TEMAS DE MATEMÁTICAS
(OPOSICIONES DE SECUNDARIA)

TEMA 3

TÉCNICAS DE RECUENTO. COMBINATORIA.

1. Introducción.
2. Técnicas de Recuento.
3. Variaciones.
   3.1. Variaciones Ordinarias.
   3.2. Variaciones con Repetición.
4. Permutaciones.
   4.1. Permutaciones Ordinarias.
   4.2. Permutaciones con Repetición.
5. Combinaciones.
   5.1. Combinaciones Ordinarias.
   5.2. Números Combinatorios.
   5.3. Combinaciones con Repetición.
6. Combinatoria Clásica y algunas tendencias actuales de la combinatoria.

Bibliografía Recomendada.

TEMA 3

TÉCNICAS DE RECUENTO. COMBINATORIA.

1. INTRODUCCIÓN.

El Análisis Combinatorio, o Combinatoria, estudia las diferentes formas en que podemos ordenar o agrupar unos elementos dados siguiendo unas determinadas reglas establecidas. Se prescinde de la naturaleza de los elementos u objetos, pero no del orden. Es por ello que resulta necesario distinguir entre si los objetos del mismo conjunto, ya que no son equivalentes.

La combinatoria nos va a permitir contestar a preguntas del tipo:

- ¿Cuántos números de dos cifras se pueden formar con los dígitos 0, 1, 2 y 3?
- ¿Cuántas clasificaciones distintas se dan entre cinco equipos de futbol?

Resumiendo, la combinatoria nos proporciona algoritmos para averiguar la cantidad de agrupaciones que, bajo determinadas condiciones, se pueden formar con los elementos de un conjunto.

Según las características de los grupos y la naturaleza de los elementos, nos podemos encontrar con variaciones, permutaciones y combinaciones.

2. TÉCNICAS DE RECUENTO.

Las técnicas de recuento tratan del estudio de las ordenaciones de los elementos de un conjunto.

A lo largo de las distintas situaciones que pueden darse, son dos los tipos de problemas que nos podemos encontrar. Por un lado tenemos los llamados problemas de existencia, que analizan la posibilidad de la existencia de las agrupaciones pedidas. Por otro lado, los problemas de enumeración que nos van a permitir determinar el número de clasificaciones posibles.

Las técnicas de recuento más utilizadas son:

a) Paridad.

Esta técnica nos permite resolver los problemas de existencia nombrados anteriormente. Un conjunto puede tener un número par o impar de elementos. Si probamos que tiene un número impar, estamos en condiciones de afirmar que al menos hay uno. Quedaría así demostrada su existencia.

b) Correspondencia uno a uno.

Técnica utilizada para el recuento de elementos dentro de un conjunto. Se trata de conseguir establecer una aplicación biyectiva entre el conjunto de estudio y una sección S(n) de $\mathbb{N}$. En caso de que podamos establecerla, diremos que el conjunto tiene n elementos, o lo que es lo mismo, el cardinal del conjunto (Card(A)) es n.

c) Regla del producto.

Sea P un conjunto con n elementos y Q otro conjunto con m elementos. El número de elecciones distintas de un elemento de P y otro de Q es m·n. Esta regla se puede extender a más de dos conjuntos. Puede resultar útil cuando el conjunto del cual queremos hallar su cardinal no está ordenado o no resulta sencillo establecer una biyección con alguna sección de $\mathbb{N}$.

3. VARIACIONES.

3.1. Variaciones Ordinarias.

DEF Sea A un conjunto con m elementos, $A=\{a_1, a_2, \ldots, a_m\}$. Llamaremos variaciones n-arias (de orden n) de los m elementos del conjunto A a todo conjunto ordenado formado por n elementos cualesquiera elegidos entre ellos sin elegir más de una vez un elemento. Consideraremos distintas dos variaciones si difieren en algún elemento o, si teniendo los mismos elementos, difieren en el orden de colocación de los mismos.

Al número de variaciones n-arias formadas por m elementos cualesquiera, lo representaremos por $V_{m,n}$ o V_m^n

Ejemplo: Si un aula tiene 5 sillas en primera fila y entran 25 niños, ¿De cuántas formas distintas podemos componer esa primera fila?

Sol:

Aquí nos encontramos con variaciones ordinarias de 25 elementos tomados de 5 en 5. Sería $V_{25,5}$ o V_{25}^5

Veamos ahora como podemos calcular ese número.

PROP El número de variaciones n-arias o de orden n que se pueden formar con m objetos cualesquiera, es igual al número de variaciones de orden n-1 que se pueden formar con los m objetos multiplicando por m-n+1.

$$V_{m,n} = (m-n+1)\cdot V_{m,n-1}$$

dem.

Sea A el conjunto formado por los m elementos $A=\{a_1, a_2, \ldots, a_m\}$. Vamos a realizar la demostración por inducción en n.

Para n=1 Está claro que existen m formas diferentes de elegir 1 sólo elemento entre m. Luego $V_{m,1}=m$

Para n=2 Para conseguir todas las variaciones de orden 2 basta añadir a las de orden 1 un nuevo elemento del conjunto A elegido entre los m-1 no usados. Como para la elección del primer elemento tenemos m objetos y para elegir el segundo m-1, según la regla del producto, obtendremos m·(m-1) variaciones binarias. Luego $V_{m,2}=m\cdot(m-1)$ que es lo mismo que $V_{m,2}=V_{m,1}\cdot(m-1)$

Supongamos cierto para n-1

Para n Análogo al caso n=2. Para conseguir todas las variaciones de orden n basta añadir a las variaciones de orden n-1 un nuevo elemento del conjunto A elegido entre los m-n+1 no utilizados. Por tanto $V_{m,n}=V_{m,n-1}(m-n+1)$

PROP El número de variaciones de orden n de m elementos es

$$V_{m,n}=m\cdot(m-1)\cdot(m-2)\cdot\ldots\cdot(m-n+1)$$

<u>dem.</u>

Como por la proposición anterior tenemos que

$V_{m,n}=V_{m,n-1}(m-n+1)$	Variaciones n-arias
$V_{m,n-1}=V_{m,n-2}(m-n+2)$	Variaciones (n-1)-arias
…	…
$V_{m,2}=V_{m,1}(m-1)$	Variaciones binarias
$V_{m,1}=m$	Variaciones unitarias.

Sustituyendo reiteradamente obtenemos:

$$V_{m,n}=m\cdot(m-1)\cdot(m-2)\cdot\ldots\cdot(m-n+1)$$

Ejemplo: Dados cuatro amigos: Juan, David, Ivan y Alberto, deciden hacer un torneo de Ping-Pong. Obtener las diferentes clasificaciones que se pueden dar para los tres primeros puestos.

Para obtener las variaciones de orden 3 siguiendo el método de la proposición, hay que obtener primero las de orden 2. Y para conseguir éstas, hemos de partir de las de orden 1.

Variaciones de orden 1	*Variaciones de orden 2*	*Variaciones de orden 3*
Juan	Juan, David	Juan, David, Ivan
		Juan, David, Alberto
	Juan, Ivan	Juan, Ivan, David
		Juan, Ivan, Alberto
	Juan, Alberto	Juan, Alberto, David
		Juan, Alberto, Ivan
David	David, Juan	David, Juan, Ivan
		David, Juan, Alberto
	David, Ivan	David, Ivan, Juan
		David, Ivan, Alberto

	David, Alberto	David, Alberto, Juan
		David, Alberto, Ivan
Ivan	Ivan, Juan	Ivan, Juan, David
		Ivan, Juan, Alberto
	Ivan, David	Ivan, David, Juan
		Ivan, David, Alberto
	Ivan, Alberto	Ivan, Alberto, Juan
		Ivan, Alberto, David
Alberto	Alberto, Juan	Alberto, Juan, David
		Alberto, Juan, Ivan
	Alberto, David	Alberto, David, Juan
		Alberto, David, Ivan
	Alberto, Juan	Alberto, Ivan, Juan
		Alberto, Ivan, David
4	$4\cdot 3$	$4\cdot 3\cdot 2$
M	$m\cdot(m-1)$	$m\cdot(m-1)\cdot(m-2)$

PROP Sean los conjuntos $A=S(n)$ (con $S(n)=\{1, 2, \ldots, n\}$) y $B=\{b_1, b_2,\ldots,b_m\}$ tal que $Card(A)=n$ y $Card(B)=m$ con $1\leq n\leq m$. El número de aplicaciones inyectivas entre A y B coincide con el número de variaciones de orden n de m elementos.

dem.

Recordemos que $f:A\rightarrow B$ en inyectiva siempre que se verifique que $\forall a_1,a_2\in A$ con $a_1\neq a_2 \Rightarrow f(a_1)\neq f(a_2)$.

Es decir, a elementos distintos en A, imágenes diferentes en B.

Vamos a realizar la demostración por inducción en $Card(A)=n$

Para $n=1$ $f:\{1\}\rightarrow\{b_1, b_2,\ldots,b_m\}$.
Podemos tomar como imagen del 1, $f(1)=b_i$ con $i:1,\ldots,m$
Por tanto obtenemos m aplicaciones inyectivas diferentes.
Número de aplicaciones inyectivas = m = $V_{m,1}$

Hipótesis de inducción. Sea $f:\{1, 2, \ldots, n-1\}\rightarrow\{b_1, b_2,\ldots,b_m\}$ Inyectivas.
Supongamos que el número de aplicaciones f inyectivas es $V_{m,n-1}$.

Para n tenemos $f:\{1, 2, \ldots, n\}\rightarrow\{b_1, b_2,\ldots,b_m\}$ inyectiva.
Para calcular su número basta tener en cuenta que las imágenes de elementos $\{1, 2, \ldots,n-1\}$ se pueden elegir de $V_{m,n-1}$ maneras distintas (hipótesis de inducción) y que una vez elegidas estas imágenes quedan en el conjunto B $m-(n-1)$ elementos que no son imagen de ningún elemento del conjunto $\{1, 2, \ldots, n-1\}$. Por tanto, la imagen del elemento n se puede elegir de $m-n+1$ formas distintas. Luego el número de aplicaciones inyectivas f distintas sería $V_{m,n-1}\cdot(m-n+1)$ que es lo mismo que $V_{m,n}$.

3.1 Variaciones con Repetición.

DEF Dado un conjunto A con m elementos, $A=\{a_1, a_2,\ldots, a_m\}$, llamamos variaciones con repetición n-arias a los distintos conjuntos ordenados que se pueden formar con n elementos, considerando que cada elemento puede figurar cualquier número de veces en una misma variación.

Al número de variaciones con repetición n-arias que se pueden formar con m elementos se representa por $VR_{m,n}$.

PROP El número de variaciones con repetición n-arias que se pueden formar com m objetos cualesquiera es igual al número de variaciones con repetición de orden n-1 que se pueden formar con m objetos, multiplicando por m.

$$VR_{m,n}=VR_{m,n-1}\cdot m$$

dem.

La demostración es análoga a la de variaciones ordinarias. Vamos a realizar la demostración por inducción en n.

Para n=1 Trivialmente $VR_{m,1}=m$

Para n-1 Por hipótesis de inducción $VR_{m,n-1}=VR_{m,n-2}\cdot m$

Para n Supongamos ya formadas las variaciones con repetición de orden n-1. Para obtener las variaciones con repetición de orden n bastará con añadir a cada una de ellas un elemento cualquiera de entre los m que disponemos. Así, por cada variación con repetición de orden n-1 obtenemos m variaciones con repetición de orden n. Las variaciones n-arias así formadas son todas, ya que si hubiera una que no estuviese, quitándole el último elemento obtenemos una (n-1)-aria y como el elemento está entre los m a elegir, llegamos a una contradicción. Por tanto, podemos afirmar que $VR_{m,n}=VR_{m,n-1}\cdot m$

PROP El número de variaciones con repetición de orden n de m elementos es $VR_{m,n}=m^n$.

dem.

Aplicando el resultado obtenido en la proposición anterior:

$VR_{m,1}=m$
$VR_{m,2}=VR_{m,1}\cdot m$
…
$VR_{m,n}=VR_{m,n-1}\cdot m$

Al final, sustituyendo en la expresión inferior la anterior a ella, obtenemos $VR_{m,n}=m^n$

Ejemplo. Dados cuatro amigos, Juan, David, Ivan y Alberto, deciden jugar dos torneos de Ping-Pong. Obtener los posibles campeones de ambos torneos.

En este caso hemos de calcular las variaciones con repetición de 4 elementos tomados de 2 en 2. Aplicando el procedimiento constructivo de la proposición anterior tenemos:

VR de orden 1	*VR de orden 2*
Juan	Juan, Juan
	Juan, David
	Juan, Ivan
	Juan, Alberto
David	David, Juan
	David, David
	David, Ivan
	David, Alberto
Ivan	Ivan, Juan
	Ivan, David
	Ivan, Ivan
	Ivan, Alberto
Alberto	Alberto, Juan
	Alberto, David
	Alberto, Ivan
	Alberto, Alberto

PROP Sean los conjuntos $A=S(n)$ y $B=\{b_1, b_2,\ldots,b_m\}$ tal que $Card(A)=n$ y $Card(B)=m$. El número de aplicaciones entre A y B coincide con el número de variaciones con repetición de m elementos de orden n $VR_{m.n}$.

dem.

Vamos a realizar la demostración contando el número de aplicaciones distintas.

Sea $f: \{1, 2, \ldots, n\} \rightarrow \{b_1, b_2,\ldots,b_m\}$ aplicación.

Para $1\in A$, el número de posibles imágenes, $f(1)$, puede ser m, ya que $f(1)=b_j$ para algún j: 1, …, m.

Para $2\in A$, tenemos que $f(2)$ puede también tomar como valor cualquier b_j con j:1, …, m. Al no requerir para f la inyectividad, podemos permitir que 1 y 2 tengan la misma imagen.

Lo mismo podemos decir para el resto de elementos de A. Por tanto $f(i)=b_j$ con i:1,…,n y j:1,…,m

Como cada elemento de A tiene m posibilidades de elegir la imagen y A tiene n elementos, resulta m^n formas distintas de elegir las imágenes para todos los elementos de A.

El número total de aplicaciones entre A y B es m^n=Card(B)$^{Card(A)}$ y $m^n=VR_{m,n}$.

4. PERMUTACIONES.

4.1.Permutaciones Ordinarias.

DEF Llamaremos permutaciones ordinarias de n elementos a las variaciones de n elementos de orden n. Lo representaremos por P_n.

Las permutaciones ordinarias son un caso particular de las variaciones ordinarias.

OBS Dado un conjunto $A=\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$, dos permutaciones de los elementos de A sólo se diferencian en el orden de colocación de sus elementos ya que todas estarán formadas por todos ellos.

DEF Sea $n\in\mathbb{N}$. Se llama factorial de n, y se representa por n!, al producto de los n primeros números naturales, comenzando en el 1.

$$n!=n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot\ldots\cdot 3\cdot 2\cdot 1$$

DEF Definimos el factorial de 0 como 0!=1.

PROP Se verifica:

1) $n!\cdot(n+1) = (n+1)!$
2) $n!\cdot(n+1)\cdot(n+2)\cdot\ldots\cdot m = m!$ con $m>n$

dem.

Inmediata a partir de la definición.

Con esta nueva notación podemos expresar las variaciones de m elementos de orden n de la siguiente manera:

$$V_{m,n}=\frac{m!}{(m-n)!}$$

PROP El número de permutaciones de n elementos es n!.

dem.

Por definición de permutaciones tenemos que

$$P_n=V_{n,n}=\frac{n!}{(n-n)!}=\frac{n!}{0!}=n!$$

Veamos ahora un método constructivo para formar permutaciones:

PROP Sea el conjunto $A=\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$. Supongamos formadas todas las permutaciones con los n-1 elementos primeros. Para obtener todas las permutaciones de orden n, tomaremos el elemento a_n, y en cada una de las permutaciones de orden n-1 colocaremos el elemento a_n de todas las formas posibles.

<u>dem.</u>

Vamos a realizar la demostración por inducción en n.

Para n=1 $A=\{a_1\}$. Como el conjunto A consta de un solo elemento, existirá una sola permutación $P_1=1!=1$

Para n=2 $A= \{a_1, a_2\}$. Dada la única permutación de orden 1, para obtener las de orden 2 tendremos que colocar a_2 en todas las posiciones posibles con respecto a a_1: a_1a_2 y a_2a_1. $P_2=2!=2$

Para n=3 Igualmente, partiendo de las dos permutaciones de orden 2, colocaremos a_3 en todos los lugares posibles:

$a_1a_2 \rightarrow a_1a_2a_3 \quad a_1a_3a_2 \quad a_3a_1a_2$

$a_2a_1 \rightarrow a_2a_1a_3 \quad a_2a_3a_1 \quad a_3a_2a_1$

$P_3=3!=6$

Para n Repetimos el proceso anterior. Partiendo de una permutación de orden n-1, colocamos a_n en todos los lugares posibles, que son n sitios distintos. Luego por cada permutación de orden n-1 obtenemos n de orden n.

$P_n=P_{n-1}\cdot n=(n-1)!\cdot n=n!$

Comprobemos que son todas.

Sea $a_1a_2\ldots a_n$ una permutación cualquiera de orden n. Eliminando el elemento a_1 obtenemos una permutación de orden n-1. Sabiendo lo anterior, si tenemos dos permutaciones de orden n que proceden de la misma permutación de orden n-1, al eliminar a_n obtendríamos la permutación de orden n-1 de la que parten. Luego para que las permutaciones de orden n-1 sean distintas, tienen que diferir en el lugar de colocación de a_n.

Para la proposición siguiente hemos de tener en cuenta este resultado, que no vamos a demostrar.

LEMA Dados dos conjuntos finitos y no vacios A y B, que tienen el mismo cardinal (Card(A)=Card(B)=n con $n\in \mathbb{N}$), se verifica para $f: A \rightarrow B$ que f es biyectiva si y sólo si es inyectiva.

PROP Sean A y B dos conjuntos finitos y con el mismo cardinal n. El número de aplicaciones biyectivas $f: A \rightarrow B$ coincide con el número de permutaciones de orden n.

<u>dem.</u>

Por el resultado anterior, al ser A y B finitos y con el mismo cardinal n, el número de aplicaciones biyectivas entre A y B coincide con el número de aplicaciones inyectivas entre los mismos conjuntos. Pero ese número coincide con las variaciones de orden Card(A) de Card(B) elementos. Pero como ambos cardinales son iguales, esas variaciones son permutaciones de orden n. Por tanto obtenemos como resultado lo que queríamos probar.

Con este resultado podemos dar una nueva definición de permutación.

DEF Sea $A=\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$, un conjunto con n elementos, $n\in\mathbb{N}$. Llamaremos permutación de los elementos del conjunto A a cada una de las biyecciones del conjunto A en si mismo.

DEF Dadas dos permutaciones distintas p_1 y p_2 de los elementos del conjunto $A=\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$, diremos que los elementos a_i y a_j forman inversión en la permutación p_1 con respecto a p_2 si el orden en el que figuran en ambas es inverso. En caso contrario se dice que forman permanencia.

Ejemplo. Sea $A=\{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5\}$ y sean dos permutaciones $p_1=a_1a_4a_3a_2a_5$ y $p_2=a_1a_2a_3a_5a_4$

Pares que forman inversión: (a_4, a_3), (a_4, a_2), (a_4, a_5), (a_3, a_2)
Pares que forman permanencia: (a_1, a_4), (a_1, a_3), (a_1, a_5), (a_3, a_5), (a_2, a_5)

DEF Se llama Índice de la permutación p_i con respecto a la permutación p_j al número total de inversiones de la primera con respecto a la segunda.

DEF Se dice que dos permutaciones son de la misma clase cuando el índice de una de ellas con respecto a la otra es cero o número par.

DEF Una permutación es de Clase Par cuando el número de inversiones de ésta con respecto a otra, tomada como referencia, es cero o un número par. En caso contrario se dice que es de Clase Impar.

OBS Suele ser común tomar como permutación de referencia aquella que sigue el orden de los números naturales.

DEF Se llama Característica de una permutación con respecto a otra al número $(-1)^i$ siendo i el índice de la primera permutación con respecto a la segunda.

DEF Si en una permutación se cambian entre sí dos elementos cualesquiera para obtener una nueva permutación, se dice que se ha efectuado una trasposición.

PROP Si dada una permutación, realizamos una trasposición, la nueva permutación cambia de clase con respecto a la primera.

dem.

Caso 1: Los elementos que permutamos son consecutivos.

Supongamos que la permutación ya tiene k inversiones con respecto a la de referencia. Si entre los elementos que permutamos ya había inversión, ésta desaparece, quedando k-1 inversiones. Si no la había, generamos una nueva, quedando k+1 inversiones. En ambos casos, al variar sólo en una unidad el número de inversiones, la clase de la nueva permutación es par si la inicial era impar o al revés.

Caso 2: Los elementos que permutamos no son consecutivos.

Sea la permutación $(\dots, a_i, \dots, a_j, \dots)$. Queremos intercambiar a_i y a_j sabiendo que entre ellos hay k elementos.

Realizando k+1 inversiones situamos a_j inmediatamente antes de a_i $(\dots, a_j, a_i, \dots)$.

Realizando k inversiones situamos a_i en el sitio inicial de a_j volviendo a situar entre ambos k elementos.

En total hemos realizado 2k+1 inversiones.

Si la permutacion inicial ya tuviese m inversiones con respecto a la de referencia, la nueva permutación tendría m+2k+1 inversiones.

Si m es par $\rightarrow$ m+2k+1 es impar

Si m es impar $\rightarrow$ m+2k+1 es par

En cualquier caso, la permutación cambia de clase.

OBS Dado el conjunto $A=\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$, existe el mismo número de permutaciones de clase par que de impar.

4.2.Permutaciones con Repetición.

DEF Llamaremos permutaciones de n elementos entre los que hay r_1 iguales entre sí, r_2 iguales entre sí, …, r_p iguales entre sí con $r_1+r_2+\dots+r_p = n$ a los distintos conjuntos ordenados que se pueden formar con los n elementos entre los que figuran repetidos r_1, r_2, …, r_p elementos. Se denotará por $P_n^{r_1, r_2, \dots, r_p}$.

OBS Consideraremos distintas dos permutaciones cuando difieran en el orden de colocación.

PROP El número de permutaciones distintas que se pueden formar con n elementos donde existe uno de ellos repetido r veces es $P_n^r = \frac{n!}{r!}$.

dem.

Sean $a_1, a_2, \dots, a_n$ los n elementos de los cuales $a_1, a_2, \dots, a_r$ con $r<n$ son iguales (los tomamos así por convenio, sabiendo que si fuesen otros, el resultado seguiría siendo el mismo).

Como tenemos n elementos, el número de permutaciones es n!. Pero si permutamos $a_1, a_2, \dots, a_r$ entre sí, sin alterar los n-r restantes, obtenemos r! permutaciones que son iguales entre sí. Por tanto, podemos agrupar las n! permutaciones en clases de r! elementos, donde los elementos de la misma clase son permutaciones todas ellas iguales, al haber variado sólo los r elementos que son iguales.

Tendremos $\frac{n!}{r!}$ clases o, lo que es lo mismo, $\frac{n!}{r!}$ permutaciones distintas. Entonces $P_n^r = \frac{n!}{r!}$.

PROP El número de permutaciones distintas que se pueden formar con n elementos donde existen r_1 elementos iguales entre sí, r_2 iguales entre sí, … y r_p iguales entre sí es

$$P_n^{r_1, r_2, \ldots, r_p} = \frac{n!}{r_1! \cdot r_2! \cdot \ldots \cdot r_p!} \qquad con \quad r_1 + r_2 + \ldots + r_p = n$$

<u>dem.</u>

Realizando el mismo razonamiento que en la proposición anterior, tendremos que intercambiando entre sí el elemento que se repite r_i veces ($\forall$i:1,..,p) obtendremos r_i! permutaciones iguales. Por tanto, el número de permutaciones totales tendrá que ser dividido por r_i! $\forall$i:1,…,p para obtener el número de permutaciones distintas que hay. Dividir n! por r_1!, y luego por r_2! y así sucesivamente hasta llegar a r_p! es lo mismo que dividir n! por el producto de los r_i!. Queda, por tanto, lo que queríamos demostrar.

PROP El número de permutaciones con repetición del conjunto B={b_1, b_2, …, b_p} con el elemento b_i repetido r_i veces i: 1, …, p coincide con el número de aplicaciones suprayectivas f:S(n) $\rightarrow$ B verificando que cada b_i tiene r_i antiimágenes y que $n=r_1+r_2+\ldots+r_p$

5. COMBINACIONES.

5.1.Combinaciones Ordinarias.

DEF Dado un conjunto A={a_1, a_2, …, a_n} de n elementos, llamaremos combinaciones de n elementos tomados de k en k a todos los subconjuntos de k elementos que se pueden formar con los n elementos. Consideraremos dos combinaciones diferentes cuando los conjuntos que las forman sean distintos, es decir, cuando difieran en algún elemento. Las representaremos por $C_{n,k}$.

OBS En las combinaciones, al igual que en los conjuntos, no influye el orden de sus elementos. Por tanto, consideraremos a partir de ahora que los elementos de los subconjuntos están en el mismo orden que los del conjunto inicial.

PROP Dado el conjunto A={a_1, a_2, …, a_n}, obtendremos las combinaciones de k elementos a partir de las de k-1 elementos, sin más que colocar, uno a uno, todos los elementos que siguen, según el orden del conjunto A, al último de la combinación de k-1 elementos considerada.

<u>dem.</u>

Para k=1 Son las combinaciones de n elementos tomadas de uno en uno o, por definición, los subconjuntos de un elemento. Como hay n sunconjuntos distintos de 1 elemento, será n el número de combinaciones $C_{n,1}$.

Para k=2 Son las combinaciones de n elementos tomados de 2 en 2. Para obtenerlas, partimos de las combinaciones unitarias y agregamos a cada elemento, uno a uno, los siguientes a él.

A partir de $\{a_1\} \rightarrow \{a_1, a_2\}, \{a_1, a_3\}, \ldots, \{a_1, a_n\}$

A partir de $\{a_2\} \rightarrow \{a_2, a_3\}, \{a_2, a_4\}, \ldots, \{a_2, a_n\}$

Y así sucesivamente.

El mismo proceso se sigue para obtener las combinaciones de n elementos de k en k.

A partir de $\{a_1, a_2, \ldots, a_{k-1}\} \rightarrow \{a_1, a_2, \ldots, a_{k-1}, a_k\}, \{a_1, a_2, \ldots, a_{k-1}, a_{k+1}\}$

PROP El número de variaciones de orden k que se pueden formar con n elementos, $A=\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$, es igual al número de combinaciones k-arias que se pueden formar con los n elementos, multiplicando por el número de permutaciones de orden k, con $1 \leq k \leq n$.

$$V_{n,k} = C_{n,k} \cdot P_k$$

<u>dem.</u>

La demostración es evidente sin más que tener en cuenta que a partir de cada combinación (conjunto no ordenado de k elementos) obtenemos k! conjuntos ordenados escribiendo sus elementos de todas las formas posibles (permutaciones de k elementos). Así conseguimos todas las variaciones de n elementos tomados de k en k (recordemos que la definición de variación nos decía que eran subconjuntos de k elementos ordenados).

COROLARIO El número de combinaciones de n elementos tomados de k en k es

$$C_{n,k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$$

<u>dem.</u>

Según la proposición anterior $V_{n,k} = C_{n,k} \cdot P_k$

Por tanto $$C_{n,k} = \frac{V_{n,k}}{P_k} = \frac{\frac{n!}{(n-k)!}}{k!} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$$

<u>5.2.Números Combinatorios.</u>

DEF A los números $\frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$ se les llama números combinatorios. Se representan por $\binom{n}{k}$ y se lee "n sobre p". El número n recibe el nombre de base y el número p de orden.

OBS Según esta nueva notación $C_{n,k} = \binom{n}{k}$.

PROP $\binom{n}{0}=1 \quad y \quad \binom{n}{n}=1$

<u>dem.</u>

$$\binom{n}{0}=\frac{n!}{0!\cdot(n-0)!}=\frac{n!}{1\cdot n!}=1$$

$$\binom{n}{n}=\frac{n!}{n!\cdot(n-n)!}=\frac{n!}{n!\cdot 0!}=1$$

PROP $\binom{n}{n-k}=\binom{n}{k}$

<u>dem.</u>

$$\binom{n}{n-k}=\frac{n!}{(n-k)!\cdot(n-(n-k))!}=\frac{n!}{(n-k)!\cdot k!}=\binom{n}{k}$$

PROP $\binom{n}{1}=n \quad y \quad \binom{n}{n-1}=n$

<u>dem.</u>

$$\binom{n}{1}=\frac{n!}{1!\cdot(n-1)!}=\frac{n\cdot(n-1)!}{1\cdot(n-1)!}=n$$

y por la proposición anterior $\binom{n}{n-1}=\binom{n}{1}=n$

PROP $\binom{n}{k}=\binom{n-1}{k-1}+\binom{n-1}{k}$

<u>dem.</u>

$$\binom{n-1}{k-1}+\binom{n-1}{k}=\frac{(n-1)!}{(k-1)!\cdot(n-1-k+1)!}+\frac{(n-1)!}{k!\cdot(n-1-k)!}=\frac{(n-1)!\cdot k}{k!\cdot(n-k)!}+\frac{(n-1)!\cdot(n-k)}{k!\cdot(n-k)!}=$$

$$=\frac{(n-1)!\cdot k+(n-1)!\cdot(n-k)}{k!\cdot(n-k)!}=\frac{(n-1)!\cdot[k+(n-k)]}{k!\cdot(n-k)!}=\frac{n!}{k!\cdot(n-k)!}=\binom{n}{k}$$

PROP $\binom{n}{k}=\binom{n-1}{k-1}+\binom{n-2}{k-1}+\binom{n-3}{k-1}+\ldots+\binom{k}{k-1}+\binom{k-1}{k-1}$

<u>dem.</u>

Aplicando el resultado de la proposición anterior, tenemos

$$\binom{n}{k}=\binom{n-1}{k-1}+\binom{n-1}{k}$$

$$\binom{n-1}{k}=\binom{n-2}{k-1}+\binom{n-2}{k}$$

$$\binom{n-2}{k}=\binom{n-3}{k-1}+\binom{n-3}{k}$$

$\ldots$

$$\binom{k+1}{k}=\binom{k}{k-1}+\binom{k}{k}$$

Si sumamos miembro a miembro todas las ecuaciones anteriores, y teniendo en cuenta que $\binom{k-1}{k-1}=\binom{k}{k}$ obtenemos la fórmula a demostrar.

OBS Si escribimos por filas los números combinatorios, situando en cada fila los que tengan la misma base y en la fila de debajo los de base una unidad mayor, resultará que cada número combinatorio es suma de los dos que tiene encima de él (aplicando la penúltima proposición) quedando de la siguiente manera:

$$\begin{array}{ccccccc} & & \binom{1}{0} & & \binom{1}{1} & & \\ & \binom{2}{0} & & \binom{2}{1} & & \binom{2}{2} & \\ \binom{3}{0} & & \binom{3}{1} & & \binom{3}{2} & & \binom{3}{3} \\ & & & \ldots & & & \end{array}$$

Los números combinatorios de los extremos, según la primera proposición, valen 1.

Esta distribución en forma de triángulo recibe el nombre de triángulo de Tartaglia (en honor de Nícola de Fontana, que lo llamaban Tartaglia debido a su tartamudez), siendo también conocido como triángulo de Pascal.

Sustituyendo los números combinatorios por sus valores, quedaría

$$\begin{array}{ccccccc} & & 1 & & 1 & & \\ & 1 & & 2 & & 1 & \\ 1 & & 3 & & 3 & & 1 \\ & & & \ldots & & & \end{array}$$

A partir del triángulo de Tartaglia, obtenemos los coeficientes del desarrollo de la potencia del binomio $(a+b)^n$, llamado Binomio de Newton.

$(a+b)^1 = a+b \quad \rightarrow \quad 1 \quad 1$

$(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2 \quad \rightarrow \quad 1 \quad 2 \quad 1$

$(a+b)^3 = a^3+3a^2b+3ab^2+b^3 \quad \rightarrow \quad 1 \quad 3 \quad 3 \quad 1$

…

Por tanto $$(a+b)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} a^{n-i} b^i$$

Leibniz extendió este resultado a:

$$(a_1 + a_2 + \ldots + a_p)^n = \sum_{a_1+a_2+\ldots+a_p=n} PR_n^{r_1, r_2, \ldots, r_p} \cdot a_1^{r_1} \cdot a_2^{r_2} \cdot \ldots \cdot a_p^{r_p}$$

5.3.Combinaciones con Repetición.

DEF Sea $A=\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$. Llamaremos combinaciones con repetición de los n elementos de A, a los distintos subconjuntos de k elementos donde los elementos se pueden repetir hasta k veces, siendo dos subconjuntos iguales cuando estén formados por los mismos elementos y repetidos el mismo número de veces. Se denota por $CR_{n,k}$.

OBS El número k de elementos de cada subconjunto puede ser mayor que n. Cuando esto sucede, entre las combinaciones con repetición se encuentran las combinaciones sin repetición de n elementos tomados de k en k.

PROP En número de combinaciones con repetición de n elementos tomados de k en k que se pueden formar con los elementos $A=\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ es

$$CR_{n,k} = \binom{n+k-1}{k}$$

<u>dem.</u>

Para k=1 Las combinaciones con repetición de n elementos tomados de uno en uno coinciden con las combinaciones sin repetición y son n.

Para k-1 Supongamos formadas para k-1, y colocados sus elementos (en cada combinación) en el mismo orden que aparecen en el conjunto A

Para k Para formar los de k elementos, partiendo de las anteriores, añadiremos a cada una el último elemento que en ellas aparece y, sucesivamente, cada uno de los que le siguen según el orden establecido en A. Obtenemos así todas las combinaciones con repetición.

Para poder contarlas, ideamos la siguiente manera:

Vamos a establecer una biyección f: $CR_{n,k} \rightarrow C_{n+k-1,k}$ de tal forma que a cada combinación con repetición de $CR_{n,k}$ le hacemos corresponder la combinación sin repetición obtenida colocando como subíndice de cada elemento el número que tenía incrementado en tantas unidades como elementos le preceden.

Así f es biyectiva y $CR_{n,k} = \binom{n+k-1}{k}$

Ejemplo. Queremos calcular $CR_{3,6}$ (combinaciones con repetición de 3 elementos de 6 en 6). Dados los siguientes elementos, sus imágenes en $C_{8,6}$ son:

$$a_1 a_1 a_2 a_2 a_3 a_3 \rightarrow a_1 a_2 a_4 a_5 a_7 a_8$$

Al primer elemento no le sumamos nada a su subíndice ya que no tiene elementos a su izquierda, al segundo le sumamos 1, al tercero 2, al cuarto 3 y así sucesivamente.

6. COMBINATORIA CLÁSICA Y ALGUNAS TENDENCIAS ACTUALES DE LA COMBINATORIA.

Se entiende por Combinatoria o Análisis Combinatorio a la parte de las matemáticas que trata del estudio y determinación de las distintas agrupaciones que pueden formarse con un número finito de elementos siguiendo unas determinadas reglas.

La Combinatoria estudia las propiedades de los diversos grupos que pueden formarse, incidiendo de forma especial en hallar la regla que permita formar todos los grupos y su número.

El interés por la combinatoria surge en la India, donde el matemático Bhaskara (S. XI-XII) escribe sobre la utilidad de hallar variaciones de los diferentes metros en la versificación. Este interés viene debido a que sus obras (sobre álgebra o aritmética entre otras) están escritas siguiendo la tradición india, en verso.

En Europa aparece la combinatoria poco después, desarrollándose en la Edad Media debido a los estudios judíos sobre la Cabala. El motivo hay que buscarlo en las especiales características del idioma Hebreo. Sus palabras carecen de vocales y las básicas están formadas por tres letras. Cuando dos palabras tienen las mismas letras pero en orden diferente es que existe algún tipo de relación conceptual entre ellas. En esta propiedad se basa el primero de los métodos cabalísticos, la Temurá, o arte de las permutaciones y combinaciones de letras.

También el filósofo y teólogo Ramón Llul (nacido en Palma de Mallorca en 1233) trató la combinatoria en su obra Ars Magna. Parte de la combinación de términos simples. Establece unas tablas en las cuales aparecen una serie de términos susceptibles de combinación: nueve términos absolutos, nueve relativos, nueve cuestiones, nueve sujetos, nueve virtudes y nueve vicios. Filósofos y matemáticos se han fijado en esta obra del mallorquín, entre ellos Leibniz.

La combinatoria moderna aparece con Blaise Pascal (1623-1662). Científico y filósofo francés, estudió en 1654 la expresión $\binom{n}{k}$, desarrollando la teoría de las combinaciones. En ella trata los números combinatorios, el triángulo de Tartaglia y el desarrollo de la potencia de un trinomio.

Pero fue Jacobo Bernouilli (1654-1705) en su obra Ars Conjectandi (arte de la conjetura) el mayor impulsor de la combinatoria en el siglo XVII. Consiguió obtener y demostrar el desarrollo del binomio $(x+a)^n$ siendo n un número natural.

Actualmente, nos encontramos con problemas de combinatoria que tienen que ver con grafos, dando lugar a la Teoría de Grafos. En el tema 2 se ha visto el problema de los Puentes de Königsberg.

Otros problemas de combinatoria se mezclan con Geometría, dando lugar a la Geometría Combinatoria.

BIBLIOGRAFÍA RECOMENDADA.

Introducción a la Probabilidad y la Medida. Aut. Procopio Zoroa, Noemí Zoroa. Ed. PPU

Introducción a la Teoría de la Estadística. Aut. Alexander M. Mood, Franklin A. Graybell. Ed. Aguilar.