TEMAS DE MATEMÁTICAS
(Oposiciones de Secundaria)

TEMA 38

TRIGONOMETRÍA PLANA. RESOLUCIÓN DE TRIÁNGULOS

TEMA 38

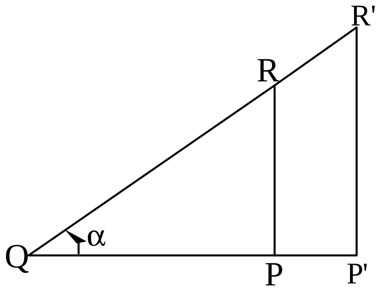
TRIGONOMETRÍA PLANA. RESOLUCIÓN DE TRIÁNGULOS

1. CONCEPTOS SOBRE TRIGONOMETRÍA.

1.1. Definición

Dados dos triángulos rectángulos PQR y P'QR', se dice que son semejantes si tienen un mismo ángulo α en el vértice Q

Por ser semejantes se cumple que las relaciones que hay entre dos lados cualesquiera de uno de los triángulos son las mismas que las que hay entre los lados equivalentes del otro triángulo.



Tales relaciones dependen del ángulo α, y si éste varía, también varían las relaciones que se establecen. Las relaciones los podemos definir de la siguiente forma:

$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{\overline{RP}}{\overline{RQ}} = \frac{\overline{R'P'}}{\overline{R'Q}} \qquad \cos\alpha = \frac{\overline{PQ}}{\overline{RQ}} = \frac{\overline{P'Q}}{\overline{R'Q}} \qquad \operatorname{tg}\alpha = \frac{\overline{RP}}{\overline{PQ}} = \frac{\overline{R'P'}}{\overline{P'Q}}$$

$$\operatorname{cosec}\alpha = \frac{1}{\operatorname{sen}\alpha} = \frac{\overline{RQ}}{RP} \qquad \sec\alpha = \frac{1}{\cos\alpha} = \frac{\overline{RQ}}{PQ} \qquad \operatorname{cotg}\alpha = \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha} = \frac{\overline{PQ}}{\overline{RP}}$$

Una vez definidas estas relaciones trigonométricas básicas podemos intentar establecer, a su vez, otras relaciones entre ellas.

Utilizando el teorema de Pitágoras tenemos que:

$$\overline{RP}^2 + \overline{PQ}^2 = \overline{RQ}^2 \qquad \text{y dividiendo toda la ecuación por } \overline{RQ}^2 \text{ resulta}$$

$$\left(\frac{\overline{RP}}{\overline{RQ}}\right)^2 + \left(\frac{\overline{PQ}}{\overline{RQ}}\right)^2 = 1 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\operatorname{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1}$$

Por otro lado:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\overline{RP}}{\overline{PQ}} = \frac{\frac{\overline{RP}}{\overline{RQ}}}{\frac{\overline{PQ}}{\overline{RQ}}} = \frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\operatorname{tg}\alpha = \frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha}}$$

Por último, utilizando la ecuación $\operatorname{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ y dividiéndola por $\cos^2\alpha$, obtenemos:

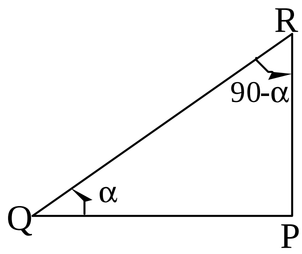
$$\frac{\operatorname{sen}^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} + \frac{\cos^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\operatorname{tg}^2 \alpha + 1 = \sec^2 \alpha}$$

1.2. Razones de ángulos complementarios.

Si tomamos un triángulo rectángulo igual que el anterior y le calculamos las razones trigonométricas al otro ángulo distinto del ángulo α y distinto del ángulo recto (o sea, del ángulo en R), podemos relacionarlas con las de α, Además, como el otro ángulo es de 90–α grados, lo llamaremos ángulo complementario al α, porque la suma de ambos da 90º.

$$\operatorname{sen}(90-\alpha) = \frac{\overline{PQ}}{\overline{QR}} = \cos\alpha \qquad \cos(90-\alpha) = \frac{\overline{RP}}{\overline{QR}} = \operatorname{sen}\alpha$$

$$\operatorname{tg}(90-\alpha) = \frac{\overline{PQ}}{\overline{RP}} = \frac{\cos\alpha}{\operatorname{sen}\alpha} = \operatorname{cotg}\alpha$$



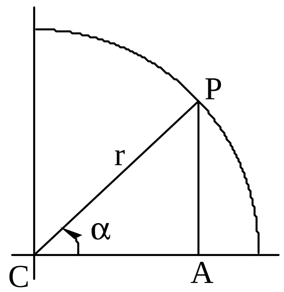
1.3. Otra definición de razón trigonométrica.

Si trazamos una circunferencia de radio *r* y sobre ella tomamos un punto P y creamos con ese punto, con el centro de la circunferencia y con el punto del eje OX que es caída perpendicular de P sobre el eje (punto A) un triángulo, se cumple que:

$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{\overline{AP}}{r}$$

$$\cos\alpha = \frac{\overline{AC}}{r}$$

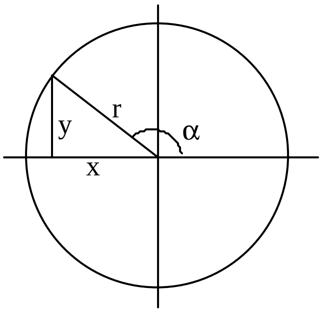
$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\overline{AP}}{\overline{AC}}$$



<u>Definición</u> Definiendo un triángulo de la misma forma que antes, pero sobre una circunferencia de radio unidad *r*=1, se tiene que se define el seno de α como la longitud del cateto vertival de dicho triángulo y el coseno de α como la longitud del cateto horizontal de dicho triángulo.

1.4. Razones de ángulos obtusos.

Si creamos triángulos igual que antes pero tomando puntos de la circunferencia que no están en el primer cuadrante, las razones del ángulo que forma la hipotenusa con respecto a la parte positiva del eje OX, vienen dadas por:



$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{y}{r}$$

$$\cos\alpha = \frac{x}{r}$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{y}{x}$$

Pero como (x,y) está en el 2º cuadrante, se tiene que, por definición, el seno es positivo, el coseno es negativo y la tangente es negativa.

Análogamente podemos comprobar que:

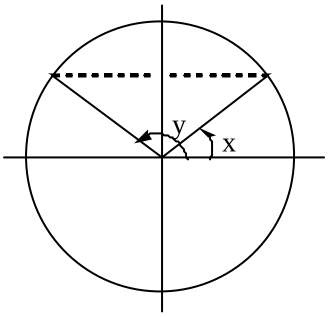
$$x^2 + y^2 = r^2 \quad \Rightarrow \quad \left(\frac{x}{r}\right)^2 + \left(\frac{y}{r}\right)^2 = 1 \quad \Rightarrow \quad \operatorname{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$

A todos los ángulos α definidos de esta forma, es decir, que son superiores a 90º , se les llama obtusos

1.5. Ángulos suplementarios.

Definición. Dados dos ángulos *x* e *y*, se dice que *x* e *y* son suplementarios si su suma es 180º, o sea $x+y=180º$.

Bajo estas condiciones tenemos:



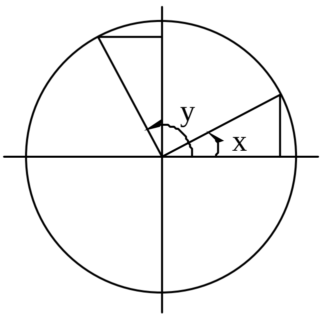
$$\operatorname{sen} y = \operatorname{sen}(180 - x) = \operatorname{sen} x$$

$$\cos y = \cos(180 - x) = -\cos x$$

$$\operatorname{tg} y = \operatorname{tg}(180 - x) = -\operatorname{tg} x$$

1.6. Ángulos que difieren en 90º.

Definición. Dados dos ángulos *x* e *y* se dice que son ángulos que difieren 90º si verifican que $y=90+x$:



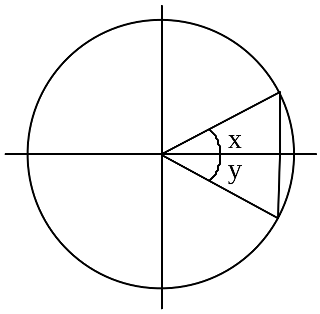
$$\operatorname{sen} y = \operatorname{sen}(90 + x) = \cos x$$

$$\cos y = \cos(90 + x) = -\operatorname{sen} x$$

$$\operatorname{tg} y = \operatorname{tg}(90 + x) = -\operatorname{cotg} x$$

1.7. Ángulos opuestos

Definición. Dados dos ángulos x e y se dice que son ángulos opuestos si se verifican que $y=-x$:



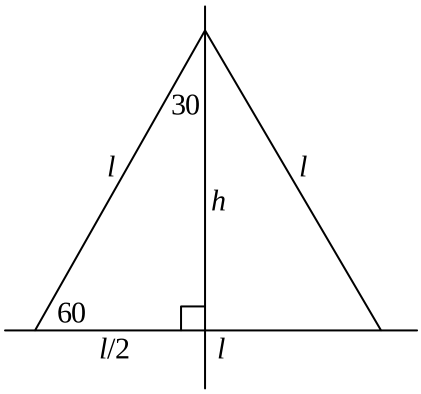
$$\operatorname{sen} y = \operatorname{sen}(-x) = -\operatorname{sen} x$$

$$\cos y = \cos(-x) = \cos x$$

$$\operatorname{tg} y = \operatorname{tg}(-x) = -\operatorname{tg} x$$

1.8. Razones trigonométricas de ángulos fundamentales.

- cos 0º = 1 ;   sen 0º = 0 ;   tg 0º = 0
- Tomando un triángulo equilátero, tenemos que



Como $$h^2 + \left(\frac{l}{2}\right)^2 = l^2 \Rightarrow$$

$$h^2 = l^2 - \frac{l^2}{4} = \frac{3l^2}{4} \quad \Rightarrow \quad h = \frac{\sqrt{3}}{2} l$$

entonces:

$$\operatorname{sen} 30^o = \frac{l/2}{l} = \frac{1}{2} \qquad \boxed{\operatorname{sen} 30^o = \frac{1}{2}}$$

$$\cos 30^0 = \frac{h}{l} = \frac{\sqrt{3}l/2}{l} = \frac{\sqrt{3}}{2} \qquad \boxed{\cos 30^0 = \frac{\sqrt{3}}{2}}$$

$$\operatorname{tg} 30^0 = \frac{\operatorname{sen} 30^o}{\cos 30^0} = \frac{1/2}{\sqrt{3}/2} = \frac{1}{\sqrt{3}} \qquad \boxed{\operatorname{tg} 30^0 = \frac{1}{\sqrt{3}}}$$

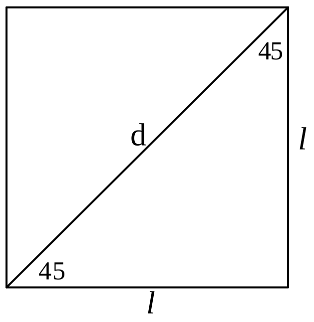
Como

$$\operatorname{sen} 60^o = \operatorname{sen}(90-30) = \cos 30 = \frac{\sqrt{3}}{2} \qquad \boxed{\operatorname{sen} 60^o = \frac{\sqrt{3}}{2}}$$

$$\cos 60^0 = \cos(90-30) = \operatorname{sen} 30 = \frac{1}{2} \qquad \boxed{\cos 60^0 = \frac{1}{2}}$$

$$\operatorname{tg} 60^0 = \frac{\operatorname{sen} 60^o}{\cos 60^0} = \frac{\sqrt{3}/2}{1/2} = \sqrt{3} \qquad \boxed{\operatorname{tg} 60^0 = \sqrt{3}}$$

- Tomando ahora un cuadrado de lado l resulta:



$$d^2 = l^2 + l^2 = 2l^2 \quad \Rightarrow \quad d = \sqrt{2}l$$

$$\operatorname{sen} 45^o = \frac{l}{d} = \frac{l}{\sqrt{2}l} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\operatorname{sen} 45^o = \frac{\sqrt{2}}{2}}$$

$$\cos 45^o = \frac{l}{d} = \frac{l}{\sqrt{2}l} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\operatorname{sen} 45^o = \frac{\sqrt{2}}{2}}$$

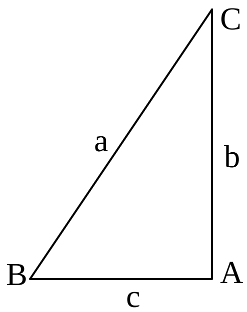
$$\operatorname{tg} 45^0 = \frac{\operatorname{sen} 45}{\cos 45} = \frac{\sqrt{2}/2}{\sqrt{2}/2} = 1 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\operatorname{tg} 45^0 = 1}$$

2. RESOLUCIÓN DE TRIÁNGULOS.

2.1. Resolución de triángulos rectángulos.

2.1.1. Conocido un lado y un ángulo del rectángulo.

a) Si conocemos la hipotenusa a y un ángulo agudo, por ejemplos B tenemos que:



C=90º $-$ B pues A=90º resultando entonces:

$$\operatorname{sen} B = \frac{b}{a} \quad \Rightarrow \quad b = a \operatorname{sen} B$$

$$\cos B = \frac{c}{a} \quad \Rightarrow \quad c = a \cos B$$

b) Si conocemos un cateto, el b, y un ángulo agudo, el B, por ejemplo, tendremos:

C= 90º $-$ B y A=90º luego

$$\operatorname{sen} B = \frac{b}{a} \quad \Rightarrow \quad a = \frac{b}{\operatorname{sen} B} \qquad \text{y} \qquad \operatorname{tg} B = \frac{b}{c} \quad \Rightarrow \quad c = \frac{b}{\operatorname{tg} B}$$

2.1.2. Conocidos dos lados.

a) Conocida la hipotenusa a y un cateto b por ejemplo, tendremos:

$$\operatorname{sen} B = \frac{b}{a} \quad \Rightarrow \quad B = \operatorname{arc\,sen} \frac{b}{a} \quad \text{y como } C = 90º - B. \quad \text{pues } A = 90º \text{ y } C = \sqrt{a^2 - b^2}$$

b) Conocidos los dos catetos *b* y *c*, tenemos que:

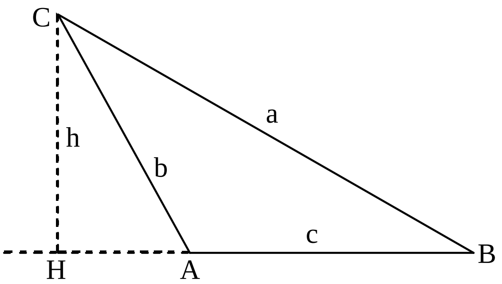
$$A=\sqrt{b^2+c^2} \quad \text{y como} \quad A=90^\circ \quad \text{tenemos que:}$$

$$\operatorname{tg} B=\frac{b}{c} \quad \Rightarrow \quad B=\operatorname{arc\,tg}\frac{b}{c} \quad \text{y} \quad C=90^\circ-\mathrm{B}$$

2.2. Resolución de triángulos oblicuángulos.

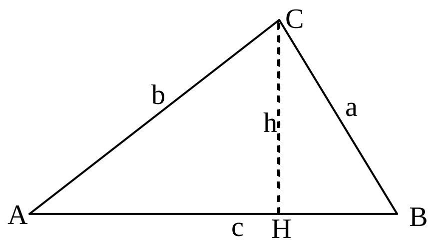
2.2.1. Expresión trigonométrica de la altura h.

Dados los triángulos



En este caso tenemos que:

$$\operatorname{sen} B=\frac{h}{a} \quad \Rightarrow \quad h=a \operatorname{sen} B$$



En este caso tenemos que:

$$\operatorname{sen} A=\frac{h}{b} \quad \Rightarrow \quad h=b \operatorname{sen} A$$

2.2.2. Teorema de los senos.

Utilizando las expresiones que hemos obtenido, tenemos que, como $h=a \operatorname{sen} B$ y $h=b \operatorname{sen} A$ resultará igualando ambas:

$$a \operatorname{sen} B=b \operatorname{sen} A \quad \Rightarrow \quad \frac{\operatorname{sen} A}{a}=\frac{\operatorname{sen} B}{b}$$

y haciendo lo mismo con la altura que parte del vértice *A*, obtendríamos que esta igualdad se puede ampliar a:

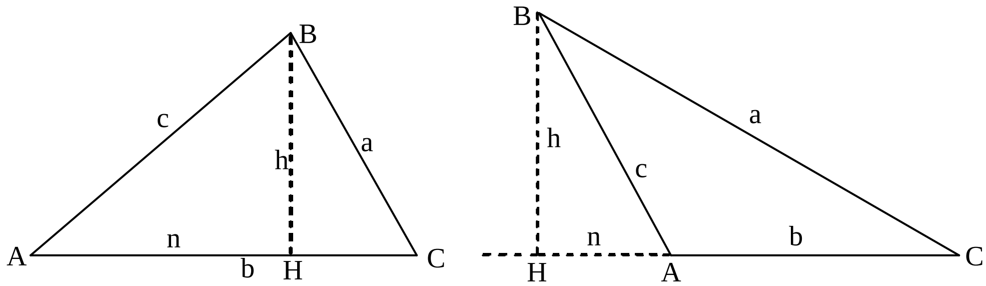
$$\frac{\operatorname{sen} A}{a}=\frac{\operatorname{sen} B}{b}=\frac{\operatorname{sen} C}{c} \quad \Rightarrow \quad \frac{a}{\operatorname{sen} A}=\frac{b}{\operatorname{sen} B}=\frac{c}{\operatorname{sen} C}$$

que es el llamado Teorema de los senos.

2.2.3. Teorema del coseno.

Si tomamos el teorema de Pitágoras generalizado, tenemos que:

$$a^2 = b^2 + c^2 \pm 2bn \quad \begin{cases} \text{con signo menos si } A < 90^o \\ \text{con signo más si } A > 90^o \\ \text{tomaremos } n = 0 \text{ si } A = 90^o \end{cases} \qquad \text{siendo}$$



Si tomamos la proyección *n*, de AB sobre la recta AC, tenemos:

$$\cos A = \frac{n}{c} \text{ (1ª figura) o } \quad \cos A = -\cos(180 - A) = -\frac{n}{c} \text{ (2ª figura)}$$

Si $n = c\cos A \quad \Rightarrow \quad a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$

pero si $n = -c\cos A \quad \Rightarrow \quad a^2 = b^2 + c^2 + 2b(-c\cos A) = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$

resultando en ambos casos: $\boxed{a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A}$

y análogamente: $\boxed{b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos B}$ y $\boxed{c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C}$

2.2.4. Resolución por teorema del seno.

a) Conocidos dos ángulos *A* y *B* y el lado *a*, tenemos que: C=180-A-B

resulta: $$\frac{a}{\operatorname{sen} A} = \frac{c}{\operatorname{sen} C} \quad \Rightarrow \quad c = a\frac{\operatorname{sen} C}{\operatorname{sen} A}$$

y $$\frac{a}{\operatorname{sen} A} = \frac{b}{\operatorname{sen} B} \quad \Rightarrow \quad b = a\frac{\operatorname{sen} B}{\operatorname{sen} A}$$

b) Conocidos los lados *a* y *b* y el ángulo *A* opuesto a *a:*

haciendo: $$\frac{a}{\operatorname{sen} A} = \frac{b}{\operatorname{sen} B} \quad \Rightarrow \quad \operatorname{sen} B = \frac{b}{a}\operatorname{sen} A \quad \Rightarrow \quad B = \operatorname{arc\,sen}\left(\frac{b}{a}\operatorname{sen} A\right)$$

Ante esta situación tenemos dos posibilidades:

- $0 < B \le 90^o$
- $90^o < B < 180^o$

Pero siempre debe ocurrir que $\frac{b \operatorname{sen} A}{a} \le 1$ o sea $b \operatorname{sen} A \le a$

1) Si $b \operatorname{sen} A = a \quad \Rightarrow \quad \operatorname{sen} B = 1 \quad \Rightarrow \quad B = 90^o$

2) Si $b \operatorname{sen} A < a \quad \Rightarrow \quad \operatorname{sen} B < 1$ entonces:

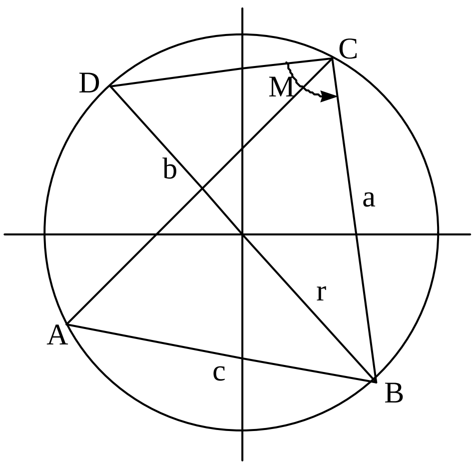
i) Si $A < 90^o$ puede haber dos soluciones o una, dependiendo de que $a < b$ o no.

ii) Si $A > 90^o$ sólo hay una solución.

Utilizando lo anterior tenemos que: $C = 180^o - A - B$.

2.3. Radio de la circunferencia circunscrita.

El ángulo D y el ángulo A de los triángulos DCB y ACB respectivamente, son iguales por tener el mismo arco, pero por otra parte, el ángulo M en el punto C es un ángulo recto por ser DB el diámetro de la circunferencia. Entonces tenemos que:



$$\frac{a}{\operatorname{sen} D} = \frac{2r}{\operatorname{sen} 90} \quad \Rightarrow \quad \operatorname{sen} D = \frac{a}{2r}$$

luego: $\operatorname{sen} A = \frac{a}{2r}$

por tanto: $$\boxed{2r = \frac{a}{\operatorname{sen} A} = \frac{b}{\operatorname{sen} B} = \frac{c}{\operatorname{sen} C}}$$

2.4. Resolución de triángulos con el teorema del coseno.

2.4.1. Conocidos dos lados *a* y *b* y el ángulo C.

Como $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$ tenemos que $c = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\cos C}$

Utilizando el teorema del seno calcularemos los ángulos *A* y *B*.

2.4.2. Conocidos los tres lados.

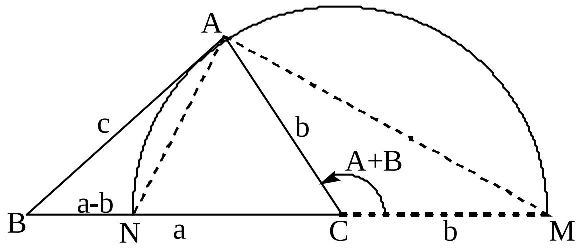
Hacemos: $\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} \quad \cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} \quad \cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$

Obtenemos así los ángulos A, B y C del triángulo.

3. TEOREMA DE LAS TANGENTES. FÓRMULAS DE BRIGGS.

3.1. Analogías de Mollweide y de Neper.

Sea un triángulo ABC tal que $a>b$ y llevemos b sobre a y a su vez sobre su prolongación a partir de C. Obtenemos así los puntos N y M y por lo tanto, el triángulo AMN cuyos ángulos queremos calcular.



Tenemos que el ángulo ACM es igual a A+B puesto que es exterior al triángulo ABC. También el ángulo ANM es (A+B)/2 y además AMC=C/2. Finalmente ANB=90º+(C/2) por ser exterior al triángulo ANM.

Entonces si aplicamos a los triángulos ABM y ABN el teorema de los senos resulta:

$$\frac{a+b}{\operatorname{sen}\left(90^o+\frac{A-B}{2}\right)}=\frac{c}{\operatorname{sen}\frac{C}{2}} \quad\Rightarrow\quad \frac{a+b}{c}=\frac{\operatorname{sen}\left(90^o+\frac{A-B}{2}\right)}{\operatorname{sen}\frac{C}{2}}=\frac{\cos\frac{A-B}{2}}{\operatorname{sen}\frac{C}{2}}$$

$$\frac{a-b}{\operatorname{sen}\frac{A-B}{2}}=\frac{c}{\operatorname{sen}\left(90^o+\frac{C}{2}\right)} \quad\Rightarrow\quad \frac{a-b}{c}=\frac{\operatorname{sen}\frac{A-B}{2}}{\operatorname{sen}\left(90^o+\frac{C}{2}\right)}=\frac{\operatorname{sen}\frac{A-B}{2}}{\cos\frac{C}{2}}$$

y estas igualdades son las llamadas *analogías de Mollweide*.

3.2. Teorema de las tangentes.

Teorema de las tangentes: La diferencia de los lados es a su suma como la tangente de la semidiferencia de los ángulos opuestos es a la tangente de la semisuma de los mismos ángulos.

Demostración. Por las analogías de Mollweide, tenemos que:

$$\frac{a-b}{a+b}=\frac{\frac{a-b}{c}}{\frac{a+b}{c}}=\frac{\frac{\operatorname{sen}\frac{A-B}{2}}{\cos\frac{C}{2}}}{\frac{\cos\frac{A-B}{2}}{\operatorname{sen}\frac{C}{2}}}=\frac{\operatorname{sen}\frac{A-B}{2}}{\cos\frac{A-B}{2}}\times\frac{\operatorname{sen}\frac{C}{2}}{\cos\frac{C}{2}}=\operatorname{tg}\frac{A-B}{2}\times\operatorname{tg}\frac{C}{2}$$

y puesto que: $\frac{C}{2} = 90^o - \frac{A+B}{2}$ resulta:

$$\boxed{\frac{a-b}{a+b} = \frac{\operatorname{tg}\frac{A-B}{2}}{\operatorname{tg}\frac{A+B}{2}}}$$

Nota: a esta igualdad la llamamos *analogía de Neper*.

3.3. Resolución de triángulos.

Conocidos los lados *a* y *b* y el ángulo C de un triángulo, tenemos:

$$\operatorname{tg}\frac{A-B}{2} = \frac{a-b}{a+b}\operatorname{tg}\frac{A+B}{2} \qquad \text{con} \qquad \frac{C}{2} = 90^o - \frac{A+B}{2} \qquad \text{por lo tanto}$$

$$\operatorname{cotg}\frac{C}{2} = \operatorname{cotg}\left(90 - \frac{\mathrm{A+B}}{2}\right) = \operatorname{tg}\frac{A+B}{2} \qquad \text{entonces}$$

$$\operatorname{tg}\frac{A-B}{2} = \frac{a-b}{a+b}\operatorname{cotg}\frac{C}{2}$$

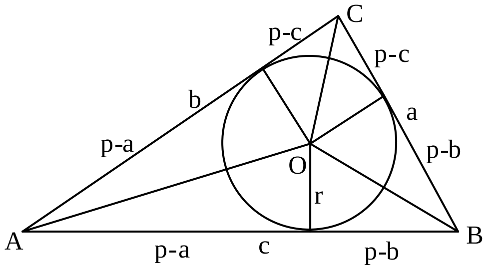
de donde obtenemos $\frac{A-B}{2}$ que junto con $\frac{A+B}{2} = 90^o - \frac{C}{2}$ resolvemos y calculamos así A y B.

Para calcular *c* hacemos:

$$\frac{a+b}{c} = \frac{\cos\frac{A-B}{2}}{\operatorname{sen}\frac{C}{2}} \qquad \Rightarrow \qquad c = \frac{(a+b)\operatorname{sen}\frac{C}{2}}{\cos\frac{A-B}{2}}$$

3.4. Fórmulas de Briggs.

Si tenemos un triángulo ABC entonces el radio de la circunferencia inscrita en él, tiene por radio:



$$\boldsymbol{r} = \sqrt{\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p}}$$

donde $p = \frac{a+b+c}{2}$

entonces:

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{tg}\frac{A}{2} &= \frac{r}{p-a} = \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)}} \\ \operatorname{tg}\frac{B}{2} &= \frac{r}{p-b} = \sqrt{\frac{(p-a)(p-c)}{p(p-b)}} \\ \operatorname{tg}\frac{C}{2} &= \frac{r}{p-c} = \sqrt{\frac{(p-a)(p-b)}{p(p-c)}} \end{aligned}\right\} \quad \text{Fórmulas de Briggs}$$

4. ÁREA DE UN TRIÁNGULO.

Si tomamos la expresión del área de un triángulo, tenemos:

$$S = \frac{1}{2} a.h$$

pero sustituyendo en la expresión $h = b.\operatorname{sen} C = c.\operatorname{sen} B$ resulta:

$$S = \frac{1}{2} a.b \operatorname{sen} C = \frac{1}{2} a.c \operatorname{sen} B = \frac{1}{2} b.c \operatorname{sen} A$$

pero si resulta que conocemos *A, B* y *a*, podemos hacer $C = 180^\circ - (A+B)$ y por lo tanto tomaremos:

$$b = a \frac{\operatorname{sen} B}{\operatorname{sen} A}$$

que sustituyendo en la expresión anterior tenemos finalmente:

$$S = \frac{1}{2} a.a \frac{\operatorname{sen} B}{\operatorname{sen} A} \operatorname{sen} C \quad \Rightarrow \quad \boxed{S = \frac{1}{2} a^2 \frac{\operatorname{sen} B \times \operatorname{sen} C}{\operatorname{sen} A}}$$

Si conocemos *a, b* y *A* calcularemos los ángulos *B* y *C* mediante el teorema del seno y aplicaremos:

$$S = \frac{1}{2} a.b \operatorname{sen} C$$

y por último, si conocemos los tres lados *a, b* y *c* del triángulo calcularemos el área mediante la fórmula de Herón:

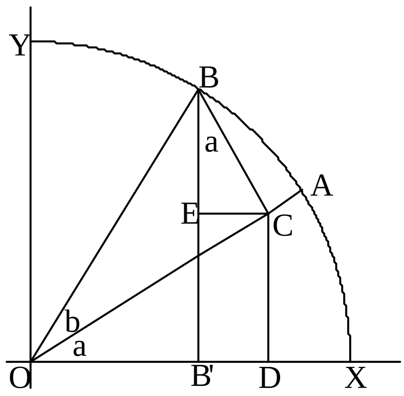
$$\boxed{S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}$$

5. FÓRMULAS DE ADICIÓN.

5.1. Coseno de la suma y diferencia.

Si sobre una circunferencia de radio unidad, construimos dos ángulos que llamaremos α=XOA y β=AOB de manera que $\alpha+\beta$=XOB

Se cumple que la proyección perpendicular de B sobre el radio OA es el punto C y la proyección sobre el eje OX es el punto B’, de manera que:



$$\cos(a+b) = OB'$$
$$\cos b = OC$$
y $$\operatorname{sen} b = BC$$

Por otro lado, el punto C se proyecta sobre el eje OX en el punto D y sobre la recta BB’ en el punto E. Esto implica que el ángulo EBC sea α, por lo tanto:

$$\operatorname{sen} a = \frac{EC}{BC} \qquad \Rightarrow \qquad EC = BC \operatorname{sen} a$$

$$\cos a = \frac{OD}{OC} \qquad \Rightarrow \qquad OD = OC \cos a$$

y como $OB' = OD - B'D = OD - EC$ resulta

$\cos(a+b) = OC.\cos a - BC.\operatorname{sen} a$ y sustituyendo las expresiones anteriores:

$$\boxed{\cos(a+b) = \cos a.\cos b - \operatorname{sen} a.\operatorname{sen} b}$$

siendo ésta la expresión de la suma de los ángulos.

El coseno de la diferencia vendrá expresado por:

$\cos(a-b) = \cos\left(a+(-b)\right) = \cos a.\cos(-b) - \operatorname{sen} a.\operatorname{sen}(-b)$ resultando:

$$\boxed{\cos(a-b) = \cos a.\cos b + \operatorname{sen} a.\operatorname{sen} b}$$

5.2. Seno de la suma y diferencia.

De la misma figura se deduce que $\operatorname{sen}(a+b) = BB' = BE + EB'$

y como resulta que: $$\cos a = \frac{BE}{BC} \qquad \Rightarrow \qquad BE = BC \cos a$$

siendo: $$\operatorname{sen} b = \frac{BC}{BO} = \frac{BC}{1} = BC$$ y sustituyendo en la anterior:

$$BE = \operatorname{sen} b.\cos a$$

también en la figura se deduce que $EB' = CD$

y como resulta que: $\operatorname{sen} a = \dfrac{CD}{OC} \quad \Rightarrow \quad CD = OC.\operatorname{sen} a$

siendo: $\cos b = \dfrac{OC}{OB} = \dfrac{OC}{1} = OC$ sustituyendo en la anterior:

$$CD = \cos b.\operatorname{sen} a$$

luego: $\boxed{\operatorname{sen}(a+b) = \operatorname{sen} a.\cos b + \cos a.\operatorname{sen} b}$

Análogamente al caso anterior:

$\operatorname{sen}(a-b) = \operatorname{sen}(a+(-b)) = \operatorname{sen} a.\cos(-b) + \cos a.\operatorname{sen}(-b)$ resultando:

$$\boxed{\operatorname{sen}(a-b) = \operatorname{sen} a.\cos b - \cos a.\operatorname{sen} b}$$

5.3. Tangente de la suma y diferencia.

Las fórmulas análogas de tangentes de la suma y diferencia de ángulos son:

$$\operatorname{tg}(a+b) = \frac{\operatorname{sen}(a+b)}{\cos(a+b)} = \frac{\operatorname{sen} a.\cos b + \cos a.\operatorname{sen} b}{\cos a.\cos b - \operatorname{sen} a.\operatorname{sen} b} = \frac{\dfrac{\operatorname{sen} a.\cos b + \cos a.\operatorname{sen} b}{\cos a.\cos b}}{\dfrac{\cos a.\cos b - \operatorname{sen} a.\operatorname{sen} b}{\cos a.\cos b}}$$

resultando: $\boxed{\operatorname{tg}(a+b) = \dfrac{\operatorname{tg} a + \operatorname{tg} b}{1 - \operatorname{tg} a.\operatorname{tg} b}}$

$$\operatorname{tg}(a-b) = \frac{\operatorname{sen}(a-b)}{\cos(a-b)} = \frac{\operatorname{sen} a.\cos b - \cos a.\operatorname{sen} b}{\cos a.\cos b + \operatorname{sen} a.\operatorname{sen} b} = \frac{\dfrac{\operatorname{sen} a.\cos b - \cos a.\operatorname{sen} b}{\cos a.\cos b}}{\dfrac{\cos a.\cos b + \operatorname{sen} a.\operatorname{sen} b}{\cos a.\cos b}}$$

resultando: $\boxed{\operatorname{tg}(a-b) = \dfrac{\operatorname{tg} a - \operatorname{tg} b}{1 + \operatorname{tg} a.\operatorname{tg} b}}$

5.4. Fórmulas del ángulo doble.

$\operatorname{sen} 2a = \operatorname{sen}(a+a) = \operatorname{sen} a.\cos a + \cos a.\operatorname{sen} a \quad \Rightarrow \quad \boxed{\operatorname{sen} 2a = 2\operatorname{sen} a.\cos a}$

$\cos 2a = \cos(a+a) = \cos a.\cos a - \operatorname{sen} a.\operatorname{sen} a \quad \Rightarrow \quad \boxed{\cos 2a = \cos^2 a - \operatorname{sen}^2 a}$

$\operatorname{tg} 2a = \operatorname{tg}(a+a) = \dfrac{\operatorname{tg} a + \operatorname{tg} a}{1 - \operatorname{tg} a.\operatorname{tg} a} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\operatorname{tg} 2a = \dfrac{2\operatorname{tg} a}{1 - \operatorname{tg}^2 a}}$

5.5. Fórmulas del ángulo mitad.

Tomando las expresiones:

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{sen}^2 \alpha + \cos^2 \alpha &= 1 \\ \cos^2 \alpha - \operatorname{sen}^2 \alpha &= \cos 2\alpha \end{aligned}\right\} \quad \text{sumándolas miembro a miembro tenemos:}$$

$$2\cos^2 \alpha = 1 + \cos 2\alpha \quad \Rightarrow \quad \cos^2 \alpha = \frac{1+\cos 2\alpha}{2}$$

por lo tanto, haciendo que $\alpha = \frac{A}{2}$ se tiene finalmente:

$$\boxed{\cos\frac{A}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos A}{2}}}$$

pero si las expresiones anteriores:

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{sen}^2 \alpha + \cos^2 \alpha &= 1 \\ \cos^2 \alpha - \operatorname{sen}^2 \alpha &= \cos 2\alpha \end{aligned}\right\} \quad \text{las restamos miembro a miembro tenemos:}$$

$$2\operatorname{sen}^2 \alpha = 1 - \cos 2\alpha \quad \Rightarrow \quad \operatorname{sen}^2 \alpha = \frac{1-\cos 2\alpha}{2}$$

y haciendo que $\alpha = \frac{A}{2}$ se tiene finalmente:

$$\boxed{\operatorname{sen}\frac{A}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos A}{2}}}$$

La tangente del ángulo mitad será:

$$\operatorname{tg}\frac{A}{2} = \frac{\operatorname{sen}\frac{A}{2}}{\cos\frac{A}{2}} = \frac{\pm\sqrt{\frac{1-\cos A}{2}}}{\pm\sqrt{\frac{1+\cos A}{2}}} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\operatorname{tg}\frac{A}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos A}{1+\cos A}}}$$

5.6. Transformaciones en productos de sumas y diferencias.

Si consideramos las expresiones $\begin{cases} \operatorname{sen}(\alpha+\beta) = \operatorname{sen}\alpha.\cos\beta + \cos\alpha.\operatorname{sen}\beta \\ \operatorname{sen}(\alpha-\beta) = \operatorname{sen}\alpha.\cos\beta - \cos\alpha.\operatorname{sen}\beta \end{cases}$

y sumamos y restamos ambas expresiones, resulta

$$\operatorname{sen}(\alpha+\beta) + \operatorname{sen}(\alpha-\beta) = 2\operatorname{sen}\alpha.\cos\beta$$
$$\operatorname{sen}(\alpha+\beta) - \operatorname{sen}(\alpha-\beta) = 2\cos\alpha.\operatorname{sen}\beta$$

Haciendo ahora el siguiente cambio: $\begin{cases} \boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=p \\ \boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=q \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2\boldsymbol{a}=p+q \\ 2\boldsymbol{b}=p-q \end{cases}$

de donde se deduce: $\boldsymbol{a}=\dfrac{p+q}{2}$ y $\boldsymbol{b}=\dfrac{p-q}{2}$ y sustituyendo:

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{sen } p+\text{sen } q = 2\,\text{sen}\dfrac{p+q}{2}\cos\dfrac{p-q}{2} \\ \text{sen } p-\text{sen } q = 2\cos\dfrac{p+q}{2}\,\text{sen}\dfrac{p-q}{2} \end{array}}$$

Haciendo lo mismo con el coseno, tenemos:

$$\begin{cases} \cos(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}) = \cos\boldsymbol{a}.\cos\boldsymbol{b}-\text{sen}\,\boldsymbol{a}.\text{sen}\,\boldsymbol{b} \\ \text{sen}(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}) = \cos\boldsymbol{a}.\cos\boldsymbol{b}+\text{sen}\,\boldsymbol{a}.\text{sen}\,\boldsymbol{b} \end{cases}$$

que nos proporciona, sumando y restando las expresiones:

$$\cos(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\cos(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}) = 2\cos\boldsymbol{a}.\cos\boldsymbol{b}$$
$$\cos(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})-\cos(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}) = -2\,\text{sen}\,\boldsymbol{a}.\text{sen}\,\boldsymbol{b}$$

y haciendo el mismo cambio anterior, tal que:

$\boldsymbol{a}=\dfrac{p+q}{2}$ y $\boldsymbol{b}=\dfrac{p-q}{2}$ y sustituyendo

$$\boxed{\begin{array}{l} \cos p+\cos q = 2\cos\dfrac{p+q}{2}\cos\dfrac{p-q}{2} \\ \cos p-\cos q = -2\,\text{sen}\dfrac{p+q}{2}\,\text{sen}\dfrac{p-q}{2} \end{array}}$$

5.7. Expresiones trigonométricas en función de la tangente del ángulo mitad.

$$\text{sen}\,\boldsymbol{a} = \frac{2\,\text{sen}\dfrac{\boldsymbol{a}}{2}\cos\dfrac{\boldsymbol{a}}{2}}{\cos^2\dfrac{\boldsymbol{a}}{2}+\text{sen}^2\dfrac{\boldsymbol{a}}{2}} = \frac{\dfrac{2\,\text{sen}\dfrac{\boldsymbol{a}}{2}\cos\dfrac{\boldsymbol{a}}{2}}{\cos^2\dfrac{\boldsymbol{a}}{2}}}{\dfrac{\cos^2\dfrac{\boldsymbol{a}}{2}+\text{sen}^2\dfrac{\boldsymbol{a}}{2}}{\cos^2\dfrac{\boldsymbol{a}}{2}}} = \ldots \quad \text{luego} \quad \boxed{\text{sen}\,\boldsymbol{a} = \frac{2\,\text{tg}\dfrac{\boldsymbol{a}}{2}}{1+\text{tg}^2\dfrac{\boldsymbol{a}}{2}}}$$

y

$$\cos\alpha = \frac{\cos^2\frac{\alpha}{2} - \operatorname{sen}^2\frac{\alpha}{2}}{\cos^2\frac{\alpha}{2} + \operatorname{sen}^2\frac{\alpha}{2}} = \frac{\dfrac{\cos^2\frac{\alpha}{2} - \operatorname{sen}^2\frac{\alpha}{2}}{\cos^2\frac{\alpha}{2}}}{\dfrac{\cos^2\frac{\alpha}{2} + \operatorname{sen}^2\frac{\alpha}{2}}{\cos^2\frac{\alpha}{2}}} = \ldots \quad \text{luego} \quad \boxed{\cos\alpha = \frac{1 - \operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}}$$

y

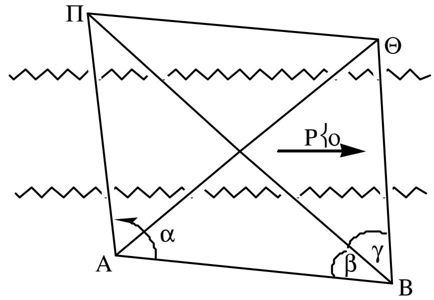
$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\dfrac{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}}{\dfrac{1 - \operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}} = \ldots \quad \text{luego} \quad \boxed{\operatorname{tg}\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1 - \operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}}$$

6. APLICACIONES.

6.1. Aplicaciones a la Topografía.

Los problemas de trigonometría tienen especial aplicación en todo lo que afecta a mediciones sobre el terreno. La medición de grandes distancias es, en efecto, más penosa que las mediciones de ángulos, por ello vamos a medir indirectamente las distancias resolviendo triángulos.

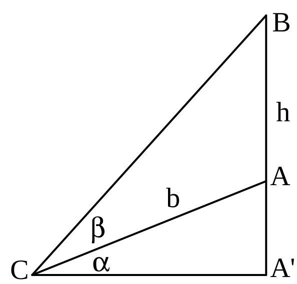
Supongamos que nos interesa conocer la distancia de un punto A que está a un lado del río, con otro punto P que está al otro lado del río. Elegimos otro punto B de modo que la distancia AB sea cómoda de medir y basándonos en A y en B medimos con un teodolito, los ángulos α y β formados entre la recta AB y las visuales trazadas desde P.



Con estos elementos podemos calcular AP y BP resolviendo el triángulo ABP.

6.2. Determinación de la altura de un punto de pie accesible.

Consiste en medir la altura de una torre vertical cuyo pié, A, es accesible. Se elige una base AC=*b*.



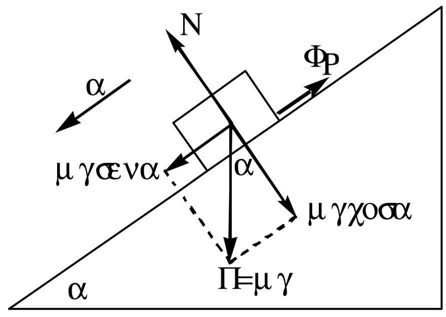
Si A=A' el cálculo es inmediato.

Si AC no es horizontal, se puede medir el ángulo BCA, el ángulo BCA' y se tiene que:

$$B = 90^{o} - (\alpha + \beta) \qquad \Rightarrow \qquad h = \frac{b \operatorname{sen} \beta}{\cos(\alpha + \beta)}$$

6.3. Resolución de planos inclinados en física.

Dado un cuerpo de masa m que se desliza sobre un plano inclinado un ángulo α sobre la horizontal, podemos calcular la aceleración que tiene en su deslizamiento hacia abajo a lo largo del plano inclinado.



$$\left.\begin{array}{l} \sum F_X = ma \quad \Rightarrow \quad mg \operatorname{sen} \alpha - F_R = ma \\ \sum F_Y = 0 \quad \Rightarrow \quad N = mg \cos \alpha \end{array}\right\}$$

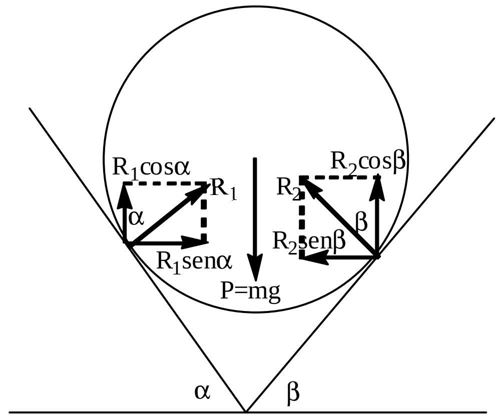
y considerando que $F_R = \mu N$ se resuelve el sistema de ecuaciones planteado y obtenemos el valor de la aceleración de caída del cuerpo.

6.4. Resolución de problemas en estática y en dinámica

Aplicaciones importantes tiene la trigonometría en la resolución de estructuras en estática, como el que se expone a continuación. Un cilindro macizo de peso P se encuentra apoyado sin fricción en el interior de un ángulo diedro formado por dos planos contiguos inclinados α y β con la horizontal. Para calcular las reacciones sobre los apoyos consideraremos las condiciones de equilibrio.

$$\sum F_x = 0 \qquad R_1 \operatorname{sen} \alpha - R_2 \operatorname{sen} \beta = 0$$

$$\sum F_y = 0 \qquad R_1 \cos \alpha + R_2 \cos \beta - P = 0$$



de la 1ª $\quad R_2 = R_1 \dfrac{\operatorname{sen} \alpha}{\operatorname{sen} \beta}$ y sustituyendo en la 2ª

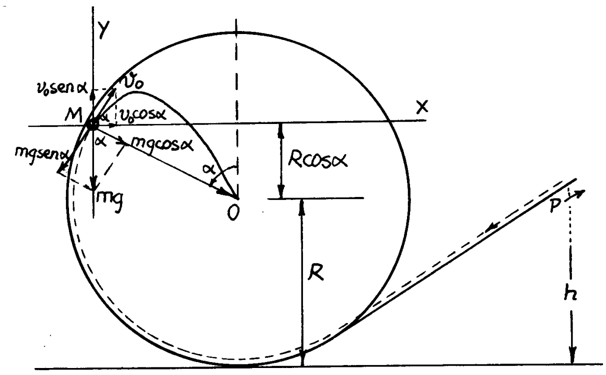
$$R_1 \cos \alpha + R_1 \frac{\operatorname{sen} \alpha}{\operatorname{sen} \beta} \cos \beta - P = 0$$

$$R_1 (\operatorname{sen} \beta . \cos \alpha + \operatorname{sen} \alpha . \cos \beta) = P \operatorname{sen} \beta$$

$$R_1 \operatorname{sen}(\alpha + \beta) = P \operatorname{sen} \beta \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{R_1 = \frac{\operatorname{sen} \beta}{\operatorname{sen}(\alpha + \beta)} P}$$

$$R_2 = R_1 \frac{\operatorname{sen} \alpha}{\operatorname{sen} \beta} = \frac{\operatorname{sen} \beta}{\operatorname{sen}(\alpha + \beta)} P \frac{\operatorname{sen} \alpha}{\operatorname{sen} \beta} = \boxed{\frac{\operatorname{sen} \alpha}{\operatorname{sen}(\alpha + \beta)} P = R_2}$$

Otra aplicación importante de la trigonometría la tenemos en la resolución del siguiente problema de dinámica. Un cuerpo de masa *m* desliza sin rozamiento por un carril que finaliza en un rizo vertical, partiendo del reposo a altura *h*. Desciende por el carril y prosigue por el interior del rizo de radio *R*. Deseamos ajustar la posición de P de manera que el cuerpo abandone el rizo en un punto y en el subsiguiente movimiento pase por el centro de la circunferencia O. Hallar el ángulo α correspondiente a la posición en que el cuerpo abandona el rizo.



Tomemos como sistema de referencia, el sistema cartesiano XY centrado en el punto M, donde el cuerpo se despega del rizo vertical. El vector de posición de la bolita cuando está en O (centro del rizo) vendrá dado por la expresión:

$$\vec{R} = v_0 t\cos\alpha.\vec{i} + \left(v_0 t\,\text{sen}\,\alpha - \frac{1}{2}gt^2\right)\vec{j}$$

siendo, en la figura: $\vec{R} = R.\text{sen}\,\alpha.\vec{i} + (-R.\cos\alpha)\vec{j}$ e identificando ambas:

$$v_0 t.\cos\alpha = R.\text{sen}\,\alpha$$

$$v_0 t.\text{sen}\,\alpha - \frac{1}{2}gt^2 = -R.\cos\alpha$$

despejando *t* de la primera: $t = \dfrac{R.\text{sen}\,\alpha}{v_0\cos\alpha}$ y sustituyendo en la segunda, resulta

$$v_0\left(\frac{R.\text{sen}\,\alpha}{v_0\cos\alpha}\right)\text{sen}\,\alpha - \frac{1}{2}g\left(\frac{R^2\,\text{sen}^2\,\alpha}{v_0^2\cos^2\alpha}\right) = -R\cos\alpha$$

Condición que ha de cumplir la bolita en M para separarse del carril: que la componente radial del peso sea la fuerza centrípeta para mantener la trayectoria circular:

$$mg.\cos\alpha = m\frac{v_0^2}{R} \quad\rightarrow\quad v_0^2 = Rg.\cos\alpha \quad \text{sustituyendo en la anterior:}$$

$$R\frac{\text{sen}^2\,\alpha}{\cos\alpha} - \frac{1}{2}g\left(\frac{R^2\,\text{sen}^2\,\alpha}{Rg.\cos\alpha.\cos^2\alpha}\right) = -R\cos\alpha$$

$$R\frac{\text{sen}^2\,\alpha}{\cos\alpha} - \frac{R.\text{sen}^2\,\alpha}{2\cos^3\alpha} = -R\cos\alpha \quad\rightarrow\quad \frac{\text{sen}^2\,\alpha}{\cos\alpha} - \frac{\text{sen}^2\,\alpha}{2\cos^3\alpha} = -\cos\alpha \quad\rightarrow$$

$$\rightarrow\quad \frac{\text{sen}^2\,\alpha}{\cos\alpha} + \cos\alpha = \frac{\text{sen}^2\,\alpha}{2\cos^3\alpha} \quad\rightarrow$$

$$\rightarrow \quad \frac{\operatorname{sen}^2 \boldsymbol{a} + \cos^2 \boldsymbol{a}}{\cos \boldsymbol{a}} = \frac{\operatorname{sen}^2 \boldsymbol{a}}{2\cos^3 \boldsymbol{a}} \quad \rightarrow \quad \frac{1}{\cos \boldsymbol{a}} = \frac{\operatorname{sen}^2 \boldsymbol{a}}{2\cos^3 \boldsymbol{a}} \quad \rightarrow \quad 1 = \frac{\operatorname{sen}^2 \boldsymbol{a}}{2\cos^2 \boldsymbol{a}}$$

$$1 = \frac{1}{2}\operatorname{tg}^2 \boldsymbol{a} \quad \rightarrow \quad \operatorname{tg} \boldsymbol{a} = \sqrt{2} = 1'4142 \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{a} = \operatorname{arctg} 1'4141 = 54'7356^o = \boxed{54^o 44' 8''}$$
