TEMAS DE MATEMÁTICAS
(Oposiciones de Secundaria)

TEMA 34

ANÁLISIS Y FORMALIZACIÓN DE LOS CONCEPTOS GEOMÉTRICOS INTUITIVOS: INCIDENCIA, PARALELISMO, PERPENDICULARIDAD, ÁNGULO, ETC.

TEMA 34

ANÁLISIS Y FORMALIZACIÓN DE LOS CONCEPTOS GEOMÉTRICOS INTUITIVOS: INCIDENCIA, PARALELISMO, PERPENDICULARIDAD, ÁNGULO, ETC.

1. INTRODUCCIÓN.

En geometría nos podemos permitir no definir determinados términos y poder usarlos como primarios, es decir, tomarlos como si fuesen una base para definir otros. Estos términos por ejemplo son los conceptos de punto, recta y plano.

Pero este concepto es totalmente moderno, pues Euclides si que intento definir estos conceptos utilizando nomenclatura no geométrica. En el libro I de los Elementos de Euclides, la definición 1 dice que: "Un punto es aquello que no tiene parte", aunque esta definición no deja totalmente claro lo que es un punto, pues salvo que tengamos una idea intuitiva de lo que es un punto esta definición no nos lo aclararía.

La definición 2 dice que: "Una recta es longitud sin anchura". Pero Euclides en ningún momento definió lo que era longitud ni anchura.

2. PUNTOS, RECTAS Y PLANO.

Aunque los conceptos de punto, recta y plano son términos que quedarán indefinidos, podemos intentar definir un punto de una manera intuitiva como una localización en el espacio.

A los puntos normalmente los denotaremos por las letras P, Q, R, etc.

Igualmente podemos definir una recta, como una línea recta, es decir, aquella que se prolonga infinitamente en cada dirección, o mejor dicho, en ambos sentidos. Representaremos a la recta como una línea trazada en el papel con flechas en sus extremos. Denotaremos a las rectas por L_1, L_2, etc.

Todos los conjuntos que hemos definido, al igual que cualquier conjunto en geometría, son conjuntos de puntos. Esto nos permite identificar una recta mediante dos puntos que pertenezcan a ellas, por eso si tenemos una recta L, y dos puntos P y Q que pertenezcan a ella, podemos representar a L, como PQ.

Podemos definir un Plano, de manera intuitiva, como una superficie plana que se extiende hacia el infinito y en todas las direcciones. Para representar al plano utilizaremos letras griegas como Π, Σ, etc.

Por último definiremos el espacio como el conjunto de todos los puntos, siendo el plano y la recta subconjuntos del espacio, y el punto son los elementos del espacio.

3. PROPIEDADES DE LA DIVISIÓN DE CONJUNTOS DE PUNTOS.

Dada una recta L y un punto P que pertenece a dicha recta se dice que P divide a L en tres partes, una de ellas es el propio punto P y los otros dos subconjuntos los llamaremos semirrectas y contienen cada uno a todos los puntos que están a cada lado del punto P. Si formamos un subconjunto en el que incluimos una semirrecta y el punto P tenemos lo que llamaremos un *rayo*, siendo P el llamado *punto extremo del rayo*.

Si tenemos dos rayos que verifican que su unión es una recta y que tiene en común un punto (el punto extremo de cada rayo) entonces tenemos lo que llamaremos rayos opuestos.

Dada una recta L y dados dos puntos P y Q de la recta L, definiremos un segmento como el subconjunto de la recta L formado por todos los puntos que se encuentran entre P y Q. Denotaremos el segmento formado por todos los puntos que hay entre P y Q por $\overline{PQ}$, y este segmento lo podemos considerar como la intersección de los dos rayos.

Análogamente a la idea de que un punto divide a una recta en tres partes iguales, podemos decir que una recta divide en tres partes iguales a un plano, que son:

a) La propia recta
b) Los puntos que hay a cada lado de la recta y que los llamaremos semiplanos.

Si denotamos por Π_1, y Π_2 a los dos semiplanos que hay a cada lado de una recta L, tenemos que si tomamos dos puntos cualesquiera P y Q tales que P está en Π_1 y Q esta en Π_2 entonces el segmento $\overline{PQ}$ tiene un solo punto en común con L, mientras que si tomamos dos puntos P y R que pertenecen ambos al mismo semiplano entonces el segmento PR no tiene ningún punto en común con la recta L.

En consonancia con todo lo anterior tenemos que un plano divide al espacio en dos partes. Estas divisiones están relacionadas con la idea de dimensión. Por ejemplo si tomamos el espacio tridimensional, se tendrá que un plano tendrá dimensión dos, una recta tendrá dimensión uno, y cada punto tiene dimensión cero.

4. AXIOMAS Y TEOREMAS.

Vamos a ofrecer ahora un enfoque formal de la geometría enunciando las siguientes axiomas, definiciones, teoremas, etc.

Axioma1: Dos puntos diferentes determinan una única recta. Esto justifica nuestra idea de que una recta L se puede representar mediante dos puntos P y Q que pertenecen a la recta. Y además debemos tener en cuenta que si tenemos una recta L y tres puntos P, Q, y R que pertenecen a la recta L, se tiene que PQ=PR, es decir, la recta representada por PQ es la misma que la representada por PR.

DEF Dada un recta L y dos puntos P y Q que están sobre L, se dice que P y Q son colineales.

DEF Dado un plano Π y tres puntos P, Q y R que están sobre el plano Π, entonces se dice que estos puntos son coplanares.

Axioma 2: tres puntos no colineales determinan un plano único.

Axioma 3: si dos puntos pertenecen a un plano, entonces la recta que los contiene está en el plano.

Axioma 4: si dos planos diferentes se intersectan, entonces su intersección es una recta.

Axioma 5: una recta contiene por lo menos dos puntos.

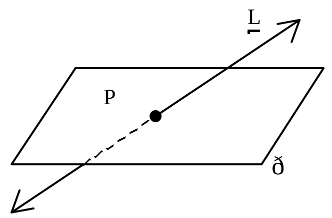
DEF Dadas dos rectas L_1, L_2, se dice que L_1 y L_2 son paralelas si están en un mismo plano y su intersección es el conjunto vacío, es decir, si no tienen ningún punto en común.

Teorema 1: Dos rectas diferentes se intersectan a lo más, en un punto.

Dem.

Sean L_1 y L_2 dos rectas diferentes y supongamos que su intersección no es a lo más un punto. Entonces su intersección contiene dos puntos (o más), llamémosle P y Q. Esto significa que tenemos dos rectas diferentes L_1, L_2, ambas conteniendo a P y Q. Pero por el axioma 1 esto es imposible ya que hay solamente una recta que contiene a los puntos P y Q.

Teorema 2: Si una recta L intersecta al plano Π y no está contenida en él, entonces la intersección es un punto.



Dem.

Hay que probar que $L \cap \Pi$ es un solo punto, ya que $L \cap \Pi$ es distinto del vacío por hipótesis.

Supongamos que $L \cap \Pi$ contiene más de un punto, digamos P y Q. Entonces P y Q están ambos en L y por el axioma 1 PQ=L. Como P y Q están ambos en Π, por el axioma 3, L debe estar en el plano Π, lo cual contradice nuestra hipótesis, por lo tanto $L \cap \Pi$ contiene exactamente un punto.

Teorema 3: Dada una recta L y un punto P que no pertenece a ella, hay exactamente un plano que contiene a ambos.

Dem.

Sean Q y R dos puntos diferentes sobre L que existen por el axioma 5. Entonces Q y R son puntos diferentes de P, ya que P no está sobre L. Por el axioma 2, los puntos P, Q y R determinan un plano único Π. Como Q y R están en Π, que contiene a P y a L, si hubiera dos planos, ambos contendrían a los tres puntos P, Q y R y esto es imposible por el axioma 2.

Teorema 4: Si dos rectas se intersectan, entonces su unión está contenida exactamente en un plano.

Dem.

Sean L_1 y L_2 dos rectas que se intersectan, entonces por el teorema 1, $L_1 \cap L_2$ es un punto P. Por lo tanto P es un punto de L_1 y L_2. Sea Q un punto de L_2, $Q \neq P$, que existe por el axioma 5. Por el axioma 1 $PQ=L_2$, además $Q \notin L_1$ ya que sino $L_1 = L_2$.

Consideremos el punto Q y la recta L_1, utilizando el teorema 3 hay exactamente un plano Π que contiene a L_1 y Q. Como P es un punto de L_1, P está contenido en Π y por el axioma 3 $PQ=L_2$ está contenido en Π. Luego $L_1 \cup L_2$ están contenidos en Π. Veamos que dicho plano Π es único. Por el teorema 3 el plano es único.

Sean P y R contenidos en L_1 y P y Q contenidos en L_2 con P, Q y R distintos (esto ocurre por el axioma 5). Si existe un plano Π' que contiene a $L_1 \cup L_2$, entonces Π' contiene a P, Q y R, pero esto contradice el axioma 2 ya que hay un único plano que contiene a P, Q y R que es Π.

Luego no hay ningún otro plano que contenga a $L_1 \cup L_2$ y el teorema queda demostrado.

5. INTERSECCIONES DE CONJUNTOS DE PUNTOS EN EL ESPACIO.

5.1. Intersección entre dos rectas.

Dadas dos rectas L_1 y L_2 en el espacio puede ocurrir que:

a) Si su intersección es un punto, entonces ambas rectas están contenidas en un mismo plano y se cortan en un punto, este caso se dice que son secantes.
b) Si su intersección son dos o más puntos entonces tienen en común todos sus puntos y se dice que son coincidentes.
c) Si su intersección es el vacío y pertenecen a un mismo plano entonces se dice que ambas rectas son paralelas.
d) Si su intersección es el vacío y no pertenecen al mismo plano entonces se dice que ambas rectas son oblicuas, o lo que es igual, las rectas se cruzan.

5.2.- Intersección entre dos planos.

Dados dos planos Π_1 y Π_2 en el espacio puede ocurrir que:

a) Ambos planos no tengan en común ningún punto, y en este caso se dice que ambos planos son paralelos.

b) Ambos planos tienen una recta en común, entonces se dice que los planos se cortan en una recta.
c) Ambos planos se cortan en una recta y en un punto que no pertenece a la recta, entonces se dice que ambos planos son coincidentes.

5.3.- Intersección entre una recta y un plano.

Dados un plano Π y una recta L del espacio, se tiene que:

a) Si el plano Π y la recta L tienen un punto en común se dice que son secantes.
b) Si el plano Π y la recta L tienen dos o más puntos en común entonces se dice que la recta está contenida en el plano y la intersección entre ambos es la propia L.
c) Si el plano Π y la recta L no tienen ningún punto en común entonces se dice que la recta y el plano son paralelos.

5.4.- Intersección entre tres planos.

Dados tres planos Π_1, Π_2, Π_3 en el espacio se tiene que:

a) Los tres planos son paralelos entre si, no tienen ningún punto en común.
b) Dos planos son coincidentes y el tercero es paralelo a ellos.
c) Dos planos paralelos y el tercero los corta.
d) Los tres planos se cortan dos a dos.
e) Los tres planos se cortan en una recta, siendo todas distintas.
f) Dos planos coincidentes y uno que los corta, de manera que los tres planos tienen una recta en común.
g) Los tres planos son coincidentes entre si.
h) Los tres planos se cortan en un punto.

6. ÁNGULOS.

Sean dos rayos PQ y PR tales que tienen el punto P en común, y además se verifica que el punto P es extremo en ambos casos, entonces puede ocurrir que su unión sea una recta, en cuyo caso diríamos que los rayos son opuestos, pero si no son opuestos, definen lo que llamaremos ángulo.

DEF Sean dos rayos con el punto extremo en común y tales que no forman una recta, se define ángulo como el conjunto de puntos en el plano que verifican esta propiedad y lo denotaremos por $\angle$QPR.

Como claramente podemos observar un ángulo divide al plano en tres partes:

a) Una es el propio ángulo, es decir, el conjunto de puntos que pertenecen a los rayos que lo forman.
b) Otra es el interior, que el conjunto de puntos que hay en común entre los semiplanos siguientes:
    - El semiplano de la recta $\overline{PQ}$ que contiene al punto R.

- El semiplano de la recta $\overline{PR}$ que contiene al punto Q.

c) Y por último el exterior que es el resto de puntos del plano que no son el interior ni el ángulo.

DEF Dados dos ángulos $\angle$QPR y $\angle$SPT se dice que son opuestos por el vértice p si su unión forma dos rectas.

DEF Dos ángulos $\angle$QPR y $\angle$RPS se dice que son adyacentes si tienen el vértice en común y su intersección es un rayo.

7. MEDIDA Y CONGRUENCIA.

7.1. Medida y congruencia de segmentos de recta.

Sea una recta L, si tomamos en ella un punto cualquiera y lo designamos con el valor "0", al tomar otro punto cualquiera y denotarlos con el valor "1" (siempre y cuando sea distinto del anterior) podemos construir una recta numérica de manera que podamos asignar a cada punto de la recta un número real y a cada número real un punto de L, siendo la unidad de medida que tomamos la distancia entre los dos puntos arbitrarios que hemos denotado por "0" y "1".

Al poder identificar cada punto de L con un número real establecemos lo que se llama un sistema coordenado, y a partir de ahora a cada punto de la recta le asignaremos un número real, dentro de la escala elegida, y a este número real lo llamaremos coordenada del punto, e identificaremos cada punto de la recta mediante su coordenada.

Esto nos permitirá medir la longitud de cada segmento $\overline{PQ}$, simplemente tendremos que comparar este segmento con la unidad de la escala elegida siendo su longitud el número de veces que hay que repetir la unidad de la escala para ir desde P hasta Q o viceversa.

Por lo tanto podemos suponer que toda recta tiene asociado un sistema coordenado, y a esto lo llamaremos axioma de la regla.

DEF Dada una recta L, que tiene asociado un sistema coordenado tal que asigna al punto P el número real x y al punto Q el número real y, tenemos que se define la distancia o longitud del segmento $\overline{PQ}$ como:

$$PQ = |x-y|$$

Nota: Evidentemente la longitud de un segmento es un número real positivo.

PROP Si el segmento $\overline{AB} \subset \overline{PQ} \Rightarrow AB \leq PQ$

PROP Si R es un punto que pertenece al segmento $\overline{PQ}$ entonces $\overline{PQ} = \overline{PR} + \overline{RQ}$.

DEF Dado un segmento $\overline{PQ}$ se define el punto medio de dicho segmento como el punto P_m que pertenece al segmento y tal que: $PP_m=P_mQ$

DEF Dados dos segmentos $\overline{PQ}$ y $\overline{AB}$ de una recta, no necesariamente iguales, se dice que son congruentes, "≅", si tienen la misma longitud, es decir:

$$\overline{PQ} \cong \overline{AB} \Leftrightarrow PQ = AB$$

7.2. Medida y congruencia de ángulos.

Para medir ángulos usamos una semicircunferencia. Consideremos la semicircunferencia con centro en C. Supondremos que el arco de circunferencia, desde A hasta B, puede ser dividido en n partes iguales, por cualquier número positivo. Podemos llamar a esta suposición "Axioma del Transportador". Cogemos n =180.

Tenemos entonces una correspondencia de uno a uno entre los puntos sobre una circunferencia y los números reales entre 0 y 180. Este es un sistema coordenado para la semicircunferencia.

Podemos usar este sistema coordenado para medir cualquier ángulo. Por ejemplo $\angle PQR$. Para ello colocamos nuestra escala de tal forma que el centro C de la semicircunferencia quede sobre el vértice Q del ángulo y el rayo QR sobre el rayo CB.

El rayo QP intersectará al arco en algún punto de coordenada t y decimos que la medida del $\angle PQR$ es t y se escribe $m\angle PQR = t$.

Si dividimos la semicircunferencia en 180 partes iguales la unidad de medida se denomina grado.

Otra medida de medir ángulos consiste en usar la unidad llamada radian.

PROPIEDADES DE LAS MEDIDAS DE ÁNGULOS

1.- La medida de un ángulo en grados es un número real positivo entre 0 y 180. Esto es consecuencia de nuestra definición de ángulo como unión de rayos.

2.- Si P es un punto interior del $\angle ABC$ entonces.

$$m\angle ABP < m\angle ABC$$

3.- Si P es un punto en el interior del $\angle ABC$, entonces:

$$m\angle ABP + m\angle PBC = m\angle ABC$$

Clasificación de ángulos

Podemos clasificar los ángulos de acuerdo con su medida.

Si un ángulo mide 90 se llama recto.
Si un ángulo mide menos de 90 se llama agudo.
Si un ángulo mide más de 90 se llama obtuso.

Dos ángulos son complementarios si suma 90º y suplementarios si suman 180º.

Congruencia de ángulos.

Dos ángulos son congruentes si tienen la misma medida. Por lo tanto, todos los ángulos rectos son congruentes. Decir que dos ángulos son congruentes no implica que sean iguales ya que los ángulos son conjuntos de puntos.

TEOREMA Si dos ángulos son congruentes entonces sus suplementos son congruentes.

Dem.

(Vamos a representar los ángulos únicamente por su vértice)

Supongamos $\angle A \cong \angle B$. Entonces m $\angle A$ = m $\angle B$ y esta medida es algún número n, entre 0 y 180.

Por lo tanto el suplemento de $\angle a$ debe medir 180 – n. Y como tienen la misma medida son congruentes.

TEOREMA Los ángulos opuestos por el vértice con congruentes.

Dem.

Consideremos los ángulos opuestos por el vértice $\angle ABC$ y $\angle PBR$. Como AR es una recta, $\angle ABP$ es suplemento de $\angle ABC$ y como también CP es una recta $\angle ABP$ es suplemento de $\angle PBR$. Por tanto, $\angle ABC$ y $\angle PBR$ tienen el mismo ángulo suplementario, el $\angle ABP$; y como $\angle ABP$ es congruente con él mismo, concluimos por el teorema anterior que $\angle ABC$ es congruente con $\angle PBR$.

8. PERPENDICULARIDAD

DEF Decimos que dos rectas que se intersectan son perpendiculares si su unión contiene un ángulo recto.

Podemos también definir la relación "es perpendicular a" entre dos rayos, o entre dos segmentos de recta. Se dice que dos rayos son perpendiculares si las rectas que los contienen son perpendiculares; y en la misma forma, dos segmentos de recta son perpendiculares si las rectas que los contienen son perpendiculares. Consecuentemente, dos rayos o dos segmentos de recta pueden ser perpendiculares aún cuando su intersección sea vacía.

Utilizando ángulos adyacentes podemos definir las rectas perpendiculares de otra manera.

DEF Dos rectas que se intersectan son perpendiculares si su unión contiene dos ángulos adyacentes congruentes.

El axioma de perpendicularidad, establece que, dado un punto y una recta, existe una y sólo una perpendicular a la recta que pase por el punto.

9. PRUEBAS DE PARALELISMO.

Al definir la relación de paralelismo entre dos rectas, hemos dicho que dos rectas son paralelas, si están en el mismo plano y no se intersectan. Si L_1 y L_2 son rectas paralelas, lo denotamos por $L_1 \,//\, L_2$.

Tal como hemos definido perpendicularidad entre rayos o segmentos de recta, podemos decir que dos rayos o dos segmentos de recta son paralelos, si las rectas que lo contienen lo son.

Pero esta definición no es muy útil ya que dos segmentos en el plano pueden parecer paralelos, pero, puesto que las rectas determinada por ellos son infinitas en extensión, podemos no ser capaces de afirmar si estas rectas se intersectan o no.

Por lo tanto, necesitamos desarrollar algunas pruebas, además de la definición de paralelismo.

TEOREMA Si dos rectas están en el mismo plano y son perpendiculares a la misma recta, entonces son paralelas.

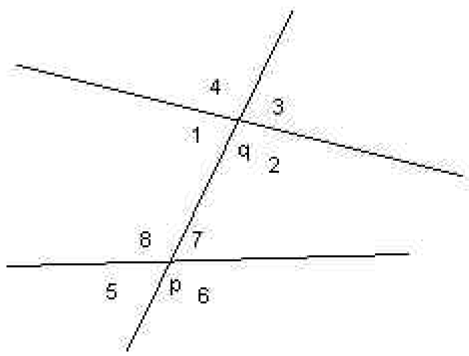
Dem.

Para demostrar este teorema hacemos uso del axioma de perpendicularidad que dice que dada una recta L y un punto P, no contenido en L, una y sólo una recta puede ser trazada pasando por P, y que sea perpendicular a L.

Sean L_1, L_2 y T tres rectas pertenecientes al mismo plano, tales que $L_1 \perp T$ y $L_2 \perp T$. Queremos probar que $L_1 \,//\, L_2$.

Supongamos que L_1 no es paralela a L_2. Entonces $L_1 \cap L_2$ contiene exactamente un punto P: es decir, hay dos rectas L_1 y L_2 que pasan por P y son perpendiculares a T. Pero esto contradice el axioma de perpendicularidad. Luego $L_1 \,//\, L_2$.

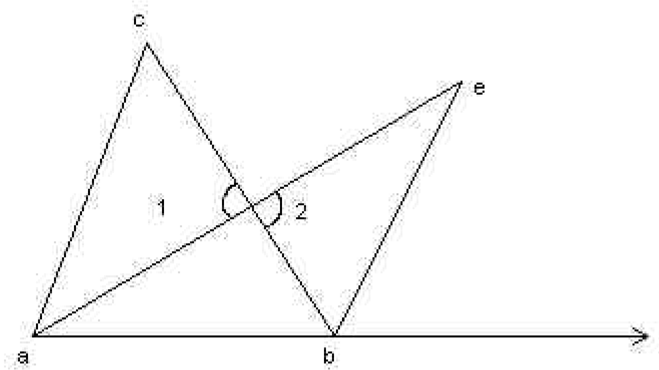
DEF Dadas tres rectas,



los ángulos $\angle 1$ y $\angle 3$ son opuestos por el vértice y $\angle 1$ y $\angle 7$ son ángulos alternos internos, entonces llamaremos $\angle 3$ y $\angle 7$ ángulos correspondientes.

LEMA La medida de un ángulo exterior a un triángulo, es mayor que la medida de cualquiera de los dos ángulos interiores opuestos.

Dem.



Sea el triángulo de vértices ΔABC

Calculamos el punto medio m de $\overline{CB}$ y trazamos $\overline{AE}$, tal que $\overline{AM} \cong \overline{ME}$.

Trazamos $\overline{EB}$.

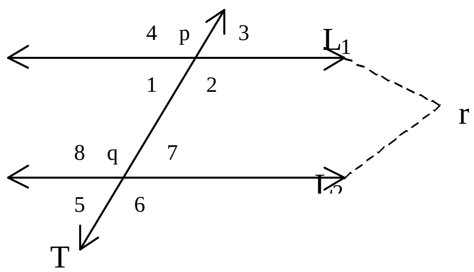
Ahora $\overline{CM} \cong \overline{MB}$ por construcción, $\overline{AM} \cong \overline{ME}$ por la misma razón y $\angle 1$ y $\angle 2$ son congruentes ya que son ángulos opuestos por el vértice. Como $\Delta AMC \cong \Delta EMB$ ya que podemos establecer una correspondencia de igualdad de ángulos y lados entonces $\angle CBE \cong \angle C$

Pero E está contenido en el ángulo exterior, $\angle CBD$, entonces por las propiedades de la medida de ángulos $m\angle CBE < m\angle CBD$

Luego concluimos $m\angle C < m\angle CBD$ y análogamente $m\angle A < m\angle CBD$.

TEOREMA Si dos rectas en el plano son cortadas por una transversal de forma que un par de ángulos correspondientes sean congruentes, entonces estas dos rectas son paralelas.

Dem.



Sea L_1 y L_2 dos rectas en el plano, cortadas por una transversal T en los puntos P y Q respectivamente. Y supongamos que $L_3 \cong L_7$. Queremos probar que L_1 // L_2.

Supongamos que L_1 y L_2 no lo son. Entonces se cortan en algún punto R que podemos suponer a la derecha de T. Por lo tanto PQR es un triángulo y $\angle 8$ es un ángulo exterior a él. Pero $\angle 8 \cong \angle 2$ (por ser ángulos alternos internos y ser $\angle 3 \cong \angle 7$ y $\angle 2$ es un ángulo interior, opuesto al $\angle 8$. Esto contradice al lema, ya que la medida de un ángulo exterior debe ser mayor que la media de un ángulo interior opuesto. Luego L_1 es paralelo a L_2.

<u>Bibliografía Recomendada.</u>

Margaret Wiscamb Hutchinson "Geometría, un enfoque intuitivo". Ed: trilles

Edwin E. Morse "Geometría elemental desde un punto de vista avanzado". Ed: C.E.C.S.A.