylor de f(x) es convergente para ese x.

<u>Dem.</u>

Sea $f(x) = P_{n,a}(x) + R_{n,a}(x)$

Donde $P_{n,a}(a)$ es el polinomio de Taylor de f(x) en x = a de grado n y $R_{n,a}(x)$ es el resto.

Tomando límites en ambos miembros cuando n tiende a infinito tenemos

$$f(x) = \lim_{x\to\infty} P_{n,a}(x)$$

ya que por hipótesis $\lim_{n\to\infty} R_{n,a}(x) = 0$

Pero $P_{n,a}(x)$ es la n-ésima suma parcial de al serie de Taylor, por tanto su límite es igual a al suma de al serie y se verifica que

$$f(x) = \sum_{K=0}^{\infty} \frac{f^{K}(a)}{K!}(x-a)^K$$

OBS Deducimos que la serie de Taylor representa a la función f(x) solo cuando $\lim_{n\to\infty} R_{n,a}(x) = 0$. Si el límite no fuese nulo, la serie no es la función dada, independientemente de que converja o no.

Como $R_{n,a}(x) = \frac{1}{n!}\int_a^x f^{n+1)}(t)(x-t)^n\,dt$ en cualquier intervalo en torno al punto a en el que $f_{(x)}^{n+1)}$ es continua, la condición suficiente de la proposición anterior podría ser expresada como:

PROP $f(x) \in C^{\infty}(E(a,r))$. Sea A∈ ℝ una constante que

$$\left|f^{n)}(x)\right| \le A^n \quad \forall n \quad \forall x \in E(a,r)$$

Entonces la serie de Taylor de f(x) en x = a converge hacia $f(x)\ \forall x \in E(a,r)$

<u>Dem.</u>

Como $R_{n,a}(x) = \frac{1}{n!}\int_a^x f^{n+1)}(t)\cdot(x-t)^n\,dt$

realizamos el cambio de variable

$$t = x + (a-x)\cdot u \qquad dt = -(x-a)du$$

quedando

$$R_{n,a}(x) = \frac{(x-a)^{n+1}}{n!}\int_0^1 u^n f^{n+1)}(x+(a-x)u)du$$

y ahora

$$0 \le \left|R_{n,a}(x)\right| \le \frac{|x-a|^{n+1}}{n!}\cdot A^{n+1}\cdot\int_0^1 u^n du = \frac{|x-a|^{n+1}\cdot A^{n+1}}{(n+1)!} = \frac{B^{n+1}}{(n+1)!}$$

siendo $B = A\cdot|x-a|$

La expresión $\dfrac{B^n}{n!}$ sabemos que verifica

$$\lim_{n\to\infty} \frac{B^n}{n!} = 0$$

por lo que $\lim_{n\to\infty} R_{n,a}(x) = 0 \quad \forall x \in E(a, r)$

Por el teorema anterior, las funciones sen x y cos x son desarrollables en cualquier punto en serie de potencias (la serie siempre es convergente) ya que todas sus derivadas están acotadas por 1.

Por lo que

$$\operatorname{sen} x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots\dots\dots + (-1)^n \cdot \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \dots\dots\dots$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots\dots\dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \dots\dots\dots$$

En el caso de e^x, su derivada es ella misma y es una función no acotada, pero en el intervalo [-R, R] está acotada por $e^R \quad \forall R \in \mathbb{R}^+$, por lo que también podemos decir que

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots\dots + \frac{x^n}{n!} + \dots\dots\dots$$

4. APLICACIONES AL ESTUDIO LOCAL DE FUNCIONES.

4.1. Extremos relativos. Curvatura.

Recordemos algunas aplicaciones de las derivadas, vistas en el tema anterior. Si a es un punto del dominio de f tal que f´(a) = 0 entonces f tenía un mínimo relativo en a si f´´(a) > 0 o un máximo relativo si f´´(a) < 0. En caso de que f´´(a) = 0 no podríamos deducir nada. Se puede plantear si en ese caso, el signo de f´´´(a) nos aporta algún dato. O si fuese cero, si el dato lo aporta el signo de $f^{IV)}(a)$. Veamos un teorema que nos resuelve este problema.

TEOREMA Sea f una función que verifica, para un cierto $a \in$ Dom f.

$f'(a) = f''(a) = \dots\dots\dots\dots = f^{n-1)}(a) = 0$

$f^{n)}(a) \neq 0$

Se verifica:

1) Si n es par y $f^{n)}(a) > 0$ entonces f tiene un mínimo relativo en a.

2) Si n es par y $f^{n}(a) < 0$ entonces f tiene un máximo relativo en a.

3) Si n es impar, entonces f no tiene extremo relativo en a.

<u>Dem.</u>

Mediante Taylor podemos expresar f(x) como:

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \ldots\ldots + \frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}(x-a)^{n-1} + \frac{f^{(n)}(\theta)}{n!}(x-a)^n$$

pero por las hipótesis iniciales se tiene que

$$f(x) = f(a) + \frac{f^{(n)}(\theta)}{n!}(x-a)^n$$

1) Si *n* es par, se tiene que las expresiones $(x-a)^n>0$ y $n!>0$ (que lo es simplemente por ser producto de números naturales).

Como además $f^{(n)}(a)>0$ y $f^{(n)}(x)$ es continua $\Rightarrow \exists\delta > 0$ tal que si:

$$|x-a| < \delta \quad \Rightarrow \quad f^{(n)}(x)>0$$

Así, si $\quad x \in (a-\delta, a+\delta) \quad \Rightarrow \quad f^{(n)}(x)>0 \quad y \quad f^{(n)}(\theta)>0 \quad \Rightarrow$

$$\Rightarrow \quad f(x) = f(a) + \frac{f^{(n)}(\theta)}{n!}(x-a)^n > f(a) \quad si \quad x \in (a-\delta, a+\delta)$$

por lo tanto, en “a” hay un mínimo relativo estricto.

2) Si *n* es par, se tiene que $(x-a)^n>0$ y $n!>0$.

Como además $f^{(n)}(a)<0$ y $f^{(n)}(x)$ es continua $\Rightarrow \exists\delta > 0$ tal que si:

$$|x-a| < \delta \quad \Rightarrow \quad f^{(n)}(x)<0$$

Así, si $\quad x \in (a-\delta, a+\delta) \quad \Rightarrow \quad f^{(n)}(x)<0 \quad y \quad f^{(n)}(\theta)<0 \quad \Rightarrow$

$$\Rightarrow \quad f(x) = f(a) + \frac{f^{(n)}(\theta)}{n!}(x-a)^n < f(a) \quad si \quad x \in (a-\delta, a+\delta)$$

por lo tanto, en “a” hay un máximo relativo estricto.

3) Si *n* es impar, se tiene que $(x-a)^n>0$ si $x>a$ y $(x-a)^n<0$ si $x<a$. $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ Como $f(x) = f(a) + \frac{f^{(n)}(\theta)}{n!}(x-a)^n$ tiene un signo si $x<a$ pero el contrario si $x>a$, por lo tanto no hay ningún extremo relativo en $x=a$. Podemos decir que en este caso tenemos un punto de inflexión.

Veamos ahora un teorema similar, pero en lugar de hablar de extremos relativos, lo haremos con concavidad.

TEOREMA Sea f una función que verifica, para un cierto $a \in$ Dom f.

$f''(a) = \ldots\ldots = f^{n-1)}(a) = 0$

$f^{n)}(a) \neq 0$

Se verifica:

1) Si n es impar entonces f tiene un punto de inflexión en a.

2) Si n es par y $f^{n)}(a) > 0 \Rightarrow$ f es convexa.

3) Si n es par y $f^{n)}(a) < 0 \Rightarrow$ f es cóncava.

Dem.

Análoga a la anterior.

4.2. Cálculo de límites.

Una de las aplicaciones más importantes del polinomio de Taylor es su utilización a la hora del cálculo de límites mediante equivalencias i infinitésimos equivalentes.

Notación de Landau

Si $\lim_{x \to x_0} \frac{R_{n+1}(x)}{(x - x_0)^n} = 0$ entonces se expresa diciendo que:

$$f(x) = P_n(x, x_0) + R_{n+1}(x; x_0) \quad \text{y} \quad \lim_{x \to x_0} \frac{R_{n+1}(x; x_0)}{(x - x_0)^n} = 0$$

pero también lo podemos expresar como:

$$f(x) = P_n(x, x_0) + o\left((x - x_0)^n\right)$$

donde $o\left((x - x_0)^n\right)$ es la llamada "o pequeña de la notación de Landau" y representa a los términos del polinomio que están por detrás del último que hemos puesto, indicando que tienen en común grado $n+1$ y que si x tiende a x_0 entonces todos irían a 0 siendo así un infinitésimo representante del resto.

Ejemplo de Equivalencia.

Dado el desarrollo de McLaurin de la función $f(x) = \text{sen}x$, tenemos que:

$$\operatorname{sen} x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + o(x^7)$$

$$\operatorname{sen} x = x\left(1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \frac{x^6}{7!} + o(x^6)\right)$$

$$\frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \frac{x^6}{7!} + o(x^6)$$

Haciendo el límite cuando x$\rightarrow$0, tenemos que:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = \lim_{x\to 0}\left(1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \frac{x^6}{7!} + o(x^6)\right) = 1$$

por lo tanto: $\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$ con lo que, cuando x$\rightarrow$0 la función f(x)=sen x y la función g(x)=x son equivalentes y lo expresamos como:

$$\boxed{\operatorname{sen} x \sim_0 x}$$

Esto quiere decir que si un límite, cuando x$\rightarrow$0 aparece la función sen$x$ podemos sustituirla por x. Pero tenemos una salvedad para esto y es cuando aparezca (sen$x$-x), en cuyo caso, la equivalencia $\operatorname{sen} x \sim_0 x$ no es suficiente ya que no es lo suficiente fina, es decir, sen$x$ es equivalente a x en cero, pero no es igual, por eso cuando tenemos (sen$x$-x) debemos añadirle un término más a la equivalencia de manera que ésta sea más fina, es decir:

$$\operatorname{sen} x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + o(x^7)$$

$$\operatorname{sen} x - x = -\frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + o(x^7)$$

$$\operatorname{sen} x - x = -\frac{x^3}{3!}\left(1 - \frac{x^2}{20} + \frac{x^4}{840} + o(x^4)\right)$$

$$\frac{\operatorname{sen} x - x}{-\frac{x^3}{3!}} = 1 - \frac{x^2}{20} + \frac{x^4}{840} + o(x^4)$$

Haciendo el límite cuando x$\rightarrow$0:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x - x}{-\frac{x^3}{3!}} = \lim_{x\to 0}\left(1 - \frac{x^2}{20} + \frac{x^4}{840} + o(x^4)\right) = 1$$

por lo tanto son equivalentes cuando x$\rightarrow$0, es decir:

$$\operatorname{sen} x - x \sim_o -\frac{x^3}{3!} \qquad \text{o lo que es lo mismo} \qquad \boxed{\operatorname{sen} x \sim_o x - \frac{x^3}{3!}}$$

<u>Ejemplo de Límites:</u> A) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen} x - x}{x^3}$

Tomando $f(x) = \operatorname{sen} x$

$$\mathrm{f(x)} = \mathrm{f(0)} + \frac{\mathrm{f'(0)}}{1!}\mathrm{x} + \frac{\mathrm{f''(0)}}{2!}\mathrm{x}^2 + \frac{\mathrm{f'''(0)}}{3!}\mathrm{x}^3 + \frac{\mathrm{f}^{\mathrm{IV}}(0)}{4!}\mathrm{x}^4 + \frac{\mathrm{f}^{\mathrm{V}}(0)}{5!}\mathrm{x}^5 + o(x^5)$$

$$\operatorname{sen} x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + o(x^5)$$

$$\operatorname{sen} x - x = -\frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + o(x^5)$$

$$\operatorname{sen} x - x = -\frac{x^3}{3!}\left(1 - \frac{x^2}{20} + o(x^2)\right) \quad \Rightarrow \quad \frac{\operatorname{sen} x - x}{-\dfrac{x^3}{3!}} = 1 - \frac{x^2}{20} + o(x^2)$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x - x}{-\dfrac{x^3}{3!}} = \lim_{x\to 0}\left(1 - \frac{x^2}{20} + o(x^2)\right) = 1$$

por lo tanto, $\operatorname{sen} x - x \sim_o -\dfrac{x^3}{3!}$ y se tiene que:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x - x}{x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{-\dfrac{x^3}{3!}}{x^3} = -\frac{1}{3!} = -\frac{1}{6}$$

B) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1 - \cos x - \dfrac{x^2}{2}}{x^4}$

Tomando $f(x) = \cos x$

$$\mathrm{f(x)} = \mathrm{f(0)} + \frac{\mathrm{f'(0)}}{1!}\mathrm{x} + \frac{\mathrm{f''(0)}}{2!}\mathrm{x}^2 + \frac{\mathrm{f'''(0)}}{3!}\mathrm{x}^3 + \frac{\mathrm{f}^{\mathrm{IV}}(0)}{4!}\mathrm{x}^4 + \frac{\mathrm{f}^{\mathrm{V}}(0)}{5!}\mathrm{x}^5 + \frac{\mathrm{f}^{\mathrm{VI}}(0)}{6!}\mathrm{x}^6 + o(x^6)$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + o(x^6)$$

$$\cos x - 1 = -\frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + o(x^6)$$

$$1 - \cos x = \frac{x^2}{2!} - \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + o(x^6)$$

$$1 - \cos x - \frac{x^2}{2!} = -\frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + o(x^6)$$

$$1 - \cos x - \frac{x^2}{2!} = -\frac{x^4}{4!}\left(1 - \frac{x^2}{30} + o(x^2)\right)$$

$$\frac{1 - \cos x - \frac{x^2}{2!}}{-\frac{x^4}{4!}} = 1 - \frac{x^2}{30} + o(x^2)$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{1 - \cos x - \frac{x^2}{2!}}{-\frac{x^4}{4!}} = \lim_{x\to 0}\left(1 - \frac{x^2}{30} + o(x^2)\right) = 1$$

Por lo tanto: $1 - \cos x - \frac{x^2}{2} \sim_{o} -\frac{x^4}{4!}$ y se tiene que:

$$\lim_{x\to 0} \frac{1 - \cos x - \frac{x^2}{2!}}{x^4} = \lim_{x\to 0} \frac{-\frac{x^4}{4!}}{x^4} = -\frac{1}{4!} = -\frac{1}{24}$$

4.3. Aproximaciones numéricas.

Otra aplicación importante del polinomio de Taylor es la de poder calcular valores aproximados de funciones con un error menor que un valor predeterminado. Por ejemplo:

Calcular el valor de $\log(1'02)$ *con un error menor de* 10^{-4}.

Tomaremos para ello la función $f(x) = \log(1 + x)$ que la evaluaremos en x=0’02 y utilizaremos como punto de referencia *a*=0.

$$f(x) = \log(1 + x)$$

$$f^{I}(x) = \frac{1}{1 + x}$$

$$f^{II}(x)=\frac{-1}{(1+x)^2}$$

$$f^{III}(x)=\frac{2}{(1+x)^3}$$

$$f^{IV}(x)=\frac{-3\times 2}{(1+x)^4}$$

.
.
.

$$f^{(n)}(x)=\frac{(-1)^{n+1}(n-1)!}{(1+x)^n}$$

Acotaremos el resto de Lagrange para localizar el menor valor de *n*, para el cual, el error cometido en la aproximación será menor que 10^{-4}.

$$R_n(x)=\left|\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}\right|=\left|\frac{\frac{(-1)^{n+2}(n)!}{(1+c)^{n+1}}}{(n+1)!}0'02^{n+1}\right|=\left|\frac{1}{(n+1)(1+c)^{n+1}}\cdot(0'02)^{n+1}\right|<\ldots$$

a<c<x 0<c<0’02

$$\ldots<\frac{1}{n+1}\cdot(0'02)^{n+1}=\mathrm{E}<10^{-4}$$

Si n=3 $\rightarrow$ E= $4.10^{-8}<10^{-4}$

Si n=2 $\rightarrow$ E=$2'6.10^{-6}<10^{-4}$

Si n=1 $\rightarrow$ E=$2.10^{-6}\not<<10^{-4}$

Entonces haremos la aproximación construyendo el polinomio de Taylor hasta n=2.

$$f(x)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}(x\text{-}0)+\frac{f''(0)}{2!}(x\text{-}0)^2+R_2(x)$$

$$\log(1+x)=x-\frac{1}{2}x^2+R_2(x)$$

$$\log(1'02)=0'02-\frac{1}{2}(0'02)^2+R_2(x)$$

$$\log(1'02)\approx 0'0198$$

NOTA Si nos piden un error menor que 10^{-r} es porque el error lo cometemos en la *(r+1)*-ésima cifra decimal, pero a veces este error afecta a la cifra *r*-ésima, por eso cuando nos piden que calculemos un valor con *r* cifras decimales exactas, debemos calcularlo con un error menor que $10^{-(r+1)}$ para que el error esté en la cifra decimal *(r+2)*-ésima, y como mucho afecte a la cifra decimal *(r+1)*-ésima, quedando así las *r* cifras primeras exactas.

Bibliografía Recomendada.

Análisis Matemático I. Aut. J.A. Fernández Viña. Ed. Tecnos

Lecciones de Cálculo Infinitesimal I. Aut. R. Molina Legaz, M. Franco. Ed. Universidad de Murcia.

Principios de Análisis Matemático. Aut. W. Rudin. Ed. McGraw-Hill

Curso de Análisis Matemático I. Aut. E.L. Luna. Ed. Edunsa, 1991.

Calculus. Aut. M. Spivak. Ed. Reverté.

Análisis Matemático. Aut. M. de Guzmán, B. Rubio. Ed. Pirámide.

Calculus. Aut. Apostol. Ed. Reverté