TEMA 26
(Oposiciones de Matemáticas)

DERIVADA DE UNA FUNCIÓN EN UN PUNTO. FUNCIÓN DERIVADA. DERIVADAS SUCESIVAS. APLICACIONES.

TEMA 26

DERIVADA DE UNA FUNCIÓN EN UN PUNTO. FUNCIÓN DERIVADA. DERIVADAS SUCESIVAS. APLICACIONES.

1. INTRODUCCIÓN.

El cálculo diferencial trata de la noción de derivada. Veamos de qué se trata.

Toda función y=f(x) puede ser representada gráficamente mediante una curva. El problema de obtener la recta tangente a dicha curva en un punto originó el cálculo diferencial. El concepto de derivada no se llegó a formular hasta comienzos del siglo XVII. Fue Fermat, cuando trataba de determinar los máximos y mínimos de algunas funciones. Observó que en los puntos donde se localiza un máximo o un mínimo la tangente a la curva tiene pendiente nula, es decir, es una recta horizontal. Así pues, surgió el problema de determinar la pendiente de la recta tangente a cualquier punto de la curva.

El concepto de derivada superó el problema que había dado origen ya que también sirve para estudiar la variación de una función.

Por derivación entenderemos el proceso a seguir para hallar la derivada de una función. Dicho proceso no siempre partirá de la definición de derivada en un punto, aunque a veces sería la única forma.

2. DERIVADA DE UNA FUNCIÓN EN UN PUNTO.

2.1. El problema de la tangente a una curva.

Para poder obtener la recta tangente a una curva en un punto primero hemos de definir que se entiende por recta tangente. En época de los griegos se entendía por "tangente a un círculo" como "la recta que tiene un punto en común con el círculo y el resto fuera de él". Pero esta definición, aunque aproxima, no es del todo válida, ya que una recta perpendicular a y=x verifica la definición y no es tangente. Por tanto, necesitamos definir la recta tangente de forma precisa. Lo haremos utilizando rectas secantes y la noción de límite.

Sea $y=f(x)$ con $f:A\rightarrow R$ continua una curva y $a\in Domf(x)$ un punto de la misma. Sea $x\in Domf(x)$ otro punto cualquiera. Para no confundirnos, llamaremos X e Y a las variables.

La ecuación de la recta entre (a,f(a)) y (x,f(x)) es

$$\frac{X-a}{x-a}=\frac{Y-f(a)}{f(x)-f(a)}\Rightarrow Y-f(a)=\frac{f(x)-f(a)}{x-a}(X-a)$$

La última ecuación es la ecuación de la recta en forma punto-pendiente. La recta obtenida es secante a la curva, ya que la corta en dos puntos.

DEF Si existe $\lim_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = m$

tenemos que m es la pendiente de la recta tangente a f(x) en x=a siendo su expresión

$$Y - f(a) = m(X - a)$$

2.2. Definición de derivada de una función en un punto.

Consideremos que $f: A \to \mathbb{R}$ es una función continua siendo $A \subset \mathbb{R}$ un intervalo abierto.

DEF Llamaremos derivada de f(x) en el punto x=a y se denotará por f´(a), al límite, si existe y es finito

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

Según la interpretación geométrica que se ha visto en el punto anterior, podemos afirmar que el número al cual hemos llamado derivada de f(x) en x=a no es más que la pendiente de la recta tangente a f(x) en x=a.

DEF Llamamos cociente incremental a $\frac{\Delta f}{\Delta x}$ siendo

$$\Delta f = f(x) - f(a) \ y \ \Delta x = x - a$$

Con esta última definición podemos escribir:

$$f'(a) = \lim_{\Delta x \to 0} \Delta f / \Delta x$$

PROP Si f(x) es derivable en x=a $\Rightarrow$ f(x) es continua en x=a.

Dem

Sabemos que $\exists f'(a) = \lim_{x \to a} = \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \Rightarrow f'(a) \cong \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = f'(a) + O(x)$, siendo O(x) una función que verifica $\lim_{x \to a} O(x) = 0$.

Entonces f(x) = f(a)+(x-a)(f´(a)+O(x)).

Si tomamos límites cuando x tiene a x=a,

$$\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} \left(f(a) + (x-a)(f'(a) + O(x) \right) = f(a)$$

Por tanto f(x) es continua en x=a.

2.3. Derivadas laterales de una función en un punto.

Como la definición de derivada está expresada a partir de un límite, si utilizamos límites laterales obtendremos las derivadas laterales.

DEF Llamamos derivada de f por la derecha en x=a, y se denota por $f'(a^+)$, a

$$f'(a^+) = \lim_{x \to a+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{h \to 0+} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

DEF Llamamos derivada de f por la izquierda en x=a y se denota por $f'(a^-)$, a

$$f'(a^-) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{h \to 0-} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

PROP f es derivable en x=a $\Leftrightarrow$existen las derivadas laterales y son iguales.

Veamos ahora cuando una función no presenta derivada en un punto. Tenemos dos situaciones:

1) Por la suposición vista en el apartado anterior, si una función es derivable en un punto entonces es continua en ese punto. Si negamos esta proposición tenemos que una función que no sea continua es un punto no es derivable en él.

2) Sea f(x) una función que, siendo continua en x=a presenta un pico. Por ejemplo f(x)=|x| en x=0. Podemos comprobar que hay infinitas posibilidades para la recta tangente. Al no ser única, se conviene en decir que no existe. A nivel analítico, tenemos que las derivadas laterales existen pero son diferentes, por lo que no existe la derivada de f(x) en x=a.

2.4. Álgebra de las funciones derivables en un punto.

PROP Sean $f,g:A \to R$ dos funciones derivables en $a \in A$. Entonces también son derivables en x=a:

1) fg siendo (f+g)´(a) = f´(a)+f´(a)

2) f-g siendo (f-g)´(a) = f´(a)-f´(a)

3) f·g siendo (f·g)´(a) = f´(a)·g(a)+f(a)g´(a)

4) Si g(a)≠0, f/g siendo (f/g)´(a) = $\frac{f'(a) \cdot g(a) - f(a) \cdot g'(a)}{g(a)^2}$

5) $\forall \lambda \in R$ λf siendo $(\lambda f)'(a) = \lambda \cdot f'(a)$

<u>Dem</u>

1)(f+g)´=

$$=\lim_{h\to 0}\frac{(f+g)(a+h)-(f+g)(a)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)+g(a+h)-f(a)-g(a)}{h}=$$

$$=\lim_{h\to 0}=\left(\frac{f(a+h)-f(a)}{h}+\frac{g(a+h)-g(a)}{h}\right)=f'(a)+g'(a)$$

2) Análogo.

3) (f·g)(a) =

$$=\lim_{h\to 0}\frac{(f\cdot g)(a+h)-(f\cdot g)(a)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)\cdot g(a+h)-f(a)\cdot g(a)}{h}=$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)g(a+h)-f(a)g(a+h)+f(a)g(a+h)-f(a)g(a)}{h}=$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{[f(a+h)-f(a)g(a+h)}{h}+\lim_{h\to 0}\frac{[g(a+h)-g(a)]f(a)}{h}=$$

=f´(a)·g(a) + f(a)·g´(a).

4) f:(a,b)→R no se anula, es derivable.

$$\lim_{h\to 0}\frac{\frac{1}{f}(a+h)-\frac{1}{f}(a)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{1}{f(a+h)}-\frac{1}{f(a)}}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{f(a)-f(a+h)}{hf(a)\cdot f(a+h)}=$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}\cdot\frac{1}{hf(a)\cdot f(a+h)}=\{f\ \ es\ \ continua\}=$$

$$=f'(a)\cdot\frac{1}{f(a)\cdot f\cdot\lim_{h\to 0}(a+h)}=\frac{-1}{f^2(a)}$$

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)'=\left(f(x)\cdot\frac{1}{g(x)}\right)'=f(x)\cdot\frac{1}{g(x)}+f(x)\cdot\frac{-g(x)}{(g(x))^2}=\frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{(g(x))^2}$$

5) Análogo.

<u>Conclusión:</u>

El conjunto formado por las funciones derivables en x=a con las operaciones de suma y producto de funciones y producto por un escalar tiene estructura de álgebra.

2.5. Regla de la cadena.

PROP Sea $f:A\to R$ una función derivable en $a\in R$ y $f:B\to R$ con $Imf\subset B$ una función derivable en $f(x_0)\in Y$. Entonces $g^\circ f:A\to R$ es una función derivable en $x_0\in A$, siendo $(g^\circ f)'(x_0) = g'(f(x_0))\cdot f'(x_0)$.

TEOREMA DE LA FUNCIÓN COMPUESTA.

Sea $f:(a,b)\to R$ derivable en $x_0\in(a,b)$ y sea $g:(c,d)\to R$ tal que $Imf\subset(c,d)$ y g derivable en $f(x_0)$. Entonces:

- $(g^\circ f): (a,b)\to R$ derivable en x_0.

- $(g^\circ f)'=f^\circ g = g'(f(x_0))\cdot f'(\ x_0)$

$$(a,b) \xrightarrow{f} (c,d)$$

$$\begin{tikzcd} x_0 \arrow[r] \arrow[dr, "g^\circ f"'] & y_0 = f(x_0) \arrow[d] \\ & R \end{tikzcd}$$

Dem

*Como f es derivable en x_0.

$$f(x_0+h) = f(x_0)+h\cdot f(x_0) +h\alpha(h) \text{ con } \lim_{h\to 0}\alpha(h) = 0.$$

*Como g es derivable en y_0

$$g(y_0+h) = g(y_0)+k\cdot g(y_0) +k\alpha(k) \text{ con } \lim_{k\to 0}\beta(k) = 0.$$

Para ver que $g^\circ f$ es derivable en x_0 tenemos que ver que se puede expresar como:

$$(g^\circ f)(x_0+h) = (g^\circ f)(x_0) + h(g^\circ f)'(x_0)+h\sigma(h)$$

$(g^\circ f)(x_0+h) = g(f(x_0+h)) = g(y_0+h\cdot f(x_0)+h\alpha(h))$ = como g es derivable en a =

$= g(y_0)+ g'(y_0)\cdot[hf'(x_0)+h\alpha(h)] + [hf'(x_0)+h\alpha(h)]\cdot\beta(hf'(x_0)+h\alpha(h)) =$

$= g(y_0)+h\cdot g'(y_0)\cdot f\ (x_0) +h\ [g'(y_0)\alpha(h)+f'(x_0)+\alpha(h)\ \beta\ (h\ f'(x_0)+h\alpha(h))].$

$[g'(y_0)\alpha(h)+f'(x_0)+\alpha(h)\ \beta\ (h\ f'(x_0)+h\alpha(h))]=M$, y tenemos entonces que si M tiene como límite:

$$\lim_{h\to 0}[g'(y_0)\alpha(h)+f'(x_0)+\alpha(h)\ \beta\ (h\ f'(x_0)+h\alpha(h))]=g(y_0)\cdot 0+ (f'(x_0)+0)\cdot 0=0$$

Luego M tiende a =, y entonces ($g^\circ f$) es derivable en x_0 y $(g^\circ f)´(x_0)$ = $g´(f(x_0))\cdot f´(x_0)$.

Ejemplo:

f(x) = xsen1/x para x distinto de cero.

f´(x) = (xsen 1/x)´= sen 1/x + x(sen 1/x)´ = sen 1/x +xcos 1/x $(-1/x^2)$ =

= sen 1/x +xcos 1/x $(-1/x^2)$ = sen 1/xs -1/xcos 1/x.

$$\begin{tikzcd} x \arrow[r] \arrow[dr] & 1/x \arrow[d, "sen"] \\ & \text{sen } 1/x \end{tikzcd}$$

derivada de la función compuesta

2.6. Derivada en un punto de la función inversa.

PROP Sea f:A$\rightarrow$B una función biyectiva, con A,B$\subset$R intervalos abiertos, $y_0 \in$ B un punto y f derivable en $f^1(y_0)$ con $f´(f^1(y_0))\neq 0$. Entonces f^1 es derivable en b siendo:

$$(f^{-1})(y_0) = \frac{1}{f´(f^{-1}(y_0))}$$

Dem

$f(x)\cdot f(y) = f´(c)(x\cdot y)$ si $f´(z)>0$, $\forall z\in$ I y si x<y $\Rightarrow$f(x)<f(y)

f es estrictamente creciente en I y continua $\Rightarrow$ J=f(I) es un intervalo

f: I$\rightarrow$J biyectiva
x$\rightarrow$y

f´: J$\rightarrow$I continua.
y$\rightarrow$x

$$(f^{-1})(y_0) = \lim_{y\to y_0} \frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)}{y - y_0} = \lim_{y\to y_0} \frac{1}{\dfrac{y - y_0}{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)}} =$$

$$= \lim_{y\to y_0} \frac{1}{\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}} = \lim_{x\to x_0} \frac{1}{\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}} = \frac{1}{\lim_{y\to y_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}} =$$

$$= \frac{1}{f'(x_0)} = \frac{1}{f^{-1}(f^{-1}(z))}$$

Si f´(z)<0 $\forall z \in I$ f sería estrictamente decreciente y continua:

$f^{-1}: J \rightarrow I$ J = f(I) todo igual

No existen puntos en los que $f'(x_1)>0$ y $f'(x_2)<0$, pues en caso contrario aplicando la proposición de los valores intermedios de la derivada debería existir un punto en que f´(c) = 0, lo que no ocurre.

2.7. Propiedades locales de una función derivable en un punto

DEF Una función f(x) es creciente en $A \subseteq R$ si $\forall x_1, x_2 \in A$ con $x_1 < x_2$, se verifica $f(x_1) \leq f(x_2)$.

DEF Una función f(x) es decreciente en $A \subseteq R$ si $\forall x_1, x_2 \in A$ con $x_1 < x_2$, se verifica $f(x_1) \geq f(x_2)$.

PROP Si f(x) es derivable en x=c y f´(c)>0 f(x) es creciente en un entorno de c.

Dem

Si f´(c)>0 como f´(c) =

$$= \lim_{h \to 0} \frac{f(c+h) - f(c)}{h} > 0 \Rightarrow \exists e > 0 / si\ |h| < 0\ \frac{f(c+h) - f(c)}{h}$$,que

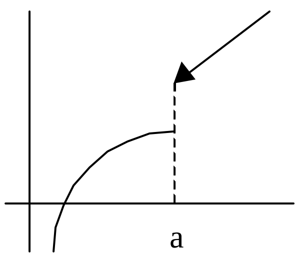
corresponde con la definición de estrictamente creciente en c.

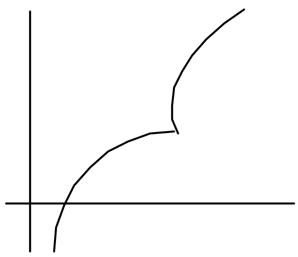
PROP Si f(x) es derivable en x=c y f´(c)<0 entonces f(x) es decreciente en un entorno de c.

Dem

Análoga a la anterior.

OBS El recíproco de ambas posiciones es falso. Una función que sea creciente en un entorno de un punto no tiene porque tener derivada positiva, ya que ni siquiera podría ser derivable. Por ejemplo:





DEF La función f:A$\to$R presenta en a$\in$A un máximo relativo si existe $\delta>0$ tal que $f(x)\le f(a)$ $\forall x\in E(a,\delta)\cap A$.

DEF La función f:A$\to$R presenta en a$\in$A un máximo relativo si existe $\delta>0$ tal que $f(x)\ge f(a)$ $\forall x\in E(a,\delta)\cap A$.

DEF Diremos que f:A$\to$R presenta en a$\in$A un extremo si es un máximo o un mínimo relativo.

PROP Si f(x) es derivable en x=a y tiene un extremo relativo en él, entonces f´(a) = 0.

Dem

Si en c hay, por ejemplo, un máximo relativo ha de existir un $\varepsilon>0$ tal que

$$\left.\begin{array}{l} f(c+h)\le f(c), h>0 \\ f(c+h)\le f(c), h<0 \\ |h|<e \end{array}\right\}\Rightarrow \begin{cases} \dfrac{f(c+h)-f(c)}{h}\ge 0, h>0 \Rightarrow \lim_{h\to 0^+}\dfrac{f(c+h)-f(c)}{h} = f´(c)\le \\ \dfrac{f(c+h)-f(c)}{h}\le 0, h<0 \Rightarrow \lim_{h\to 0^-}\dfrac{f(c+h)-f(c)}{h} = f´(c)\le \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} f´(c)\ge 0 \\ f´(c)\le 0 \end{cases} \Rightarrow \ f´(c)=0$$

Si hay en c un mínimo relativo se prueba de forma análoga que f´(c)=0.

3. FUNCIÓN DERIVADA.

3.1. Definición de función derivada y derivadas sucesivas.

DEF Si f:[a,b]$\to$R es continua en todo el intervalo, diremos que f(x) es derivable en (a,b) si lo es en todos sus puntos.

OBS Si nos fijamos en la definición anterior, vemos que hemos dicho que f(x) es derivable en el abierto y no en el cerrado. Eso es porque en los puntos a y b no se puede hablar de derivada ya que a la izquierda de a y a la derecha de b no está definida la función.

DEF Sea f:A$\to$R una función continua y tal que $\forall x\in A$ $\exists f´(x)$. Entonces llamamos función derivada de f y se denota por f´, a

$$\begin{aligned} f´:&A\to R \\ &x\to f´(x) \end{aligned}$$

por tanto una función es derivable si lo es en todos los puntos de su dominio.

La función derivada es una función como cualquier otra, por tanto podemos calcular su dominio, asíntotas, continuidad e incluso su derivada.

DEF La función derivada de f´(x) recibe el nombre de derivada segunda de f(x) y se denota por f´´(x). Repitiendo el proceso n veces, siempre que sea posible, obtenemos la derivada n-ésima (o de orden n) de f(x), $f^{n)}(x)$.

DEF Si la derivada n-ésima de f(x) existe para todo número natural, diremos que f(x) es infinitamente derivable.

3.2 Álgebra de las funciones derivables.

PROP Sean $f,g:A\to R$ dos funciones derivables en A. Entonces, las siguientes funciones también son derivables:

1) $f\pm g$ siendo $(f\pm g)'= f'\pm g'$.

2) $f\cdot g$ siendo $(f\cdot g)'=f'\cdot g+f\cdot g'$.

3) Si $g(x)\neq 0\ \ \forall x\in A$, f/g siendo $(f/g)'=\dfrac{f'g-fg'}{g^2}$.

4) $\forall\lambda\in R\ \lambda f$ siendo $(\lambda f)'=\lambda f'$.

Dem

1)(f+g)´=

$$=\lim_{h\to 0}\frac{(f+g)(a+h)-(f+g)(a)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)+g(a+h)-f(a)-g(a)}{h}=$$

$$=\lim_{h\to 0}=\left(\frac{f(a+h)-f(a)}{h}+\frac{g(a+h)-g(a)}{h}\right)=f'(a)+g'(a)$$

2) Análogo.

3) (f·g)(a) =

$$=\lim_{h\to 0}\frac{(f\cdot g)(a+h)-(f\cdot g)(a)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)\cdot g(a+h)-f(a)\cdot g(a)}{h}=$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)g(a+h)-f(a)g(a+h)+f(a)g(a+h)-f(a)g(a)}{h}=$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{[f(a+h)-f(a)g(a+h)}{h}+\lim_{h\to 0}\frac{[g(a+h)-g(a)]f(a)}{h}=$$

$=f'(a)\cdot g(a) + f(a)\cdot g'(a)$.

4) f:(a,b)→R no se anula, es derivable.

$$\lim_{h\to 0}\frac{\frac{1}{f}(a+h)-\frac{1}{f}(a)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{1}{f(a+h)}-\frac{1}{f(a)}}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{f(a)-f(a+h)}{hf(a)\cdot f(a+h)}=$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}\cdot\frac{1}{hf(a)\cdot f(a+h)}=\{f\ \ es\ \ continua\}=$$

$$=f´(a)\cdot\frac{1}{f(a)\cdot f\cdot\lim_{h\to 0}(a+h)}=\frac{-1}{f^2(a)}$$

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)´=\left(f(x)\cdot\frac{1}{g(x)}\right)´=f(x)\cdot\frac{1}{g(x)}+f(x)\cdot\frac{-g(x)}{(g(x))^2}=\frac{f´(x)g(x)-f(x)g´(x)}{(g(x))^2}$$

5) Análogo.

∀a∈A.

Conclusión:

El conjunto de las funciones derivables en A⊂R con las operaciones de suma y producto de funciones y producto de un escalar por una funciones tiene estructura de Álgebra.

3.3. Regla de la cadena.

PROP Sean f:A→R y g:B→R dos funciones derivables, con A,B⊂R abiertos y f(a)⊂B. Entonces g°f es derivable siendo

(g° f)´(x) = g´(f(x))·f´(x) ∀x∈A.

Dem

*Como f es derivable en x_0.

$f(x_0+h) = f(x_0)+h \cdot f(x_0) + h\alpha(h)$ con $\lim_{h\to 0}\alpha(h) = 0$.

*Como g es derivable en y_0

$g(y_0+h) = g(y_0)+k \cdot g(y_0) + k\alpha(k)$ con $\lim_{k\to 0}\beta(k) = 0$.

Para ver que g° f es derivable en x_0 tenemos que ver que se puede expresar como:

$(g\circ f)(x_0+h) = (g\circ f)(x_0) + h(g\circ f)´(x_0)+h\sigma(h)$

$(g\circ f)(x_0+h) = g(f(x_0+h)) = g(y_0+h\cdot f(x_0)+h\alpha(h))$ = como g es derivable en a =

$= g(y_0)+ g'(y_0)\cdot[hf'(x_0)+h\alpha(h)] + [hf'(x_0)+h\alpha(h)]\cdot\beta(hf'(x_0)+h\alpha(h)) =$

$= g(y_0)+h\cdot g'(y_0)\cdot f(x_0) +h\, [g'(y_0)\alpha(h)+f'(x_0)+\alpha(h)\, \beta\, (h\, f'(x_0)+h\alpha(h))]$.

$[g'(y_0)\alpha(h)+f'(x_0)+\alpha(h)\, \beta\, (h\, f'(x_0)+h\alpha(h))]=M$, y tenemos entonces que si M tiene como límite:

$$\lim_{h\to 0}[g'(y_0)\alpha(h)+f'(x_0)+\alpha(h)\, \beta\, (h\, f'(x_0)+h\alpha(h))]=g(y_0)\cdot 0+ (f'(x_0)+0)\cdot 0=0$$

Luego M tiende a =, y entonces $(g\circ f)$ es derivable en x_0 y $(g\circ f)'(x_0) = g'(f(x_0))\cdot f'(x_0)$.

$\forall a\in A$.

3.4. Derivada de la función inversa.

PROP Sea $f:A\to B$ una función biyectiva y derivable siendo su derivada no nula en todos sus puntos. Entonces f^{-1} es derivable con

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))} \qquad \forall y\in B$$

Dem

Si en c hay, por ejemplo, un máximo relativo ha de existir un $\varepsilon>0$ tal que

$$\left.\begin{array}{l} f(c+h)\le f(c), h>0 \\ f(c+h)\le f(c), h<0 \\ |h|<e \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \dfrac{f(c+h)-f(c)}{h}\ge 0, h>0 \Rightarrow \lim\limits_{h\to 0^+}\dfrac{f(c+h)-f(c)}{h} = f'(c)\le \\ \dfrac{f(c+h)-f(c)}{h}\le 0, h<0 \Rightarrow \lim\limits_{h\to 0^-}\dfrac{f(c+h)-f(c)}{h} = f'(c)\le \end{array}\right.$$

$$\Rightarrow \left\{\begin{array}{l} f'(c)\ge 0 \\ f'(c)\le 0 \end{array}\right. \Rightarrow \; f'(c)=0$$

Si hay en c un mínimo relativo se prueba de forma análoga que $f'(c)=0$.

3.5. Propiedades de las funciones derivables en un intervalo cerrado.

TEOREMA. TEOREMA DE ROLLE.

Sea $f:[a,b]\to R$ una función continua en $[a,b]$ derivable en (a,b) y $f(a)=f(b)$. Entonces existe al menos un punto $c\in(a,b)$ tal que $f'(c)=0$.

Dem

Sabemos por el teorema de Weierstrass que toda función continua definida en un cerrado alcanza un valor máximo y mínimo en el intervalo.

Según donde podamos localizar ese máximo y ese mínimo vamos a distinguir dos casos:

1) Tanto el máximo como el mínimo está en los extremos. Como f(a)=f(b) ⇒maxf=minf ⇒f es cte. Si el máximo y el mínimo de f son iguales, necesariamente f tiene que ser constante.

Si f es constante su derivada es cero y entonces c es cualquier punto de (a,b). Recordemos que a y b no pueden ser ya que f no es derivable en ellos.

2) Al menos uno de ellos se alcanza en el interior. En un teorema anterior vimos que "si f alcanza un extremo relativo en a y existe f´(a) entonces f´(a)=0". Al localizarse el extremo absoluto en el interior también es relativo y como en ese punto (al ser interior) es derivable, su derivada es cero.

Llamaremos a ese punto x=c y se verifica que:

$$c\in(a,b) \text{ y } f'(c)=0.$$

OBS La interpretación geométrica del teorema de Rolle es que una función continua es derivable e igual en sus extremos debe tener un punto cuya recta tangente sea horizontal.

El siguiente teorema a ver es el del Valor medio o Lagrange.
Su pone una generalización del anterior, pues en éste eliminamos la hipótesis de que f(x) coincida en los extremos del intervalo. Lo que vamos a conseguir ahora es un punto x=c que va a tener tangente paralela a la recta que une los puntos (a,f(a)) y (b,f(b)).

TEOREMA. TEOREMA DE LAGRANGE.

Sea f:[a,b]→R continua en [a,b] y derivable en (a,b). Entonces c∈(a,b) tal que f´(c) = (f(b)-f(a)) / (b-a).

Dem

Definimos φ:[a,b]→R

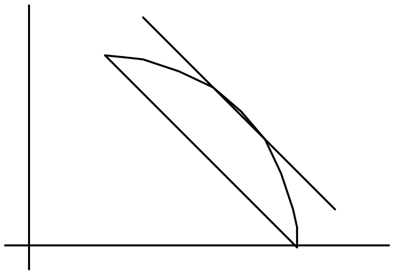
$$x\to\varphi(x)=f(x)+mx, \text{ donde } m=-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\in$$

para que φ(a) = φ(b)

$$\left.\begin{array}{l} j \ \ es\ continua\ en\ [a,b] \\ j \ \ es\ derivable\ \ en\ (a,b) \\ j(a)=j(b) \end{array}\right\} \Rightarrow \exists c\in (a,b)\ /\ j'(c)=0$$

$\varphi'(x) = f'(x)+m \Rightarrow \varphi'(c) = f'(c)+m = 0 \Rightarrow f'(c) = \dfrac{f(b)\cdot f(a)}{b-a} \Rightarrow$

$\Rightarrow f'(c)(b-a) = f(b)-f(a).$



Geométricamente existe al menos un punto de la gráfica de f, distinto de sus extremos Ay B en el que la tangente de la gráfica es paralela a la cuerda AB.

TEOREMA. TEOREMA DELVALOR MEDIO GENERALIZADO (CAUCHY).

Sean f,g: $[a,b]\to R$ continua en [a,b] y derivables en (a,b). Entonces existe $c\in(a,b)$ tal que:

$$f'(c)\cdot(g(b)-g(a)) = g'(c)\ (f(b)-f(a))$$

<u>Dem</u>

Definimos $h(x) = f(x)[g(b)-g(a)]-g(x)[f(b)-f(a)] = f(x)h - g(x)k$

(*) h: $[a,b]\to R$ continua

$h(a) = f(a)[g(b)-g(a)]-g(a)[f(b)-f(a)] = f(a)\cdot g(b)-f(a)\cdot g(a)-g(a)f(b)+g(a)f(a)$
$h(b) = f(b)[g(b)-g(a)]-g(b)[f(b)-f(a)]=f(b)\cdot g(b)-f(b)\cdot g(a)-g(b)f(b)+g(b)f(a)$

(*) $\Rightarrow h(a) = h(b)$

(*) h derivable en (a,b)

(*)+(*)+(*) $\Rightarrow$ ROLLE $\Rightarrow \exists c\in(a,b)$ / $h'(c) = 0$

$\Rightarrow$ si $h'(c) = 0$

$h'(c) = (f(c)h-g(c)k)' = f'(c)h-g'(c)k = 0 \Rightarrow f'(c)h = g'(c)k$

$\Rightarrow f'(c)[g(b)-g(a)] = g'(c)[f(b)-f(a)]$

OBS Si en el teorema anterior tomamos g(x)=x se obtiene el teorema del valor medio.

OBS En algún libro de texto nos podemos encontrar como tesis del teorema:

$$\exists c\in(a,b)\ /\ \frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$$

Esta tesis no es correcta. Con las hipótesis de continuidad y derivabilidad para f(x) y g(x) no podemos asegurar que algunos valores puedan anular los denominadores. Habría que añadir al teorema la hipótesis

$$g´(x)\neq 0 \quad \forall x\in(a,b) \text{ y } g(a) \neq g(b)$$

y eso no sería el teorema de Cauchy.

Veamos dos consecuencias obtenidas de forma inmediata a partir de estos teoremas.

PROP Si $f´(x) = 0 \quad \forall x\in(a,b) \Rightarrow f=cte.$

<u>Dem</u>

$\forall x_1,x_2\in(a,b)$ con x_1,x_2 consideremos $[x_1,x_2]\subset(a,b)$. Como $f´(x) = 0 \Rightarrow$ f es derivable en (a,b) $\Rightarrow$ es continua en (a,b) $\Rightarrow$ f es continua en $[x_1,x_2]$ y derivable en (x_1,x_2).

Aplicando el teorema del valor medio:

$$\exists c\in(x_1,x_2) \;/\; f´(c) \quad \left.\begin{array}{c} \dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} \\ f´(c)=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}=0 \Rightarrow f(x_2)-f(x_1)=0$$

Entonces $f(x_1)=f(x_2) \;\forall x_1, x_2\in(a,b)$

Por tanto f es una función constante.

PROP Si f y g son dos funciones que tienen la misma derivada entonces se diferencian en una constante.

<u>Dem</u>

Sean las funciones $f,g:A\rightarrow R$ con $f´(x)=g´(x) \;\; \forall x\in A$ siendo A un intervalo abierto.

Consideremos la función f-g. Su derivada:

$$(f-g)´=f´-g´= 0 \Rightarrow (f-g)=cte.$$

4. APLICACIONES.

4.1. Crecimiento y decrecimiento de funciones.

Ahora vamos a ver como, a partir de la primera derivada podemos saber si la función es creciente o decreciente.

TEOREMA. Si f(x)>0 $\forall x \in I \Rightarrow$ f(x) es estrictamente creciente en I.

Dem

Tomemos un punto cualquiera $x_0 \in I$. Sabemos que la función es derivable y que la derivada es positiva, luego $f'(x_0)>0$.

Como $f'(x_0) = \lim_{x\to x_0} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} > 0 \Rightarrow \begin{cases} si\ x > x_0 \Rightarrow f(x) > f(x_0) \\ si\ x < x_0 \Rightarrow f(x) < f(x_0) \end{cases}$

Por tanto f(x) es creciente cerca de x_0, tanto antes como después. Y como eso ocurre para cualquier punto $x_0 \in I$, entonces la función es creciente en I.

TEOREMA. Si $f'(x)<0$ $\forall x \in I \Rightarrow$ f(x) es estrictamente decreciente en I.

Dem

La demostración es igual que la anterior.

Sea $x_0 \in I$ un punto cualquiera. Sabemos que $f'(x_0)>0$.

Como $f'(x_0) = \lim_{x\to x_0} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} < 0 \Rightarrow \begin{cases} si\ x > x_0 \Rightarrow f(x) < f(x_0) \\ si\ x < x_0 \Rightarrow f(x) > f(x_0) \end{cases}$

Vemos que la función es decreciente en $x_0 \Rightarrow$ lo es en todo I.

OBS Con estos teoremas obtenemos un método alternativo para saber si un punto es máximo o mínimo relativo. Lo que habíamos visto era que igualábamos a cero la primera derivada, y luego esos puntos los sustituíamos en la segunda derivada. Si daba positiva era mínimo y si daba negativa era máximo.

Ahora lo podemos saber sin necesidad de tener que ir a la segunda derivada. Basta solamente saber el signo de la primera derivada.

Para que haya un máximo la primera derivada tiene que tener antes del punto signo positivo (f(x) será creciente) y después signo negativo (f(x) decreciente); y para que sea mínimo, al revés.

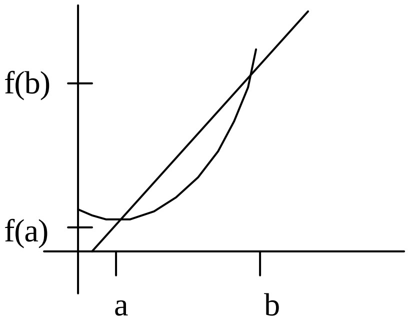
OBS Ya habíamos visto antes que si una función es estrictamente creciente, entonces la derivada es positiva (si no lo hemos visto, se haría estudiando el signo del cociente incremental). Estos dos teoremas anteriores es lo que llamamos el recíproco, ya que son al revés (si la derivada es positiva $\Rightarrow$ la función es estrictamente creciente).

4.2. Concavidad y convexidad de funciones.

Ahora vamos a manejar la segunda derivada, para ver que información podemos extraer de ella (de la primera veíamos el crecimiento y decrecimiento de la función).

Aquí estudiaremos la concavidad y convexidad. Para ello, pasamos a definir estos conceptos.

DEF Se dice que f es convexa en I si $\forall$a,b $\in$I se verifica que la recta que une (a,f(a)) con (b,f(b)) queda por encima de la gráfica de f(x).



OBS La recta sabíamos que era r(x) = $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)+f(a)$ y se tiene que cumplir que r(x)>f(x).

$$r(x)>f(x) \Rightarrow \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)+f(a)>f(x) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)>f(x)-f(a) \Rightarrow \frac{f(b)-f(a)}{b-a}>\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

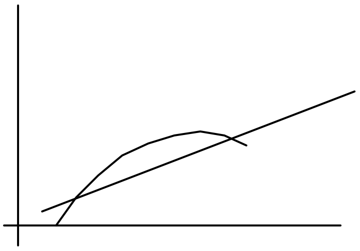
Esto nos lleva a una nueva definición de función convexa, totalmente análoga a la anterior.

DEF Se dice que f es convexa en I si $\forall$a,b$\in$I se verifica que:

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}>\frac{f(x)-f(a)}{x-a},\ \forall x\in(a,b)$$

Análogamente podemos definir:

DEF Se dice que f es cóncava en I si $\forall$a,b$\in$I se verifica que la recta que une (a,f(a)) con (b,f(b)) queda por debajo de la gráfica de f(x).



f(x)

E igualmente podemos decir:

DEF Se dice que f es cóncava en I si $\forall$a,b$\in$I se verifica que:

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} < \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \quad \forall x \in (a,b)$$

Ahora vamos a ver lo que se llama un teorema auxiliar pues sólo sirve para aplicar su resultado en el siguiente, y así, en vez de dar uno grande, se ven dos pequeños.

TEOREMA. Sea $f:[a,b]\to R$ continua en [a,b], derivable en (a,b), $f'(x)$ creciente y $f(a)=f(b)$. Entonces $f(x)<f(a)$ $\forall x\in(a,b)$.

Dem

Como lo que queremos es llegar a demostrar que $f(x)<f(a)$, vamos a hacerlo por reducción al absurdo dividiéndolo en dos casos. Veremos que $f(x)>f(a)$ no puede ser y que $f(x)=f(a)$ tampoco.

1) Supongamos que existe un $x_0\in(a,b)$ / $f(x_0)>f(a)$.

Aplicando el teorema de Rolle a f(x) (sí se puede, ya que verifica sus hipótesis), existirá un $c\in(a,b)$ / $f'(c)=0$ y en $x=c$ tenemos un máximo. (Cómo $f(a)=f(b)$ y hay un x_0 tal que $f(x_0)>f(a)$, alguno tendrá que ser mayor que todos).

Pero si en $x=c$ hay máximo, la derivada antes es positiva y después es negativa, lo cual indica que decrece y por hipótesis f´ era creciente. CONTRADICCIÓN. Entonces $f(x)>f(a)$ no puede ser.

2) Supongamos ahora que hay un valor $x_0\in(a,b)$ tal que $f(x_0)=f(a)$. Puede ocurrir que:

- f=cte $\Rightarrow$ $f'=0$ y no sería creciente. NO

- En x_0 hay un máximo $\Rightarrow$ $f'(x_0) = 0$ y por ser máximo, antes de x_0 la derivada es positiva y después negativa $\Rightarrow$ f´ es decreciente. Pero por hipótesis f´ es creciente $\Rightarrow$ CONTRADICCIÓN.

Por tanto, lo único posible es que $f(x)<f(a)$ $\forall x\in(a,b)$ que era lo que queríamos demostrar.

TEOREMA. Si f es derivable y f´ creciente $\Rightarrow$ f es convexa.

Dem

Como f:[a,b]$\rightarrow$R es continua en [a,b] y derivable en (a,b) la función

g(x) = f(x) - $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)-f(a)$ también lo es. También tenemos que f´ es creciente $\Rightarrow$ g´(x) = f´(x) - $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ también lo es. Si f´ crece, podemos comprobar fácilmente que g´(x) también lo hace, y g(a)=g(b)=0.

Entonces la función g(x) verifica las hipótesis del teorema anterior. Por tanto, aplicándolo tenemos g(x)<g(a)=0. Si g(x)<0 $\Rightarrow$ f(x)- $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)-f(a)$ <0 $\Rightarrow$ $\Rightarrow$f(x)-f(a) < $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$ $\Rightarrow \frac{f(x)-f(a)}{x-a} < \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ $\leftarrow$ Definición de función convexa.

Como f(x) verifica la definición de función convexa, quiere decir que lo es, como queríamos demostrar.

OBS Cuando teníamos que f(x) era creciente era porque f´(x)>0. Como ahora f´(x) es creciente, será porque f´´(x)>0. Así podríamos volver a escribir el enunciado del teorema anterior de esta otra forma.

TEOREMA. Si f:[a,b]$\rightarrow$R es derivable dos veces y f´´(x)>0 $\Rightarrow$ f convexa.

OBS Por tanto, para ver si una función es convexa, bastará con comprobar si su segunda derivada es positiva.

Análogamente a estos dos teoremas de convexidad, se pueden dar otros dos de concavidad, con sólo cambiar las desigualdades.

TEOREMA. Sea f:[a,b]$\rightarrow$R continua en [a,b], derivable en (a,b), f´(x) decreciente y f(a)=f(b). Entonces f(x)>f(a) $\forall$x$\in$(a,b).

TEOREMA. Si f es derivable y f´ decreciente $\Rightarrow$ f es cóncava.

TEOREMA. Si f:[a,b]$\rightarrow$R es derivable dos veces y f´´(x)<0 $\Rightarrow$ f cóncava.

DEF Llamaremos punto de inflexión a aquel punto donde la función cambia de cóncava a convexa o al revés. Por tanto la derivada segunda en ese punto tiene que ser cero.

4.3. Cálculo de límites: Regla de L´Hôpital.

TEOREMA. Sean f y g derivables en un entorno (a-r, a+r) del pnto a. Si $\lim_{x\to a} f(x)=0$, $\lim_{x\to a} g(x)=0$ y existe $\lim_{x\to a} f'(x)/g'(x)$, entonces también existe el límite de f(x)/g(x) y es $\lim_{x\to a} f(x)/g(x) = \lim_{x\to a} f'(x)/g'(x)$.

Dem

Podemos suponer que f(a)=0 y que g(a)=0, pues para el cálculo de límites cuando $x\to a$, no es relevante el valor de la función en el punto a.

Ahora f y g cumplen las hipótesis del teorema de Cauchy en [a,b] siendo $x\in(a,a+r)$. Por tanto existe $c\in(a,x)$ tal que:

$$f(x)/g(x) = f'(a)/g'(a).$$

Cuando $x\to a$ también $c\to a$. Por tanto:

$$\lim_{x\to a} f(x)/g(x) = \lim_{c\to a} f'(c)/g'(c) = \lim_{x\to a} f'(x)/g'(x).$$

Como $x\in(a,a+r)$ los límites son por la derecha. Análogamente por la izquierda.

Bibliografía Recomendada.

Análisis Matemático I. Aut. J.A. Fernández Viña. Ed. Tecnos

Lecciones de Cálculo Infinitesimal I. Aut. R. Molina Legaz, M. Franco. Ed. Universidad de Murcia.

Principios de Análisis Matemático. Aut. W. Rudin. Ed. McGraw-Hill

Curso de Análisis Matemático I. Aut. E.L. Luna. Ed. Edunsa, 1991.

Calculus. Aut. M. Spivak. Ed. Reverté.

Análisis Matemático. Aut. M. de Guzmán, B. Rubio. Ed. Pirámide.

Análisis Matemático 2ª Edición. Aut. T. M. Apostol. Ed. Reverté

Introducción al Análisis Matemático. Aut. J.M. Ortega. Ed. Labor