TEMAS DE MATEMÁTICAS
(Oposiciones de Secundaria)

TEMA 71

LA CONTROVERSIA SOBRE LOS FUNDAMENTOS DE LA MATEMÁTICA. LAS LIMITACIONES INTERNAS DE LOS SISTEMAS FORMALES.

TEMA 71

LA CONTROVERSIA SOBRE LOS FUNDAMENTOS DE LA MATEMÁTICA. LAS LIMITACIONES INTERNAS DE LOS SISTEMAS FORMALES.

1. LAS PARADOJAS.

El término paradoja viene del griego (para y doxos) y significa "más allá de lo creíble". En la actualidad la palabra "paradoja" tiene numerosos significados:

1) Afirmación que parece falsa, aunque en realidad es verdadera.
2) Afirmación que parece verdadera, pero en realidad es falsa.
3) Cadena de razonamientos aparentemente impecables, que conducen sin embargo a contradicciones lógicas. (Las paradojas de esta clase suelen llamarse falacias.)
4) Declaración cuya veracidad o falsedad es indecible.
5) Verdad que se vuelve patas arriba para llamar la atención.

Las paradojas matemáticas, como las científicas, pueden ser mucho más que amenidades, y llevarnos hasta nociones muy profundas. A los primeros pensadores griegos les resultaba tan paradójico como insoportable que la diagonal de un cuadrado de lado unidad no pudiera ser medida exactamente por finas que se hicieran las graduaciones de la regla. Este hecho perturbador sirvió para abrir el vasto dominio de los números irracionales. Los matemáticos del siglo pasado encontraban enormemente paradójico que todos los miembros de un conjunto infinito puedan ponerse en correspondencia biunívoca con los miembros de algún subconjunto del dado, mientras por otra parte podían existir conjuntos infinitos entre los cuales es imposible establecer una correspondencia biunívoca. Tales paradojas condujeron a desarrollar la moderna teoría de conjuntos, que a su vez ha ejercido profunda influencia sobre la filosofía de la ciencia. Mucho podemos aprender de las paradojas. Al igual que los buenos trucos de ilusionismo, nos causan tanto asombro que inmediatamente queremos saber como se han hecho. Los ilusionistas no revelan jamás como hacen lo que hacen, pero los matemáticos no tienen necesidad de guardar el secreto.

Después del descubrimiento de las geometrías no euclídeas, ningún hecho ha influido de forma tan importante en el desarrollo de los fundamentos de la Matemática como la aparición de las paradojas.

Las paradojas estimularon los esfuerzos de los matemáticos para que las explicaran y superaran. Además, era un punto muy delicado con el que en adelante tenían que enfrentarse todas las teorías de fundamentación de la Matemática.

1.1. Paradojas Lógicas.

Entre las primeras, cronológicamente hablando, tenemos la paradoja de Cantor (1899). Cantor fue el creador de la teoría de conjuntos. Sea U el conjunto universal, es decir, el conjunto formado por todos los conjuntos. Sea P(U) el conjunto de las partes de U, o lo que es lo mismo, el conjunto formado por todos los subconjuntos de U.

El teorema de Cantor dice que el cardinal de un conjunto es menor que el cardinal del conjunto formado por todos los subconjuntos de dicho conjunto. Es decir

$$|U| < |P(U)| \qquad (1)$$

Pero como P(U) es un conjunto se debe verificar que

$$P(U) \subset U$$

verificándose que

$$|P(U)| \leq |U| \qquad (2)$$

Y aquí nos encontramos con la paradoja, ya que no puede suceder de forma simultánea (1) y (2).

Probablemente la paradoja más conocida corresponde a B. Russell, publicada a comienzos del siglo XX, y que ha dado lugar a numerosas variantes. Para que se pueda entender la paradoja, tengamos en cuenta que existen clases o conjuntos que pueden pertenecer a sí mismos. Por ejemplo, el conjunto de todos los conjuntos debe ser un elemento de sí mismo, al ser otro conjunto. De forma análoga, podemos indicar que si colocamos en un armario un catálogo de tapas azules que cataloga todos los libros de tapas azules, deberá catalogarse a sí mismo.

Sea W el conjunto de todos los conjuntos C que no se pertenecen a sí mismos. entonces tendremos que

$$C \in W \iff C \notin C$$

Pero entonces $W \notin W$ lo cual significa que $W \in W$.

Recíprocamente, si $W \in W$, ha de verificarse que $W \notin W$.

En cualquier caso, ha de verificarse de forma simultánea que W pertenece y no pertenece a W.

1.2. Paradojas Semánticas.

La paradoja de Richard (1905) se refiere a la imposibilidad de una enumeración de las funciones de la teoría de números, a pesar de la aparente posibilidad de llevarlo a cabo.

Se consideran las funciones f tales que a todo número natural n se le hace corresponder un número natural f(n). Supongamos que para escribir correctamente en castellano sean necesarios y suficientes 35 signos (entre letras, acento, espaciado y demás símbolos de puntuación). Entonces, una expresión con m signos no es más que una combinación con repetición de los 35 signos. Es claro que todas estas expresiones (con una cantidad finita de signos) se pueden ordenar, comenzando con los formados por un solo signo, después los de dos, y así sucesivamente, siguiendo el orden lexicográfico.

Una vez ordenadas todas las expresiones en correcto castellano hacemos una lista, es decir, numeramos (manteniendo el orden) con E_1, E_2, ... todas aquellas que definan una función en la teoría de números y suprimimos todas las demás expresiones. Llamemos $f_k(n)$ la función definida por la expresión E_k. Dado que la sucesión E_1, E_2, ... es infinita, la correspondiente a funciones $f_1(n)$, $f_2(n)$, ... también lo es. Consideremos ahora la siguiente expresión de Richard:

"La función que para todo número natural toma, aumentando en una unidad, el valor que para ese mismo número natural toma la función que ocupa en la lista el lugar indicado por este mismo número natural"

Es claro que esta expresión es equivalente a la expresión matemática:

"La función que para todo número natural n toma el valor $f_n(n)+1$"

Ahora bien, la expresión de Richard define una función y, por tanto, ocupa un lugar en la lista.

Sea la expresión E_p y sea $f_p(n)$ la función correspondiente. Entonces en virtud de la misma definición, resulta que para todo n, $f_p(n) = f_n(n)+1$, lo cual es imposible, pues para n=p tendría que ser $f_p(p)=f_p(p)+1$.

La paradoja de Berry (1906) surge al considerar las cualidades sintáctica y semántica de la siguiente expresión:

"El menor número natural que no puede ser nombrado con menos de treinta sílabas"

Resulta que la expresión de Berry nombra en menos de treinta sílabas un número natural que no puede ser nombrado en menos de treinta sílabas.

1.3. Observaciones.

Las paradojas lógicas pueden ser formalizadas en sistemas formales lógicos (los cuales deben ser inconsistentes) sin que en estas tengan que figurar términos primitivos ajenos a la teoría de conjuntos. Mientras que las paradojas semánticas para poder ser formalizadas requieren la introducción de algún término como "definir", "nombrar", "verdad", etc que son ajenos a la teoría de números.

Para la fundamentación de la matemática, las paradojas semánticas no son peligrosas. De hecho, no pueden ser formalizadas en el lenguaje de la lógica simbólica.

Ninguna de las paradojas formuladas tiene una solución trivial. Veremos como las teorías de Logicismo, Formalismo e Intuicionismo evitan caer en las paradojas.

2. EL LOGICISMO.

El Logicismo es una doctrina sobre los fundamentos de la matemática que considera la lógica como anterior o más fundamental que la matemática, y efectúa la reducción de los conceptos y métodos de inferencia matemática a los correspondientes de la lógica, concluyendo que la matemática no es más que una rama de la lógica, sin duda extensa y con vida propia, pero cuyo método se identifica con el propio método de la lógica.

El primero en desarrollarla con considerable extensión y con todo rigor fue G. Frege (1848-1925). Con mayor extensión aun, lo hizo J. Peano (1858-1932). Y finalmente también lo hicieron Whitehead (1861-1947) y B. Russell (1872-1970), que son considerados los introductores del Logicismo.

Una de las tareas fundamentales del Logicismo es la reducción de los conceptos matemáticos a conceptos lógicos y de igual manera los teoremas de la matemática deben ser demostrados como teoremas de la lógica.

2.1. El principio de círculo vicioso.

Un somero examen de las paradojas nos sugiere inmediatamente que no se ha de poder permitir utilizar, por lo menos en matemáticas y lógica, conjuntos tan grandes y con elementos tan arbitrarios como los conjuntos U y W de Cantor y Russell, que sin embargo satisfacen las precisas condiciones de conjuntos, que estableció Cantor.

Sin duda alguna, el análisis del concepto de conjunto, de sus estrictas y justas limitaciones para su empleo en lógica y matemáticas parece ser un problema más difícil que el de evitar las paradojas.

Poincaré y Russell vieron que en todas las paradojas hay una especie de círculo vicioso en cuanto que, en todas ellas, hay una definición que contiene lo definido.

Uno de los requisitos de toda teoría de los fundamentos ha de ser evitar que puedan surgir paradojas; Russell formuló y guardó el siguiente principio de exclusión de círculo vicioso:

“Ninguna totalidad puede contener miembros definibles solamente en términos de esa totalidad, o miembros que impliquen o presupongan esta totalidad.

2.2. La reducción de los términos matemáticos en términos lógicos.

Los tres volúmenes de Principia Mathematica de A.N. Whitehead y B. Russell empiezan como si fuera un tratado de lógica avanzada mediante operaciones lógicas y definiciones explícitas hasta dar todos los elementos fundamentales de la matemática. Los autores pretenden que es imposible señalar una línea de separación entre la lógica y la matemática. Ello requiere dos reducciones: la primera es la definición explícita de los términos o conceptos matemáticos mediante términos lógicos y la segunda reducción es reducir los teoremas matemáticos mediante deducciones lógicas o teoremas de la lógica.

Las entidades primitivas en las que termina la reducción lógica son en primer lugar los del cálculo proposicional, es decir, las cuatro conectivas lógicas de conjunción, disyunción, negación e implicación y variables proposicionales; luego los cuantificadores y las variables del cálculo funcional, es decir, propiedades y relaciones con sus argumentos y finalmente la relación de igualdad.

Los axiomas lógicos fundamentales para la reducción lógica de los teoremas son los mismos axiomas del cálculo de predicados; y las dos reglas de inferencia lógica son las de sustitución y de modus ponens o implicación.

Los autores de la Principia pretenden logificar todos los teoremas matemáticas en el sentido de reducirlos a proposiciones lógicas verdaderas, formadas exclusivamente por símbolos primitivos lógicos y por otros signos definidos explícitamente, los cuales a su vez pueden ser sustituidas por otras y así sucesivamente hasta poder conseguir que las proposiciones lógicas equivalentes a los teoremas matemáticos contenga solamente los símbolos lógicos primitivos.

Ahora bien, para llevar a cabo esta reducción los autores admiten como verdaderos los tres axiomas de infinitud, de selección y de reducibilidad. Este último axioma permite introducir propiedades del primer orden que tengan la misma extensión lógica que propiedades de orden superior, con lo cual se consigue poder formar definiciones predicativas, que sin este axioma serían impredicativas (definiciones que contienen lo definido). Pero este axioma es difícilmente justificable.

El postulado de infinitud establece que para todo número natural existe otro mayor. Es obvio que este postulado u otro equivalente o más fuerte ha de figurar en todo sistema axiomático que incluya un tratamiento de números naturales, pero no parece que su admisión constituya una logificación.

Finalmente podrían hacerse consideraciones respecto al axioma de selección. Además, el empleo de este axioma parece implicar que si se hiciera la reducción de un teorema matemático a su expresión lógica exclusivamente mediante los símbolos lógicos primitivos se obtendrían expresiones no solo con infinitos símbolos, sino incluso con infinitud no numerable. Esta conclusión tampoco parece satisfactoria y aun menos si se considera desde el punto de vista del logicismo.

3. EL FORMALISMO.

D. Hilbert (1862-1943) llevó a cabo la fundamentación de la geometría, especificando claramente su axiomatización, y haciendo patente su consistencia relativa respecto de la aritmética y el análisis. Todas las dificultades en los fundamentos de la matemática nacen del hecho de que en las matemáticas a menudo se hace uso del infinito actual, es decir, que se suponen como existentes y manejables conjuntos que contienen infinitos elementos.

No obstante, en la deducción de los teoremas matemáticos si bien es verdad que se maneja el infinito el número de pasos lógicos que se realizan en cualquier demostración de cualquier teorema es necesariamente finito.

La idea fundamental de Hilbert al crear la teoría formalista para la fundamentación de la matemática consiste en la intuición de que ha de ser posible establecer más allá de toda duda la validez de las matemáticas clásicas, incluso de las no constructivas, apelando al carácter finitista o finitario de las demostraciones matemáticas. Para ello se "idealizarán" las demostraciones matemáticas, algo así como la introducción de puntos en el infinito es una idealización del concepto de punto; los sistemas formales serán precisamente esta idealización simplificadora de las demostraciones matemáticas. Luego, mediante el establecimiento de un criterio, a saber, la consistencia del sistema formal, se establecerá a través de razonamientos finitos y, por tanto, fuera de toda duda, la validez del contenido de todos los teoremas matemáticos.

En un sistema axiomático formal los elementos primitivos (símbolos o términos) carecen en absoluto de contenido esencial explícito y son las piezas de un puro juego sin sentido material en sí mismo, cuyo manejo o único sentido formal viene definido implícitamente por las reglas del juego constituidas por los axiomas y las reglas de inferencia.

Por tanto, en un sistema formal tendremos términos, fórmulas, demostraciones, teoremas que son diversas combinaciones de los elementos primitivos de acuerdo con ciertas reglas fijas, pero carece de sentido hablar de verdad o falsedad. El juego del ajedrez nos suministra un ejemplo: se puede preguntar si una situación dada es alcanzable (demostrable), pero no parece que tenga sentido preguntar si es verdadera o falsa en sí misma.

Es importante tener en cuenta que las matemáticas tratan de entidades existentes y en particular los teoremas de existencia son fundamentales.

3.1. El programa de Hilbert.

3.1.1. Elaboración del sistema formal.

En la elaboración de un sistema formal en orden a demostrar la validez de los métodos matemáticos clásicos, podemos distinguir tres etapas que podemos caracterizar con estas tres palabras: símbolos, fórmulas y teoremas del sistema.

Hay que determinar en primer lugar cuales son los símbolos a emplear. Podrán ser de diversas clases: símbolos que representan variables o constantes, funciones y predicados que corresponden a entidades matemáticas y luego símbolos que correspondan a las conexiones lógicas del discurso matemático y a los cuantificadores. Con estos símbolos formales se podrán formar sucesiones finitas que llamaremos expresiones formales.

Las fórmulas constituyen una parte de las expresiones formales. Son aquellas en las que la sucesión de símbolos guarda ciertas reglas. Pero dichas fórmulas no siempre serán expresiones verdaderas (Ej.: = + + =).

Finalmente hay que especificar los axiomas y reglas de inferencia que permiten obtener sucesiones de fórmulas de modo que cada una sea un axioma o una inferencia lógica de fórmulas precedentes. A tales sucesiones de fórmulas formales las llamaremos demostraciones (formales) de la última fórmula de la sucesión, la cual se llamará teorema (formal).

3.1.2. Teoría de la demostración.

Hilbert admite que el empleo del infinito actual en las matemáticas puede, en efecto, representar un salto en lo incomprensible y carecer de evidencia y ser la razón primitiva de la aparición de paradojas. Por consiguiente hay que emplear una teoría de la demostración que, empleando exclusivamente razonamientos evidentes y, por tanto, finitarios, demuestre teóricamente que los métodos de las matemáticas conducen a teoremas verdaderos y son por tanto métodos válidos. De este modo, la pieza fundamental de la teoría de la demostración es la noción de consistencia de un sistema formal. Supongamos que, en efecto, se ha construido un sistema formal, cuyos teoremas formales se corresponden mutuamente con los teoremas matemáticos de una cierta rama de la matemática. Si los teoremas matemáticos son verdaderos y tienen un sentido objetivo innegable y el método empleado para obtenerlos es válido, entonces será necesario que el sistema formal sea consistente. Pues a cada teorema matemático deberá corresponder uno formal y a la fórmula contradictoria de la que expresa un teorema tendrá que corresponder una fórmula formalmente indemostrable, de tal manera que en el sistema formal no sea posible que una fórmula y su negación sean al mismo tiempo formalmente indemostrable (condición de consistencia).

Inversamente, Hilbert estima que si se demuestra que un sistema formal es consistente y en dicho sistema formal son demostrables formalmente las fórmulas que corresponden a los teoremas de una rama de las matemáticas, ello es suficiente garantía de que los teoremas de esta rama de la demostración de consistencia del sistema formal constituye la clave de la fundamentación formalista de las matemáticas.

De lo dicho se desprende el propósito de la teoría de la demostración: demostración de la absoluta veracidad de las matemáticas.

Hoy día hay que admitir que la teoría de la demostración de Hilbert no ha conseguido sus fines. Ello ha contribuido a quitar importancia a la propiedad de consistencia de un sistema formal.

4. EL INTUICIONISMO.

Brouwer fue el fundador del intuicionismo. El principio de construcción o de constructibilidad, que es el principio básico del intuicionismo matemático que afirma que la matemática es el estudio de un cierto tipo matemático de construcción mentales. El trabajo del intuicionista consiste en desarrollar esa construcción mental, descubrirla, suscitarla en otras, incluso estructurarla y formalizarla lo mejor posible, pero a sabiendas de que todo eso no es más que un proceso de aproximación. La construcción mental matemática no puede ser reducida o fundada en algo matemático anterior, que sea más radical o primitivo.

A. Heyting afirma que un teorema matemático expresa un hecho puramente empírico. Además, el pensamiento matemático se caracteriza porque se ocupa solo de la construcción mental y no implica verdad alguna en lo relativo al mundo exterior.

La matemática intuicionista procede por tanto por vía exclusiva y simultáneamente genética y existencial, en cierta manera categórica, empezando precisamente por la construcción –matemática- de los números naturales. Llevada a cabo una construcción matemática, la entidad matemática resultante goza de aquellas propiedades, y no más, que le han sido otorgadas por la construcción matemática.

Un segundo elemento fundamental del intuicionismo, es la intuición matemática misma, cuya actividad, potencia y manera de ser condiciona, evidentemente, el carácter de las entidades matemáticas construidas.

Hay que señalar que la descripción y estudio de la construcción mental y de la intuición matemática no forman parte de la matemática intuicionista propiamente, sino que están en un plano prematemático o mejor de filosofía de las matemáticas.

Brouwer señala cono intuicionismo el apriorismo de las formas de la sensibilidad del espacio y tiempo en Kant.

4.1. La lógica intuicionista.

La formalización de la lógica intuicionista llevada a cabo por Heyting, introduce en el cálculo proposicional las cuatro conectivas de conjunción “$\wedge$”, de disyunción “$\vee$”, de implicación “$\rightarrow$” y de negación ”$\neg$”. Aunque los símbolos son los mismos que en el cálculo proposicional, su significado es distinto. Salvo el significado de las conectivas, coinciden, por ejemplo, las f.b.f.s. (fórmulas bien formadas o formales, las reglas del modus ponens, las reglas de inferencia, demostración formal, el empleo del signo de demostrabilidad formal, etc.). Pero los axiomas no, ya que dependen del significado de las conectivas.

La interpretación de los signos de conjunción $\wedge$ y de disyunción $\vee$ es la siguiente: si A y B son f.b.f.s., entonces $A \wedge B$ es verdadero solo cuando A y B sean verdaderos; y $A \vee B$ es verdadero solo cuando A o B sean verdaderos (o ambos). La validez de esa formalización es evidente si se considera que de la construcción o demostración de A y de la de B resulta inmediata la construcción de A y B y de forma análoga para la disyunción.

La interpretación del símbolo $\rightarrow$ de implicación es la siguiente. Si A y B son f.b.f.s., entonces $A \rightarrow B$ será verdadera en la interpretación intuicionista sólo cuando podamos dar una demostración constructiva de la f.b.f. B en la hipótesis de que tengamos una demostración constructiva de la f.b.f. A.

Y por último la negación $\neg$. Hay que tener presente que $\neg A$, al igual que A, es también una proposición intuicionista y por lo tanto ha de connotar una construcción. Supongamos que afirmamos $\neg A$, de modo que tenemos $\neg A$. Entonces por definición, el significado de esta afirmación es que partiendo de la hipótesis de una construcción mental matemática de A podemos llevar a cabo una construcción que nos lleve a un contradicción.

4.2. Comparación con el logicismo.

El logicismo presenta la lógica como fundamento exclusivo de la matemática clásica. Pero para el intuicionismo, la lógica matemática desarrollada por Frege, Peano y Russell no es sino una continuación de la de Platón y Aristóteles. Y la reducción lógica de la matemática llevada a cabo por los logicistas conserva todavía una esencial referencia al mundo y a un realismo muy elaborado, pero conservando rasgos de ingenuidad. Russell llegó a escribir:

"La lógica se ocupa del mundo real tan verdaderamente como la zoología, aunque de sus rasgos más abstractos y generales"

Por el contrario, el intuicionismo, lejos de reducir la matemática a la lógica, considera esta como una elaboración posterior. Para la matemática intuicionista, el mundo exterior no es sino ocasión o aplicación.

4.3. Comparación con el Formalismo.

Para los formalistas, la matemática empieza en los símbolos, en el papel. En su aspecto esencial la matemática se identifica con la ciencia de los sistemas formales: El formalista desea como definición de la actividad matemática algo claro, bien definido y bien cortado.

El intuicionista aplica su intuición, elabora con cierta imprecisión y oscuridad la noción de número natural y luego finalmente empieza su actividad

El intuicionista es impreciso y oscuro en sus primeras actividades todavía prematemáticas, pero nunca arbitrario. Busca lo que haya y descubre lo que encuentre en su actividad constructiva.

BIBLIOGRAFÍA RECOMENDADA

Fundamentos de la Matemática. Aut.: Alberto Dou Edit.: NCL