TEMAS DE MATEMÁTICAS
(Oposiciones de Secundaria)

TEMA 37

LA SEMEJANZA EN EL PLANO. CONSECUENCIAS. TEOREMA DE THALES. RAZONES TRIGONOMÉTRICAS.

TEMA 37

LA SEMEJANZA EN EL PLANO. CONSECUENCIAS. TEOREMA DE THALES. RAZONES TRIGONOMÉTRICAS.

1.- INTRODUCCION.

La fundamentación de la geometría no se consiguió hasta el año 1899, en el que Hilbert publicó un libro llamado Grundlagen der Geometrie (Fundamentos de Geometría). Los elementos de Euclides tenían ya una estructura deductiva muy perfecta, pero en ellos se utilizaban a menudo implícitamente axiomas no formulados, definiciones sin sentido e incluso razonamientos lógicamente incorrectos. Hilbert era perfectamente consciente de que no todos los términos que se usan en una teoría matemática se pueden definir y por lo tanto, comenzó su tratamiento de la geometría considerando de entrada tres tipos de objetos indefinidos: puntos, rectas y planos, y sus relaciones indefinidas: estar sobre, estar en, estar entre, se congruente, ser paralelo y ser continuo. En lugar de los cinco axiomas (o nociones comunes) y los cinco postulados de Euclides, Hilbert formula para su geometría un conjunto de 21 axiomas, que se conocen desde entonces como los "Axiomas de Hilbert" para la geometría euclídea. Los 21 axiomas se dividen en cinco grupos, que son:

1) Grupo I: 8 axiomas sobre Incidencia
2) Grupo II: 4 axiomas sobre Ordenación.
3) Grupo III: 5 axiomas sobre Congruencia o Movimiento.
4) Grupo IV: 1 axioma sobre Paralelismo.
5) Grupo V: 3 axiomas sobre Continuidad.

En este tema nos interesan los axiomas de congruencia o movimiento. Esos cinco axiomas son:

Axioma 1: Los movimientos del plano son aplicaciones biyectivas del plano.

OBS. Por esta biyección, a cada punto le corresponde un punto homólogo en la transformación.

Axioma 2: Todo movimiento conserva las relaciones de incidencia y ordenación.

OBS. Si varios puntos están en una recta y ordenados, también lo están sus homólogos.

Axioma 3: Ningún movimiento puede transformar un segmento (o ángulo) en una parte del mismo.

OBS. Si C es un punto entre A y B, ningún movimiento puede transformar AB en BC y, análogamente, si la recta r es interior al ángulo ab, ningún movimiento puede transformar al ángulo ab en bc.

Axioma 4: Los movimientos forman un grupo.

OBS. Es decir, la composición de dos movimientos es un movimiento y la transformación inversa de un movimiento es otro movimiento.

<u>*Axioma 5:*</u> Existe un único movimiento que transforma una semirrecta en otra, y cualquier semiplano limitado por la primera semirrecta es un semiplano limitado por la segunda.

DEF Llamaremos movimiento directo del plano a todo movimiento que conserva el sentido del plano orientado. En caso contrario, el movimiento se dice que es inverso.

OBS. Los movimientos directos forman un subgrupo de los movimientos del plano.

2.- HOMOTECIAS.

DEF. Sea en el plano un punto fijo O y un nº real $k\neq 0$. Llamaremos Homotecia de centro O y razón k a toda transformación del plano en si mismo que verifica:

1) Un punto A y su imagen A' están alineadas con O.
2) $\dfrac{\overline{OA'}}{\overline{OA}}=k$

PROP. Las rectas que pasan por el centro de la homotecia (el punto O) se transforman en si mismas.

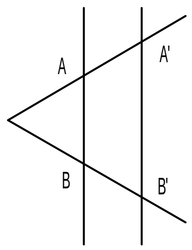
<u>Dem.</u>

Se obtiene la demostración teniendo en cuenta la condición 1) de la definición.

PROP. La imagen de una recta que no pasa por el centro de homotecia es otra recta paralela a la primera.

<u>Dem.</u>

Sean A y B dos puntos y A' y B' sus imágenes en una homotecia de centro O y razón k. Queremos ver que la recta r definida por A y B y la recta r' definida por A' y B' son paralelas.



$$\frac{\overline{OA'}}{\overline{OA}}=k \quad \text{y} \quad \frac{\overline{OB'}}{\overline{OB}}=k \quad \Rightarrow$$

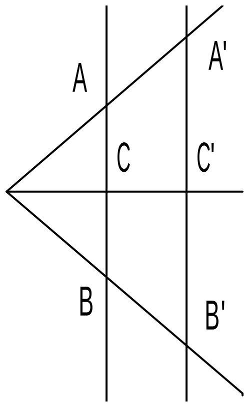
$$\frac{\overline{OA'}}{\overline{OA}}=\frac{\overline{OB'}}{\overline{OB}} \quad \Rightarrow \quad AB \ // \ A'B'$$

PROP. La homotecia transforma puntos alineados en puntos alineados y puntos no alineados en puntos no alineados.

<u>Dem.</u>

Sean A, B y C tres puntos y A', B', y C' sus imágenes por una homotecia de centro O y razón k.

1) Si A, B y C están alineados.



Se verifica:

$$k = \frac{\overline{OA'}}{\overline{OA}} = \frac{\overline{OB'}}{\overline{OB}} \Rightarrow \text{AB} \parallel \text{A'B'}$$

Por proporcionalidad:

$$\frac{\overline{OA'}}{\overline{OA}} = \frac{\overline{OB'}}{\overline{OB}} = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = \text{k}$$

y se obtiene que

$$\overline{A'B'} = \text{k}\,\overline{AB} \qquad \overline{OB'} = \text{k}\,\overline{OB} \qquad \overline{OA'} = \text{k}\,\overline{OA}$$

Como A, B y C están alineados, uno de los tres puntos será interior al segmento determinado por los otros dos. Supongamos que B es interior a $\overline{AC}$. Entonces:

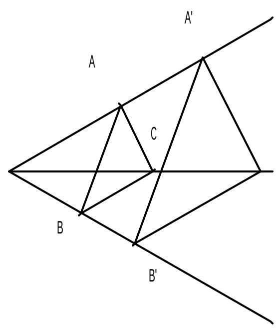
$$\overline{AC} = \overline{AB} + \overline{BC}$$

Si multiplicamos la ecuación por k

$$\text{k}\,\overline{AC} = \text{k}\,\overline{AB} + \text{k}\,\overline{BC} \Rightarrow \overline{A'C'} = \overline{A'B'} + \overline{B'C'}$$

Luego A', B' y C' están alineados

2) Si A, B y C no están alineados



se verifica que:

$$\overline{AC} < \overline{AB} + \overline{BC}$$

y multiplicando por k

$$\text{k}\,\overline{AC} < \text{k}\,\overline{AB} + \text{k}\,\overline{BC} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \overline{A'C'} < \overline{A'B'} + \overline{B'C'}$$

y por tanto A', B' y C' no están alineados.

PROP. Las homotecias transforman segmentos en segmentos.

<u>Dem.</u>

Es una consecuencia de la proposición anterior.

PROP. El producto de dos homotecias de centro O es una homotecia del mismo centro.

Dem.

Sea O el centro de ambas homotecias, siendo A’ imagen de A respecto de la primera homotecia y A” imagen d A’ respecto de la segunda tenemos:

Tenemos: O, A y A’ están alineados
y O, A’ y A” están alineados

$\Rightarrow$ O, A y A” están alineados.

Sea k_1 la razón de la primera homotecia $\Rightarrow \dfrac{\overline{OA'}}{\overline{OA}} = k_1$

Sea k_2 la razón de la segunda homotecia $\Rightarrow \dfrac{\overline{OA''}}{\overline{OA'}} = k_2$

Y multiplicando ambas expresiones:

$$\frac{\overline{OA'}}{\overline{OA}} \cdot \frac{\overline{OA''}}{\overline{OA'}} = k_1\, k_2 \quad \Rightarrow \quad \frac{\overline{OA''}}{\overline{OA}} = k_1 k_2$$

Entonces $k_1 \cdot k_2$ es la razón de la homotecia producto.

PROP. La inversa de una homotecia de centro O y razón k es una homotecia del mismo centro y razón $\frac{1}{k}$.

Dem.

Si A’ es la imagen de A por la homotecia de razón k, entonces

$$\frac{\overline{OA'}}{\overline{OA}} = k$$

y por tanto

$$\frac{\overline{OA}}{\overline{OA'}} = \frac{1}{k}$$

La consecuencia de estas dos últimas proposiciones es que el conjunto de las homotecias de centro O es un grupo conmutativo, denotándose por (H_O, o)

3. LA SEMEJANZA EN EL PLANO.

3.1. Definición y propiedades.

DEF. Llamamos semejanza en el plano a toda correspondencia biunívoca tal que si A’ y B’ son las imágenes de dos puntos cualquiera A y B se verifica que:

$$\frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = \text{k}$$

siendo k un segmento absoluto dado, llamado razón de semejanza.

Al igual que las homotecias, las semejanzas verifican propiedades similares.

PROP. Las semejanzas verifican las siguientes propiedades:

1) Transforman puntos alineados en puntos alineados y puntos no alineados en puntos alineados
2) Transforman segmentos en segmentos.
3) Transforman ángulos en ángulos iguales (conservan los ángulos)
4) Transforman triángulos semejantes.

Dem.

Trivial.

A la vista de lo anterior, también podríamos haber definido una semejanza en el plano como sigue:

Si realizamos el producto de una homotecia por un movimiento, o lo que es lo mismo, movemos una de las dos figuras homotéticas, como el movimiento conserva la alineación, el orden y el sentido (en movimientos directos) y transforma segmentos y ángulos en otros iguales, la transformación resultante verifica:

1) A puntos alineados le corresponden puntos alineados y en el mismo orden.
2) Los segmentos homólogos son proporcionales.
3) Los ángulos homólogos son iguales.

La transformación anterior recibe el nombre de semejanza en el plano.

Dos figuras entre cuyos puntos se pueda establecer una correspondencia biunívoca que cumpla las tres condiciones anteriores diremos que son semejantes.

PROP. El producto de dos semejanzas es otra semejanza.

Dem.

Sean f y g dos semejanzas y A un punto del plano.

$\exists$ A’ del plano tal que f(A) = A’
$\exists$ A” del plano tal que g(A’) = A”

por tanto, A” es la imagen de A por $f \circ g$

Si existiese otro punto B tal que $(g \circ f)$(B) = A” entonces

$f(A) = A'$ y $f(B) = B' \Rightarrow g(A') = A''$ y $g(B') = A''$ luego $A' = B' \Rightarrow A = B$

Por tanto, para razones k_1 y k_2 de f y g respectivamente se verifica:

$$\frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = k_1 \quad \text{y} \quad \frac{\overline{A''B''}}{\overline{A'B'}} = k_2$$

y multiplicando miembro a miembro

$$\frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} \cdot \frac{\overline{A''B''}}{\overline{A'B'}} = k_1\, k_2 \Rightarrow \frac{\overline{A''B''}}{\overline{AB}} = k_1\, k_2$$

Luego la razón de la semejanza producto es igual al producto de las razones de las semejanzas.

PROP Se Verifica:

1) El producto de las semejanzas es asociativo
2) El elemento neutro, o semejanza unidad, es aquella en la que todos los puntos son dobles. (la identidad)
3) Toda semejanza admite una inversa.

Dem.

1) y 2) son inmediatas

3) esta propiedad la justificaremos más adelante, cuando demostremos que toda semejanza en el plano se puede escribir como producto de un movimiento por una homotecia.

3.2. Triángulos Semejantes.

DEF. Dados dos triángulos ABC y A'B'C', diremos que son semejantes si:

1) Existe una biyección entre sus lados
2) Las razones de los lados homólogos son iguales.

Llamaremos razón de semejanza de los dos triángulos al nº k que verifica:

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{B'C'}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{A'C'}} = k$$

TEOREMA

Existe una única semejanza que transforma un triángulo en otro semejante a él.

Dem.

Sean ABC y A'B'C' dos triángulos semejantes.

· *Existencia*

La traslación de vector $\overline{AA'}$ transforma el triángulo ABC en el triángulo $A'B_1C_1$.

El giro de centro A' y ángulo orientado $\angle B_1A'B_2$ con semirrecta origen $A'B_1$, y semirrecta extremo A'B' transforma el punto B_1 en B_2 y C_1 en C_2. Por tanto el giro transforma el triángulo $A'B_1C_1$ en el triángulo $A'B_2C_2$.

Si componemos ambas aplicaciones, la imagen del triángulo ABC es $A'B_2C_2$.
Ahora pueden suceder dos casos:

Caso 1. La semirrecta $A'C_2$ coincida con A'C'
Caso 2. Las semirrectas $A'C_2$ y A'C' son simétricas respecto de la A'B'

En este segundo caso, hemos de aplicar una simetría axial de eje A'B', transformando el triángulo $A'B_2C_2$ en $A'B_2C_3$.

En el caso 1 los ángulos $\angle A'B'C'$ y $\angle A'B_2C_2$ son iguales.

En el caso 2 los ángulos $\angle A'B'C'$ y $\angle A'B_2C_3$ son iguales.
Entonces obtenemos las proporcionalidades

Caso 1. $$\frac{\overline{A'B_2}}{\overline{A'B'}} = \frac{\overline{A'C_2}}{\overline{A'C'}} = k$$

Caso 2. $$\frac{\overline{A'B_2}}{\overline{A'B'}} = \frac{\overline{A'C_3}}{\overline{A'C'}} = k$$

Y por lo tanto, en ambos casos, existe una homotecia de centro A' y razón k que transforma el triángulo

Caso 1. $A'B_2C_2 \to A'B'C'$
Caso 2. $A'B_2C_3 \to A'B'C'$

Como los movimientos utilizados, (traslaciones, giros y simetrías axiales) y las homotecias son semejanzas, la transformación del triángulo ABC en el triángulo A'B'C' es una semejanza.

· *Unicidad.*

Realicemos la demostración por reducción al absurdo. Supongamos que f y g son dos semejanzas que transforman el triángulo ABC en el A'B'C'.

Dado un punto cualquiera P del plano, hemos de demostrar que si f(P) = P' y g(P) = P" entonces P'= P"

Si consideramos la recta BP, cortará a la recta AC en un punto Q.

Sean f(Q) = Q' y g(Q) = Q" se verifica que

$$\frac{\overline{QB}}{\overline{QC}} = \frac{\overline{Q'B'}}{\overline{Q'C'}}$$

ya que la semejanza conserva la relación entre tres puntos. De forma análoga:

$$\frac{\overline{QB}}{\overline{QC}} = \frac{\overline{Q''B'}}{\overline{Q''C'}}$$

y por lo tanto

$$\frac{\overline{Q'B'}}{\overline{Q'C'}} = \frac{\overline{Q''B'}}{\overline{Q''C'}}$$

de lo que deducimos que Q’ = Q”

De forma similar

$$\frac{\overline{PA}}{\overline{PQ}} = \frac{\overline{P'A'}}{\overline{P'Q'}} \quad \text{y} \quad \frac{\overline{PA}}{\overline{PQ}} = \frac{\overline{P''A'}}{\overline{P''Q'}}$$

entonces

$$\frac{\overline{P'A'}}{\overline{P'Q'}} = \frac{\overline{P''A'}}{\overline{P''Q'}}$$

y deducimos que P’ = P” siendo la semejanza única.

3.3. Descomposición de una semejanza.

TEOREMA

Toda semejanza en el plano es el producto de un movimiento por una homotecia.

Dem.

Dada una semejanza del plano, sabemos que queda determinada por tres puntos. Esos tres puntos determinan un triángulo. La semejanza que transforma un triángulo en otro, por el teorema anterior existe y es única y se descompone como producto de un movimiento por una homotecia. Luego toda semejanza se puede descomponer como hemos indicado.

3.4. Semejanzas directas e inversas.

DEF. Diremos que una semejanza es directa cuando al descomponerse en un movimiento por una homotecia, el movimiento es inverso.

TEOREMA

Sea S una semejanza que transforma el triángulo ABC en A'B'C'. S es una semejanza directa si y solo si los triángulos tienen la misma orientación.

Dem.
"⇒"
Por ser la semejanza directa, se descompone como producto de una homotecia por un movimiento directo.

Sea $S = H \circ M_d \Rightarrow S(ABC) = (H \circ M_d)(ABC) = H(M_d(ABC) = H(A_1B_1C_1) = A'B'C'$

Por ser el Movimiento directo $A_1B_1C_1$ tiene la misma orientación que ABC y como las homotecias también la conservan, tenemos que $A_1B_1C_1$ tiene la misma orientación que A'B'C'. Luego ABC y A'B'C' tienen la misma orientación.

"⇐"

Si ABC y A'B'C' tienen la misma orientación, para transformar el primero en el segundo necesitamos realizar una traslación de vector $\overline{AA'}$ y un giro, pero no es necesario hacer una simetría axial, y luego una homotecia.

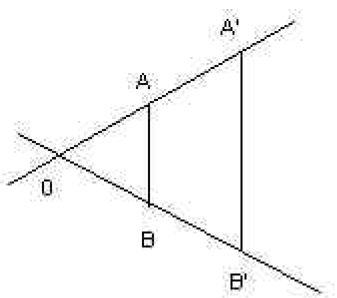
Por tanto, la composición de la traslación y el giro nos da un movimiento directo.

3.5. Obtención del centro de Semejanza Directa.

Sea S una semejanza que transforma el segmento $\overline{AB}$ en $\overline{A'B'}$. Se pueden dar dos situaciones:

Caso 1: Los segmentos $\overline{AB}$ y $\overline{A'B'}$ están situados en rectas paralelas.

El punto O, centro de homotecia, se obtiene como intersección de las rectas que pasan, una por A y A' y la otra por B y B'.



Si tomamos un punto C no alineado con A y B obtenemos un triángulo ABC con imagen, A'B'C', siendo C' la imagen de C por la homotecia. La transformación del triángulo ABC en el A'B'C' nos determina una semejanza de centro O.

Caso 2: Los segmentos $\overline{AB}$ y $\overline{A'B'}$ están situados en rectas no paralelas.

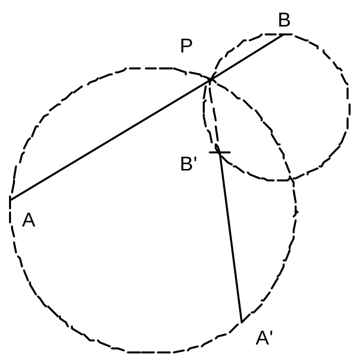
Podemos hallar un giro y una homotecia con el mismo centro O, cuyo producto sea la semejanza S definida por $\overline{AB}$ y $\overline{A'B'}$. Dicho centro O será el centro de semejanza directa.

Supongamos que el punto O existe y tratemos de determinarlo.

Al ser S una semejanza directa se verifica

$$\angle OBA = \angle OB'A'$$

Si P es el punto de intersección de la recta AB con A'B', y a continuación dibujamos las circunferencias que pasan por PAA' y por PBB' respectivamente, ambas circunferencias ser cortaran, además de en el punto P en otro punto , que será O.



Los triángulos OAB y OA'B' son semejantes, pues $\angle OBP = \angle OB'P$ ya que ambos son ángulos inscritos de la misma circunferencia, y subtender el arco OP en la circunferencia C_2, y lo mismo para $\angle OAP = \angle OA'P$.

Al tener dos ángulos iguales, los triángulos son semejantes y O es el centro de la semejanza.

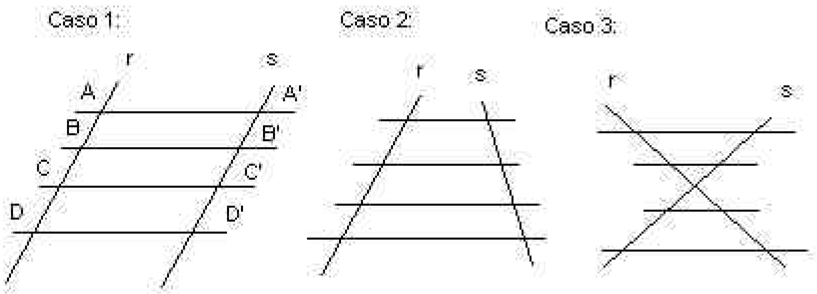
4. TEOREMA DE THALES.

TEOREMA

Los segmentos limitados por los puntos de intersección de varias paralelas en dos rectas son proporcionales.

Dem.

Sean r y s las dos rectas que son cortadas por varias paralelas. Las tres posibilidades que nos podemos encontrar son:



El teorema quedará demostrado si comprobamos que existe correspondencia en la igualdad, el orden y en la suma de dichos segmentos.

a) Correspondencia en la Igualdad.

Veamos que: $\overline{AB} = \overline{CD}$ en r $\Rightarrow \overline{A'B'} = \overline{C'D'}$ en s.

Caso 1: trivial, por ser r y s paralelas.

Caso 2 y caso 3:

Al ser r y s no paralelas, realizamos la traslación del trapecio ABA'B (o triángulo en el caso de que A=A') de forma que $\overline{AB}$ coincida con $\overline{CD}$. Entonces $\overline{A'B'}$ se transforma en $\overline{A''B''}$ siendo entonces $\overline{A'B'} = \overline{A''B''}$ por traslación $\overline{A''B''} = \overline{C'D'}$ por segmentos paralelos situados en rectas paralelas, luego $\overline{A'B'} = \overline{C'D'}$.

b) Correspondencia en el Orden.

Sea M un punto interior del segmento $\overline{AB}$. La paralela que pasa por M está limitada por las paralelas $\overline{AA'}$ y $\overline{BB'}$ luego M' es interior a $\overline{A'B'}$.

c) Correspondencia en la Suma.
Si $\overline{AB} = \overline{AM} + \overline{MB}$, aplicando b) $\overline{A'B'} = \overline{A'M'} + \overline{M'B'}$.

Luego la correspondencia establecida es una proporcionalidad.

5. RAZONES TRIGONOMÉTRICAS.

5.1. Definición y Relaciones.

Dado un triángulo rectángulo ABC podemos afirmar que las razones entre sus lados se conservan por una semejanza. Eso es debido a que si A’B’C’ es un triángulo rectángulo homólogo al anterior sabemos que es cierto que

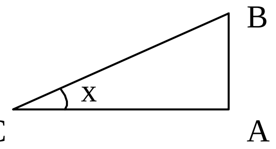
$$\frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{B'C'}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{A'C'}}$$

y los ángulos son iguales, por tanto, es lógico afirmar que

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{A'B}}{\overline{B'C'}},...$$

Así pues, podemos definir las relaciones trigonométricas independientemente del triángulo rectángulo considerado.

DEF Dado un triángulo rectángulo ABC, con $\angle A = 90°$ llamaremos razones trigonométricas del ángulo agudo x a:



1) Seno: $\operatorname{sen} x = \frac{\overline{AB}}{\overline{BC}}$
2) Coseno: $\cos x = \frac{\overline{AC}}{\overline{BC}}$
3) Tangente: $\tan x = \frac{\overline{AB}}{\overline{AC}}$
4) Cotangente: $\cot x = \frac{\overline{AC}}{\overline{AB}}$
5) Secante: $\sec x = \frac{\overline{BC}}{\overline{AB}}$
6) Cosecante: $\csc x = \frac{\overline{BC}}{\overline{AB}}$

Aunque hemos definido seis razones trigonométricas en función de los lados de un triángulo rectángulo, vamos a ver a continuación que algunas de ellas dependen de las otras, y que existen relaciones entre ellas.

TEOREMA Teorema de Pitágoras

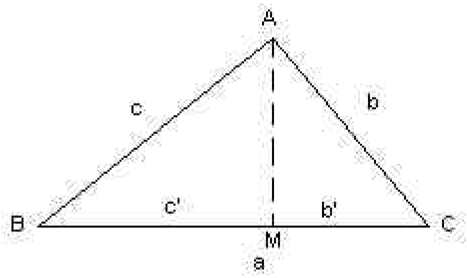
Dado un triángulo rectángulo, se verifica

$$h^2 = c_1^{\ 2} + c_2^{\ 2}$$

siendo h la hipotenusa y c_1 y c_2 los dos catetos.

Dem.

Sea ABC los vértices del triángulo rectángulo, con $\angle A = 90°$ si trazamos la perpendicular al lado $\overline{BC}$ que pasa por el punto A, obtenemos el punto M y los dos nuevos triángulos MAB y MCA son rectángulos.



Los triángulos MAB y ABC son semejantes, entonces

$$\frac{c}{c'} = \frac{a}{c} \Rightarrow c^2 = a \cdot c'$$

De igual forma MCA y ABC también son semejantes

$$\frac{b}{b'} = \frac{a}{b} \Rightarrow b^2 = a \cdot b'$$

Sumando ambas relaciones

$$b^2 + c^2 = ac' + ab' \Rightarrow$$
$$b^2 + c^2 = a(c' + b') \Rightarrow$$
$$b^2 + c^2 = a^2$$

cqd

El teorema de Pitágoras nos permite obtener una relación entre algunas de las razones trigonométricas. Aplicando dicho teorema al triángulo ABC anterior

$$\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 = \overline{BC}^2 \Rightarrow \left(\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}}\right)^2 + \left(\frac{\overline{AC}}{\overline{BC}}\right)^2 = 1$$

y entonces

$$\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$$

siendo x el ángulo $\angle C$.

A partir del resto de las razones trigonométricas, deducimos que

$$\tan x = \frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} = \frac{\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}}}{\frac{\overline{AC}}{\overline{BC}}} = \frac{\sin x}{\cos x} \Rightarrow \tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

y de forma análoga obtendríamos

$$\cot x = \frac{1}{\tan x} = \frac{\cos x}{\sin x}$$

$$\csc x = \frac{1}{\sin x}$$

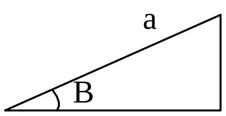
$$\sec x = \frac{1}{\cos x}$$

5.2. Resolución de Triángulos.

Entendemos por resolver un triángulo el obtener el valor de los tres lados y los tres ángulos, partiendo de algunos datos conocidos.

Comenzaremos resolviendo triángulos rectángulos. Nos encontramos con cuatro casos, en función de los datos de partida. Consideraremos que el ángulo recto es A.

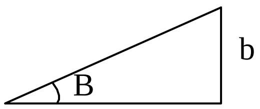
Caso 1: Los datos de partida son la hipotenusa a y un ángulo agudo B.



Sabemos que, como $A = 90º \Rightarrow B + C = 90º$ luego C = 90º - B.

También sabemos que $\sin B = \frac{b}{a} \Rightarrow b = a \sin B$ y por el teorema de Pitágoras $c = \sqrt{a^2 + b^2}$.

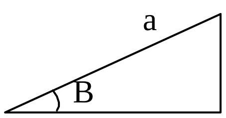
Caso 2: Los datos de partida son un ángulo B agudo y un cateto b.



$$\sin B = \frac{b}{a} \Rightarrow a = \frac{b}{\sin B}$$

C = 90º - B $\qquad c = \sqrt{a^2 - b^2}$

Caso 3: Los datos iniciales son la hipotenusa a y un cateto b.

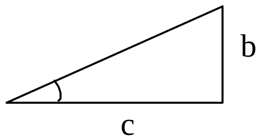


$\operatorname{sen} B = \dfrac{b}{a} \Rightarrow$ Podemos determinar B.

A partir de B obtenemos C = 90º - B

$c = \sqrt{a^2 - b^2}$

<u>Caso 4</u>: Los datos iniciales son los dos catetos b y c.



Para determinar el ángulo B, lo hacemos a partir de la expresión

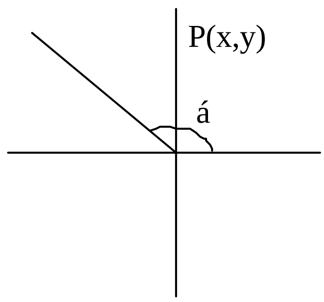
$$\tan B = \frac{b}{c}$$

$$C = 90º - B$$

$$a = \sqrt{b^2 + c^2}$$

Para poder resolver cualquier triángulo, no sólo los rectángulos, necesitamos previamente generalizar las razones trigonométricas para ángulos mayores de 90º, que reciben el nombre de ángulos obtusos.

Partiendo de un sistema ortonormal de ejes y de un punto P(x,y) cualquiera del segundo cuadrante, tracemos la semirrecta que parte del origen de coordenadas y pasa por el punto P. El semieje positivo OX y la semirrecta OP nos determinan un ángulo obtuso.



Sea r la longitud del segmento OP. Podemos definir las razones trigonométricas como:

$$\sin \alpha = \frac{y}{r} \qquad \cos \alpha = \frac{x}{r}$$

$$\tan \alpha = \frac{y}{x} \qquad \cot \alpha = \frac{x}{y}$$

Las definiciones que hemos dado son independientes del punto p considerado y, en el caso de estar P en el primer cuadrante, coinciden con las que ya teníamos.

Las relaciones entre las razones trigonométricas se siguen verificando, ya que P pertenece a una circunferencia de radio r, siendo entonces

$$x^2 + y^2 = r^2$$
$$(r\cos\alpha)^2 + (r\sin\alpha)^2 = r^2$$
$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$

y a partir de aquí tendríamos el resto.

Una vez realizada la generalización de las razones trigonométricas para un ángulo obtuso, veamos dos teoremas que nos van a permitir generalizar a un triángulo cualquiera la resolución.

TEOREMA Teorema de Los Senos

Dado un triángulo ABC cualquiera se verifica $\dfrac{a}{\sin A} = \dfrac{b}{\sin B} = \dfrac{c}{\sin C}$

Dem

Dado un triángulo ABC, trazamos la altura relativa al vértice A, h_a.

Entonces

$$\operatorname{sen} B = \frac{h_a}{c} \text{ y } \operatorname{sen} C = \frac{h_a}{b}$$

Las dos igualdades anteriores no dependen del triángulo elegido. Si la altura que pasa por A no está entre B y C, basta por aplicar lo visto para ángulos obtusos para comprobarlo.

Si repetimos el proceso para el punto B, llamando h_b a su altura obtenemos

$$\operatorname{sen} A = \frac{h_b}{c} \text{ y } \operatorname{sen} C = \frac{h_b}{a}$$

Entonces

$$\left.\begin{array}{l} h_a = c\operatorname{sen} B = b\operatorname{sen} C \\ h_b = c\operatorname{sen} A = a\operatorname{sen} C \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{a}{\operatorname{sen} A} = \frac{b}{\operatorname{sen} B} = \frac{c}{\operatorname{sen} C}$$

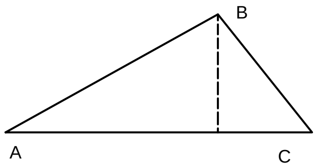
TEOREMA Teorema del coseno

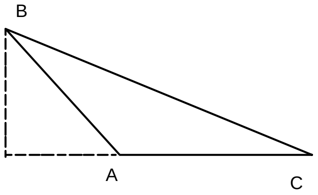
Dado un triángulo ABC cualquiera se verifica $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$

Dem.

Si A = 90º tenemos un triángulo rectángulo, y podemos aplicar el teorema de Pitágoras. Y como cos90º = 0, la tesis se verifica.

Si A   90º nos encontramos con dos situaciones, A<90º o A>90º





Si trazamos la altura por el punto B tenemos

$$a^2 = hb^2 + a'^2 \Leftrightarrow A < 90º$$

$$a^2 = hb^2 + (b + c')^2 \Leftrightarrow A > 90º$$

Del primer caso

$$a^2 = hb^2 + (b - c')^2 = hb^2 + b^2 + c'^2 - 2bc' = c^2 + b^2 - 2bc'$$

y como $\cos A = \dfrac{c'}{c} \Rightarrow c' = c \cos A$

sustituyendo $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$

Del segundo caso

$$a^2 = hb^2 + (b + c')^2 = hb^2 + b^2 + c'^2 + 2bc' = c^2 + b^2 + 2bc'$$

$$\cos A = \frac{-c'}{c} \Rightarrow c' = -c \cos A$$

luego $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$

Ahora ya estamos en condiciones de resolver cualquier triángulo. De nuevo, nos encontramos con cuatro casos, en función de los datos iniciales.

<u>Caso 1</u>: Los datos de partida son los ángulos A y B y un lado a.

Entonces C = 180º - (A+B)

$$b = a \frac{\sin A}{\sin B}$$

$$c = a \frac{\sin C}{\sin A}$$

<u>Caso 2</u>: Los datos de partida son los lados a y b y el ángulo opuesto a uno de ellos, por ejemplo A.

Del teorema de los senos

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B}$$

obtenemos

$$\sin B = \frac{b \sin A}{a}$$

y de esta expresión podemos calcular B.

A partir de aquí

C = 180º - (A+B) y $C = \dfrac{a \sin C}{\sin A}$

Aclaremos que para que el triángulo exista es necesario que $\dfrac{b \sin A}{a} \leq 1$

<u>Caso 3</u>: Los datos iniciales son los lados b y c y el ángulo que determinan, A.

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$$

$$\sin B = \frac{b \sin A}{a} \Rightarrow Obtenemos \rightarrow B$$

$$\sin C = \frac{c \sin A}{a \Rightarrow Obtenemos \rightarrow C}$$

<u>Caso 4</u>: Los datos iniciales son los tres lados a, b y c

Por el teorema del coseno

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} \Rightarrow Obtenemos \rightarrow A$$

$$\sin B = \frac{b \sin A}{a} \Rightarrow Obtenemos \rightarrow B$$

$$\sin C = \frac{c \sin A}{a} \Rightarrow Obtenemos \rightarrow C$$

BIBLIOGRAFÍA RECOMENDADA

Curso de Geometría Simétrica. Aut.: Puig. Adam.

Cualquier texto de Cou o 2º de Bachillerato para la parte de Razones Trigonométricas.