TEMAS DE MATEMÁTICAS
(OPOSICIONES DE SECUNDARIA)

TEMA 2

<u>FUNDAMENTOS Y APLICACIONES DE LA TEORIA DE GRAFOS. DIAGRAMAS EN ARBOL.</u>

TEMA 2

FUNDAMENTOS Y APLICACIONES DE LA TEORIA DE GRAFOS. DIAGRAMAS EN ARBOL.

1. INTRODUCCIÓN.

La teoría de grafos, que nació como una rama de la Topología, se ha convertido hoy en día en una herramienta matemática indispensable en campos tan diversos como la investigación operativa, la lingüística, la química, la física, la genética, la teoría de redes o la teoría de la decisión.

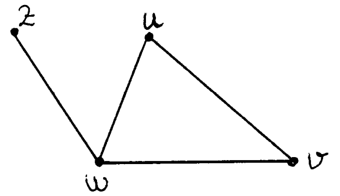
Es por ello, que para casi cualquier rama de la ciencia, se hace indispensable el conocimiento, a través de conceptos globales, de las ideas básicas que sustentan a la denominada teoría de grafos.

Este tema tiene por objetivo introducir al lector en estos conocimientos básicos a través de una breve pero, esperamos, clara exposición de las líneas generales de esta teoría.

2. DEFINICIÓN DE GRAFO.

Se denomina grafo G al par (V(G), E(G)), en el que V(G) es un conjunto no vacío de elementos denominados vértices (también llamados nodos o puntos) y E(G) es un conjunto finito de pares no ordenados de elementos de V(G) denominados aristas (igualmente líneas). Al conjunto de elementos de V(G) se le denomina conjunto de vértices y al conjunto de elementos de E(G) conjunto de aristas.

Así, sea el conjunto de vértices V(G)={u, v, w, z} y el conjunto de aristas E(G)={{u, v}, {u, w}, {w, z}}, se dice que {u, v} es la arista que une los puntos u y v, y se le designa de forma abreviada por uv. Si u=v la arista recibe el nombre de lazo. La representación de dicho grafo es la siguiente:



Se dice que dos vértices u y w de un grafo G son adyacentes si el grafo contiene una arista que los une. Se dice también que los vértices son incidentes en dicha arista. Análogamente, se dice que dos aristas son adyacentes si tienen, al menos, un vértice en común.

Se denomina grado de un vértice v de G al número de aristas que inciden en v, y se designará g(v) (un lazo en v contribuye de manera doble al grado de v). A un vértice de grado 0 se le denomina vértice aislado. A un vértice de grado 1 se le denomina vértice terminal o extremo.

Un subgrafo de un grafo G, es un grafo cuyos vértices pertenecen a V(G) y cuyas aristas pertenecen a E(G).

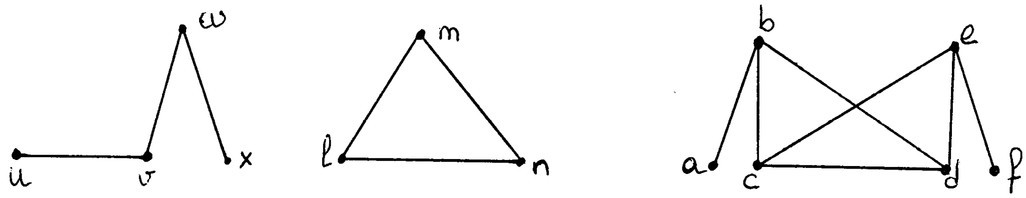
En los siguientes apartados de este punto se expone la tipología más común de los grafos.

2.1. Grafo Simple.

Se denomina grafo simple al grafo G={V(G), E(G)} que verifica que para todo u, v perteneciente a V(G), existe a lo sumo una única arista {u, v} de E(G) que los une.

Grafo Simple $\Leftrightarrow$ [$\forall$u, v$\in$V(G) $\Rightarrow$ $\exists!$\{u, v\}$\in$E(G)]

Ejemplos de grafos simples serían los siguientes:

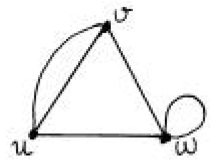


2.2. Grafo General.

Se denomina grafo general o simplemente grafo, al grafo G=(V(G), E(G)), con V(G) conjunto de vértices y E(G) conjunto de aristas.

De esta forma, un grafo general puede representar dos vértives unidos por más de una arista. Igualmente, una arista no tiene porque unir dos vértices diferentes, pudiéndose hablar de la arista {u, u}. A la arista que une un vértice consigo mismo se le denomina Lazo.

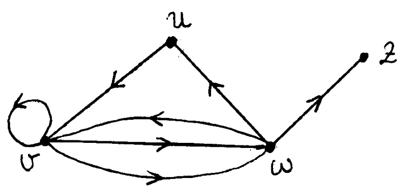
La representación gráfica de este tipo sería:



2.3. Grafo Orientado.

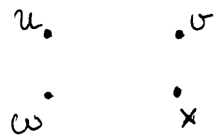
Un grafo orientado D, también denominados redes o digrafos, se define como un par (V(D), A(D)), donde V(D) es un conjunto finito no vacío de elementos llamados vértices, y A(D) es una familia finita de pares ordenados de elementos de V(D) llamados arcos (o aristas orientadas o di-aristas). En base a la existencia o no de lazos, podremos hablar de digrafos generales o digrafos simples.

A continuación se muestra el diagrama del digrafo general (V(D), A(D)), con V(D)={u, v, w, z} y A(D)={uv, vv,uw, vw, wv, wu, wz}



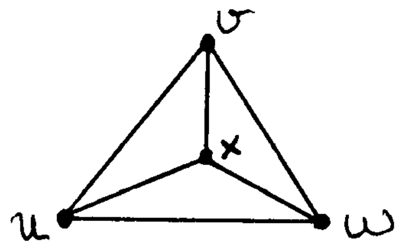
2.4. Grafo Nulo.

Se denomina grafo nulo a un grafo donde E(G) es vacío, es decir, el conjunto de aristas es el conjunto vacío. Obviamente en este tipo de grafo todo vértice es aislado.



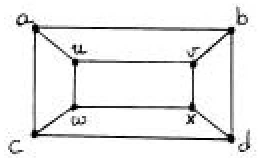
2.5. Grafo Completo.

Un grafo completo es un grafo simple en el que cualquier par de vértices son adyacentes. Un grafo completo de n vértices tiene $\binom{n}{2}=\frac{n\cdot(n-1)}{2}$ aristas. El resultado se obtiene por combinaciones de n vértices tomados de dos en dos.



2.6. Grafo Regular.

Se llama grafo regular a un grafo cuyos vértices tienen todos el mismo grado. Si el grado de cada vértice es r, se tiene un grafo regular de grado r.

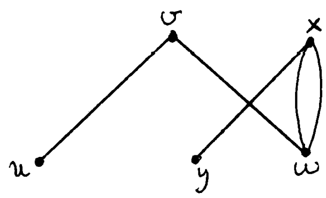


Todo grafo nulo es un grafo regular de grado 0. Todo grafo completo con n vértices es un grafo regular de grado n-1.

Especial mención merece un tipo de grafo regular llamado grafo platónico, grafos formados por los cinco sólidos regulares (tetraedro, cubo, octaedro, dodecaedro e icosaedro).

2.7. Grafo Bipartido.

Sea un grafo G y sea su conjunto de vértices V(G) que puede ser expresado como la unión disjunta de dos subconjuntos de vértices V_1 y V_2 de forma que cada arista de G une un vértice de V_1 con otro de V_2, entonces se dice que G es un grafo bipartido y se escribe $G(V_1, V_2)$.



3. OPERACIONES ENTRE GRAFOS.

3.1. Isomorfismo y Homomorfismo.

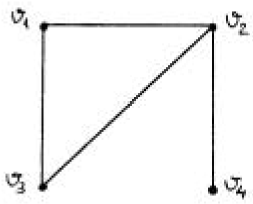
Se dice que dos grafos G_1 y G_2 son isomorfos si existe una correspondencia biunívoca entre los vértices de G_1 y los de G_2, con la propiedad de que el número de aristas que unen cada dos vértices de G_1 es igual al número de aristas que unen los vértices correspondientes de G_2.

Veamos el ejemplo siguiente, donde G_1 tiene el conjunto de vértices {u, v, w, x, y, z} y G_2 tiene {l, m, n, p, q, r}. G_1 y G_2 son isomorfos bajo la correspondencia $u \rightarrow l$, $v \rightarrow m$, $w \rightarrow n$, $x \rightarrow p$, $y \rightarrow q$, $z \rightarrow r$

Dos grafos son homomórficos (o idénticos salvo vértices de grado 2) si ambos pueden ser obtenidos a partir del mismo grafo insertando nuevos vértices de grado dos en sus aristas.

Ejemplo: Sea el grafo G representado por el siguiente diagrama:

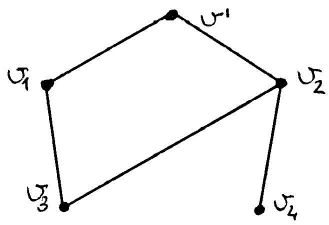
G(V(G), E(G))
$V(G)=\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$
$E(G)=\{v_1v_2, v_1v_3, v_3v_2, v_2v_4\}$



Construimos dos grafos homomórficos entre sí G_1 y G_2 a partir del anterior grafo G. Para ello, y partiendo de G, tomamos algunas de sus aristas y le insertamos un vértice de grado dos.

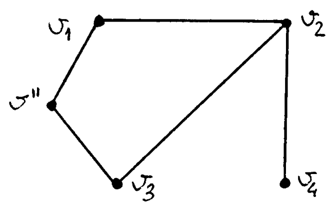
Construimos G_1:

Sea la arista v_1v_2 del grafo G, insertamos un nuevo vértice v' de grado 2, de tal forma que el grafo G_1 resultante sería:



De igual manera construimos G_2:

Sea la arista $v_1v_3 \in G$, insertamos el vértice v'' de grado 2 de tal forma que el grafo resultante G_2 es:



Se concluye que G_1 y G_2 son homomórficos.

3.2. Combinaciones.

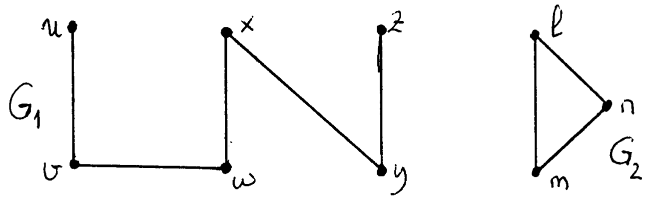
Sean dos grafos $G_1=(V(G_1); E(G_1))$ y $G_2=(V(G_2), E(G_2))$ con $V(G_1)$ y $V(G_2)$ disjuntos. Se define el grafo unión como $G_1 \cup G_2$ tal que $G_1 \cup G_2=(V(G_1) \cup V(G_2), E(G_1), E(G_2))$.

Se dice que un grafo es conexo si no puede ser expresado como la unión de dos grafos, en caso contrario será inconexo. Cualquier grafo inconexo G puede verse expresado como la unión de un conjunto finito de grafos conexos.

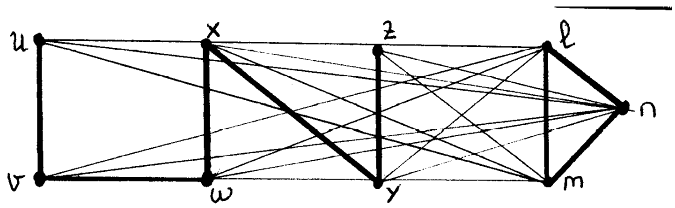
Un grafo circuito es un grafo conexo regular de grado dos. El grafo circuito de n vértices es designado C_n.

Igualmente, sean los grafos G_1 y G_2, se define el grafo suma, y se denota por G_1+G_2 como la unión de ambos grafos, trazándose a continuación una arista entre cada vértice de G_1 y cada vértice de G_2.

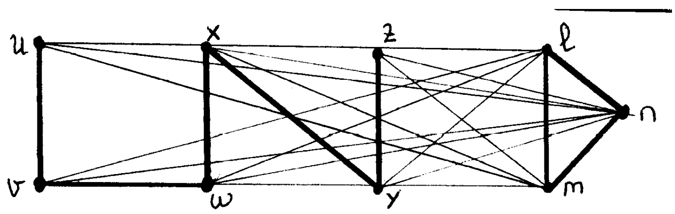
Sean los grafos $G_1=(V(G_1), E(G_1))$ con $V(G_1)=\{u, v, w, x, y, z\}$ y $G_2=(V(G_2), E(G_2))$ con $V(G_2)=\{l, m, n\}$ representados de la forma siguiente:



Se representa el grafo $G_1 \cup G_2$ de la forma:



Y el grafo G_1+G_2 como:



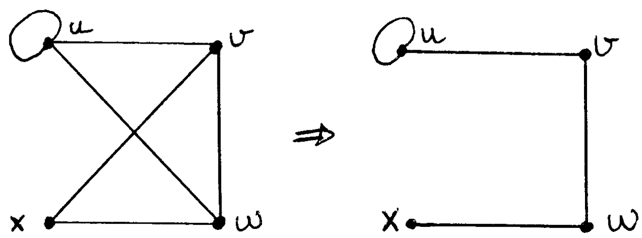
3.3. Supresiones y Contracciones.

Sea F un conjunto de aristas del grafo G, se denomina G-F al grafo que se obtiene cuando se suprime en G el conjunto de aristas F.

Análogamente, sea H un conjunto de vértices del grafo G, se denomina G-H al grafo que resulta cuando se suprimen en G los vértices que hay en H y las aristas que inciden en ellos.

Sea el grafo G y en él la arista e, se denomina G/e al grafo obtenido de contraer en él la arista e, es decir, eliminar la arista, identificando a continuación sus extremos v y w, de forma que el vértice resultante es incidente a aquellas aristas que originalmente eran incidentes a v y w (excepto la propia arista e). En consecuencia, se llama contracción de G a cualquier grafo que se obtiene a partir de G, después de efectuar contracciones de algunas de sus aristas.

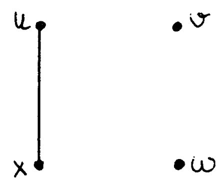
Sea el grafo $G_1=(V(G_1), E(G_1))$ con $V(G_1)=\{u, v, w, x\}$ y $E(G_1)=\{uu, uv, vw, wu, wx, xv\}$ y sea $F=\{uw, xv\}$, se representa el grafo supresión G-F de la forma siguiente:



3.4. Complemento.

Sea G un grafo simple, cuyo conjunto de vértices es V(G), el complemento(G) de G (denotado por $\overline{G}$) es el grafo simple que tiene a V(G) como conjunto de vértices, en el cual dos vértices son adyacentes si y sólo si no son adyacentes en G.

Con el grafo G definido en el apartado anterior, se construye el grafo complemento de G de la siguiente forma:



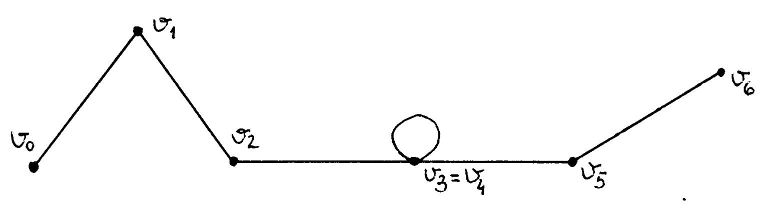
4. TRAYECTORIAS. GRAFOS EULERIANOS Y HAMILTONIANOS.

4.1. Trayectorias.

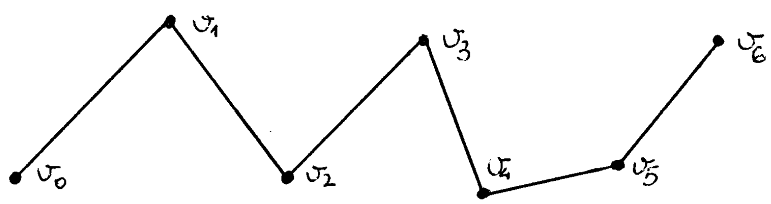
Sea una secuencia de aristas v_0v_1, v_1v_2,..., $v_{m-1}v_m$, en la que todas las aristas son diferentes, entonces se le denomina cola. Si además los vértices v_0, v_1,..., v_m, son diferentes (excepto el primero y el último que pudieran coincidir), la secuencia de aristas resultante se llama trayectoria. Una trayectoria es cerrada si $v_0=v_m$, y una trayectoria cerrada que posee al menos un lado es denominada circuito.

Los siguientes ejemplos ilustran estas definiciones:

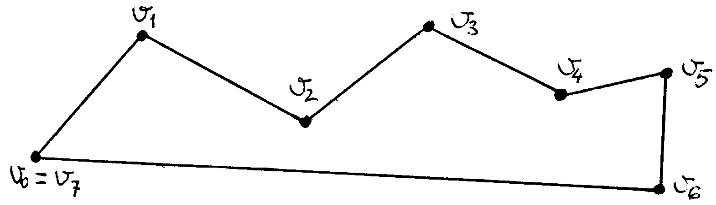
Cola:



Trayectoria:



Trayectoria cerrada:



Al vértice v_0 se le denomina vértice inicial y al v_m vértice final. La longitud de una secuencia de aristas es el número de aristas que posee.

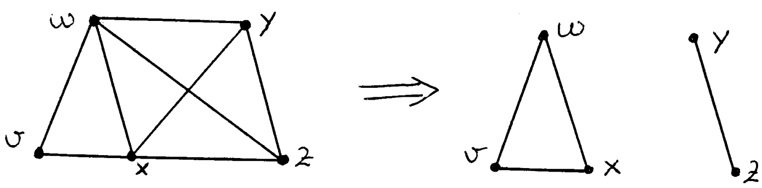
TEOREMA: Si $G(V_1, V_2)$ es un grafo bipartido, todo circuito en G tiene longitud par.

TEOREMA: Sea G un grafo simple de n vértices, si G tiene k componentes (subgrupos disjuntos) el número de aristas de G cumple la siguiente relación:

$$n - k \leq m \leq \frac{1}{2}(n-k)\cdot(n-k+1) \qquad \text{m = número de aristas}$$

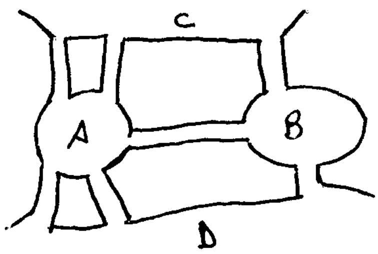
Se denomina conjunto desconectador de un grafo conexo G al conjunto de aristas de G cuya eliminación desconecta a G. Un conjunto corte será un conjunto desconectador del que ningún subconjunto suyo es un conjunto desconectador.

Sea el grafo G, donde V(G)={v, w, x, y, z} y E(G)={vw, vx, wy, yz, wx, wz, xy, xz}, el conjunto de aristas D={wy, wz, xy, xz} es un conjunto desconectador de G, ya que si en G procedemos a la eliminación de las aristas de D queda el grafo inconexo que a continuación se expone.



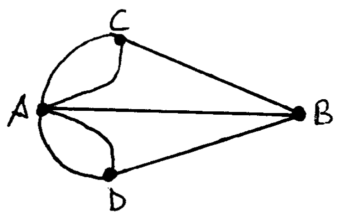
4.2. Los Puentes de Königsberg.

En el siglo XVIII, la ciudad de Königsberg, en Prusia, tenía dos islas y siete puentes según indica la figura:



El alcalde de la ciudad escribió a Euler planteándole la siguiente cuestión: ¿Es posible que una persona cruce los siete puentes pasando por cada uno de ellos una sola vez?

Euler probó que era imposible lo que el alcalde proponía. Sustituyó la isla y las orillas por puntos y los puentes por líneas que unían dichos puntos, obteniendo así el siguiente grafo:



El grafo será recorrible si existe un camino que contenga todos los vértices y que pase por cada arista exactamente una vez.

Supongamos que haya un camino que no empiece ni termine en un vértice u. Cada vez que el camino llegue a u debe de salir por otro que no haya sido utilizado. De esa manera, las aristas del camino incidentes con u deben aparecer de dos en dos, es decir, u es par. Así, si v es impar, el camino debe empezar y terminar en Q.

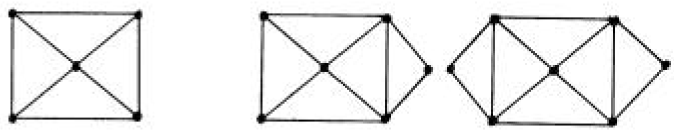
Basándose en ese razonamiento, se deduce que no puede haber más de dos vértices que sean impares. El grafo anterior tiene cuatro vértices impares, por lo que no es recorrible.

4.3. Grafo Euleriano.

Se denomina grafo euleriano, a un grafo conexo G que tiene una cola cerrada que incluye todas las aristas de G.

TEOREMA de Euler: Un grafo es euleriano si y sólo si cada vértice es de grado par. Si tiene exactamente dos vértices impares es recorrible (la cola no será cerrada) y se llama semieuleriano.

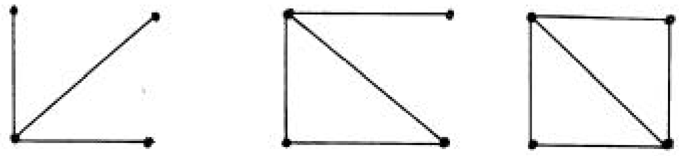
A continuación se muestran ejemplos de grafos no eulerianos, semieulerianos y eulerianos respectivamente.



4.4. Grafo Hamiltoniano.

Se denomina grafo hamiltoniano, si existe un camino cerrado que contiene todos los vértices una sola vez (no tiene porque contener todas las aristas). Un grafo que posea una trayectoria que pase a través de cada vértice es denominado semihamiltoniano.

Los siguientes ejemplos corresponden a un grafo no hamiltoniano, semihamiltoniano y hamiltoniano respectivamente.



5. MATRICES Y GRAFOS.

Dado un grafo G con m vértices y n aristas, podemos asociar matrices a G, muy útiles para el cálculo.

5.1. Matriz de Adyacencia.

Es la matriz $A=(a_{ij})$ de orden $m \times m$ definida por:

$$a_{ij} = \begin{cases} k & si\ v_i\ es\ adyacente\ a\ v_j \\ 0 & en\ caso\ contrario \end{cases}$$

donde k es el número de aristas que unen el vértice v_i con el v_j

La matriz de adyacencia es muy útil para decidir cuestiones de conexión, pues si A es la matriz de adyacencia de un grafo con m vértices donde m>1, entonces el término a_{ij} de la matriz A^n nos da el número de caminos de longitud n que van del vértice v_i al vértice v_j. La demostración se puede hacer por inducción en n.

5.2. Matriz de Incidencia.

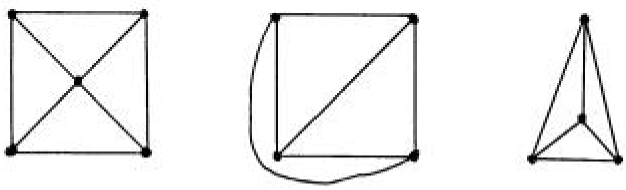
Es la matriz $M=(m_{ij})$ de orden $m \times m$ tal que m_{ij} es 1 si el vértice v_i es incidente con la arista e_j y cero en caso contrario.

6. PLANARIDAD Y DUALIDAD.

6.1. Grafos Planares.

Se denomina grafo planar a un grafo trazado en el plano de forma que ningún par de aristas se cortan geométricamente, excepto en el vértice que ambas inciden.

Ejemplos de grafos planares son:



Igualmente se dice que un grafo es planar si puede ser empotrado en el plano, es decir, dibujado sin cruces.

A continuación se exponen algunos teoremas y corolarios referentes a la teoría de grafos planos.

TEOREMA: El grafo $K_{3,3}$ (grafo bipartido completo con seis vértices y nueve aristas) y el grafo K_5 (grafo regular de grado cuatro, cinco vértices y diez aristas) son no planares.

La demostración de este teorema (que omitiremos en este tema dada su complejidad) se puede realizar de dos maneras distintas, por el teorema de Jordan o por la fórmula de Euler.

TEOREMA de Kuratowski: Un grafo es planar si y sólo si no contiene ningún subgrafo que sea homomórfico a K_5 y $K_{3,3}$.

Fórmula de Euler: el teorema o fórmula de Euler, relaciona el número de vértices, aristas y caras de un grafo plano conexo G.

Sea un punto del plano x, se dice que x es disjunto de G si x no representa ni un vértice de G ni un punto que pertenezca a una arista de G. En este contexto, se define cara de G que contiene a x como al conjunto de todos los puntos del plano que pueden ser alcanzados desde x siguiendo una curva de Jordan, cuyos puntos sean todos disjuntos de G.

Dos puntos del plano x e y son equivalentes si ambos son disjuntos de G y pueden ser unidos por una curva de Jordan cuyos puntos sean todos disjuntos de G. Esta relación de equivalencia sobre los puntos del plano disjuntos de G define clases de equivalencia a las que se denominan caras de G.

TEOREMA: Si G es un grafo plano conexo, y sea n el número de vértices, m el número de aristas y f el de caras de G, se cumple la siguiente relación:

n-m+f=2 (vértices – aristas + caras = 2)

dem.

La demostración de este teorema se hace por la técnica matemática de la inducción, en este caso sobre el número de aristas m.

Caso m=0

Sea el número de aristas m=0, y dado que G es conexo, se tiene que el número de vértices n=1 y f=1. Por tanto el teorema queda demostrado para m=0.

Caso m-1

Hipótesis de inducción, suponemos ahora el teorema cierto para todos los grafos planos conexos tales que tiene m – 1 aristas: n – (m – 1) + (f – 1) = 2

Caso m

Sea ahora G un grafo planar conexo, y e una arista contenida en algún circuito de G. Entonces G – e es un grafo planar conexo con n vértices, m – 1 aristas y f – 1 caras, de forma que G –e verifica:

n – (m – 1) + (f – 1) = 2 por la hipótesis de inducción.

De aquí se desprende que G cumple el teorema: n – m + f = 2.

COROLARIO: Si G es un grafo plano con n vértices, m aristas, f caras y k componentes, se cumple que:

$$n - m + f = k + 1$$

COROLARIO: Si G es un grafo planar conexo simple de n vértices ($n \geq 3$) y m aristas, se cumple $m \leq 3 \cdot n - 6$.

TEOREMA: Todo grafo planar simple contiene un vértice cuyo grado es a lo sumo cinco.

<u>dem.</u>

Se supone, sin pérdida de generalidad, que el grafo es plano y conexo, y que contiene al menos tres vértices. Si todo vértice tuviera grado 6 como mínimo, se tendría que $6n \leq 2m$, con lo que se llega a una contradicción. Por tanto se tiene que el grado es a lo sumo de cinco.

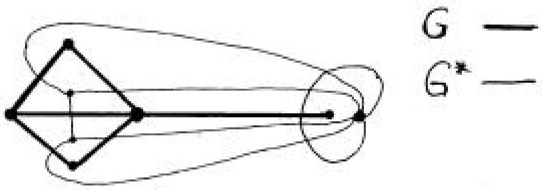
6.2. Grafos Duales.

Sea G un grafo plano, se llama grafo dual de G y se denota por G^*, aquel construido de la siguiente manera:

a) Se elige un punto v_i en cada cara F_i de G. Estos puntos son los vértices de G^*.

b) Por cada arista $e \in G$ se traza una línea e^* que atraviesa únicamente la arista e, y se unen los vértices v_i pertenecientes a las caras adjuntas a e. Estas líneas son las aristas de G^*.

A continuación se ilustra este procedimiento de construcción con un ejemplo:



Como teoremas significativos dentro de la teoría de grafos duales, se comentan los siguientes:

TEOREMA: Si G es un grafo plano de n vértices, m aristas y f caras, y su dual G^* tiene n^* vértices, m^* aristas y f^* caras, se cumplen las siguientes relaciones:

$$n^* = f \qquad m^* = m \qquad f^* = n$$

<u>dem.</u>

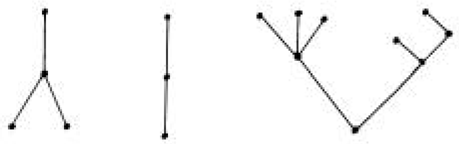
La demostración de las dos primeras expresiones salen directamente a partir de la aplicación de la definición de dualidad. Para demostrar la tercera expresión, se ha de sustituir las dos primeras en la denominada fórmula de Euler.

7. DIAGRAMAS EN ÁRBOL.

La teoría de árboles fue enunciada y elaborada por Cayley.

Un grafo que no posee ningún circuito se denomina bosque, si además es un bosque conexo, se denomina árbol.

Como ejemplos representativos de árboles se tienen los siguientes:



Algunas de las propiedades características de los árboles son las siguientes:

TEOREMA: Sea T un grafo con n vértices. Los siguientes enunciados son equivalentes:

1) T es un árbol.
2) T no contiene ningún circuito, y posee n – 1 aristas.
3) T es conexo y tiene n – 1 aristas.
4) T es conexo y cada arista es un istmo.
5) Cada dos vértices de T están conectados por una única trayectoria.
6) T no contiene ningún circuito, pero la adición de cualquier nueva arista crea exactamente un circuito.

dem.

Si n = 1 los seis enunciados son triviales. Supondremos, por tanto, que n≥2.

Para la demostración del teorema, demostraremos las implicaciones consecutivas, es decir, 1) ⇒ 2) ⇒ 3) ⇒ 4) ⇒ 5) ⇒ 6) ⇒ 1).

1) ⇒ 2)

T es árbol y por definición no contiene ningún circuito. Esto conlleva que la eliminación de cualquier arista va a dividir a T en dos grafos. Cada uno de estos grafos es un árbol. Por ello, y por inducción, el número de aristas en cada uno de los árboles es menor, en una unidad, que el número de vértices que tiene el grafo total. Por tanto, el número total de aristas de T es n – 1.

2) ⇒ 3)

Si T fuera inconexo, entonces cada componente de T sería un grafo conexo sin ningún circuito y, por tanto, según se ha demostrado antes, el número de vértices de cada componente excedería en 1 del número de aristas. Por tanto, el número total de vértices de T excedería en al menos 2 del número total de aristas. Hemos llegado a una contradicción, pues T tiene n – 1 aristas. Esto es porque se parte de una premisa falsa, es decir, el hecho de que T fuera inconexo. Por tanto T es conexo.

3) $\Rightarrow$ 4)

La eliminación de cualquier arista daría lugar a un grafo con n vértices y n – 2 aristas, que será inconexo.

4) $\Rightarrow$ 5)

Como T es conexo, se sigue que cada par de vértices han de estar conectados por al menos una trayectoria. Dados dos vértices, si estos estuvieran conectados por dos trayectorias, entre ellos habría un circuito, contradicción con que toda arista es un istmo.

5) $\Rightarrow$ 6)

Por reducción al absurdo, si T tuviese un circuito, cualquier par de vértices incluidos en el circuito estarían conectados por, al menos, dos trayectorias, lo que es una contradicción con las premisas. Si añadimos una arista e a T, se creará un circuito ya que los vértices incidentes a e ya están conectados en T.

6) $\Rightarrow$ 1)

Supongamos que T no es un árbol, por tanto es inconexo. Si le añadimos cualquier arista que una un vértice de una componente a un vértice de otra, no se creará ningún circuito. Sin embargo, por el punto 6) se tiene que al añadir una nueva se crea un circuito, por tanto tenemos una contradicción.

COROLARIO: Un bosque G con n vértices y k componentes tiene n – k aristas.

TEOREMA: Todo árbol G tiene al menos un vértice de grado 1.

dem.

Sean los vértices del árbol v_1, v_2,...,v_n. Partiendo de v_1 vamos a su vecino v_2. Si el grado de v_2 es 1, ya está probado el teorema. En cualquier otro caso, vamos al vértice v_3 a través de otra arista. De esta forma se puede obtener el camino $v_1 v_2 v_3$... en el que ninguno de los v_i son iguales por la definición de árbol. Como el número de vértices es finito, el camino tiene un último vértice v_j. Evidentemente, éste tendrá grado 1, ya que se ha llegado a él y no se puede dejar.

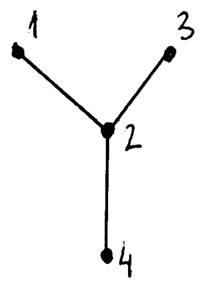
TEOREMA: Existe un único camino entre dos vértices cualesquiera v y w de un árbol.

TEOREMA: Sea G un grafo conecto (dos vértices cualesquiera se encuentran unidos por un camino) de n vértices y n – 1 aristas, entonces es un árbol.

7.1.La enumeración de árboles.

La enumeración de grafos tiene por objeto encontrar el número de grafos no isomorfos que poseen una propiedad determinada.

En general, se denomina grafo etiquetado de n vértices a un grafo a cuyos vértices se le asignan números enteros de 1 a n, es decir, se trata de una aplicación biunívoca del conjunto de vértices de G sobre el conjunto {1, 2, 3,..., n}. El grafo etiquetado se designa (G,&) donde & es el etiquetado.



Ejemplo de árbol etiquetado:

TEOREMA: El número de árboles en los cuales el vértice v_1 tiene grado d_1+1, v_2 tiene grado d_2+1,..., v_n tiene grado d_n+1 viene determinado por el número combinatorio:

$$\binom{n-2}{d_1, d_2,..., d_n} = \frac{(n-2)!}{d_1!d_2!...d_n!}$$

<u>dem.</u>

Como el grado de cada vértice es por lo menos 1, d_i son enteros no negativos. Si se añaden los grados de cada vértice y se cuentan cada una de las n – 1 aristas dos veces, se tiene

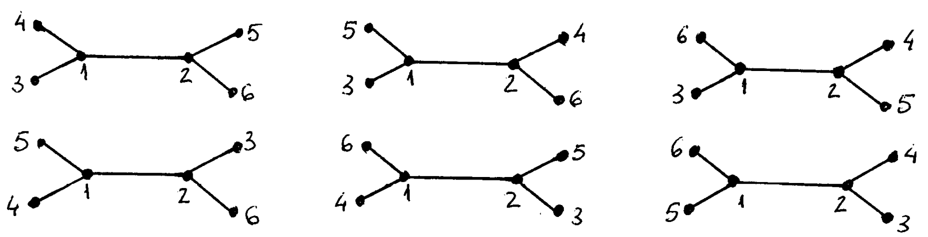
$$(d_1+1)+(d_2+1)+...+(d_n+1) = 2(n-1)$$

A partir de aquí se tendrá la demostración del teorema.

Ejemplo: Número de árboles con grado para el primer vértice 3, para el segundo 3 y del tercero al sexto 1.

Como $d_1=d_2=2$ y $d_3=d_4=d_5=d_6=0$, entonces el número de árboles es $\binom{4}{2,2,0,0,0,0} = \frac{4!}{2!2!} = 6$

Dichos árboles son:



TEOREMA de CAYLEY: Existen n^{n-2} árboles etiquetados diferentes de n vértices.

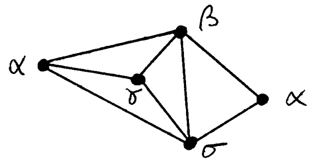
Existen varios métodos de demostración para este teorema. Uno de ellos debido a Prufer y Clarke, y es:

Se establece una correspondencia biunívoca entre el conjunto de árboles etiquetados de orden n y el conjunto de todos los símbolos ordenados $(a_1, a_2,..., a_{n-2})$

donde a_i está definido como entero entre 1 y n. Dado que existen $n \cdot n \cdot n \cdots n$ (n – 2 veces) de tales símbolos, la demostración se tiene casi inmediata.

8. COLOREADO DE GRAFOS.

Se dice que un grafo G sin lazos es k-coloreable si puede asignarse a cada uno de sus vértices uno de k colores dados de forma que ningún par de vértices adyacentes tengan el mismo color. Si es coloreable de grado k pero no de grado k – 1, entonces G es k-cromático. Como ejemplo, sea el siguiente grafo 4-cromático.



TEOREMA: Un grafo G cuyo máximo grado de vértice es &, entonces es (&+1)-coloreable.

dem.

Utilizaremos la inducción sobre el número de vértices. Si G tiene n vértices, si se suprime un vértice, el mayor grado para éste será &. Por hipótesis de inducción, este grafo es (&+1)-coloreable.

TEOREMA: Si G es un grafo simple conexo no completo, si el mayor de los grados de sus vértices es & (≥3), entonces es &-coloreable.

TEOREMA: Todo grafo planar es 5-coloreable.

9. APLICACIONES DE LA TEORÍA DE GRAFOS.

Son varias las aplicaciones y usos que las distintas ciencias o áreas hacen de la teoría de grafos. La aplicación más importante dentro de la matemática moderna se encuentra en el campo de la combinatoria.

Veamos algunos de los ejemplos más importantes:

9.1. El Teorema Matrimonial de Hall.

Sea un conjunto finito de muchachos, cada uno de los cuales conoce a varias chicas. ¿En qué condiciones se pueden formar los matrimonios de tal forma que cada uno de los muchachos se case con la chica que conoce?

TEOREMA de Hall

Una condición necesaria y suficiente para la solución del problema matrimonial es que cada conjunto de k jóvenes conozca colectivamente k chicas al menos ($1 \le k \le m$).

9.2. El teorema de Menger.

Determinación del número de trayectorias que unen dos vértices dados u, v de un grafo G.

TEOREMA de Menger.

El número máximo de trayectorias de vértices disjuntos que conectan dos vértices diferentes no adyacentes v y w de G es igual al número mínimo de vértices de un subconjunto separador vw.

TEOREMA: El teorema de Menger implica el teorema de Hall.

9.3. La teoría de Matroides.

Aplicación de ciertos resultados de la teoría de grafos a la teoría transversal, donde aparece el concepto de matroide como un conjunto dotado de una estructura de independencia.

Bibliografía.

Algoritmos en Grafos y Redes. Aut. Blas Pelegrín, Lázaro Cánovas. Edit. P.P.U.
Matemática Discreta y Combinatoria. Aut. Ralph Grimaldi. Edit. Addison-Wesley Iberoamericana.
Lecciones de Optimización. Aut. Juan José Salazar. Edit. Universidad de La Laguna
Graphs and Algorithms. Aut. M. Gondron, M. Minoux. Edit. Wiley-Intercience.
Algebra y Matemática Discreta. Aut. J.A. Aledo Sánchez, J.C. Valverde Fajardo. Edit. Popular Libros.