TEMAS DE MATEMÁTICAS
(Oposiciones de Secundaria)

TEMA 46

COORDENADAS DEL PLANO Y DEL ESPACIO

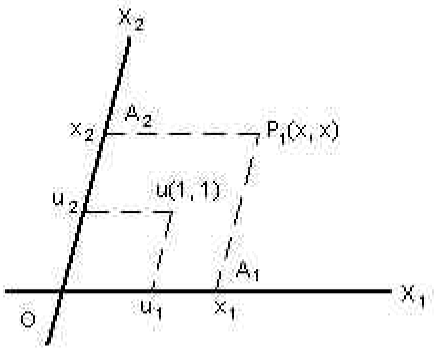
TEMA 46

<u>COORDENADAS DEL PLANO Y DEL ESPACIO</u>

1. COORDENADAS CARTESIANAS EN EL PLANO.

Se trata en este primer apartado de conseguir un sistema de representación para los puntos de un plano, así como para los diversos subconjuntos de puntos de dicho plano que reciben habitualmente el nombre genérico de curvas planas.

Para ello, un primer método es el denominado de coordenadas cartesianas. Dado un plano determinado, consideremos en él un conjunto de dos rectas que se cortan en un punto O, que llamaremos origen y sobre cada una de las rectas un punto que denominaremos punto unidad.



El punto O y el punto unidad en cada recta (definidos en la figura como u_1 y u_2), que no tienen por qué estar a la misma distancia de O, determinan sobre cada recta un sistema de abscisas. Sobre cada recta, todo punto P determina un segmento OP. El cociente entre la distancia OP y la distancia Ou_1 se denomina abscisa del punto P en ese sistema (colocando el signo + a ese cociente si P está en la recta de forma que u_1 esté entre 0 y P, y el signo – si 0 está entre u_1 y P.

El sistema formado por las dos rectas, el punto O y los puntos u_1 y u_2 se suele denominar sistema de ejes cartesianos. Definido este sistema, vamos a establecer una correspondencia biunívoca entre los puntos del plano y los pares de números reales.

Supongamos para ello el punto P_1 del plano y tracemos por dicho punto una paralela a cada eje de coordenadas. Cada paralela cortará a cada eje en un punto, denominado A_1 y A_2 respectivamente.

Como $OA_1 = x_1 \cdot Ou_1$ y $OA_2 = x_2 \cdot Ou_2$ los puntos A_1 y A_2 determinan dos números reales x_1 y x_2. Decimos que el par (x_1, x_2) son las coordenadas del punto P_1 en el sistema de coordenadas dado. Por la construcción de los puntos A_1 y A_2 se observa fácilmente que los números x_1 y x_2 son únicos, dado P_1 y el sistema de coordenadas (por los axiomas de la geometría).

Recíprocamente, los números (x_1, x_2) determinan, dado el sistema coordenado, de forma única los puntos A_1 y A_2. Trazando por ellos rectas paralelas a los ejes de coordenadas, el punto intersección de ambas es único, y se llama afijo del par (x_1, x_2).

Establecida así la correspondencia biunívoca vemos que el origen O se corresponde con el par (0, 0). A los puntos del eje OX_1 (denominado eje de abscisas), le corresponden pares de la forma $(x_1, 0)$ y a los puntos del eje OX_2 (denominado eje de coordenadas), le corresponden pares de la forma $(0, x_2)$.

El punto u(1, 1) se dice que es el punto unidad del sistema.

Como casos particulares de los sistemas de coordenadas cartesianas tenemos:

a) Los ejes de coordenadas son rectas perpendiculares y los puntos unidad de cada eje están a distancias distintas de 0. Decimos que tenemos un sistema ortogonal de coordenadas.
b) Los ejes de coordenadas son perpendiculares y los puntos unidad de cada eje están a la misma distancia de 0. Estamos ante un sistema ortonormal de coordenadas.

En cualquier caso, los puntos P(x_1, x_2) tales que:

$$\left.\begin{cases} x_1 > 0 \\ x_2 > 0 \end{cases}\right\} \text{ se dice que forman el primer cuadrante}$$

$$\left.\begin{cases} x_1 < 0 \\ x_2 > 0 \end{cases}\right\} \text{ forman el segundo cuadrante}$$

$$\left.\begin{cases} x_1 < 0 \\ x_2 < 0 \end{cases}\right\} \text{ forman el tercer cuadrante}$$

$$\left.\begin{cases} x_1 > 0 \\ x_2 < 0 \end{cases}\right\} \text{ forman el cuarto cuadrante}$$

2. CAMBIO DE SISTEMAS DE COORDENADAS.

En ciertas cuestiones es conveniente utilizar dos sistemas de coordenadas cartesianas (ortonormales) OXY y O'X'Y', que podemos distinguir llamando OXY al antiguo y O'X'Y' al nuevo.

El problema fundamental que plantea el uso de dos sistemas de coordenadas es el siguiente: cada punto P del plano tiene unas coordenadas (x, y) en el sistema OXY y otras coordenadas (x', y') en el sistema O'X'Y'. Es, pues, necesario conocer el modo de pasar de unas a otras de estas coordenadas, con lo cual los problemas planteados en un sistema se podrán traducir a problemas en el otro sistema.

Para pasar de las coordenadas (x, y) de P en el sistema OXY a las (x', y') de P en el sistema O'X'Y' debemos encontrar las fórmulas de transformación:

$$\left.\begin{aligned} x' &= f(x, y) \\ y' &= g(x, y) \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

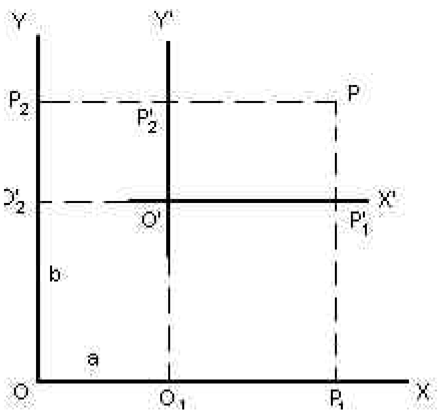
o sus inversas:

$$\left.\begin{aligned} x &= h(x', y') \\ y &= k(x', y') \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

Para poder encontrar estas fórmulas de transformación de coordenadas es preciso conocer la situación de un sistema respecto del otro.

Si en (1) damos a (x, y) todos los pares de valores posibles, entonces para (x', y') aparecen también todos los pares de valores posibles y cada uno una sola vez. Las (1) constituyen, pues, una sustitución definida en el conjunto de los pares de números (x, y).

2.1. Traslación de ejes.



Sean OXY y O'X'Y' dos sistemas de ejes coordenados ortonormales tales que los ejes O'X' y O'Y' son paralelos, con el mismo sentido respectivamente, que los ejes OX y OY.

En estas condiciones se dice que el sistema de ejes O'X'Y' se obtiene del OXY por traslación.

La posición de O'X'Y' quedará conocida dando las coordenadas del origen O' en el sistema OXY. Sean pues:

O'(a, b)	referido al sistema OXY
P(x, y)	referido al sistema OXY
P(x', y')	referido al sistema O'X'Y'

Proyectando O' sobre OX se obtiene O', y proyectando P sobre OX obtenemos P_1 y sobre O'X', obtenemos P'_1. La igualdad:

$$\overline{OP_1} = \overline{OO'_1} + \overline{O'_1 P_1} = \overline{OO'_1} + \overline{O'P'_1}$$ equivale a:

$$x = a + x'$$

Del mismo modo, $\overline{OP_2} = \overline{OO'_2} + \overline{O'_2 P_2} = \overline{OO'_2} + \overline{O'P'_2}$ equivale a:

$$y = b + y'$$

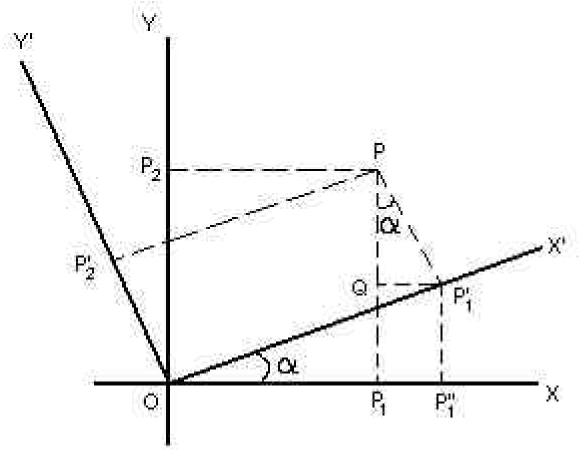
Las fórmulas de traslación de ejes son, por tanto:

$$\left.\begin{matrix} x = a + x' \\ y = b + y \end{matrix}\right\}$$

y sus inversas

$$\left.\begin{array}{l} x' = x - a \\ y' = y - b \end{array}\right\}$$

2.2. Giro de ejes.



Supongamos ahora que tenemos dos sistemas ortonormales OXY y OX'Y' con el mismo origen, y por tanto con el ángulo entre OX y OX' igual al ángulo entre OY y OY', que llamaremos á.

En estas condiciones, el sistema OX'Y' se dice que se ha obtenido a partir del OXY por un giro (rotación) de ángulo á alrededor del origen.

Sean (x, y) y (x', y'), como siempre, las coordenadas de un punto P en los sistemas OXY y OX'Y', respectivamente.

Proyectando P sobre OX y sobre OX' obtenemos P_1 y P'_1 respectivamente, proyectando P sobre OY y sobre OY' obtenemos P_2 y P'_2 respectivamente.

De la figura obtenemos:

$$\overline{OP_1} + \overline{P_1P''_1} = \overline{OP''_1}$$

siendo P''_1 la proyección de P'_1 sobre OX.

Entonces:

$$\left.\begin{array}{l} \overline{OP''_1} = x'\cos \boldsymbol{a} \\ \overline{P_1P''_1} = \overline{QP'_1} = \overline{PP'_1} sin\, \boldsymbol{a} = y'\, sinx \\ \overline{OP_1} = x \end{array}\right\} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \qquad x'\cos \boldsymbol{a} = x + y'\, sin\, \boldsymbol{a} \Leftrightarrow x = x'\cos \boldsymbol{a} - y'\, sin\, \boldsymbol{a}$$

Por otro lado: $\overline{OP_2} = \overline{P_1P} = \overline{P_1Q} + \overline{QP}$.

Ahora bien:
$$\left.\begin{array}{l} \overline{OP_2} = y \\ \overline{P_1Q} = \overline{P''_1\, P'_1} = x'\, sinx \\ \overline{QP} = y'\cos \boldsymbol{a} \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \qquad y = x'\, sin\, \boldsymbol{a} + y'\cos \boldsymbol{a}$$

Así pues, las fórmulas de la transformación en el giro son:

$$\left.\begin{array}{l} x = x'\cos\alpha - y'\sin\alpha \\ y = x'\sin\alpha + y'\cos\alpha \end{array}\right\}$$

que pueden escribirse matricialmente como:

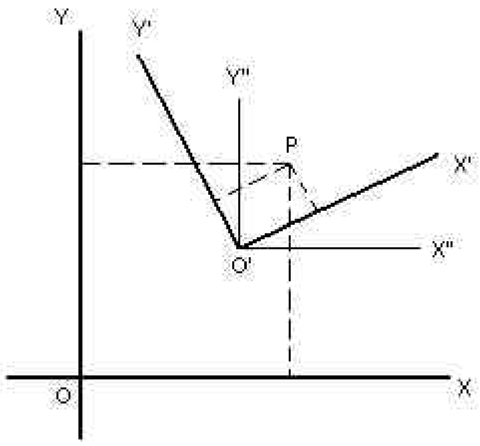
$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

Calculando la inversa de la matriz $\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$, que es, $\begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$,

obtenemos las expresiones inversas:

$$\left.\begin{array}{l} x = x\cos\alpha + y\sin\alpha \\ y = -x\sin\alpha + y\cos\alpha \end{array}\right\}$$

2.3. Movimiento de ejes coordenados



Sean ahora OXY y O'X'Y' dos sistemas de ejes coordenados ortonormales tales que trazando por O' unos ejes auxiliares O'X'' y O'Y'' con la misma dirección y sentido que los OX y OY, demuestre que O'X'Y' se obtenga de O'X''Y'' por un giro de ángulo α alrededor de O'. Es decir, que los ejes O'X'Y' se obtienen, a partir de OXY, mediante una traslación y un giro.

Sea O'(a, b) referido al sistema OXY y P(x, y) un punto cualquiera del plano referido a dicho sistema. Sea además P(x',y') el punto P referido al sistema O'X'Y' y P(x'',y'') referido al O'X''Y''. Tendremos:

$$\left.\begin{array}{l} x = a + x'' \\ y = b + y'' \end{array}\right\}$$

Además:

$$\left.\begin{array}{l} x'' = x'\cos\alpha - y'\sin\alpha \\ y'' = x'\sin\alpha - y'\cos\alpha \end{array}\right\}$$

Juntando ambas, obtenemos:

$$\left.\begin{array}{l} x = x'\cos \boldsymbol{a} - y'\sin \boldsymbol{a} + a \\ y = x'\sin \boldsymbol{a} - y'\cos \boldsymbol{a} + b \end{array}\right\}$$ <u>Fórmulas del movimiento de ejes.</u>

Estas expresiones se pueden escribir matricialmente como:

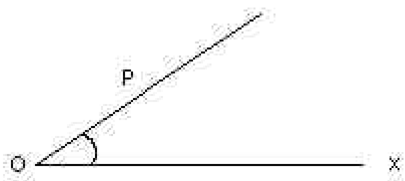
$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \boldsymbol{a} & -\sin \boldsymbol{a}\, x' \\ \sin \boldsymbol{a} & \cos \boldsymbol{a} \;\; y' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

o bien

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \boldsymbol{a} & -\sin \boldsymbol{a} & 0 \\ \sin \boldsymbol{a} & \cos \boldsymbol{a} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix}$$

Las inversas pueden obtenerse de forma sencilla.

<u>3. COORDENADAS POLARES.</u>



En un plano queda determinado un sistema de coordenadas polares si se da un punto O, que se denomina polo, una semirrecta de origen O, que se denomina eje polar, y las unidades que se utilizan para medir longitudes y ángulos, además del sentido que se utiliza como positivo para medir ángulos orientados, o con sentido.

Comúnmente se utiliza en el dibujo el eje OX paralelo al margen inferior del papel del dibujo y como sentido positivo el contrario al del movimiento de las agujas del reloj.

Una vez fijado un sistema de coordenadas polares, cada punto P del plano, determina dos números ö y ñ llamados coordenadas polares de P.

El primero, ö, es la medida del ángulo (OX, OP) y se llama argumento de P. Este ángulo queda indeterminado si P=0.

El segundo número, ñ, es la distancia OP y se llama radio polar o módulo de OP.

Recíprocamente, si damos un par de números (ö, ñ) tales que $0 \leq \boldsymbol{j} \leq 2\boldsymbol{p}$ y $\boldsymbol{r} \geq 0$, no hay un punto que posea como argumento ö y como radio polar ñ. El punto P con estas coordenadas polares puede representarse como P(ö, ñ).

Conviene, sin embargo, establecer un convenio que permite que las coordenadas polares de un punto tomen cualquier valor.

Seas ö y ñ y par de números cualesquiera. Hay una semirrecta OA que forma con OX un ángulo de medida ö. En esta recta OA hay un solo punto P cuya abscisa es ñ. Este punto estará en la semirrecta OA si ñ es positivo y en la opuesta si ñ es negativo. El punto P se dice que tiene las coordenadas polares (ñ, ö). Si el punto P tiene también las coordenadas ($ñ_0$, $ö_0$) con:

$$0 \le j_0 < 2p \qquad r_0 > 0$$

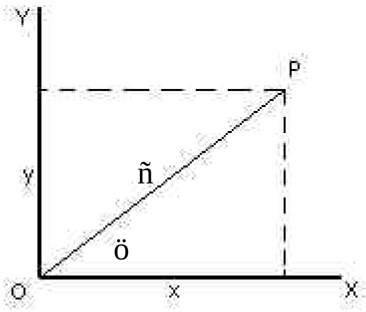
entonces: si ñ>0 se verifica: $\begin{cases} j = j_0 + 2kp \\ r = r_0 \end{cases}$

Si ñ<0, entonces: $\begin{cases} j = j_0 + (2k+1)p \\ r = -r_0 \end{cases}$

Con este convenio puede representarse gráficamente cualquier función $r = f(j)$ como conjunto de puntos de la forma $(j, f(j))$.

3.1. Paso de coordenadas cartesianas a polares.

Si tenemos un sistema ortonormal OXY y tomamos OX como eje polar y como sentido positivo para medir ángulos el del ángulo (OX, OY), cada punto P del plano tendrá unas coordenadas cartesianas P(x, y) y unas coordenadas polares P(ö, ñ).



De la figura se obtiene, sin dificultad:

$$\left.\begin{aligned} x &= r\cos j \\ y &= r\sin j \end{aligned}\right\} \quad \text{o bien,} \quad \left.\begin{aligned} r &= \sqrt{x^2+y^2} \\ j &= \arctan\frac{y}{x} = \arccos\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \end{aligned}\right\}$$

<u>4. ECUACIONES DE CURVAS EN EL PLANO.</u>

<u>4.1. Curvas en coordenadas cartesianas explícitas.</u>

Son aquellas curvas que vienen determinadas por la gráfica de una expresión de la forma $y = f(x)$. Es decir, una curva así definida viene determinada como:

$$G = \{(x, y) \mid y = f(x)\}$$

Representando gráficamente los pares (x, y) se obtiene una gráfica, que suele denominarse curva de la función $y = f(x)$, en el supuesto que f(x) sea la expresión de una función $f : R \to R$.

Las curvas dadas de esta forma han sido estudiadas con detalle en los temas de cálculo, sobretodo en el Tema 28.

La representación gráfica de la función $y = f(x)$ se dice que constituye una curva uniforme y continua si la función $y = f(x)$ es uniforme y continua. La igualdad $y = f(x)$ se llama ecuación de dicha curva.

Si $y = f(x)$ está definida en el intervalo (a, b), la curva que resulta de limitar en $y = f(x)$ el campo de variabilidad de x a un subintervalo $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) \subset (a,b)$ se dice que es un arco de curva (incluso puede ser $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = (a,b)$).

4.2. Curvas en forma paramétrica.

Dadas dos funciones uniformes y continuas:

$$\left.\begin{array}{l} x = x(t) \\ y = y(t) \end{array}\right\} t \in (a,b)$$

al conjunto de puntos de la forma $G = \{(x(t), y(t_1)), \forall t \in (a,b)\}$ se llama curva de ecuaciones paramétricas.

$$\left.\begin{array}{l} x = x(t) \\ y = y(t) \end{array}\right\}$$

Un arco de la curva anterior de extremos $P_1(x(t_1), y(t_1))$ y $P_2(x(t_2), y(t_2))$ es la curva que se obtiene con los puntos $\{(x(t), y(t_1)), \forall t \subset (a,b)\}$.

Un punto $(x(t'), y(t'))$ se dice que es un punto múltiple de la curva de ecuaciones

$$\left.\begin{array}{l} x = x(t) \\ y = y(t) \end{array}\right\} t \in (a,b)$$

si existe (por lo menos) otro valor $t'' \neq t'$ tal que:

$$\begin{array}{l} x(t'') = x(t') \\ y(t'') = y(t') \end{array}$$

Los demás puntos de dicha curva se llaman simples. Si los puntos extremos $(x(a), y(a))$ y $(x(b), y(b))$ coinciden, pero no se obtiene dicho punto para ningún otro valor del parámetro t, dicho punto se considera simple.

La curva se dice cerrada o un arco de curva cerrada cuando coinciden los dos puntos que resultan para t =a y t =b.

Una curva de ecuaciones paramétricas

$$\left.\begin{array}{l} x = x(t) \\ y = y(t) \end{array}\right\} t \in (a,b)$$

se llama de Jordan si además de ser estas funciones uniformes y continuas, la curva carece de puntos múltiples.

Una curva de Jordan decimos que tiene tangente en el punto (x(c), y(c)) si existe el límite:

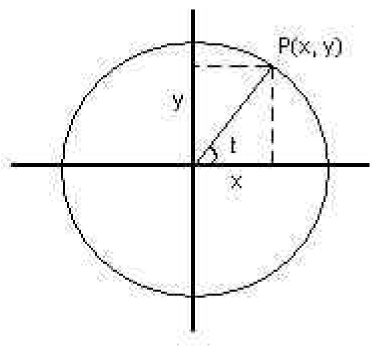
$$\lim_{t \to c} \frac{y(t) - y(c)}{x(t) - x(c)}$$

Una curva de Jordan se dice que tiene tangente en todos sus puntos si el límite anterior existe $\forall c \in (a,b)$.

En las curvas elementales se excluye la existencia de infinitos puntos de discontinuidad, de infinitos puntos múltiples y de infinitos puntos sin tangente. Es decir, una curva elemental o regular puede considerarse como la unión de un número finito de curvas de Jordan con tangente en todos sus puntos.

Como ejemplos de curvas paramétricas tenemos:

4.2.1. Circunferencia



Si el centro de la circunferencia de radio r es el origen de coordenadas, las ecuaciones paramétricas de la circunferencia, en función del ángulo que forme un punto genérico con el eje OX es:

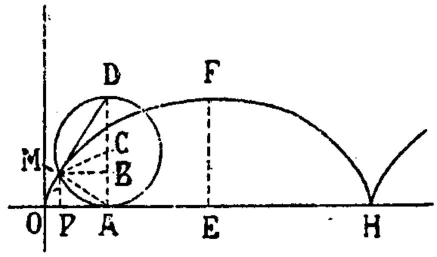
$$\left.\begin{array}{l} x = r\cos t \\ y = r\sin t \end{array}\right\} t \in [0, 2p]$$

Si el centro es el punto de coordenadas (x_0, y_0) las ecuaciones serán ahora:

$$\left.\begin{array}{l} x = x_0 + r\cos t \\ y = y_0 + r\sin t \end{array}\right\} t \in [0, 2p]$$

4.2.2. Cicloide

Es la curva descrita por un punto M de una circunferencia c que rueda sin deslizarse sobre una recta indefinida.



Tomando por eje OX la recta dada y por eje OY la perpendicular a la anterior trazada por el punto O en que se supone que el punto M coincide con la recta, las ecuaciones se obtienen así:

Las coordenadas de un punto M cualquiera de la curva verifica que:

$$\left.\begin{array}{l} x = OP = OA - MB \\ y = MP = AC - C \end{array}\right\}$$

Llamando r al radio de la circunferencia móvil y t al ángulo MCA, por la definición de la curva se sabe que el arco AM es igual en longitud al segmento OA. Según esto:

OA= arco AM= Z

De todo ello resulta:

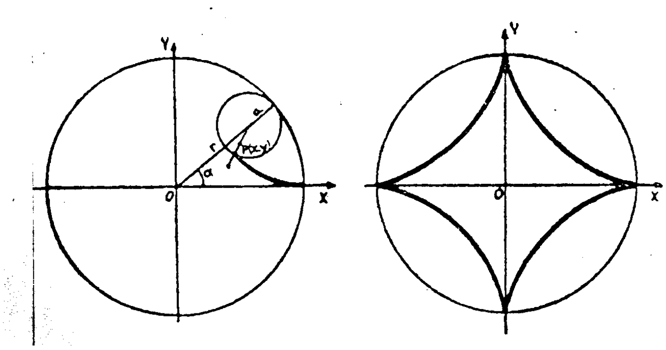
$$\left.\begin{array}{l} x = rt - r\sin z \Rightarrow x = r(t - \sin t) \\ y = r - r\cos t \Rightarrow y = r(1 - \cos t) \end{array}\right\}$$

Estas dos ecuaciones son las ecuaciones paramétricas de la cicloide. De ellas se deduce la forma de la curva:

El valor de x crece continuamente al mismo tiempo que t mientras que la ordenada y crece desde t= 0 hasta t= ð en que adquiera el valor máximo EF= 2r, correspondiente a x= ðr, disminuyendo luego hasta t= 2ð en que y= 0 cuando x= 2ðr. Para valores de t superiores a 2ð se obtienen ramas sucesivas de curvas iguales a la primera. Los puntos O y M se llaman puntos de retroceso.

4.2.3. Hipocicloides

Si al rodar una circunferencia sobre otra el contacto es interior, las curvas descritas por los distintos puntos unidos invariablemente a la curva móvil describen hipocicloides.



Las ecuaciones de las hipocicloides son:

$$x = (r - a)\cos \boldsymbol{a} + a\cos\left[\left(\frac{r}{a} - 1\right)\boldsymbol{a}\right]$$

$$y = (r - a)\sin \boldsymbol{a} - a\sin\left[\left(\frac{r}{a} - 1\right)\boldsymbol{a}\right]$$

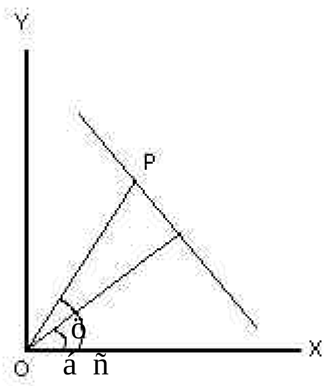
- Para r= 3a tenemos la hipocicloide natural de Steimer de tres retrocesos.

- Para r= 4a tenemos la astroide o hipocicloide de cuatro retrocesos.

- Cuando a>r tenemos las pericicloides y en ellas el círculo fijo es interior al móvil.

4.3. Curvas en coordenadas polares.

4.3.1. Ecuación de la recta



Sea la ecuación normal de la recta:

$$x\cos\alpha + y\sin\alpha = P$$

Si en esta ecuación ponemos:

$$\left.\begin{aligned} x &= \rho\cos\varphi \\ y &= \rho\sin\varphi \end{aligned}\right\} \quad \text{obtenemos:}$$

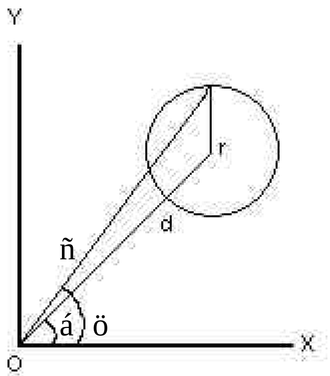
$$\rho\cos\varphi\cos\alpha + \rho\sin\varphi\sin\alpha = P\,,$$

o sea: $$\rho\cos(\varphi-\alpha) = P$$

que es la ecuación de la recta en coordenadas polares. Si se quiere esta ecuación se puede poner de la forma:

$$\rho = \frac{P}{\cos(\varphi-\alpha)}$$

4.3.2 Ecuación de la circunferencia



Sea la circunferencia de centro (a, b) y radio r en un sistema de coordenadas ortonormal. Si en su ecuación

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$$

hacemos el cambio a polares

$$\begin{cases} x = \rho\cos\varphi \\ y = \rho\sin\varphi \end{cases}$$

y sustituimos además: $a = d\cos\alpha$ $\quad b = d\sin\alpha$ $\quad$ obtenemos:

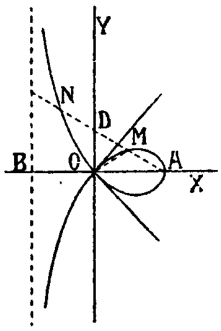
$$r^2 = \rho^2 + d^2 - 2\rho d\cos(\varphi-\alpha)$$

si el punto (a, b) es el origen de coordenadas entonces d= 0 y la ecuación queda sí:

$$\boldsymbol{r} = r$$

4.3.3. Estrofoide

Dado el sistema cartesiano ortonormal OXY sea A un punto sobre el eje x. Trazando por A una recta cualquiera AD que corte a OY en D, se lleva sobre esta recta, a un lado y otro de D los segmentos DM = DN = OD. El lugar geométrico de los puntos M y N se llama estrofoide.



Tomando por polo el punto O y por eje polar el eje OX, las coordenadas de M son:

$$\left.\begin{array}{l} \boldsymbol{r} = OM \\ \boldsymbol{j} = \angle MDA \end{array}\right\}$$

Por construcción sabemos que el triángulo OMD es isósceles, de donde se deducen las siguientes relaciones:

$$\begin{aligned} \angle DOM &= \angle DMO = 90^{\circ} - \boldsymbol{j} \\ \angle ODM &= 2\boldsymbol{j} \\ \angle OAM &= 90^{\circ} - 2\boldsymbol{j} \end{aligned}$$

En el triángulo OAM se verifica:

$$\frac{OM}{OA} = \frac{\sin \angle OAM}{\sin \angle OMA} = \frac{\sin(90^{\circ} - 2\boldsymbol{j})}{\sin(90^{\circ} - \boldsymbol{j})} = \frac{\cos 2\boldsymbol{j}}{\cos \boldsymbol{j}}$$

Como OM= ñ, resulta: (haciendo OA= a=

$$\boldsymbol{r} = a\frac{\cos 2\boldsymbol{j}}{\cos \boldsymbol{j}}$$

que es la ecuación de la estrofoide en coordenadas polares. Las coordenadas de N verifican la misma ecuación.

<u>4.4. Curvas en forma cartesiana implícita.</u>

En general, cuando tratemos de representar una curva dada por una ecuación en forma implícita, de la forma f(x, y)= 0, no podemos expresarla explícitamente (en la forma y= g(x)), por lo que el estudio de una representación es muy distinto al conocido.

Cuando a partir de f(x, y)= 0 es posible encontrar una o varias funciones uniformes y continuas

$$y = f_1(x), y = f_2(x), \ldots, y = f_n(x)$$

que contienen todas las soluciones de f(x, y)= 0 decimos que las curvas $y = f_i(x)$ $(i = 1...n)$ componen una curva de ecuación implícita f(x, y)= 0. Las curvas representan todas las soluciones de f(x, y)= 0 en la forma paramétrica

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$$

de modo que $f\left(x(t), y(t_1)\right) = 0 \quad \forall t$

En este caso queda expresada la curva f(x, y) = 0 en forma paramétrica.

4.4.1. Ejemplo de curvas en implícitas:

4.4.1.1. Circunferencia

Sabemos que la ecuación de la circunferencia de centro (a, b) y radio r puede expresarse como:

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$$

que proviene de expresar la distancia de un punto cualquiera (x, y) al centro (a, b) e igualarla a r.

4.4.1.2. Estrofoide

En la ecuación vista antes: $\boldsymbol{r} = a\dfrac{\cos 2\boldsymbol{j}}{\cos \boldsymbol{j}}$, haciendo:

$$\begin{cases} x = \boldsymbol{r}\cos \boldsymbol{j} \\ y = \boldsymbol{r}\sin \boldsymbol{j} \end{cases} \qquad \text{obtenemos:} \qquad \boldsymbol{r} = \frac{a\left[\cos^2 \boldsymbol{j} - \sin^2 \boldsymbol{j}\right]}{\cos \boldsymbol{j}} = \frac{a\left[\dfrac{x^2}{\boldsymbol{r}^2} - \dfrac{y^2}{\boldsymbol{r}^2}\right]}{\dfrac{x}{\boldsymbol{r}}} \qquad \text{o sea:}$$

$$\frac{x}{\boldsymbol{r}}\boldsymbol{r} = a\frac{(x^2 - y^2)}{\boldsymbol{r}^2} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \boldsymbol{r}^2 x = a(x^2 - y^2).$$

Como $\boldsymbol{r}^2 = x^2 + y^2$ resulta: $\qquad x(x^2 + y^2)^2 - 2a^2(x^2 - y^2) = 0$

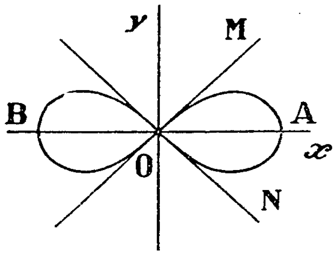
que es la ecuación implícita de la estrofoide.

4.4.1.3. Lemniscata

La ecuación de esta curva en implícitas es:

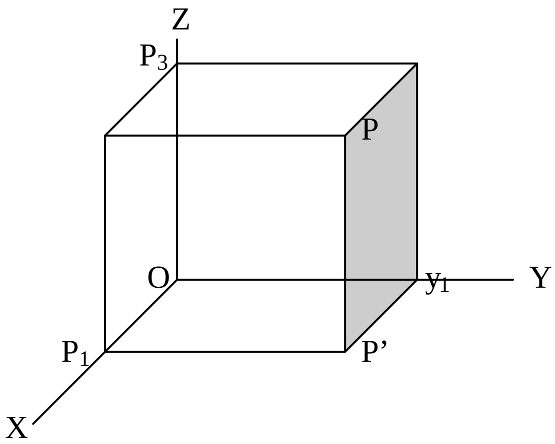
$$(x^2 + y^2)^2 - 2a^2(x^2 - y^2) = 0$$

El origen de coordenadas es el centro de la curva, y los ejes de coordenadas son ejes de simetría. Se compone de dos ramas cerradas que se unen en el centro , que es un punto doble.



5. COORDENADAS EN EL ESPACIO.

5.1. Coordenadas cartesianas.



Sean OX, OY, OZ tres rectas del espacio concurrentes en un punto O y no coplanarias. En la recta OX tomemos un sistema de abscisas con origen en el punto Oy otro punto U_1 como punto unidad. Del mismo modo, en OY y OZ tomemos sendos sistemas de abscisas con origen O y puntos unidad U_2 y U_3, respectivamente.

Diremos que estas tres rectas OX, OY, OZ con los sistemas de abscisas considerados forman un sistema de coordenadas OXYZ, del espacio tridimensional.

En este sistema de coordenadas el punto O se llama origen de coordenadas, las rectas OX, OY y OZ, ejes de coordenadas y los planos OXY, OXZ y OYZ, planos de coordenadas.

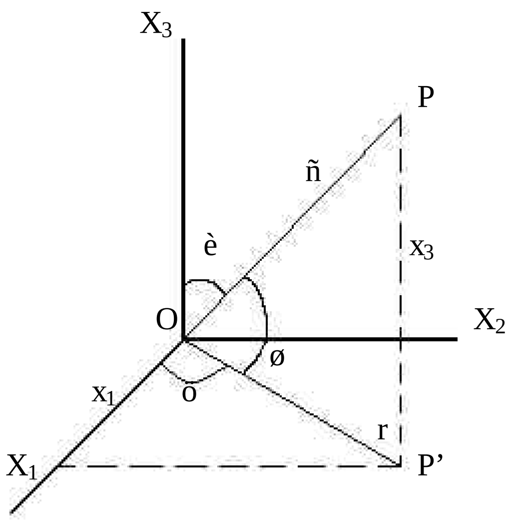
Dado ahora un punto P del espacio, trazamos por él un plano paralelo al plano OYZ, el cual corte al eje OX en un punto P_1. De modo análogo, el plano trazado por P paralelo a OXZ corta al eje OY en un punto P_2, y el paralelo a OXZ corta a OZ en P_3. Los tres puntos P_1, P_2, P_3 tendrán ciertas coordenadas x, y, z en los sistemas de abscisas de los ejes OX, OY, OZ respectivamente. Estos tres números (x, y, z) así obtenidos se llaman coordenadas del punto P en el sistema de coordenadas OXYZ.

Estas coordenadas dadas en este orden determinan el punto P. Por ello, este punto P lo designaremos por (x, y, z) o bien P(x, y, z).

En el caso de que las rectas sean perpendiculares (los ejes de coordenadas), decimos que el sistema de coordenadas es ortogonal.

En el caso de que la distancia al origen O a cada punto unidad sobre cada eje sea igual, decimos que el sistema de coordenadas cartesiano es ortonormal.

5.2. Coordenadas polares.



Consideremos un sistema cartesiano ortonormal $OX_1X_2X_3$. Denominando polo al punto O y plano polar al plano OX_1X_3, el punto P viene determinado por los tres números siguientes:

ñ= OP, llamado radio vector

è = ángulo POX_3, denominado distancia cenital.

ö= ángulo que forma el plano POX_3 con el plano polar.

A todo punto del espacio corresponde una terna de números y recíprocamente, a toda terna de números corresponde un punto (excepto al origen), si hacemos variar:

$$0 \leq \boldsymbol{r} < \infty \qquad 0 \leq \boldsymbol{j} \leq 2\boldsymbol{p} \qquad 0 \leq \boldsymbol{q} < \boldsymbol{p}$$

existiendo así una correspondencia ente los puntos del espacio y las ternas de puntos con tales limitaciones, llamadas coordenadas polares.

El paso a coordenadas cartesianas se hace de la siguiente forma:

$$x_1 = \boldsymbol{r} \sin \boldsymbol{q} \cos \boldsymbol{j}$$
$$x_2 = \boldsymbol{r} \sin \boldsymbol{q} \sin \boldsymbol{j}$$
$$x_3 = \boldsymbol{r} \cos \boldsymbol{q}$$

y recíprocamente, elevando al cuadrado y sumando el paso a polares es:

$$r = \sqrt{x_1^{\ 2} + x_2^{\ 2} + x_3^{\ 2}}$$

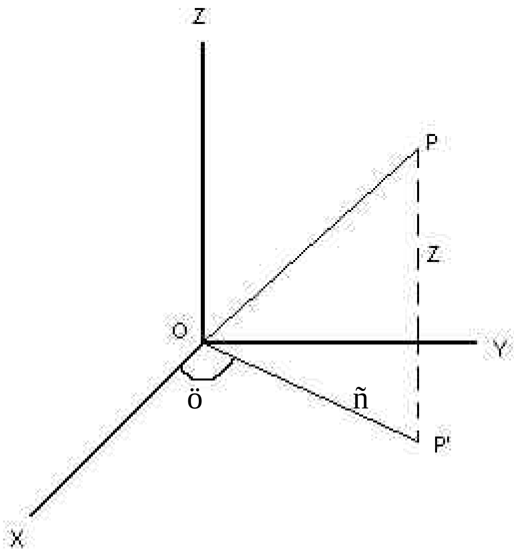
$$sin q = \frac{\sqrt{x_1^{\ 2} + x_2^{\ 2}}}{\sqrt{x_1^{\ 2} + x_2^{\ 2} + x_3^{\ 2}}} \qquad \text{o bien} \qquad \cos q = \frac{x_3}{\sqrt{x_1^{\ 2} + x_2^{\ 2} + x_3^{\ 2}}}$$

$$tan j = \frac{x_2}{x_1}$$

5.3. Coordenadas esféricas.

Coinciden con las anteriores sin más que tomar, en vez del ángulo è, su complementario ø, que se denomina latitud.

5.4. Coordenadas cilíndricas.



Referido a un sistema cartesiano ortonormal, un punto P cualquiera del espacio viene determinado por:

- Su altura z sobre el plano OXZ, es decir, la coordenada de la proyección P sobre el eje OZ.

- Las coordenadas polares (ñ, ö) de la proyección P' de P sobre el plano OXY.

Los números (ñ, ö, z) reciben el nombre de coordenadas cilíndricas de P.

Las restricciones de tales coordenadas para la existencia de una correspondencia biyectiva (salvo el origen) entre puntos del espacio y ternas de números es:

$$0 \le r \le \infty \qquad 0 \le j < 2p \qquad -\infty < z < \infty$$

La relación entre coordenadas cilíndricas y rectangulares es:

$$x = r \cos j \qquad y = r \sin j \qquad z = z$$

y recíprocamente:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} \qquad \tan j = \frac{x}{y} \qquad z = z$$

6. CURVAS EN EL ESPACIO.

Una curva en el espacio puede representarse de dos maneras distintas:

6.1. Representación paramétrica.

o sea por ecuaciones de la forma:

$$\left.\begin{aligned} x &= x(t) \\ y &= y(t) \\ z &= z(t) \end{aligned}\right\} t \in I \subset R$$

Ejemplos.

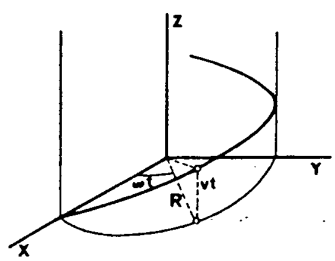
1. <u>Una recta en el espacio</u> viene expresada por:

$$\left.\begin{aligned} x &= a + vt \\ y &= b + wt \\ z &= c + ut \end{aligned}\right\}$$

donde P(a, b, c) es un punto de la recta y (v, w, u) es un vector director.

2. <u>Una hélice circular o cilindro</u>:

Es la curva descrita por un punto que gira alrededor de un eje con velocidad angular constante y al propio tiempo se desplaza en la dirección de este eje con velocidad lineal constante.



Si tomamos como eje el OZ, llamamos R al radio de giro, ù a la velocidad angular y v a la lineal, tenemos:

$$\left.\begin{aligned} x &= R\cos wt \\ y &= R\sin wt \\ z &= vt \end{aligned}\right\}$$

que son las ecuaciones paramétricas de la hélice, siendo t (el tiempo) el parámetro.

6.2. Como intersección de dos superficies

Según veremos en el apartado siguiente, una superficie en R^3 puede expresarse mediante una ecuación de la forma:

$$f(x, y, z) = 0$$

Si las superficies S_1 y S_2 vienen dadas por sus ecuaciones:

$$f(x, y, z) = 0$$
$$g(x, y, z) = 0$$

la curva, en este caso, es el conjunto de puntos M cuyas coordenadas (x, y, z) satisfacen las dos ecuaciones simultáneamente.

Ejemplos

La hélice anterior puede expresarse como intersección de las dos superficies siguientes:

$$\left.\begin{array}{l} x = R\cos wt \\ y = R\sin wt \\ z = vt \end{array}\right\} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \left\{\begin{array}{l} x^2 + y^2 = R^2 \\ x = R\cos \dfrac{wz}{v} \end{array}\right.$$

Una recta puede expresarse como intersección de dos planos:

$$\left.\begin{array}{l} Ax + By + Cz + D = 0 \\ A'x + B'y + X'z + D' = 0 \end{array}\right\}$$

7. SUPERFICIES EN EL ESPACIO.

Una superficie S en el espacio tridimensional puede representarse de distintas formas.

a) Expresando la condición necesaria y suficiente que deben cumplir las coordenadas
(x, y, z) de un punto P para pertenecer a S. Ello da lugar a una ecuación de la forma:

$$f(x, y, z) = 0$$

que se denomina ecuación implícita de la superficie.

b) También puede representarse la superficie S paramétricamente, mediante dos variables independientes (por ejemplo u y v), denominadas parámetros y tres funciones, cada una de las cuales define cada coordenada. Así:

$$\left.\begin{array}{l} x = f(u,v) \\ y = g(u,v) \\ z = h(u,v) \end{array}\right\} \qquad \text{ecuaciones paramétricas de S}$$

7.1. Ejemplos de superficies

7.1.1. Esfera

Los puntos P(x, y, z) pertenecen a la esfera de centro C(a, b, c) y radio R si y sólo si d(P, c) = R, o lo que es lo mismo:

$$\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2}=R\,.$$

Por lo tanto, la esfera se define así:

$$S=\left\{(x,y,z)\in R^3\,/(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2\right\}$$

En coordenadas esféricas viene expresada por:

$$\left.\begin{array}{l} x=a+R\cos q\cos a \\ y=b+R\cos q\sin a \\ z=c+R\sin q \end{array}\right\}$$

7.1.2. Cuádricas

En el Tema 49 se estudiarán con detalle. Basta aquí señalar las siguientes ecuaciones:

- Elipsoide de ecuación: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$

- Hiperboloide de una hoja: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$

- Hiperboloide de dos hojas: $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$

- Cono elíptico: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=0$

- Paraboloide elíptico: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-z=0$

- Paraboloide hiperbólico: $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-z=0$

7.1.3. Superficies reglada

Sea $R_ö$ una recta que depende de un parámetro ö. Cuando este parámetro varía, la recta (generatriz) describe, en general, una cierta superficie que se llama superficie reglada.

Si la recta tiene una dirección fija y se apoya en una curva fija (directriz), se originan las superficies cilíndricas.

Si la recta pasa por un punto fijo (vértice) y su apoyo en una curva fija (directriz), se originan las superficies cónicas.

Se analizan con detalle en el Tema 49.

7.1.4. Superficie de revolución

Una superficie de revolución S es la superficie engendrada por una curva c que gira alrededor de un eje E.

Puede definirse también como el lugar geométrico de las circunferencias situadas en planos perpendiculares a E, con centro en E, que pasan por un punto de c. Estas circunferencias se llaman paralelos de la superficie. Las secciones de S por planos del haz de eje E se llaman meridianos de E. Estos meridianos son curvas que tienen a E por eje de simetría.

S puede considerarse engendrada con el giro, alrededor de E, de cualquier meridiano.

Si tomamos por eje E el eje OZ y definimos la superficie por el meridiano c situado en el plano OYZ, la curva tendrá de ecuaciones:

$$\left.\begin{array}{l} x = 0 \\ y = f(\boldsymbol{j}) \\ z = g(\boldsymbol{j}) \end{array}\right\}$$

luego la circunferencia engendrada por el giro de un punto c de dicha curva alrededor del eje OZ tendrá por ecuaciones:

$$\left.\begin{array}{l} x = f(\boldsymbol{j})\cos t \\ y = f(\boldsymbol{j})\sin t \\ z = g(\boldsymbol{j}) \end{array}\right\}$$

que son las ecuaciones paramétricas de la superficie S.

Se analizan con detalle en el Tema 49.

Bibliografía Recomendada.

Curso de Geometría, Vol I. Aut. Puig Adam.

Exercices de GEOMETRIE, Cours de Mathèmatiques Élémentaires. Autor: F.G.M. Edición de 1912 por MALSON A MAME ET FILS. PARIS

Exercices de TRIGONOMETRIE. Autor: F.G.M. Edición de 1915 por MALSON A MAME ET FILS. PARIS.