TEMAS DE MATEMÁTICAS
(Oposiciones de Secundaria)

TEMA 17

<u>PROGRAMACIÓN LINEAL. APLICACIONES.</u>

TEMA 17

PROGRAMACIÓN LINEAL. APLICACIONES.

1. INTRODUCCIÓN.

La programación lineal consiste en un conjunto de técnicas matemáticas que permiten obtener el mayor provecho posible de sistemas económicos, sociales, tecnológicos, etc, cuyo funcionamiento es posible describirlo adecuadamente mediante un modelo matemático.

El problema fundamental consiste en optimizar (maximizar o minimizar) una cierta expresión lineal, sabiendo que sus variables están sometidas a un conjunto de restricciones que vienen expresadas por inecuaciones lineales.

1.1. Historia de la Programación Lineal.

En los siglos XVI y XVII, matemáticos como Newton, Leibnitz, Bernovilli o Lagrauge trabajaron en la obtención de máximos y mínimos condicionados de funciones. Un siglo después, Fourier fue el primero en intuir, aunque de manera un tanto imprecisa, los métodos actuales de al programación lineal.

Exceptuando a G. Monge, que en 1776 se interesó por problemas de ésta índole, hemos de esperar hasta bien entrado el siglo XX para encontrar nuevos estudios relacionados con lo que hoy en día entendemos por programación lineal. En 1939, el matemático ruso Kantorovitch publicó “Métodos matemáticos de organización y planificación de la producción”, una extensa monografía en la que por primera vez se desarrolla una teoría matemática aplicable a una gran cantidad de problemas. Dicha teoría recibe el nombre de Programación Lineal.

En 1941 y 1942 estudian de forma independiente Koopmans y Lantorovitch el llamado “Problema de transporte”. El matemático Stingler plantea, tres años después, el “problema de régimen alimenticio óptimo”.

En EE.UU. se planteó, a la finalización de la 2ª Guerra Mundial, que la coordinación de manera eficaz de todas las energías y recursos nacionales era un problema de tal envergadura, que para poder reducirlo y resolverlo había que aplicar los métodos de optimización de la programación lineal.

Es en esta época cuando aparecen los primeros computadores, utilizándose para resolver los problemas descritos.

G. B. Danzing formula, en 1947, el enunciado común al que se puede reducir cualquier problema de programación lineal. Para ello emplea notación matemática muy precisa. Y él mismo, en 1951, desarrolla el “método del Simplex” apoyándose para ello en los ordenadores.

Los fundamentos matemáticos de la programación lineal fueron establecidos por John Von Neumann, que en 1928 publico “Teorías de juegos”, su trabajo más importante. Y en 1947 plantea la posible equivalencia de los problemas de programación lineal con la teoría de matrices. Es a partir de este momento cuando otros matemáticos se interesan por esta disciplina, produciéndose un espectacular desarrollo.

2. TERMINOLOGÍA BÁSICA.

DEF Llamaremos variables de elección a aquellas variables que aparecen en el problema de forma independiente y cuyo valor queremos calcular, siendo éste siempre positivo.

DEF Llamaremos función objetivo a la función matemática lineal que relaciona las variables de elección y cuyo valor queremos optimizar (maximizar o minimizar).

DEF Llamaremos restricción a cada una de las condiciones que deben verificar las variables de elección, siendo estas condiciones expresadas mediante ecuaciones o inecuaciones lineales.

Un problema de optimización se puede clasificar en uno de los siguientes tipos:

Tipo 1: Optimización libre o in restricciones.

Los elementos que constituyen el problema son las variables de elección y la función objetivo. No posee restricciones. También se conoce por el nombre de "optimización clásica sin restricciones".

Tipo 2: Optimización con restricciones.

El problema está constituido por variables de elección, función objetivo y restricciones. Estas últimas pueden ser:

a) Restricciones de igualdad.

Estos problemas reciben el nombre de "optimización clásica con restricciones" y pueden ser resueltos por medio de técnicas como los multiplicadores de Lagrange.

b) Restricciones de Desigualdad.

La Programación matemática es la rama que se encarga del estudio de estos problemas. Podemos clasificarlos a su vez en:

b.1.) Problemas de programación lineal.

Todas las expresiones que aparecen en el enunciado del problema son lineales (tanto la función objetivo como las restricciones).

b.2.) Problemas de Programación no Lineal.

Alguno (o todas) de las expresiones no son lineales.

3. FORMULACIÓN DE UN PROBLEMA DE PROGRAMACIÓN LINEAL.

Un problema de programación lineal se puede formular fundamentalmente de tres formas distintas.

a) Forma Completa.

Supongamos que el problema consiste en maximizar la función objetivo, que hay n variables y m restricciones.

Maximizar $z = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \ldots + c_n x_n$

Restricciones

$$\left.\begin{array}{r} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \le r_1 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{p1}x_1 + a_{p2}x_2 + \ldots + a_{pn}x_n \le r_p \\ a_{(p+1)1}x_1 + a_{(p+1)2}x_2 + \ldots + a_{(p+1)n}x_n \ge r_p \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{q1}x_1 + a_{q2}x_2 + \ldots + a_{qn}x_n \ge r_q \\ a_{(q+1)1}x_1 + a_{(q+1)2}x_2 + \ldots + a_{(q+1)}x_n = r_{q+1} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = r_m \\ x_i \ge 0 \quad \forall i : 1, \ldots, n \end{array}\right\}$$

b) Forma Reducida.

Maximizar $z = \sum_{i=1}^{n} Ci\ xi$

Restricciones

$$\left.\begin{array}{ll} \sum_{i=1}^{n} a_{ji}x_i \le r_j & j : 1, \ldots, m \\ x_i \ge 0 & i : 1, \ldots, n \end{array}\right\}$$

c) Forma matricial.

Si definimos

$$C = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \ldots \\ c_n \end{pmatrix} \qquad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix} \qquad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad R = \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ \ldots \\ r_n \end{pmatrix}$$

podemos formular el problema como

Maximizar $z = c^z \cdot x$

Restricciones

$$\left.\begin{array}{r} AX \le R \\ X \ge 0 \end{array}\right\}$$

OBS Por no complicar la notación, en los dos últimos casos solo hemos escrito en las restricciones el símbolo de desigualdad ≤. Pero hemos de dejar constancia de que ambas formulaciones equivalen a la primera, siendo lo correcto el haber denotado con ≤ las p primeras restricciones, con ≥ las q – p siguientes, y con = las m – q últimas.

DEF Llamaremos forma canónica de un problema de programación lineal cuando todas las restricciones del enunciado (excluyendo las que indican que las variables son no negativas) tienen la misma desigualdad (≤ ó ≥).

Para el caso de maximizar

Maximizar $\quad Z = C^t \cdot X$

Restricciones

$$\left.\begin{array}{r} AX \le R \\ X \ge 0 \end{array}\right\}$$

y para el caso de Minimizar

Minimizar $\quad Z = C^t \cdot X$

Restricciones

$$\left.\begin{array}{r} AX \ge R \\ X \ge 0 \end{array}\right\}$$

Tengamos en cuenta que una restricción del tipo

$$a_{j1}x_1 + a_{j2}x_2 + ... + a_{jn}x_n = r_j$$

es equivalente a las dos restricciones

$$\left.\begin{array}{r} a_{j1}x_1 + a_{j2}x_2 + ... + a_{jn}x_n \le r_j \\ a_{j1}x_1 + a_{j2}x_2 + ... + a_{jn}x_n \ge r_j \end{array}\right\}$$

Todo problema de programación lineal expresado en forma canónica se puede escribir en forma estándar sin mas que tener en cuenta:

1) La expresión AX ≤ R se puede escribir como AX + Y = R siendo $Y^t = (y_1, y_2, ..., y_m)$. En las y_j se recoge todo lo que falta para que se produzca la igualdad. Por definición Y ≥ 0.

2) La expresión AX ≥ R se puede escribir como AX – Y´ = R siendo $(Y')^t = (y'_1, y'_2, \ldots.., y_m)$. En las y_j' se recoge todo lo que falta para que se produzca la igualdad. También Y´ ≥ 0.

DEF Los elementos y_1, y_2,…., y_m de la matriz Y reciben el nombre de variables de holgura.

DEF Los elementos y_1', y_2',…..,y_m' de la matriz Y´ reciben el nombre de variables de excedente.

4. MÉTODO DE RESOLUCIÓN GRÁFICA.

Dentro de los diferentes métodos de resolución, vamos a describir ahora el funcionamiento del método de resolución gráfica, aplicable a los problemas con dos variables. Para problemas con más variables, en un punto posterior trataremos el método analítico del Simplex.

Supongamos que tenemos el siguiente problema:

Optimizar $Z = c_1x_1 + c_2x_2$

Restricciones

$$\left.\begin{array}{c} AX \geq B \, (ó \; AX \leq B) \\ X \geq 0 \end{array}\right\}$$

Los pasos a seguir en su resolución son:

1) Al ser todas las variables de elección no negativas, consideraremos el plano x_1x_2 limitado al primer cuadrante.

2) Determinamos la región factible, o conjunto de los puntos del plano que verifican todas las restricciones. Se obtiene como intersección de los subespacios dados por cada una de las restricciones.

3) Representamos la función objetivo. Lo que dibujamos es el vector director de la recta definida por la función objetivo, que es (- c_2, c_1).

4) Desplazamos la recta definida por el vector (- c_2, c_1) en la dirección (c_1, c_2) obteniendo rectas paralelas a la inicial en el interior de la región factible hasta alcanzar el punto o puntos óptimos.

Las soluciones que nos podemos encontrar en la resolución gráfica de un problema de programación lineal pueden ser.

a) Solución finita y única.

Corresponde con un vértice de la región factible, pudiendo ser ésta acotada o no.

b) Solución finita y no única.

Se obtiene cuando la pendiente de la recta definida por la función objetivo coincida con la pendiente de uno de los lados donde se presentan todos los puntos óptimos.

En esta situación, si (a, b) y (c, d) son dos vértices consecutivos de la región factible cuyo segmento que limitan es paralelo a la función objetivo, todos los puntos de dicho segmento son solución, que llamaremos (x, y).

$$\left.\begin{array}{l} x = \lambda a + (1-\lambda)c \\ y = \lambda b + (1-\lambda)d \end{array}\right\} con \quad 0 \leq \lambda \leq 1$$

Esta situación se puede dar tanto si la región factible es acotada como si no lo es.

c) Solución no finita (no acotada).

Se produce cuando la región factible es no acotada y la recta definida por la función objetivo se puede desplazar indefinidamente de forma paralela encontrando siempre puntos de la región factible.

d) Sin solución.

Un problema de programación lineal no tiene solución cuando la región factible es vacía.

5. CONJUNTOS CONVEXOS.

DEF Llamaremos Conjunto Convexo al conjunto de puntos que tiene la propiedad de que para cualquier par de puntos del mismo, el segmento que los une también está incluido en dicho conjunto.

Ejemplos.

Un círculo o una recta son conjuntos convexos. En cambio, una circunferencia o una elipse no los son.

DEF Llamaremos punto límite a todo punto que se encuentra en la frontera del conjunto.

DEF Llamaremos punto interior a todo punto del conjunto convexo que no es punto límite.

DEF Llamaremos punto extremo a todo punto límite que no se encuentra en el segmento limitado por otros dos puntos límite. Desde el punto de vista geométrico equivalen a los vértices del conjunto.

DEF Dados n, v ∈ V con V K-espacio vectorial de dimensión n, llamaremos combinación lineal convexa de n y v a toda expresión de la forma

$$\lambda u + (1-\lambda)v \quad con \quad 0 \leq \lambda \leq 1$$

Teniendo en cuenta esta última definición, podemos decir que una combinación lineal convexa está formada por todos los puntos del segmento que delimitan u y v (lo demostraremos a continuación).

Podemos afirmar, por tanto, que un conjunto es convexo si y solo si para todo par de puntos del conjunto, su combinación lineal convexa pertenece a dicho conjunto.

TEOREMA

Dados $\bar{u}, \bar{v} \in \mathbb{R}^n$, toda combinación lineal convexa que se dé entre ellos es un punto del segmento que los une.

<u>Dem.</u>

Vamos a realizar la demostración en $\mathbb{R}^2$ para que se pueda visualizar gráficamente. La demostración sería análoga para el caso de $\mathbb{R}^n$.

Tomemos $\bar{u} = (u_1, u_2)$ y $\bar{v} = (v_1, v_2)$ elementos de $\mathbb{R}^2$.

Hemos de probar que $\bar{w} = \lambda\bar{u} + (1-\lambda)\bar{v} \quad (0 \leq \lambda \leq 1)$ es un punto perteneciente al segmento $\overline{PQ}$ con $\bar{u} = \overrightarrow{OP}$ y $\bar{v} = \overrightarrow{OQ}$.

Sea R el punto del plano tal que $\overrightarrow{OR} = \overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OQ} = \bar{u} - \bar{v}$.

Los puntos OPQR definen un paralelogramo, siendo $\overrightarrow{OP} = \bar{u}$ la diagonal del paralelogramo. Por tanto se verifica $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OR} + \overrightarrow{OQ}$.

Sea $\bar{w} = \lambda\bar{u} + (1-\lambda)\bar{v}$ ó también $\overrightarrow{OS} = \lambda\overrightarrow{OP} + (1-\lambda)\overrightarrow{OQ}$.

$$\overrightarrow{OS} = \lambda \cdot \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OQ} - \lambda\overrightarrow{OQ} = \lambda\overrightarrow{OP} - \lambda\overrightarrow{OQ} + \overrightarrow{OQ} = \lambda\left(\overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OQ}\right) + \overrightarrow{OQ} = \lambda\overrightarrow{OR} + \overrightarrow{OQ}$$

Si $\lambda = 0 \Rightarrow \overrightarrow{OS} = \overrightarrow{OQ}$ ó $\bar{w} = \bar{v}$

Si $\lambda = 1 \Rightarrow \overrightarrow{OS} = \overrightarrow{OP}$ ó $\bar{w} = \bar{u}$

Si $0 < \lambda < 1 \Rightarrow \lambda\overrightarrow{OR}$ es un punto intermedio entre O y R y al sumarle $\overrightarrow{OQ}$ da lugar a un punto intermedio entre P y Q.

PROP La función objetivo de un problema de programación lineal al igual que las m restricciones y n condiciones de no negatividad definen conjuntos convexos.

<u>Dem.</u>

1) Función objetivo.

Sea $z=\sum_{i=1}^{n} c_i x_i$ y sea $H=\{(x_1,x_{2,}....,x_n)\in \mathbb{R}^n / \sum_{i=1}^{n} c_1 x_i = z\}$

Vamos a demostrar que el conjunto H es convexo.

$u,v\in H \Rightarrow u=(u_1,....,u_n)$ con $c_1u_1+....+c_nu_n=z$

$v=(v_1,....,v_n)$ con $c_1v_1+....+c_nv_n=z$

$W=lu+(1-l)v=l(u_1,...,u_n)+(1-l)(v_1,...,v_n) \quad con\,0\leq l\leq 1$

Entonces $W=(lu_1+(1-l)v_1,...., lu_n+(1-l)v_n)$

y $C\sum_{i=1}^{n} C_i(lu_i+(1-l)v_i)=\sum_{i=1}^{n}[lC_iu_i+(1-l)C_iV_i]= l\sum_{i=1}^{n} C_iU_i+(1-l)\sum_{i=1}^{n} C_iv_i=$

$=lz+(1-l)z=z\Rightarrow W\in H \quad y \quad H$ es convexo.

2) Restricciones de Desigualdad.

Las restricciones de desigualdad dividen a $\mathbb{R}^n$ en dos semiespacios cerrados (ya que las desigualdades no son estrictas). Veamos entonces que un semiespacio cerrado de $\mathbb{R}^n$ es convexo.

Sea la desigualdad $a_1x_1+.....+a_nx_n\geq r$ con $(x_1,....,x_n)\in \mathbb{R}^n$

Consideremos $H=\{(x_1,....,x_n)\in \mathbb{R}^n / a_1x_1+....+a_nx_n\geq r\}$ es semiespacio de $\mathbb{R}^n$ definido por la desigualdad anterior.

Si $u,v\in H\Rightarrow a_1u_1+.....+a_nu_n\geq r \; y \; a_1v_1+....+a_nv_n\geq r$.

Sea $w=lu+(1-l)v=(lu_1+(1-l)v_1,...., lu_n+(1-l)v_n)$

$$a_1w_1+....+a_nw_n=\left(\sum_{i=1}^{n} a_i(lu_i+(1-l)v_i)\right)=\sum_{i=1}^{n}[la_iu_i+(1-l)a_iv_i]=$$

$$= l\sum_{i=1}^{n} a_iu_i+(1-l)\cdot\sum_{i=1}^{n} a_iv_i\geq lr+(1-l)r=r$$

Entonces w $\in$ H y H es convexo.

3) Las condiciones de no negatividad son un tipo particular de no restricciones y por tanto le es aplicable la demostración anterior.

PROP La intersección de un número finito de conjuntos convexos de $\mathbb{R}^n$ es un conjunto convexo.

Dem.

Vamos a realizar la demostración por inducción de el número de conjuntos.

Para dos conjuntos:

Sea C_1 y C_2 dos conjuntos convexos de $\mathbb{R}^n$ y sean $u, v \in C_1 \cap C_2$.

Como $u, v \in C_1$ *convexo* $\Rightarrow \lambda u + (1-\lambda)v \in C_1 \qquad (0 \le \lambda \le 1)$

Como $u, v \in C_2$ *convexo* $\Rightarrow \lambda u + (1-\lambda)v \in C_2 \qquad (o \le \lambda \le 1)$ y $C_1 \cap C_2$ es convexo.

Para n – 1 conjuntos.

Hipótesis de inducción: $\bigcap_{i=1}^{n-1} Ci$ es un conjunto convexo.

Para n conjuntos.

Sean $C_1, C_2, \ldots, C_n$ n conjuntos convexos.

$$\bigcap_{i=1}^{n} C_i = \left(\bigcap_{i=1}^{n-1} C_i \right) \bigcap C_n$$

$\bigcap_{i=1}^{n-1} C_i$ es un conjunto convexo por hipótesis de inducción.

C_n es un conjunto convexo por hipótesis inicial.

Aplicando el caso ya visto para 2 conjuntos, su intersección es un conjunto convexo.

Por tanto, la intersección de n conjuntos convexos es un nuevo conjunto convexo.

COROLARIO La Región Factible de un problema de programación lineal es un conjunto convexo.

Podemos generalizar la definición de combinación lineal convexa a m vectores como sigue.

DEF Llamaremos combinación lineal convexa de los vectores $u_1, u_2, \ldots, u_m \in \mathbb{R}^n$ a $u = \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \ldots + \lambda_m u_m$ con $0 \le \lambda_i \le 1 \quad \forall i : 1, \ldots, m$.

DEF Llamaremos envoltura convexa de cualquier conjunto de puntos T de $\mathbb{R}^n$, y lo denotaremos por C(T), al conjunto de todas las combinaciones convexas de puntos T.

PROP C (T) es el conjunto convexo más pequeño que contiene a T.

Dem.

Trivial.

DEF Un conjunto convexo C es ilimitado si $\forall u \in C$ existe $v \in \mathbb{R}^n$-{0} tal que los puntos $u + \lambda v \in C$ con $\lambda > 0$. En caso contrario diremos que C es limitado.

DEF Sea $T \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto con un número finito de puntos. La envoltura convexa de T la llamaremos poliedro convexa.

Si C es un conjunto cerrado y poliedro convexo, entonces cualquier punto de C se puede expresar como una combinación convexa de los puntos extremos. Entonces C será la envoltura convexa de sus vértices.

DEF Llamaremos como a $T \subset \mathbb{R}^n$ que verifica que

$$\forall u \in T \Rightarrow \lambda u \in T \quad con\ \lambda \geq 0$$

Un cono convexo es un cono que es convexo.

DEF Llamaremos Simplex a un poliedro de n dimensiones que tiene exactamente n+1 vértices. Las fronteras del Simplex contienen otros simplex de menor dimensión que reciben el nombre de Caras Simpliciales.

6. MÉTODO DE RESOLUCIÓN ANALÍTICO.

Sea el problema a optimizar.

$$z = C^t \cdot x$$

Restricciones

$$\left.\begin{array}{r} Ax = B \\ x \geq 0 \end{array}\right\}$$

donde las restricciones las hemos convertido en igualdades introduciendo variables de holgura o de excedente.

DEF Llamaremos solución factible (SF) a $x^o = \left(x_1^0, x_2^o, \dots, x_n^0\right)$ que verifica las restricciones del problema. Es por tanto un punto de la región factible (RF).

DEF Llamaremos Solución Factible Básica (SFB) a $x^o = \left(x_1^o, x_2^o, \dots, x_n^o\right)$ que verifica que es SF y que tiene n – m componentes nulas como mínimo.

DEF Llamaremos Solución Factible Básica No Degenerada (SFBND) a $x^o = \left(x_1^o, x_2^o, \dots, x_n^o\right)$ que es una Solución Factible Básica que tiene exactamente n – m componentes nulas. En caso contrario diremos que es una SFB degenerada.

DEF Llamaremos Solución Factible Optima (SFO) a $x^o = \left(x_1^o, x_2^o, \dots, x_n^o\right)$ que es una SFB que optimiza la función objetivo.

6.1. Teoremas Básicos de la Programación Lineal.

Vamos a ver ahora una serie de problemas que nos van a permitir llegar a la solución del problema.

TEOREMA 1 El conjunto de Soluciones Factibles de un problema de programación lineal, caso de no ser vacío, es convexo.

Dem.

Sea $S = \{x \in \mathbb{R}^n / Ax = B, x \geq 0\}$ y supongamos $S \neq \emptyset$

Sea $x_1, x_2 \in S$ y $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^+$ con $\alpha + \beta = 1$

Como $x_1 \in S \Rightarrow x_1 \geq 0$ y $Ax_1 = B \Rightarrow \alpha x_1 \geq 0$

Como $x_2 \in S \Rightarrow x_2 \geq 0$ y $Ax_2 = B \Rightarrow \beta x_2 \geq 0$

Luego $\alpha x_1 + \beta x_2 \geq 0$ y

$$A(\alpha x_1 + \beta x_2) = \alpha A x_1 + \beta A x_2 = \alpha B + \beta B = (\alpha + \beta) B = B$$

Entonces $\alpha x_1 + \beta x_2 \in S$ y como $\alpha x_1 + \beta x_2$ es una combinación lineal convexa de x_1 y x_2, dos puntos cualesquiera de S, deducimos que S es un conjunto convexo.

TEOREMA Teorema Fundamental de la Programación Lineal.

a) La función objetivo alcanza su óptimo en un punto extremo del conjunto convexo S de soluciones factibles.

b) Si el óptimo se alcanza en más de un vértice entonces cualquier combinación convexa de estos vértices también optimiza la función objetivo.

Dem.

a) Vamos a realizar la demostración por reducción al absurdo.

Sean $x_1, x_2, \ldots, x_n$ los vértices del conjunto convexo S y x_0 una solución factible optima que no es extremo.

Al ser x_0 solución factible verifica

$$\left.\begin{array}{r} Ax_0 = B \\ x_0 \geq 0 \end{array}\right\}$$

y por ser óptima $c^t \cdot x_0 \leq c^t \cdot x \quad \forall x \in S$

Como hemos supuesto que x_o no es un vértice de S (Región factible) entonces lo podemos expresar como una combinación lineal convexa de los vértices de S:

$$x_o = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i \quad \text{con} \quad \sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1 \ \text{y} \quad 0 \le \alpha_i \le 1 \quad \forall i : 1, \ldots, n$$

La función objetivo en el punto x_o es

$$z(x_o) = C^t \cdot x_o = C^t \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i \right) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i C^t x_i = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \cdot z(x_i)$$

Entre los $z(x_i)$ con $1 \le i \le n$ hay uno que será el más pequeño de todos (elegimos el más pequeño si el problema es minimizar la función objetivo y el más grande si hay que maximizar). Sea

$$\lambda = min\{z(x_i) / 1 \le i \le n\}$$

Entonces

$$\lambda \le C^t x_i \quad 1 \le i \le n$$

pudiéndolo expresar como

$$C^t x_i = \lambda + \mu_i \quad \text{con} \quad \mu_i \ge 0 \quad 1 \le i \le n$$

Por tanto

$$C^t x_o = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i C^t x_i = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i (\lambda + \mu_i) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \cdot \lambda + \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mu_i =$$

$$= \lambda \cdot \sum_{i=1}^{n} \alpha_i + \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mu_i = \lambda + \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mu_i$$

Y como

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mu_i \ge 0 \Rightarrow C^t x_o \ge \lambda$$

Lo que contradice que X_o sea una SFO (para el caso de minimizar).

b) Supongamos que el óptimo alcanza en x_1, x_2,…..,x_p, p vértices de la región factible S.

Vamos a realizar la demostración para obtener el mínimo (en el caso de maximizar sería igual).

Sea $C^t x_i = m$ $\quad 1 \le i \le p$ con m mínimo de la función objetivo.

Entonces $\quad C^t x_i \le C^t x \quad \forall x \in S$

$$\left.\begin{array}{r} Ax_i = B \\ x_i \geq 0 \end{array}\right\}$$

Sea $x_o = \sum_{i=1}^{p} \alpha_i x_i$ una combinación lineal convexa de los vértices $x_1,\ldots,x_p$, con $\sum_{i=1}^{p} \alpha_i = 1 \; y \quad 0 \leq \alpha_i \leq 1$

Veamos que x_o es también óptimo.

$$C^t x_o = \sum_{i=1}^{p} C^t \alpha_i x_i = \sum_{i=1}^{p} \alpha_i C^t x_i = \sum_{i=1}^{p} \alpha_i \cdot m = m \cdot \sum_{i=1}^{p} \alpha_i = m \cdot 1 = m$$

$$Ax_o = \sum_{i=1}^{p} A\alpha_i x_i = \sum_{i=1}^{p} \alpha_i Ax_i = \sum_{i=1}^{p} \alpha_i B = B \cdot \sum_{i=1}^{p} \alpha_i = B \cdot 1 = B$$

$$x_o = \sum_{i=1}^{p} \alpha_i x_i \geq 0$$

Luego x_o también optimiza la función.

TEOREMA 2

Dada una solución factible, $x_o \in S$, ésta es un punto extremo del conjunto de soluciones factibles S si tiene K componentes positivas, $K \leq n$, y las restantes, n – K, nulas, de forma que se satisface

$$\sum_{i=1}^{K} x_{oi} \vec{v}_i = B$$

siendo $\{\vec{v}_1,\ldots,\vec{v}_K\}$ K vectores linealmente independientes del conjunto de vectores que se obtienen a partir de las columnas de la matriz A (matriz de coeficientes del conjunto de restricciones).

<u>Dem.</u>

Sea $x_o = (x_{o1}, x_{o2},\ldots, x_{on})$ es una solución factible que verifica las condiciones del enunciado.

Supongamos que x_o no es un punto extremo.

Entonces x_o se puede expresar como combinación lineal convexa de dos puntos cualesquiera, x_1 y x_2, de la región factible (observemos que no decimos que esos puntos sean extremos)

$$x_o = \lambda x_1 + (1-\lambda) x_2 \quad 0 \leq \lambda \leq 1$$

Podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que las K componentes de x_o no nulas son las primeras.

$$x_o = (x_{o1}, x_{o2}, \ldots, x_{oK}, 0, \ldots, 0))$$

Entonces, los puntos x_1 y x_2 han de ser del mismo tipo:

$$x_1 = (x_{11}, \ldots, x_{1K}, 0, \ldots, 0) \quad y \quad x_2 = (x_{21}, \ldots, x_{2K}, 0, \ldots, 0)$$

y como $Ax_1 = B$ y $Ax_2 = B$ tenemos

$$\left.\begin{aligned} Ax_1 &= \sum_{i=1}^{K} x_{1i}\vec{v}_i = B \\ Ax_2 &= \sum_{i=1}^{K} x_{2i}\vec{v}_i = B \end{aligned}\right\} \Rightarrow \sum_{i=1}^{K} (x_{1i} - x_{2i})\vec{v}_i = 0$$

Los vectores $\{\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_K\}$ son linealmente independientes

$$x_{1i} - x_{2i} = 0 \quad 1 \le i \le K \Rightarrow x_{1i} = x_{2i} \quad 1 \le i \le K \Rightarrow x_1 = x_2$$

Al no poder expresar x_o como combinación lineal convexa de dos puntos S $\Rightarrow$ x_o es un punto extremo o vértice de S.

TEOREMA 3 (Recíproco del anterior).

Sea $x_o \in S$ un punto extremo del conjunto de soluciones factibles S. Entonces hay a lo sumo K componentes positivas en x_o, siendo el resto nulas, y los K vectores columna de la matriz A que verifican

$$\sum_{i=1}^{K} x_{oi} \cdot \vec{v}_i = B$$

son linealmente independientes.

<u>Dem.</u>

Sin pérdida de generalidad, vamos a suponer que son no nulas las K primeras componentes de x_o.

$$x_o \in S \Rightarrow Ax_o = B \Rightarrow \sum_{i=1}^{K} x_{oi} \cdot \vec{v}_i = B$$

Supongamos que $\{\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_K\}$ es un conjunto Linealmente Dependiente. Podemos encontrar una combinación lineal de ellos con algún escalar no nulo.

Sean $\lambda_1,\dots,\lambda_K \in \mathbb{R} / \sum_{i=1}^{K} \lambda_i \vec{v}_i = \vec{0}$ con $\lambda_1 \neq 0$ (elegimos λ_1 como podíamos haber elegido otro). Se verifica $\sum_{i=1}^{K} \lambda_1 \cdot \lambda_i \vec{v}_i = \vec{0}$

Generamos los puntos x´ y x´´ como

$$x' = \left(x_{o1} - \lambda_1 \lambda_1, x_{o2} - \lambda_1 \lambda_2, \dots, x_{oK} - \lambda_1 \lambda_K, 0, \dots, 0\right)$$

$$x'' = \left(x_{o1} + \lambda_1 \lambda_1, x_{o2} + \lambda_1 \lambda_2, \dots, x_{oK} + \lambda_1 \lambda_K, 0, \dots, 0\right)$$

Es claro que ambos puntos verifican

Ax´ = B y Ax´´= B

Todo lo dicho es igualmente válido si en lugar de λ_1 tomamos un nº cualquiera positivo tan pequeño como sea necesario para que todas las componentes no nulas de x´ y x´´ sean positivas. Entonces x´ y x´´ son soluciones factibles y se verifica:

$$x_o = \frac{1}{2} x' + \frac{1}{2} x''$$

x_o sería combinación lineal convexa de x´ y x´´ y por hipótesis era un punto extremo.

Llegamos a una contradicción siendo por tanto nuestra suposición falsa y $\{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_K\}$ son linealmente independientes.

COROLARIO El punto $x_o \in S$ (solución factible) es un punto extremo si y sólo si los vectores columna de la matriz A asociados a las componentes positivas de x_o son Linealmente Independientes verificando $\sum_{i=1}^{K} x_{oi} \vec{v}_i = B$.

6.2. El método del Simplex.

Si queremos calcular el punto óptimo (máximo o mínimo) de un problema de programación lineal, sólo hemos de obtener todos los vértices de la región factible y saber el valor de la función objetivo en cada uno de ellos. El problema surge cuando el nº de vértices puede ser elevado, lo que hace este proceso impracticable.

El método del simplex nos facilitará la obtención de la solución óptima mediante la elaboración de un criterio que nos va a permitir si una solución básica es o no una solución óptima. En caso negativo nos daría un procedimiento de aproximación a dicha solución óptima.

El método consiste en:

a) Partimos del conocimiento de una solución básica inicial. Si es óptima (mediante el criterio de optimalidad) hemos terminado.

b) Pasamos a otra solución básica (vértice contiguo) tal que el valor de la función objetivo es menor (o mayor) que en la anterior. Si el nuevo vértice no es todavía la solución óptima, repetiremos el paso.

c) Al ser el nº de vértices finito, en un nº finito de repeticiones encontraremos la solución (si la hay).

6.2.1. Generación de Puntos Extremos.

Vamos a suponer que partimos de una solución factible básica inicial que tiene K componentes positivas como máximo.

$$x_o = \left(x_{o1}, x_{o2}, \ldots\ldots, x_{oK}, 0, \ldots\ldots, 0\right) \quad y \quad x_{oi} > 0 \quad 1 \le i \le K$$

En la matriz A tenemos los vectores columna $\{\vec{v}_1, \ldots\ldots, \vec{v}_K\}$ que son linealmente independientes.

$$\sum_{i=1}^{K} x_{oi}\vec{v}_i = B$$

Cualquier otro vector de A $\{\vec{v}_{K+1}, \ldots, \vec{v}_n\}$ es combinación lineal de los K vectores primeros, ya que rang (A) = K.

Llamaremos $\vec{v}_o = \sum_{i=1}^{K} x_{oi}\vec{v}_i$ y sea $\vec{v}_{K+1} = \sum_{i=1}^{K} x_{(K+1)i}\vec{v}_i$

Elegimos $\lambda \in \mathbb{R}$ con $\lambda \ge 0$. Entonces

$$\lambda\vec{v}_{K+1} = \sum_{i=1}^{K} \lambda x_{(K+1)i}\vec{v}_i$$

$$\vec{v}_o - \lambda\vec{v}_{K+1} = \sum_{i=1}^{K} \left(x_{oi} - \lambda x_{(K+1)i}\right)\vec{v}_i$$

Hemos expresado $\vec{v}_o$ como combinación lineal de los K + 1 primeros vectores columna de A. La solución factible asociada es

$$X = \left(x_{o1} - \lambda x_{(K+1)1}, x_{o2} - \lambda x_{(K+1)2}, \ldots\ldots, x_{oK} - \lambda x_{(K+1)K}, \lambda, 0, \ldots, 0\right)$$

Se verifica que Ax = B

$$\sum_{i=1}^{K} \left(x_{oi} - \lambda x_{(K+1)i}\right)\vec{v}_i + \lambda\vec{v}_{K+1} = \sum_{i=1}^{K} x_{oi}v_i - \lambda\sum_{i=1}^{K} x_{(K+1)i}v_i + \lambda\vec{v}_{K+1} = B - \lambda\vec{v}_{K+1} + \lambda\vec{v}_{K+1} = B$$

Como x ha de ser solución factible, todas sus componentes han de ser nulas o positivas:

$$\lambda \geq 0 \qquad x_{oi} - \lambda x_{(K+1)i} \geq 0 \qquad 1 \leq i \leq K$$

Excluimos el caso $\lambda = 0$ ya que entonces $x = x_o$ que sabemos que es solución factible básica.

$$x_{oi} - \lambda x_{(K+1)i} \geq 0 \qquad 1 \leq i \leq K \Rightarrow x_{oi} \geq \lambda x_{(K+1)i} \Rightarrow \lambda \leq \frac{x_{oi}}{x_{(K+1)i}}$$

- Si $x_{(K+1)i} = 0 \Rightarrow x_{oi} > 0$
- Si $x_{(K+1)i} < 0 \Rightarrow x_{oi} - \lambda x_{(K+1)i} > 0$
- Si $x_{(K+1)i} > 0 \Rightarrow x_{oi} - \lambda x_{(K+1)i} \geq 0 \Rightarrow \lambda \leq \frac{x_{oi}}{x_{(K+1)i}}$

Por tanto hemos de tomar λ menor o igual que todos los cocientes $\frac{x_{oi}}{x_{(K+1)i}}$ cuando los $x_{(K+1)i}$ sean positivos.

Además, si queremos que x sea una solución factible básica, no ha de tener más de K componentes no nulas. Pero si tomamos los coeficientes $x_{(K+1)i} = 0 \quad 1 \leq i \leq K$.

$$x = (x_{o1}, x_{o2}, \ldots, x_{oK}, \lambda, 0, \ldots, 0)$$

tendría K + 1 componentes no nulas y por tanto no sería solución factible óptima.

Si todos los $x_{(K+1)i} < 0 \quad 1 \leq i \leq K$ sucede lo mismo, x volvería a tener K + 1 componentes no nulas.

Por lo tanto, algún $x_{(K+1)i}$ ha de ser positivo.

Si tomamos $\lambda = min\left\{\frac{x_{oi}}{x_{(K+1)i}}\right\}_{1\leq i\leq K}$ siempre que $x_{(K+1)i} > 0$ podemos asegurar que x tendrá a lo más K componentes no nulas. Si suponemos que el mínimo se alcanza para i = 1 tendremos $\lambda = \frac{x_{oi}}{x_{(K+1)1}}$ y entonces la primera coordenada de x, $x_{o1} - \lambda x_{(K+1)1}$, será nula. Si el mínimo se alcanza en más de un valor de i, habrá más componentes nulas.

Para afirmar que x es una solución factible básica, una vez visto que tiene como mucho K componentes no nulas, hemos de comprobar que los vectores asociados a dichas componentes no nulas son linealmente independientes.

Como hemos supuesto que la primera componente es nula (ya que $\lambda = \dfrac{x_{oi}}{x_{(K+1)1}}$ tenemos que una combinación lineal de los vectores asociados quede el vector cero es

$$\vec{0} = \sum_{i=2}^{K+1} \mu_i \vec{v}_i$$

Podemos expresar $\vec{v}_{K+1}$ como combinación lineal de $\{\vec{v}_1,....,\vec{v}_K\}$

$$\vec{v}_{K+1} = \sum_{j=1}^{K} x_{(K+1)j} \vec{v}_j$$

Entonces

$$\vec{0} = \sum_{i=2}^{K+1} \mu_i \vec{v}_i = \sum_{i=2}^{K} \mu_i v_i + \mu_{K+1} \cdot \sum_{j=1}^{K} x_{(K+1)j} \vec{v}_j = x_{(K+1)1} \cdot \mu_{K+1} \vec{v}_1 + \sum_{i=2}^{K} \left(\mu_i + \mu_{K+i} x_{(K+1)i} \right) \vec{v}_i$$

Como $\{\vec{v}_1,...,\vec{v}_K\}$ son linealmente independientes, los escalares deben ser nulos.

$\mu_{K+1} \cdot x_{(K+1)1} = 0$ y $\mu_i + \mu_{K+i} \cdot x_{(K+1)i} = 0 \quad 2 \le i \le K$

Si $\mu_{K+1} = 0 \Rightarrow \mu_i = 0 \quad 2 \le i \le K \Rightarrow \{\vec{v}_2,....,\vec{v}_{K+1}\}$ son linealmente independientes

Si $\mu_{K+1} \neq 0 \Rightarrow x_{(K+1)1} = 0 \Rightarrow Como \quad \lambda = \dfrac{x_{oi}}{x_{(K+1)1}}$ llegamos a una contradicción.

Así pues $\mu_{K+1} = 0$ y los vectores $\{\vec{v}_2,....,\vec{v}_{K+1}\}$ son L. I.

6.2.2. Criterio de Optimalidad.

Vamos a ver ahora como, a partir de la solución factible básica, ir obteniendo otras soluciones factibles básicas tales que cada una de ellas mejore el valor de la función objetivo en cada paso.

Sea

$$x_o = \left(x_{o1}, x_{o2}, ..., x_{oK}, o, ..., o \right)$$

la solución factible básica inicial con

$$\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, ...,\vec{v}_K\}$$

los vectores columna de la matriz A asociados a las componentes no nulas que verifican ser linealmente independientes. La función objetivo es

$$z = C^t \cdot x$$

que aplicada en x = x_o

$$z_o = \sum_{i=1}^{K} C_i x_{oi}$$

y sea

$$z_j = \sum_{i=1}^{K} C_i x_{ji} \quad \text{con} \quad \vec{v}_j = \sum_{i=1}^{K} x_{ji} \vec{v}_i \qquad K+1 \leq j \leq n$$

TEOREMA

Si en un problema de minimización se verifica

$$z_j - c_j \leq 0 \quad 1 \leq j \leq n$$

entonces x_o es un punto óptimo. Si el problema fuese de maximización el óptimo se daría cuando

$$z_j - c_j \geq 0 \quad 1 \leq j \leq n$$

<u>Dem.</u>

Vamos a demostrar el teorema para el caso de un problema de minimización.

Sea $y = (y_1, y_2, ..., y_n)$ una solución factible básica y $z^* = c^t \cdot y$

Se verifica

$$y_i \geq 0 \qquad 1 \leq i \leq n$$

$$\sum_{i=1}^{n} y_i \vec{v}_i = B$$

Como $\{\vec{v}_1, ..., \vec{v}_K\}$ son L. I. y los $\vec{v}_j$ con $K+1 \leq j \leq n$ pueden expresar como combinación lineal de los K primeros tenemos.

$$\vec{v}_j = \sum_{i=1}^{K} x_{ji} \vec{v}_i \qquad K+1 \leq j \leq n$$

$$\sum_{j=1}^{n} y_j \cdot \left(\sum_{i=1}^{K} x_{ji} \vec{v}_i \right) = B \Rightarrow \sum_{i=1}^{K} \left(\sum_{j=1}^{n} y_j \cdot x_{ji} \right) \vec{v}_i = B \text{ con } \sum_{j=1}^{n} y_j x_{ji} = x_{oi}$$

Así pues, si

$$z_j - c_j \leq o \qquad 1 \leq j \leq n \Rightarrow z_j \leq c_j \qquad 1 \leq j \leq n$$

Por tanto:

$$z^* = \sum_{j=1}^{n} c_j y_j \geq \sum_{j=1}^{n} z_j y_j = \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{K} c_i x_{ji} \right) y_j = \sum_{i=1}^{K} \left(\sum_{j=1}^{n} x_{ji} y_j \right) c_i = \sum_{i=1}^{K} x_{oi} c_i = z_o$$

$\Rightarrow z^* \geq z_o$ luego z_o es mínima.

¿Qué sucede si la desigualdad

$$z_j - c_j \leq 0$$

en el caso de un problema de minimización no fuese cierta para $1 \leq j \leq n$?

Existen dos posibilidades:

- No hay solución.
- Podemos obtener otra solución factible básica más pequeña que la inicial, al no ser óptima ésta.

Veamos como obtenerla.

Sea $x_o = (x_{o1}, x_{o2}, \ldots, x_{oK}, 0, \ldots, 0)$ una solución factible básica tal que existe un $m \in \{1, \ldots, n\}$ con $z_m - c_m > 0$.

Sea $\vec{v}_j = \sum_{i=1}^{K} x_{ji} \vec{v}_i \qquad K + i \leq j \leq n$

$B = \sum_{i=1}^{K} x_{oi} \vec{v}_i$ ya que x_o es solución

$$\Rightarrow B = \sum_{i=1}^{K} x_{oi} \vec{v}_i - \lambda \vec{v}_m + \lambda \vec{v}_m = \sum_{i=1}^{K} (x_{oi} - \lambda x_{mi}) \vec{v}_i + \lambda \vec{v}_m$$

Si $x_{mi} \geq 0 \quad \forall_m$ el valor de la función objetivo no puede estar acotado inferiormente ya que el nuevo punto extremo sería

$$x = (x_{oi} - \lambda x_{m1}, \ldots, x_{oK} - \lambda x_{mK}, 0, \ldots, \lambda, \ldots, 0)$$

y entonces

$$z^* = c^t x = \sum_{i=1}^{K} c_i (x_{oi} - \lambda x_{mi}) + \lambda c_m = \sum_{i=1}^{K} c_i x_{oi} - \lambda \sum_{i=1}^{K} c_i x_{mi} + \lambda c_m =$$

$$= z_o - \lambda z_m + \lambda c_m = z_o + \lambda (c_m - z_m) < z_o \quad \text{ya que } c_m - z_m < 0$$

Por tanto, dándole a λ valores cada vez mayores el valor de z^* es tan próximo a $-\infty$ como queramos. Luego la función objetivo no está acotada inferiormente.

Si algún $x_{mi} > 0$ (por ejemplo i = 1) $\lambda = min\left\{\frac{x_{oi}}{x_{mi}}\right\} = \frac{x_{o1}}{x_{m1}}$ para $x_{mi} > 0$ podemos obtener otra solución factible básica que satisface

$$x = \left(0, x_{02} - \lambda x_{m2}, \ldots, x_{oK} - \lambda x_{mK}, 0, \ldots, \lambda, \ldots, 0\right)$$

$$z^* = c^t x = \sum_{i=2}^{K} c_i\left(x_{oi} - \lambda x_{mi}\right) + \lambda c_m = z_o - \lambda z_m + \lambda c_m = z_o + \lambda\left(c_m - z_m\right) < z_o$$

De forma análoga podemos verlo en el caso de un problema de maximización.

7. SOLUCIONES DEGENERADAS.

DEF Una solución factible básica es degenerada cuando al menos una de las componentes es nula. Es decir, si tenemos el conjunto linealmente independiente $\{\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_K\}$ tal que $\sum_{i=1}^{K} x_{oi} \cdot \vec{v}_i = B$, diremos que la solución factible básica $x_o = \left(x_{o1}, x_{o2}, \ldots, x_{oK}, 0, \ldots, 0\right)$ es degenerada si al menos $x_{oi} = 0$ para algún $i \in \{1, \ldots, K\}$.

Si se da esta situación no podemos hacer uso del método simplex, ya que la nueva solución no mejoraría la solución degenerada inicial.

Para poder resolver este problema, hemos de tener en cuenta que la solución degenerada x_o lleva asociada la base $P = \{\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_K\}$ de $\mathbb{R}^K$ tal que $x_o = P^{-1} \cdot B$.

Sea ε > 0 suficientemente pequeño y hacemos que las restricciones sean función de ε:

$$x_1\vec{v}_1 + x_2\vec{v}_2 + \ldots + x_n\vec{v}_n = B + \varepsilon\vec{v}_1 + \varepsilon^2\vec{v}_2 + \ldots + \varepsilon^n\vec{v}_n = B(\varepsilon)$$

La solución vendrá dada por

$$x_o(\varepsilon) = p^{-1} \cdot B(\varepsilon)$$

Si $L_j = p^{-1} \cdot v_j = \left(\lambda_{1j}\, \lambda_{2j} \ldots \lambda_{Kj}\right)^t \Rightarrow x_o(\varepsilon) = x_o + \varepsilon L_1 + \varepsilon^2 L_2 + \ldots + \varepsilon^n L_n$

Así los L_j de los vectores de la base se compondrán de ceros excepto el elemento j-ésimo, que será la unidad. Los L_j de los vectores que no pertenecen a la base tendrán la forma general $(K + 1 \leq j \leq n)$.

Para saber el $\vec{v}_i$ que eliminaremos de la base, bastaría tomar

$$min\left\{\frac{x_{oi}(e)}{l_{ij}} > 0 \,/\, 1 \leq i \leq K\right\}$$

8. DUALIDAD.

DEF Dado un problema de programación lineal

$$\begin{aligned} \min \quad & z = c^t \cdot x \\ & Ax > B \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

definimos el problema dual del anterior como

$$\begin{aligned} \max \quad & t = y \cdot B \\ & y \cdot A \leq C \\ & y \geq 0 \end{aligned}$$

Análogamente, si el problema es de maximizar, siendo su dual de minimizar.

TEOREMA. Teorema de dualidad.

Dado un problema de programación lineal, si posee solución óptima finita, entonces el dual también posee solución óptima finita y además min z = max t. La solución del dual es $y_o = C_o \cdot p^{-1}$, siendo también la solución óptima del problema inicial.

Con este teorema podemos resolver un problema de programación lineal a partir de su dual, y recíprocamente.

La dualidad es involuntaria, es decir, el dual del dual es el problema inicial.

9. APLICACIONES.

Actualmente la programación lineal aborda cuestiones ajenas a la geometría. Un ejemplo es el problema del transporte, que surge al tener varios puntos de producción y varios de distribución, y se plantea el modo de distribuir los productos para que el coste sea mínimo.

El problema del transporte se formula por primera vez en 1941 – 42, por Koopmans y Kantorovith de forma independiente.

En 1958 se aplicaron métodos de programación lineal para obtener el plan óptimo de transporte de arena para la construcción del edificios en la ciudad de Moscú. Existían 10 puntos de partida y 230 de llegada. Se consiguió rebajar en un 11% los gastos respecto a los costes previstos.

Otro de los problemas más comunes es el de la dieta. Se trata de determinar las cantidades diferentes de alimentos que hay que proporcionar a una persona o animal para poder asegurarle una alimentación suficiente con un coste mínimo.

Bibliografía Recomendada.

Programcion lineal. S.J. Gross. Ed: Comp. edit. continental

Programación matematica. A. Balbás.J.A. Gil. Ed: AC

Programación Lineal. Simonard