TEMAS DE MATEMÁTICAS
(Oposiciones de Secundaria)

TEMA 50

GEOMETRÍA ESFÉRICA.

TEMA 50

GEOMETRÍA ESFÉRICA.

1. GEOMETRÍAS NO EUCLÍDEAS.

Durante dos mil años la geometría de Euclides fue considerada como una verdad absoluta. Basada en diez axiomas, tan evidentes que nadie los negaría. Desde hace siglos los Elementos de Euclides permanecieron inviolables.

No obstante, todo no era correcto. Algunos pensadores, Euclides mismo fueron perturbados por el axioma 5: el axioma de las paralelas de Euclides.

Axioma de las Paralelas:

Dada una recta L y un punto P no contenido en L, una y solo una recta puede ser trazada, pasando por P y paralela a L.

Este axioma no puede ser verificado experimentalmente. Podemos trazar dos o más rectas que pasen por P y no intersecten a L, sobre una pagina, sin importarnos lo grande que sea la hoja que usemos. Debemos suponer que todas, excepto una de estas rectas, interesan a L en alguna parte indefinidamente lejana.

Por lo tanto como los otros axiomas son simples, claros e intuitivamente razonables, surgió el afán de deducir el axioma de las paralelas a partir de los otros nueve axiomas.

Tres hombres: Gauss, Lobatchevsky y Bolyac, independientes y con pocos años entre si, descubrieron el sistema geométrico que llamamos geometría no euclidiana y probaron que el axioma de los paralelos no puede deducirse de los otros nueve.

Al intentar probar el axioma de las paralelas, el argumento que dieron fue: supongamos que los otros nueve axiomas son válidos, pero el axioma de los paralelos no; entonces si por una deducción lógica podemos llegar a una contradicción, el axioma de los paralelos esta probado.

La negación del axioma de las paralelas puede tomar dos formas:

a) Dadas una recta L y un punto P no perteneciente a L, no existen rectas que pasen por P y sean paralelas a L.

b) Dadas una recta L y un punto P no perteneciente a L, al menos dos rectas pueden trazarse, pasando por el punto P y paralelas a L.

Con cada una de estas formas surgen dos tipos de geometrías no euclídeas.

1. La geometría hiperbólica de Lobatchevsky y Bolya.
2. La geometría elíptica de Riemann.

1.1. Geometría hiperbólica de Lobatchevsky.

Gauss, Lobatchevsky y Bolayac eligen la forma (b) de negación del axioma de las paralelas, que es frecuentemente llamado, axioma de las paralelas de Lobatchevsky.

Ellos supusieron (b), junto con los nueve axiomas de Euclides. A partir de ellos dedujeron muchos teoremas totalmente diferentes de los de la geometría euclidiana, pero no encontraron ninguna contradicción a los axiomas, con lo que afirmaron que había geometrías distintas a la Euclídea.

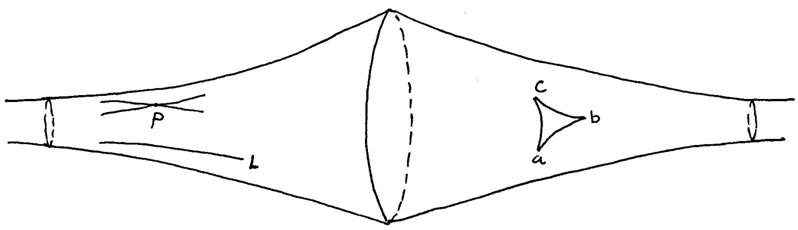
Algunos de los teoremas, los que están basados en los nueve axiomas, son los mismos que en la geometría euclidiana. Por ejemplo el teorema: "Los ángulos opuestos por el vértice son congruentes", es común a ambas geometrías. Sin embargo los teoremas basados en el axioma de las paralelas toman una forma totalmente diferente.

En la geometría de Lobatchevsky se establece que la suma de los ángulos de un triángulo es siempre menor que 180º. Además no todos los triángulos tienen la misma suma angular. Cuanto mayor sea el área del triángulo menor será la suma de sus ángulos. Puesto que los triángulos más grandes tienen sumas de ángulos diferentes no hay triángulos semejantes, triángulos que tienen la misma forma, pero diferente medida. En la nueva geometría, si dos triángulos tienen sus ángulos congruentes, entonces los triángulos también los son.

En esta geometría no hay rectángulos, ya que si tres ángulos de un cuadrilátero miden 90º , el cuarto debe tener una medida menor. Ya que al dividirlo en dos triángulos deben ser <180º.

Un modelo para la geometría euclídea es el plano con las nociones de puntos y recta.

La siguiente superficie



es llamada pseudoesfera y es un modelo para esta nueva geometría.

Las "rectas" sobre esta superficie son las líneas mas cortas entre puntos de ella, estas distancias se denominan geodésicas. El comportamiento de puntos y rectas sobre esta superficie da origen a los axiomas de la geometría de Lobatchevsky. Dados una recta L y un punto P no perteneciente a L, un numero infinito de rectas pueden ser trazadas por P, paralelas a L. Sobre esta superficie las rectas paralelas no son equidistantes en todos sus partes, como lo exige el teorema de la geometría euclidiana.

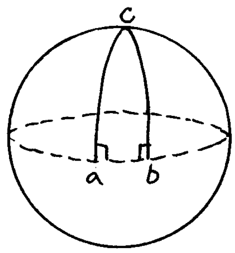
La suma de las medidas de los ángulos de *abc* es menor de 180.

1.2. Geometría elíptica de Riemann.

Poco después de la construcción de la geometría de Lobatchevsky un matemático Bernhurd Riemann construyó otra geometría no euclidiana, empleando el axioma (a) y algunas veces (no todas) los otros axiomas de Euclides.

Su geometría fue diferente de las de Lobatchevsky y Euclides. En la geometría de Riemann no hay rectas paralelas y la suma de las medidas de los ángulos de un triángulo es mayor de 180º.

Un modelo para la geometría de Riemann, es la superficie de una esfera.



Las "rectas" en este modelo, son circunferencias mayores, las geodésicas de la esfera. Todas las rectas se intersectan y el triángulo *abc* contiene dos ángulos rectos, de tal forma que la suma de sus ángulos es mayor que 180º. En esta geometría, cuanto mayor es el área de un triángulo, mayor es su suma angular y solamente son semejantes aquéllos que son congruentes.

1.3 Comparaciones entre la geometría euclídea y no euclídea.

Vamos a comparar algunos resultados en la geometría de Euclides, Lobatchevsky y Riemann.

En la geometría euclídea, dos rectas distintas se intersectan en un punto, a lo más, de igual forma ocurre en la de Lobatchevsky, mientras que en la de Riemann, lo puede hacer en un punto o en dos.

Dada la recta L y un punto P no perteneciente a L, según Euclides existe una única recta paralela a L que pase por P, según Lobatchevsky existen al menos dos y según Riemann no existe ninguno.

Según Euclides las rectas paralelas son equidistantes mientras que Lobatchevsky asegura que no lo son.

La suma de los ángulos de un triángulo, para Euclides es 180º, para Lobatchevsky es menor de 180º y para Riemann es mayor de 180º.

Si en una recta consideramos un punto de ella, esta queda dividida en dos partes para Euclides y Lobatchevsky mientras que no queda dividida en dos partes para Riemann.

Dos triángulos con ángulos homólogos iguales para Euclides son semejantes, mientras que para Lobatchevsky y Riemann son congruentes.

2. GEOMETRIA SOBRE LA SUPERFICIE ESFERICA.

2.1 Superficie esférica y esfera.

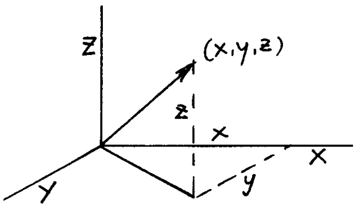
El conjunto de todos los puntos del espacio que equidista de un punto fijo O llamado centro, recibe el nombre de superficie esférica.

La distancia del centro a uno cualquiera de sus puntos se llama radio.

La superficie esférica descompone al espacio en dos partes. El conjunto de puntos, A, cuya distancia al centro es menor o igual que el radio se denomina esfera.

El conjunto de puntos, B, cuya distancia al centro es mayor que el radio constituye la parte de espacio exterior a la esfera.

Una parametrización de la superficie esférica es la siguiente.



$$f(\theta,\varphi)=\begin{cases} x = r\cos\theta\cos\varphi \\ y = r\cos\theta \, sen\,\varphi \\ z = r\, sen\,\theta \end{cases}$$

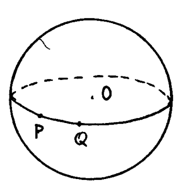
siendo r el radio de la esfera y:

$$0<\varphi\leq\pi \quad \text{y} \quad 0\leq\theta\leq 2\pi$$

2.2 Círculos máximos y menores.

Un plano que pase por el centro determina sobre la superficie esférica una circunferencia, pues la sección será el conjunto de puntos de dicho plano que equidisten del centro. Esta circunferencia se llama circunferencia máxima.

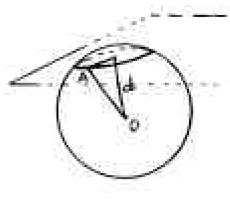
Se deduce de aquí, que en una circunferencia máxima queda determinada por dos puntos que no sean diametralmente opuestos P, Q, y junto con el punto O determinan el plano del cual obtenemos la circunferencia (como intersección de ese plano con la esfera)



Si un plano π no pasa por el centro, pero tiene mas de un punto común A con la superficie esférica, determina sobre esta una circunferencia que se llama circunferencia menor.

En efecto: la perpendicular por el centro O al plano π, corta a este punto C si A es un punto cualquiera de la sección.

Como el triángulo AOC es rectángulo en C, se verificara $CA^2 = r^2 - OC^2 = r^2 - d^2 = cte$ y como $r^2 - d^2$ es un numero fijo, será AC un segmento de longitud constante independiente del punto A elegido. Los puntos de esta sección equidistan por tanto, de C.



Además los puntos del plano $\boldsymbol{p}$ que equidistan de C están en la superficie esférica que su distancia a O es r.

Luego la sección de la superficie esférica por el plano $\boldsymbol{p}$ es una circunferencia.

Esta circunferencia queda determinada por tres puntos y no por dos como las circunferencias máximas.

Por lo tanto podemos hacer una distinción entre ella. Mientras unas se comportan en una geometría sobre la superficie esférica como las rectas en el plano las otras se comportan como verdaderas circunferencias. Podemos por tanto considerar a las primeras como las rectas de la superficie esférica y a las segundas como las circunferencias de la misma.

Veamos que, tomando como modelo esta geometría, fue como Riemann hizo su geometría elíptica.

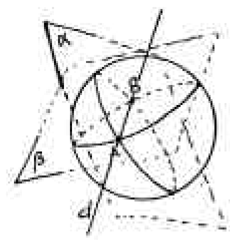
Teorema.

Dos circunferencias máximas se cortan en dos puntos diametralmente opuestos.

<u>Dem.</u>

Es inmediata ya que los planos $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ que pasan por un punto común O, se cortan en una recta d que pasa por O.

Sean C_1 y C_2 las circunferencias que se forman al intersectar los planos $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ sobre la superficie esférica E, es decir:



$$C_1 = \boldsymbol{a} \wedge E \qquad C_2 = \boldsymbol{b} \wedge E$$

pero d corta a ambas circunferencias en dos puntos A y B diametralmente opuesto.

Se deduce de aquí que dos rectas de esta geometría sobre la esfera tienen dos puntos comunes. La geometría sobre la superficie esférica carece de rectas paralelas.

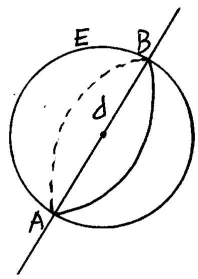
2.3. Simetrías en la superficie esférica.

Un plano diametral, es decir, que pase por el centro de una superficie esférica, descompone a la esfera en dos partes llamadas semiesferas.

Consideremos una de estas partes y la porción de superficie esférica que la limita. Su simetría respecto al plano estará constituida por puntos equidistantes del centro, luego coinciden con la otra parte de la superficie esférica. Todo plano diametral es por tanto, plano de simetría de la superficie esférica.

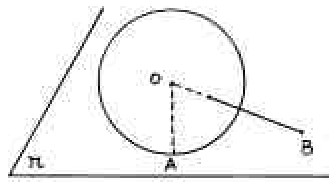
Las rectas que pasan por el centro de la superficie esférica se llaman diámetros.

Todos los planos π que pasan por un diámetro AB son planos diametrales de la superficie esférica y determinan sobre éstas, circunferencias $\pi \wedge E$. AB es eje de simetría de estas circunferencias y por tanto de la superficie esférica. Luego todo diámetro es eje de simetría de la superficie esférica.



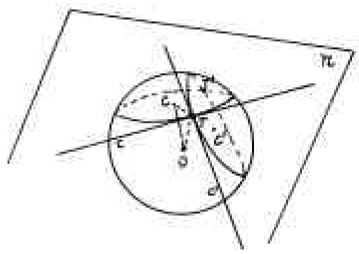
2.4. Plano tangente: ángulos en la superficie esférica.

Sea E una superficie esférica y A uno de sus puntos. El plano π perpendicular a OA en A tiene el punto A común con la superficie esférica y todos los demás son exteriores puesto que OB>OA=r



DEF Se dice que este punto es tangente a la superficie esférica. Luego en cada punto de la superficie esférica podemos, por consigna determinar un plano tangente y solamente uno.

Sean C y C´ dos circunferencias de una superficie esférica E, que se cortan en T. En sus planos podemos trazar las tangentes t y t´, respectivamente.



TEOREMA t y t´$\in \pi$

Dem.

OC es perpendicular al plano de C que contiene a *t*, y CT perpendicular a *t* por lo que *t* será perpendicular al plano OCT y por tanto perpendicular a OT, luego *t* pertenece al plano π tangente a E en T.

De la misma forma se demuestra que $t´ \in \pi$. Luego las tangentes *t* y *t´* pertenecen por tanto, al plano tangente π en T.

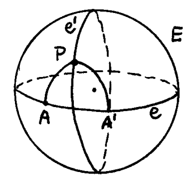
DEF Definimos el ángulo de dos circunferencias de una superficie esférica como el formado por dos tangentes a ellas en sus puntos comunes.

Cuando el ángulo de dos circunferencias de una superficie esférica es recto, ambas circunferencias se dice que son ortogonales y si en particular son circunferencias máximas se dice que ambas son perpendiculares.

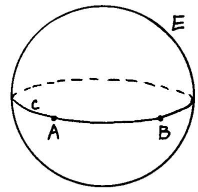
Sea E una esfera y e y e´ dos rectas sobre la superficie esférica perpendicular, es decir dos circunferencias máximas ortogonales.

Los planos de cada una son planos de simetría de E y por tanto de la otra.
Sea P un punto de e´. Si A y A´ son puntos de e simétricas superficie esférica respecto del plano de e´, los arcos de circulo máximo sobre la PA y PA´ son simé-

tricas y por tanto iguales. Esto nos va a permitir resolver el problema de perpendicularidad sobre la superficie esférica.



Sea E una superficie esférica y c una recta sobre ella o sea una circunferencia máxima.



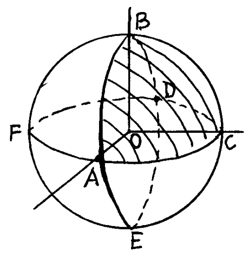
Si A y B son dos puntos de c y trazamos con arcos iguales dos circunferencias de centros A y B y radios cualesquiera pero iguales que se corten en P y Q, la recta PQ sobre la superficie esférica es perpendicular a c y mediatriz de AB.

2.5. Triángulos esféricos.

DEF Un triángulo esférico es una porción de superficie esférica limitado por tres rectas sobre ella, o sea por tres circunferencias máximas.

Estas tres circunferencias se cortan en tres puntos llamados vértices y los ángulos que forman cada dos de dichas circunferencias se denominan ángulos de triángulo esférico. Los arcos limitado por cada dos vértices son los lados del triángulo esférico.

Ahora bien tres rectas sobre una superficie esférica determinan 8 triángulos esféricos:



ABC, BDC, BDF, FAE, DEF, AEC, EDC, BAF

Es preciso por tanto determinar de qué triángulo se trata. Si unimos el centro de la superficie esférica con los vértices ABC de un triángulo esférico, obtenemos un ángulo triedro cuyas caras tienen la misma medida que los lados del triángulo esférico, por ser ángulos centrales y los diedros tienen la misma medida que los ángulos del triangular por ser sus caras los planos de los círculos máximos que define el triángulo.

Existe, por consiguiente una correspondencia biunívoca entre los triángulos esféricos de una superficie esférica y los triedros que resultan de proyectarlas desde el centro de la esfera. Esta correspondencia conserva los ángulos, lo que permite trabajar indistintamente con triángulos esféricos o triedros, trasladando a la otra las propiedades deducidas de una de estas figuras.

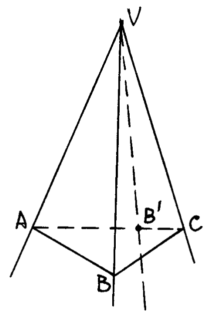
2.5.1. Propiedades.

PROP En todo ángulo triedro, una cara es menor que la suma de los otros dos.

<u>Dem.</u>

Sea la cara AVC la mayor del ángulo triedro, vamos a demostrar que la suma de AVB y BVC es mayor que dicha cara.

Para ello llevamos sobre AVC la cara AVB de modo que VB tomara la posición VB´ y sobre estas rectas llevemos VA=VB=VB´. Unimos luego A con B y con B´ de modo que AB´ corta a VC en C. Se forma así el triángulo ABC en el cual se verifica AC<AB+BC.

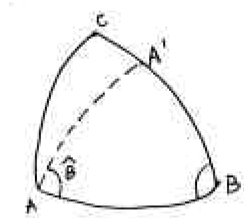


Pero BVC y B´VC tienen VC común y VB=VB´ y como B´C<BC esta relación se conservará entre los ángulos opuestos, luego B´VC<BVC y como AVB´=AVB sumando AVC<BVC+AVB.

PROP En todo triángulo esférico a mayor ángulo se opone mayor lado.

Dem.

Sea el triángulo esférico ABC y supongamos A>B. Si construimos el ángulo BAA´=B se forma el triángulo BAA´ isósceles y que tiene los lados AA´ y A´B iguales.



En el triángulo AAC´, por la propiedad 1ª) se tiene

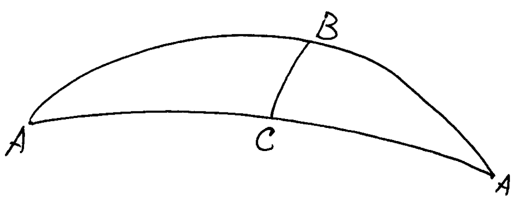
AC<AA´+A´C.

luego AC<A´B+A´C=BC

PROP La suma de las caras de un triángulo esférico es menor que cuatro rectas.

Dem.

Sea el triángulo esférico ABC y prolonguemos sus lados hasta su encuentro en A´.



Se verifica BC<A´B+A´C

AB=AB

AC=AC

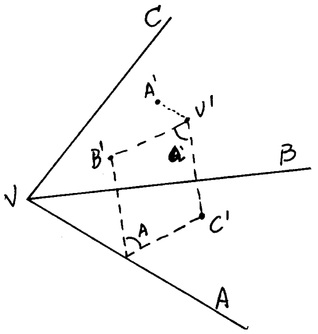
Sumando:

AB+AC+BC<ABA´+ACA´= 4 rectas.

2.6. Triedro suplementario.

Sea V un ángulo triedro y tomemos un punto V´ en su interior.

Tracemos por V´ las rectas V´A, V´B´ y V´C´ perpendiculares respectivamente a los planos BVC, AVC y AVB.



El ángulo B´V´C´=a´ es suplementario del diedro A por ser rectos los ángulos V´B´A y V´C´A.

De donde las caras del triedro V´ son suplementarias de los diedros del triedro V.

Pero siendo VA perpendicular al plano V´B´C´ y VC perpendicular al plano V´B´A´ será la cara b=AVC suplemento del diedro V´B´.

El triedro V´ se dice que es suplementario del triedro V y recíprocamente y las caras de uno son suplementos de los diedros del otro.

Si superponemos ambos triedros por la traslación V´V y cortamos por una superficie esférica de centro V, la sección serán dos triángulos esféricos que se llaman polares o suplementarios y entre los cuales se verifica la relación anterior.

Si ambos triángulos esféricos son ABC y A´B´C´ y sus lados son a, b, c y a´, b´, c´ se verificara:

$$a' = p - A$$

$$b' = p - B$$

$$c' = p - C$$

y sumando resulta

$$0 < a' + b' + c' = 3p - (A+B+C) < 2p$$

o sea:

$$p < A+B+C < 3p$$

Por lo tanto la suma de los ángulos de un triedro es mayor que dos rectos y el exceso sobre 180 se llama exceso esférico.

<u>BIBLIOGRAFÍA RECOMENDADA.</u>

Matemáticas. Curso preuniversitario. F Marcos de Lanuza.

Geometría, un enfoque intuitivo. MargaretWiscamb.