TEMAS DE MATEMÁTICAS
(Oposiciones de Enseñanza Secundaria)

TEMA 31

<u>INTEGRACIÓN NUMÉRICA. METODOS Y APLICACIONES.</u>

TEMA 31

INTEGRACIÓN NUMÉRICA. METODOS Y APLICACIONES.

1. INTRODUCCIÓN.

Dada una función de forma analítica, sabemos por temas anteriores calcular su integral definida entre a y b siempre que conozcamos una primitiva de ella. El problema surge cuando no sabemos una primitiva de ella. Esa situación es muy normal en problemas prácticos de Física, Química y otras ciencias.

El problema de la integración numérica de una función consiste en calcular el valor de una integral definida sobre la base de una serie de valores del integrando.

2. INTEGRACIÓN CON ABCISAS DADAS.

2.1. Fórmulas de Integración Interpolatoria.

Sean $a \leq x_0 < x_1 < \ldots < x_m \leq b$ una partición en m+1 abcisas del segmento [a, b] y consideramos el polinomio P_m(x) de grado menor o igual que m verificando:

$$P_m(x_K) = f(x_K) \text{ con } k \in A = \{0, 1, \ldots, m\}$$

entonces, aproximaremos la integral buscada por:

$$\int_a^b f(x) = \int_a^b P_m(x)dx$$

Así, integrando la fórmula de interpolación de Lagrange, que viene dada por :

$$P_m(x) = \sum_{K=0}^{m} f_K \, l_K(x), \text{ donde } l_K = \prod_{i \neq K} \frac{x - x_i}{x_K - x_i}$$

obtenemos la fórmula de integración numérica

$$\int_a^b f(x)dx \cong \sum_{K=0}^{m} W_K \, f_K \;\text{ donde }\; W_K = \int_a^b l_K(x)dx \;\text{ con } k \in A.$$

Debido a que esta fórmula se halla por integración de un polinomio interpolador, recibe el nombre de <u>fórmula de integración interpolatoria de m+1 abcisas</u>.

Los elementos W_K los llamaremos pesos, y hay que tener en cuenta que no dependen de f, aunque si del intervalo [a, b] y de las abcisas $x_0, \ldots, x_m$.

Para cualquier polinomio de grado menor o igual que m, la fórmula es exacta por la unicidad del polinomio interpolador. Esto nos permite calcular los pesos W_K sin tener que integrar $l_K(x)$, es decir, para los monomios 1, x, x^2, …, x^m la fórmula es exacta resolviendo el sistema resultante.

2.2. Error de las Fórmulas de Integración Interpolatoria.

El error de la aproximación viene dado por la integral del error de interpolación, utilizando como error de interpolación la expresión:

$$f(x) - p_m(x) = \frac{f^{(m+1)}(\xi(x))}{(m+1)!}(x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_m)$$

Por lo tanto si $f \in C^{m+1}$([a, b]), se tiene que el error de la fórmula de integración interpolatoria de m+1 abcisas es:

$$E_m = \int_a^b f(x)dx = \sum_{K=0}^{m} W_K f_K = \int_a^b \frac{f^{(m+1)}(\xi(x))}{(m+1)!}(x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_m)\,dx$$

con $\xi(x) \in (a, b)$

Si tomamos la constante $k \in R$, como la cota superior de la derivada (m+1)-ésima de f, $\left|f^{(m+1)}(x)\right| \le k \quad \forall k \in [a, b]$, tenemos que:

$$|E_m| \le \frac{k}{(m+1)!}\int_a^b (x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_m)\,dx$$

2.3. Fórmula de Simpson.

Si tomamos polinomios de grado menor o igual que 2, usamos g_k = g(k) (k = -1, 0, 1) y la fórmula de integración interpolatoria de m+1 abcisas, podemos calcular los pesos de integración W_{-1}, W_0 y W_1 para que la fórmula:

$$\int_{-1}^{1} g(t)dt \cong W_{-1}g_{-1} + W_0 g_0 + W_1 g_1$$

sea exacta.

Interponiendo la exactitud de la fórmula para g(t) = 1, t, t^2 obtenemos que

$$\begin{cases} W_{-1} + W_0 + W_1 = 2 \\ -W_{-1} + W_1 = 0 \\ W_{-1} + W_1 = \dfrac{2}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} W_1 = \dfrac{1}{3} \\ W_0 = \dfrac{4}{3} \\ W_{-1} = \dfrac{1}{3} \end{cases}$$

Por lo tanto tenemos que la fórmula buscada la podemos expresar como:

$$\int_{-1}^{1} g(t)dt \cong \frac{1}{3}(g_{-1} + 4g_0 + g_1).$$

Aunque esta fórmula podemos expresarla para cualquier intervalo [a, b] solamente con el cambio:

t = $2\dfrac{x-a}{b-a}$ - 1 o lo que es lo mismo x = $\dfrac{b-a}{2}$t + $\dfrac{a+b}{2}$

resultando así una fórmula nueva de integración numérica para una función f(x) sobre un intervalo [a, b] que recibirá el nombre de fórmula de Simpson:

$$\int_a^b f(x)dx \cong \frac{b-a}{6} \text{ [f(a) + 4 f(}\frac{a+b}{2}\text{) + f(b)]}$$

aunque haciendo el ajuste c = $\dfrac{a+b}{2}$ y h = $\dfrac{b-a}{2}$ tenemos que:

$$\int_a^b f(x)dx \cong \frac{h}{3} \text{ [f(c-h) + 4 f(c)+ f(c + h)].}$$

que también es válida y recibe el mismo nombre.

Nota: Estas fórmulas resultan también exactas sobre polinomios de grado menor o igual que 3.

2.4. Error de la Fórmula de Simpson.

Para poder calcular el error que cometemos en la integración numérica mediante la fórmula de Simpson vamos a definir:

$$E_s(h) = \int_{c-h}^{c+h} f(x)dx - \frac{h}{3} \text{ [f(c-h) + 4 f(c)+ f(c + h)].}$$

donde se verifica que $E_s(0) = E_s'(0) = E_s^{(2)}(0) = 0$ y

$$E_0^{(3)}(h) = -\frac{h}{3}\ [\ f^{(3)}(\text{c+h}) - f^{(3)}(\text{c-h})].$$

Si la función f(x) verifica que $f \in C^4(\ [\text{c - h, c + h}]\ )$ definimos una función F(x) que viene dada por:

$$\text{F(x)} = \begin{cases} \dfrac{f^{(3)}(c+h) - f^{(3)}(c-h)}{2h} & si \;\; h \neq 0 \\ f^{(4)}(c) & si \;\; h = 0 \end{cases}$$

y donde se verifica que F(h) es continua, ya que $\lim_{h \to 0} F(x) =$ F(0) y además por el teorema del valor medio $\forall \boldsymbol{x} \in$ [0, h], F $(\boldsymbol{x})$ = $f^{(4)}(\boldsymbol{t})$ para algún $\boldsymbol{t} \in$ (c –h, c + h).

Si utilizamos la fórmula del error de interpolación de Taylor:

$$R_n(x) = \frac{1}{n!}\int_a^x (x-s)^n \ \ f^{(n+1)}(s)ds$$

obtenemos que:

$$E_s(h) \ = \frac{1}{2}\int_0^h (h-t)^2 \ E_s^{(3)}(t)dt = \ \frac{1}{3}\int_0^h (h-t)^2 \ t^2 \ F(t)dt$$

pero como H(t) = $(h-t)^2\ t^2$ es una función estrictamente positiva y continua en (0, h), el teorema del valor medio para integrales nos asegura que:

$$E_s(h) \ = -\frac{1}{3}\ F(\boldsymbol{x}) \int_0^h (h-t)^2 \ t^2 \text{dt} = -\frac{f^{(4)}(\boldsymbol{t})}{90} h^5 \text{con } \boldsymbol{t} \in \text{(c –h,c + h)}$$

2.5. Fórmula del Rectángulo o del punto medio.

Haciendo el mismo proceso que hemos hecho para la fórmula de Simpson y con h = b –a, obtenemos la fórmula del rectángulo, que se basa en la interpolación en la abcisa media únicamente, y que viene dada por:

$$\int_a^b f(x)dx = \text{h f(}\frac{b-a}{2}\text{)} + \frac{f^{(2)}(\boldsymbol{x})}{24} h^3 \text{ con } \boldsymbol{x} \in (a,b)$$

2.6. Fórmula del Trapecio.

Igualmente que antes con b = b – a, pero interpolando en las abcisas extremas obtenemos la fórmula del trapecio:

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{h}{2}[\text{ f(a) – f(b) }] - \frac{f^{(2)}(\chi)}{12}h^3 \text{ con } \chi \in (a,b)$$

2.7. Regla del Trapecio Corregida.

Si tomamos la fórmula de integración interpolatoria de 4 abcisas con $x_0 = x_1 =$ a y $x_2 = x_3 =$ b, entonces:

$$\int_a^b f(x)dx \cong \frac{1}{4!}\ f^{IV}(\chi)\ \int_a^b (x-a)^2(x-b)^2 \text{ dx} = \frac{f^{IV}(\chi)(b-a)^5}{720}$$

Como m + 1 = 4 entonces tenemos un polinomio cúbico, $P_3(x)$, es decir, $P^{IV}(x) = 0$. Por lo tanto, usando la regla de Simpson:

$$\int_a^b f(x)dx \cong \frac{b-a}{6}\ [P_3(a) + 4P_3(\frac{a+b}{2}) + P_3(\text{b})],$$

pero como P_3(x) está interpolado a f(x) en x_0 = a, x_1 = a, x_2 = b y x_3 = b entonces $P_3(a)$ = f(a), P_3(b) = f(b) y $P_3(\frac{a+b}{2}) = \frac{1}{2}$[f(a) + f(b)] + $\frac{(b-a)}{8}$[f ’(a) – f ’(b)] entonces:

$$\int_a^b f(x)dx \cong \frac{(b-a)}{2}[\text{ f(a) + f(b) }] + \frac{(b-a)^2}{12}\ [\text{ f ’(a) – f ’(b) }]$$

siendo su error:

$$\text{E} = \frac{f^{IV}(\chi)(b-a)^5}{720}$$

2.8. Fórmulas de Newton-Cotes

Si tomamos ahora m +1 abcisas equidistantes sobre el intervalo [a, b], es decir:

$$x_k = \text{a + kh con k} \in \text{A, h} = \frac{b-a}{m}$$

obtenemos la fórmula de Newton-Cotes de m+1 abcisas

$$\int_a^b f(x)dx \cong \text{h}\sum_{k=0}^{m} \alpha_k f_k \text{ , con } \alpha_k = \int_0^m \prod_{i\neq k} \frac{t-i}{k-i}dt \text{ con k} \in \text{A y donde } f_k = f(a+kh)$$

Los coeficientes α_k solo dependen del grado m, es decir, ni del intervalo [a, b] ni de la función f(x).

El error de la fórmula de Newton-Cotes de m +1 abcisas está dado por

$$E_m = \int_a^b f(x)dx - \mathrm{h}\sum_{k=0}^{m} \alpha_k f_k = \frac{f^{(p+1)}(\xi)}{(p+1)!} h^{p+2} \text{ con } \xi \in (a,b)$$

y donde:

$$K_m = \begin{cases} \int_0^m \Pi_m(t)dt & p = m \quad si \quad m \text{ es impar} \\ \int_0^m t\Pi_m(t)dt & p = m+1 \; si \quad m \text{ es par} \end{cases}$$

siendo $\Pi_m(t) = t(t-1)\cdot\ldots\cdot(t-m)$

3. REGLAS COMPUESTAS.

Las formulas de integración numérica anteriormente expuestas no se aplican normalmente al intervalo I = [a, b] sobre el cual queramos calcular la integral, sino que se aplican sobre subintervalos de I, obteniendo así las reglas compuestas de integración numérica.

3.1. Regla de los Trapecios.

Si partimos el intervalo I = [a, b] en M partes iguales, y sobre cada una de ellas, aplicamos la fórmula del trapecio, obtendremos la regla compuesta que llamaremos "Regla de los Trapecios"

$$\mathrm{T(h)} = \frac{h}{2} \text{ [f(a) + 2 f(a + h) + 2 f(a + 2h) + … + 2 f(b – h) + f(b),}$$

que se forma como suma de la integración numérica sobre cada uno de los M intervalos en los que hemos descompuesto el intervalo I = [a, b], siendo cada una de esas M partes de longitud h = $\frac{b-a}{M}$:

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{K=0}^{M-1} \int_a^b f(x)dx \int_{x_K}^{x_{K+1}} f(x)dx \text{ con } x_k = \text{a+kh con } \mathrm{k} \in \mathrm{A} \in \{0,\ldots,\mathrm{M}\}$$

y puesto que:

$$\int_{x_K}^{x_{K+1}} f(x)dx = \frac{h}{2}[\,\mathrm{f}(x_k) - \mathrm{f}(x_{k+1})\,] - \frac{f^{(2)}(\xi_k)}{12}h^3$$

donde $\xi_k \in (x_k, x_{k+1})$, entonces tenemos que:

$$\int_a^b f(x)dx - \mathrm{T(h)} = -\frac{1}{12}\sum_{k=0}^{M-1} f^{(2)}(\xi_k)h^3 = -\frac{(b-a)}{2M}\sum_{k=0}^{M-1} f^{(2)}(\xi_k)h^2 \,,$$

donde si tenemos que f$\in C^2$ ([a, b]), utilizando el teorema del valor medio para sumas, existe $x \in (a,b)$ tal que:

$$\int_a^b f(x)dx - \mathrm{T(h)} = - \frac{b-a}{12} f^{(2)}(x_k)h^2 ,$$

que es la fórmula del error de la regla de los trapecios.

3.2. Regla de Simpson.

Si ahora lo que hacemos es dividir el intervalo I = [a, b] en 2M partes y aplicando la fórmula de Simpson en cada uno de ellos, que de longitud $\frac{b-a}{2M}$, y sumándolos obtenemos la "Regla de Simpson".

$$\mathrm{S(h)} = \frac{h}{3}[\mathrm{f(a)+ 4f(a + h)+2f(a + 2h)+ 4f(a + 3h)+\ldots+2f(b - 2h)+ 4f(b - h)+ f(b)}]$$

y además tenemos que si f$\in C^4$ ([a, b]) obtenemos la siguiente expresión para el error de la regla Simpson:

$$\int_a^b f(x)dx - \mathrm{S(h)} = - \frac{b-a}{180} f^{(4)}(x)h^4 \quad \text{con} \quad x \in (a,b)$$

3.3. Regla del punto medio.

Siguiendo un proceso análogo a los vistos hasta ahora, se obiene:

$$\int_a^b f(x)dx \cong h\sum_{i=1}^{N} f(a + (i - \frac{1}{2})h)$$

donde el error obtenido viene dado por:

$$\mathrm{E} = \frac{f''(x)h^2(b-a)}{24}$$

3.4. Regla del Trapecio Compuesta.

Utilizando la regla simple del trapecio y dividiendo el intervalo I = [a, b] en N partes iguales obtenemos la siguiente expresión:

$$\int_a^b f(x)dx \approx h\sum_{i=1}^{N-1} f(a + ih) + \frac{h}{2}(f(a) + f(b))$$

siendo h = $\dfrac{b-a}{N}$

La expresión del error para la regla del trapecio compuesta viene dada por:

$$E = -\frac{f''(x)h^2(b-a)}{12}$$

3.5. Regla del trapecio corregida.

Utilizando la regla del trapecio corregida simple y dividiendo el intervalo I = [a, b], en N partes de manera que definamos h = $\dfrac{b-a}{N}$ se tiene que la expresión de la regla del trapecio corregida viene dada por:

$$\int_a^b f(x)dx \approx h\sum_{i=1}^{N-1} f(a+ih) + \frac{h}{2} f(a) + f(b) + \frac{h^2}{12}\left[f'(a) - f'(b)\right]$$

siendo el error que se comete en la aproximación el siguiente:

$$E = \frac{f^{IV}(x)h^4(b-a)}{72}$$

Debemos darnos cuenta que todas las derivadas interiores f(x_i) se anulan entre si una con otra al sumar las fórmulas de todos los intervalos (como si fuese una suma parcial de una serie telescópica).

Por lo tanto la regla del trapecio corregida anteriormente expuesta, es una regla compuesta del trapecio corregida, que al igual que la simple, obliga, para poder utilizarla, a que conozcamos la derivada de f(x) o la calculemos.

4. INTEGRACIÓN GAUSSIANA.

Las fórmulas de integración interpolatoria de m + 1 abcisas anteriormente expuestas son exactas para los polinomios de grado menor o igual que m, independiente de la elección que hagamos de abcisas dentro del intervalo de integración. Veamos que una buena elección de estas m + 1 abcisas nos proporcionará fórmulas de integración numérica de m + 1 abcisas, exacta para polinomios de grado menor o igual que 2m + 1, y estas fórmulas recibirán el nombre de fórmulas Gaussianas.

4.1. Ejemplo que motiva las fórmulas.

Si aplicamos de forma conveniente la regla de los trapecios sobre polinomios trigonométricos nos da el siguiente ejemplo, es decir:

Sea $t_n(q) = \frac{a_0}{2} + \sum_{j=1}^{n} a_j Cos\, j q \; + \; \sum_{j=1}^{n} b_j Sen\, j q \; = \sum_{j=-n}^{n} c_j e^{ijq}$

un polinomio de grado menor o igual que n, y calculamos

$$J(t_n) = \int_0^{2p} t_n(q)dq = p\ a_0 = 2p\ c_0$$

mediante la regla de los trapecios con paso h = $\frac{2p}{M}$ con M>n.

Por culpa de la periodicidad de $t_n(q)$, $t_n(q + 2p) = t_n(q)$ $\forall q \in R$ por lo tanto para cualquier $f \in R$ se verifica que:

$$J(t_n) = \int_f^{2p+f} t_n(j)dj = \int_0^{2p} t_n(f + q)dq = p\ a_0$$

pero aplicando la regla de los trapecios a esta última integral tenemos el siguiente resultado exacto:

$$\mathrm{T}\left(\frac{2p}{M}\right) = \frac{2p}{M} \sum_{k=0}^{M-1} t_n\left(f + \frac{2pk}{M}\right) = \frac{2p}{M} \sum_{j=-n}^{n} c_j e^{ijf} \sum_{k=0}^{M-1} e^{i\frac{2pkj}{M}} = 2p\ c_0 = J(t_n)$$

donde tenemos que :

$$\sum_{k=0}^{M-1} e^{i\frac{2pkj}{M}} = \begin{cases} M & (j = 0) \\ 0 & (0 < |j| \le n \le M \end{cases}$$

sabiendo que $\sum_{j=-n}^{n} c_j e^{ijf} \ne 1\ (0 < |j| \le n \le M)$

Si tomamos ahora un polinomio trigonométrico en cosenos de grado menor o igual que n

$$t_n(q) = \frac{a_0}{2} + \sum_{j=1}^{n} a_j Cos\, j q$$

Si tenemos en cuenta la periodicidad $t_n(q + 2p) = t_n(q)$ y la simetría respecto a $q = p$, es decir, $t_n(q) = t_n(2p - q)$, por lo tanto, si M>n

$$J(t_n) = \int_0^{2p} t_n(q)dq = \frac{1}{2}\int_0^{2p} \mathrm{t_n}(q)\mathrm{d}q = \frac{p}{2} a_0 = \frac{1}{2}\ \mathrm{T}\left(\frac{2p}{M}\right) = \frac{p}{M} \sum_{k=0}^{M-1} t_n\left(f + \frac{2pk}{M}\right)$$

Si tomamos M = 2(m + 1) > n y $f = \frac{p}{M}$ para que el conjunto de abcisas sea simétrico respecto a p. Entonces $f + \frac{2pk}{M} = \frac{2k+1}{m+1}\frac{p}{2}$ con k$\in$ {0, …, 2m+1} y los valores $t_n(\frac{(2k+1)\pi}{2(m+1)})$ aparecen dos veces: si l = 2m + 1 – k, con k$\in$ {0, …, m} tenemos que l$\in$ {m + 1, …, 2m+1}, y

$$t_n(\frac{(2k+1)\pi}{2(m+1)}) = \ t_n(2\pi - \frac{(2k+1)\pi}{2(m+1)}) = \ t_n(\frac{(2l+1)\pi}{2(m+1)})$$

Por lo tanto obtenemos así la siguiente fórmula de integración numérica de m +1 abcisas:

$$\int_0^{2\pi} F(\theta)d\theta \cong \frac{\pi}{m+1}\sum_{k=0}^{m} F(\frac{(2k+1)\pi}{2(m+1)})$$

que es exacta para los polinomios trigonométricos en cosenos de grados menor o igual que 2m +1.

Si hacemos ahora el cambio t = Cosθ, que es usual en la aproximación mediante polinomios de Chebichev, resulta que f(t) = F(arccos t) será un polinomio de grado menor o igual que n si F es un polinomio trigonométrico en cosenos de grado menor o igual que n y así obtendremos la siguiente fórmula de integración numérica de m +1 abcisas:

$$\int_{-1}^{1} \frac{f(t)}{\sqrt{1-t^2}}dt \cong \frac{\pi}{m+1}\sum_{k=0}^{m} f(\text{Cos } \frac{(2k+1)\pi}{2(m+1)})$$

que es exacta para los polinomios de grado menor o igual que 2m +1, y la llamaremos Fórmula de Gauss-Chebichev.

Podemos escribir también las fórmulas anteriores como:

$$\int_0^{2\pi} F(\theta)d\theta \cong \frac{\pi}{m+1}\sum_{k=0}^{m} F(\theta_k)$$

$$\int_{-1}^{1} \frac{f(t)}{\sqrt{1-t^2}}dt \cong \frac{\pi}{m+1}\sum_{k=0}^{m} f(t_k)$$

donde θ_k con k$\in$ {0, …, m} son las raíces de $\psi_{m+1}(\theta)$ = Cos((m +1)θ) y t_k con k$\in$ {0, …, m} las raíces de la función $T_{m+1}(t)$= Cos((m +1) arccos t) = ψ_{m+1}(arccos t).

Debemos saber que $\psi_{m+1}(\theta)$ y $T_{m+1}(t)$ forman parte de las familias $\psi_j(\theta)$ y $T_j(t)$ que son ortogonales respecto de los productos escalares:

$$\langle F,G\rangle = \int_0^{\pi} F(\theta)G(\theta)d\theta\,,\ \ \langle f,g\rangle = \int_{-1}^{1} \frac{f(t)g(t)}{\sqrt{1-t^2}}dt$$

De la exactitud de la fórmula de Gauss-Chebichev resultará que $y_j(q)$ =Cos jq y $T_j(t) = y_j$ (arccos t) son ortogonales respeto a los productos escalares:

$$\langle F, G \rangle_m = \sum_{K=0}^{m} F(q)G(q)$$

$$\langle f, g \rangle_m = \sum_{K=0}^{m} f(t_k)g(t_k)$$

4.2. Fórmulas Gaussianas.

La elección de las abcisas x_k, con k$\in$ {0, …, m}, como raíces de un polinomio y_{m+1}(x), de una fórmula de polinomios ortogonales llevará siempre a fórmulas de cuadratura exacta para los polinomios de grado menor o igual que 2m +1.

Sea w:[a, b]$\rightarrow$R una función peso positiva y continua sobre el intervalo [a, b] y sea y_{m+1}(x) $= A_{m+1}x^{m+1} + \ldots$ el polinomio ortogonal de grado m +1 asociado al producto escalar:

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b w(x) f(x) g(x) dx$$

y_{m+1}(x) tiene m +1 raíces simples x_k con k$\in$ {0, …, m} que se encuentran en el intervalo (a, b).

Si y_{m+1}(x) sólo cambiase de signo en i abcisas $x_1, \ldots, x_i$ de [a, b] con 1$\leq$i $\leq$m entonces el polinomio:

$$q_i(x)\, y_{m+1}(\mathrm{x}) \equiv (\mathrm{x}-a_1), \ldots, (\mathrm{x}-a_i)\, y_{m+1}(\mathrm{x})$$

de grado m + i +1, no cambiaría de signo sobre (a, b) y por lo tanto:

$$\int_a^b \cos(\mathrm{x})\mathrm{q}_i(x) y_{m+1}(x) dx = \langle q_i, y_{m+1} \rangle$$

la integral sería no nula, en contradicción con el hecho de que y_{m+1}(x) es ortogonal a cualquier polinomio de grado menor o igual que m.

Consideramos ahora la fórmula de integración numérica de m +1 abcisas evaluada sobre las raíces de y_{m+1}(x):

$$\int_a^b w(x) f(x) dx \cong \sum_{K=0}^{m} W_k(x_k)$$

Por la exactitud de las fórmulas de grado menor o igual que m, obtenemos que los pesos W_k provienen de:

$$W_k = \int_a^b l_k(x) w(x) dx, \quad l_k(x) = \prod_{k \neq i} \frac{x - x_i}{x_{k-x_i}} \text{ con k} \in \{0, \ldots, m\}$$

Comprobaremos ahora que esta elección hace exacta la fórmula también para los polinomios de grado menor o igual que 2m +1. A estas fórmulas obtenidas las llamaremos fórmulas Gaussianas de m +1 abcisas.

Sea P_{2m+1}(x) un polinomio de grado menor o igual que 2m +1 y sean q_m (x) y r_m(x) los polinomios de grado menor o igual que m que son el cociente y el resto obtenidos al dividir P_{2m+1}(x) por el polinomio P_{2m+1}(x) por el polinomio y_{m+1}(x) de grado m +1.

$$P_{2m+1} = q_m(x) + y_{m+1}(x) + r_m(x)$$

Por lo tanto el polinomio q_m (x) será ortogonal a y_{m+1}(x), es decir, $\langle q_m, y_{m+1} \rangle$=0, es decir:

$$\int_a^b w(x) P_{2m+1}(x) dx = \int_a^b \text{w(x)} + \text{q}_\text{m}\text{(x)} + y_{\text{m+1}}\text{(x)} + \int_a^b w(x) r_m(x) dx =$$

$$= \int_a^b w(x) r_m(x) dx = \sum_{K=0}^{m} W_k r_m(x_k)$$

puesto que la fórmula gaussiana es exacta para el polinomio r_m(x).

Como $y_{m+1}(x_k)$ = 0 con k$\in$ {0, …, m} obtenemos la exactitud de la fórmula gaussiana para P_{2m+1}(x):

$$\sum_{k=0}^{m} W_k \text{P}_{\text{2m+1}}(x_k) = \sum_{K=0}^{m} W_k q_m(x_k) y_{m+1}(x_k) + \sum_{K=0}^{m} W_k r_m(x_k) = \int_a^b W(x) P_{2m+1}(x) dx$$

4.3. Error de las fórmulas Gaussianas.

Para las funciones f$\in C^{2m+2}$ ([a, b]) podemos dar una expresión para el error de las fórmulas gaussianas. Para ello tengamos en cuenta el polinomio interpolador de Hermite P_{2m+1}(x) a f en las abcisas x_k con k$\in$ {0, …, m}, por un lado la fórmula gaussiana es exacta para este polinomio y por otra parte:

$$\text{f(x) - } P_{2m+1}\text{(x)} = \frac{f^{(2m+2)}(x(x))}{(2m+2)!} w_m^2(x)$$

donde con $\xi \in \{x_0, x_1, ..., x_{m,} x\} \subset$ [a, b] y

$$w_m(x) = (x - x_0) \cdot \ldots \cdot (x - x_m) = \frac{y_{m+1}(x)}{A_{m+1}}$$

Multiplicando por w(x) e integrando sobre el intervalo [a, b], obtenemos la fórmula del error de la fórmula gaussiana de m +1 abcisas:

$$\int_a^b W(x) f(x) dx - \sum_{K=0}^{m} W_k f(x_k) = \frac{f^{(2m+2)}(\xi)}{(2m+2)!} \cdot \frac{1}{A_{m+1}^2} \int_a^b \mathrm{W}(x) y_{m+1}^2(x) dx$$

donde $\xi \in (a,b)$ y A_{m+1} es el coeficiente del término de mayor grado de y_{m+1}(x).

5. MÉTODO DE ROMBERG.

El método de Romberg se basa en el error de la fórmula trapezoidal compuesta. En esta,

$$\mathrm{I(t)} \approx \sum_{i=1}^{N-1} f_i + \frac{h}{2}[f_0 + f_n] \text{ y } \quad \mathrm{E(t)} = -\frac{f''(n)}{2} h^2 (b-a)$$

Desde luego h $= \frac{b-a}{N}$. Por tanto si llamamos T(N) = $\frac{b-a}{N} [\sum_{i=1}^{N-1} f_i + \frac{f_0 + f_n}{2}]$ a la aproximación con (N +1) puntos, dando a N los valores 2^j (j =0, 1, 2, …) podemos definir $T_{ij} = \frac{4^i T_{i-1,i-j} - T_{i-1,j}}{4^i - 1}$ recurrentemente.

Se demuestra que cualquiera que sea la función f continua en [a, b]:

$\forall i$, T_{ij} tiende a $\int_a^b f(x) dx$ cuando j$\rightarrow \infty$

$\forall j$, T_{ij} tiende a $\int_a^b f(x) dx$ cuando i$\rightarrow \infty$

Por otro lado el error de la aproximación T_{ij} es:

$$E_{T_{ij}}(t) = -\text{ (b - a)}^{2i+3} \frac{B_{2i+2}}{2^{(i+1)(i+2j)}} \frac{f^{(2i+2)}(\xi)}{(2i+2)!} \text{ con } \xi \in [a,b]$$

siendo B $_{2i+2}$ el polinomio de Bernstein de f de orden 2i +2.

Esta expresión indica que la convergencia de T_{ij} hacia $\int_a^b f(x) dx$ cuando i$\rightarrow \infty$ es más rápida que la de cualquier serie geométrica.

La sucesión $T_{00}, T_{10}, T_{20}, \ldots, T_{i0} \ldots$ proporciona sucesivas fórmulas de integración Romberg. Tienen la forma:

$$T_{i0}\,(\mathrm{f}) = \sum_{j=0}^{2^i} w_j\, f(x_j)$$

donde x_j = a +jh y h = $\dfrac{b-a}{2^i}$ y los pesos w_j, calculables por recurrencia están todos en el intervalo [$\dfrac{ch}{3}$, ch] con c = $\displaystyle\prod_{K=1}^{\infty} \frac{1}{1-4^k}$

<u>Ejemplo</u>.-

Para calcular aproximadamente $\displaystyle\int_{-1}^{3} \frac{dx}{(1+x^{10})^2}$ el método de Romberg no daria:

T_{00} = 0,5 T_{10} = 0,83 T_{20} = 1,63 T_{30} = 1,806 T_{80} = 1,80926152

T_{90} =1,80926152 $\ldots$

Bibliografía Recomendada

Elementos de Análisis Numérico. Meter Henrici. Edit: Trillas. Mexico. 1977

Análisis Matemático I. Aut. J.A. Fernández Viña. Ed. Tecnos

Curso de Análisis Matemático I. Aut. E.L. Luna. Ed. Edunsa, 1991.

Calculus. Aut. M. Spivak. Ed. Reverté.

Análisis Matemático. Aut. M. de Guzmán, B. Rubio. Ed. Pirámide.

Análisis Matemático 2ª Edición. Aut. T. M. Apostol. Ed. Reverté