TEMAS DE MATEMÁTICAS
(Oposiciones de Secundaria)

TEMA 69

<u>LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS EN MATEMÁTICAS. ESTRATEGIAS. IMPORTANCIA HISTÓRICA.</u>

TEMA 69

LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS EN MATEMÁTICAS. ESTRATEGIAS. IMPORTANCIA HISTÓRICA.

1. INTRODUCCIÓN.

Una de las actividades fundamentales en Matemáticas es la resolución de problemas. Conviene que distingamos entre ejercicio y problema. Cuando se plantea un ejercicio, se identifica de inmediato la técnica que se precisa para resolverlo y, en todo caso, la dificultad estriba en aplicarla correctamente. En cambio, un problema es una tarea cuyos términos y propósitos son globalmente comprensibles por la persona, pero no se sabe de momento como abordar.

Así tenemos que, para un alumno de secundaria, calcular el área de un triángulo conociendo la base y la altura es un ejercicio, pero determinar cuantos triángulos tienen 1 dm^2 de superficie y representarlos todos, es un problema.

Cuando un problema o una tarea incita a una persona a plantearse nuevas preguntas sobre el mismo, por ejemplo, si es posible generalizar el resultado, o que pasaría si se modifican las condiciones iniciales del problema, puede decirse que se ha embarcado en una auténtica investigación.

La resolución de problemas ayuda a la construcción de conceptos y a establecer relaciones entre ellos. Pero no se aprende a resolver problemas por el hecho de haber aprendido determinados conceptos y algunos algoritmos de cálculo. Hemos de disponer de herramientas, técnicas específicas y pautas generales de resolución de problemas, que nos permitan enfrentarnos a ellos sin miedo y con una cierta garantía de éxito. La mejor manera de aprender a resolver problemas eficazmente es resolver una cantidad suficiente. Este aprendizaje, como cualquier otro, lleva mucho tiempo.

Es importante la reflexión sobre la forma de resolver cada problema; de ser conscientes de qué estrategia estamos utilizando, sin que esta reflexión se convierta en un tratamiento sistemático de las diferentes estrategias.

2. LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS. ESTRATEGIAS.

La heurística o *ars inveniendi* tenía por objeto el estudio de las reglas y de los métodos de descubrimiento y de la invención. La heurística moderna, inaugurada por Polya con la publicación de su obra *How to solve it* (Polya, 1945), trata de comprender el método que conduce a la solución de problemas, en particular las operaciones típicamente útiles en este proceso.

2.1. ¿Qué es un problema?

Polya no definió lo que entendía por problema cuando escribió su libro en 1945. Sin embargo, en su libro *Mathematical Discovery* (Polya, 1961), se vio obligado a proporcionar una definición. Pero no para empezar su disertación, sino en el capítulo 5, y después de una amplia exposición práctica sobre algunos procesos que intervienen en la resolución de problemas: *Tener un problema significa buscar de forma consciente una acción apropiada para lograr un objetivo claramente concebido pero no alcanzable de forma inmediata.*

Otra definición, parecida a la de Polya es la de Krulik y Rudnik: *Un problema es una situación, cuantitativa o de otra clase, a la que se enfrenta un individuo o un grupo, que requiere solución, y para la cuál no se vislumbra un medio o camino aparente y obvio que conduzca a la misma* (Krulik y Rudnik, 1980).

De ambas definiciones se infiere que un problema debe satisfacer los tres requisitos siguientes:

1) Aceptación. El individuo o grupo, debe aceptar el problema, debe existir un compromiso formal, que puede ser debido a motivaciones tanto externas como internas.
2) Bloqueo. Los intentos iniciales no dan fruto, las técnicas habituales de abordar el problema no funcionan.
3) Exploración. El compromiso personal o del grupo fuerzan la exploración de nuevos métodos para atacar el problema.

También ha existido cierta polémica sobre la diferencia que hay entre un ejercicio o un auténtico problema.

Lo que para algunos es un problema, por falta de conocimientos específicos sobre el dominio de métodos o algoritmos de solución, para los que sí los tienen es un ejercicio. Esta cuestión aunque ha sido planteada en varias ocasiones, no parece un buen camino para profundizar sobre la resolución de problemas.

R. Borasi (1986), en uno de los primeros intentos en clarificar la noción de problema originada por su interés en mejorar la enseñanza de la resolución de problemas, utiliza los siguientes elementos estructurales para una tipología de problemas:

- El contexto del problema, la situación en la cuál se enmarca el problema mismo.
- La formulación del problema, definición explícita de la tarea a realizar.
- El conjunto de soluciones que pueden considerarse como aceptables para el problema.
- El método de aproximación que podría usarse para alcanzar la solución.

Tales elementos estructurales pueden dar origen a la siguiente clasificación:

Tipo	Contexto	Formulación	Soluciones	Método
ejercicio	inexistente	Única y explícita	Única y exacta	Combinación de algoritmos conocidos
Problema con texto	Explícito en el texto	Única y explícita	Única y exacta	Combinación de algoritmos conocidos

Puzzle	Explícito en el texto	Única y explícita	Única y exacta	Elaboración de un nuevo algoritmo Acto de ingenio.
Prueba de una conjetura	En el texto y sólo de forma parcial	Única y explícita	Por lo general única, pero no necesariamente	Exploración del contexto, reformulación, elaboración de nuevos algoritmos.
Problemas de la vida real	Sólo de forma parcial en el texto	Parcialmente dada. Algunas alternativas posibles.	Muchas posibles, de forma aproximada.	Exploración del contexto, reformulación, creación de un modelo
Situación problemática	Sólo parcial en el texto	Implícita, se sugieren varias, problemática	Varias. Puede darse una explícita	Exploración del contexto, reformulación, plantear el problema.
Situación	Sólo parcial en el texto	Inexistente, ni siquiera implícita	Creación del problema	Formulación del problema.

2.2. El proceso de resolución de un problema.

Para George Polya (1945), la resolución de un problema consiste, a grandes rasgos, en cuatro fases bien definidas:

Comprender el problema.

¿Cuál es la incógnita? ¿Cuáles son los datos?

Concebir un plan.

¿Se ha encontrado con un problema semejante?
¿Conoce un problema relacionado con este?
¿Podría enunciar el problema de otra forma?
¿Ha empleado todos los datos?

Ejecutar el plan.

¿Son correctos los pasos dados?

Examinar la solución obtenida.

¿Puede verificar el resultado?
¿Puede verificar el razonamiento?

Las fases anteriores caracterizan claramente al resolutor ideal, competente. Cada fase se acompaña de una serie de preguntas, al puro estilo socrático, cuya intención clara es actuar como guía para la acción. Los trabajos de Polya, se pueden considerar por lo tanto, como un intento de describir la manera de actuar de un resolutor ideal.

Una pregunta, ¿Por qué es tan difícil entonces, para la mayoría de los humanos, la resolución de problemas en matemáticas?

Los trabajos de Schoenfeld (1985), son por otro lado, la búsqueda inagotable de explicaciones para la conducta de los resolutores reales de problemas. Propone un marco con cuatro componentes que sirva para el análisis de la complejidad del comportamiento en la resolución de problemas.

Recursos congnitivos: conjunto de hechos y procedimientos a disposición del resolutor.

Heurísticas: reglas para progresar en situaciones dificultosas.

Control: Aquello que permite un uso eficiente de los recursos disponibles.

Sistema de creencias: Nuestra perspectiva con respecto a la naturaleza de la matemática y como trabajar en ella.

Cada uno de tales componentes explica las carencias, y por lo tanto, el poco éxito en la resolución de problemas de los resolutores reales. Así, cuando a pesar de conocer las heurísticas no se sabe cuál utilizar o cómo utilizarla se señala la ausencia de un buen *control* o *gestor* de los recursos disponibles. Pero las heurísticas y un buen control no son suficientes, pues puede que el resolutor no conozca un hecho, algoritmo o procedimiento específico del dominio matemático del problema en cuestión. En este caso se señala la carencia de *recursos cognitivos* como explicación al intento fallido en la resolución.

Por otro lado, puede que todo lo anterior esté presente en la mente del resolutor, pero sus creencias de lo que es resolver problemas en matemáticas o de la propia concepción sobre la matemática haga que no progrese en la resolución. La explicación, para este fallo, la contempla Schoenfeld en el cuarto elemento del marco teórico, las *creencias*.

Por último están las *heurísticas*. La mayor parte de las veces se carece de ellas. Se dispone de conocimientos específicos del tema o dominio matemático del problema, incluso de un buen control pero falla el conocimiento de reglas para superar las dificultades en la tarea de resolución.

Las *heurísticas* son las operaciones mentales típicamente útiles en la resolución de problemas, son como reglas o modos de comportamiento que favorecen el éxito en el proceso de resolución, sugerencias generales que ayudan al individuo o grupo a comprender mejor el problema y a hacer progresos hacia su solución.

Existe una amplia, posiblemente incompleta, lista de heurísticas. Entre las más importantes cabría citar:

- Buscar un problema relacionado.
- Resolver un problema similar más sencillo.
- Dividir el problema en partes.
- Considerar un caso particular.
- Hacer una tabla.
- Buscar regularidades.
- Empezar el problema desde atrás.
- Variar las condiciones del problema.

Sin embargo, como bien ha señalado Puig (1996), en la lista anterior aparecen demasiadas cosas juntas, que son, por otro lado, diferentes si las sometemos a un detenido análisis.

Buscar un problema relacionado es una *sugerencia heurística* pues se señala una dirección de trabajo, y sobre todo se recurre a la memoria del resolutor, y no a un procedimiento concreto para buscar tal problema.

Considerar un caso sí se refiere a un procedimiento en concreto que permite, a partir del problema dado, formular un problema relacionado con él. Puig (1996) denomina a este tipo de procedimientos, independientes del contenido y que permiten transformar el problema dado en otro, con el nombre de *herramientas heurísticas*. (Tal observación parte de una nota marginal de Polya (Polya, 1962, vol 2. p.84))

Por último, *hacer una tabla* se podría considerar como una *destreza* al no poseer el carácter de transformar el problema ni al recurso de la memoria como en el caso de las *sugerencias heurísticas*.

La característica más importante del proceso de resolución de un problema es que, por lo general, no es un proceso paso-a-paso sino más bien un proceso titubeante.

En el proceso de resolución, Schoenfeld ha señalado que tan importante como las heurísticas es el control de tal proceso, a través de *decisiones ejecutivas*. Tales decisiones son acerca de *qué hacer* en un problema. La característica más importante que define a las decisiones ejecutivas y a las acciones de control, es que tienen consecuencias globales para la evolución del proceso de resolución de un problema.

Las decisiones ejecutivas determinan la eficiencia de los conocimientos y recursos de todo tipo puestos en servicio para la resolución del problema.

Son decisiones ejecutivas:

- Hacer un plan.
- Seleccionar objetivos centrales y subobjetivos.
- Buscar los recursos conceptuales y heurísticos que parecen adecuados para el problema.
- Evaluar el proceso de resolución a medida que evoluciona.
- Revisar o abandonar planes cuando su evaluación indica que hay que hacerlo.

Las anteriores son decisiones ejecutivas tal y como se usa ese término en Inteligencia Artificial, son equivalentes a las decisiones de gestión en el campo de los negocios, o decisiones de táctica y estrategia en el campo militar. El término metacognición se ha usado en la literatura psicológica en la discusión de fenómenos relacionados con el que aquí tratamos.

Son por tanto, decisiones acerca de qué caminos tomar, pero también acerca de qué caminos no tomar.

Cuanto más precisas sean las respuestas a las preguntas:

¿ Qué estoy haciendo?
¿ Por qué lo hago?
¿ Para qué lo hago?
¿ Cómo lo usaré después?

mejor será el control global que se tenga sobre el problema y sobre las decisiones que conducen a su solución.

La ausencia de decisiones ejecutivas y de control suele tener efectos desastrosos en el proceso de resolución de un problema. La mayor parte de las veces en que se fracasa en la resolución de un problema es debido a que, la persona que afronta el problema, no dispone de un *plan de solución*.

Pero hay otras actitudes que imposibilitan la toma de buenas decisiones durante la fase de resolución. Entre ellas cabe destacar:

- Inflexibilidad para considerar alternativas.

Cuando una y otra vez fallan los procedimientos empleados no hay más salida que cambiar de perspectiva para salir del bloqueo.

- Rigidez en la ejecución de procedimientos.

Más de una vez intentaremos encajar un procedimiento conocido en una situación en la que no es aplicable. Nuestra obstinación es debida al simple hecho de que nos parece apropiado a primera vista, o porque la situación, aunque distinta, se parece a aquella en que el procedimiento fue eficaz.

- Incapacidad de anticipar las consecuencias de una acción.

Al respecto cabe hacerse siempre la siguiente pregunta antes de ejecutar una acción pensada: Cuando haya ejecutado lo que pienso ¿ qué consecuencias tendrá para la resolución del problema ?

- El efecto "túnel".

Se produce cuando la ejecución de una tarea es tan absorbente que no hay energías disponibles para la evaluación de lo que se esta realizando. Suele darse más fácilmente cuanto más embebido se está en la ejecución de una acción.

Miguel de Guzmán partiendo de las ideas de Polya, Mason et al. (Mason, Burton y Stacey, 1988) y de los trabajos de Schoenfeld ha elaborado un modelo para la ocupación con problemas, donde se incluyen tanto las decisiones ejecutivas y de control como las heurísticas. La finalidad de tal modelo es que la persona examine y remodele sus propios métodos de pensamiento de forma sistemática a fin de eliminar obstáculos y de llegar a establecer hábitos mentales eficaces, en otras palabras, lo que Polya denominó como pensamiento productivo.

Un modelo para la ocupación con problema (Miguel de Guzmán, 1991, p.80)

Familiarízate con el problema

- Trata de entender a fondo la situación
- Con paz, con tranquilidad a tu ritmo
- Juega con la situación, enmárcala, trata de determinar el aire del problema, piérdele el miedo

Búsqueda de estrategias

- Empieza por lo fácil
- Experimenta
- Hazte un esquema, una figura, un diagrama
- Escoge un lenguaje adecuado, una notación apropiada
- Busca un problema semejante
- Inducción
- Supongamos el problema resuelto
- Supongamos que no

Lleva adelante tu estrategia

- Selecciona y lleva adelante las mejores ideas que se te han ocurrido en la fase anterior
- Actúa con flexibilidad. No te arrugues fácilmente. No te emperres en una idea. Si las cosas se complican demasiado hay otra vía.
- ¿Salió? ¿Seguro? Mira a fondo tu solución.

Revisa el proceso y saca consecuencias de él.

- Examina a fondo el camino que has seguido. ¿Cómo has llegado a la solución? O bien, ¿por qué no llegaste?
- Trata de entender no sólo que la cosa funciona, sino por qué funciona.
- Mira si encuentras un camino más simple
- Mira hasta dónde llega el método
- Reflexiona sobre tu propio proceso de pensamiento y saca consecuencias para el futuro

2.3. La resolución de problemas como propuesta didáctica.

El National Council of Teachers of Mathematics (NCTM) propuso para la década de los pasados ochenta la resolución de problemas como eslogan educativo de la matemática escolar: *En la enseñanza de las matemáticas escolares se debe poner el enfoque en la resolución de problemas.*

¿Qué significa poner el enfoque en la resolución de problemas?

Cabe al menos tres interpretaciones:

Enseñar para resolver problemas

- Proponer a los alumnos más problemas.
- Emplear aplicaciones de los problemas a la vida diaria y a las ciencias.
- No proponer sólo ejercicios sino también problemas genuinos que promuevan la búsqueda, la investigación por los alumnos.

Enseñar sobre la resolución de problemas

Enseñanza de la heurística. El objetivo es que los alumnos lleguen a aprender y a utilizar estrategias para la resolución de problemas.

Dentro de esta tendencia hay ejemplos en los mismos trabajos citados anteriormente. Sin embargo, parece ser que las *destrezas* heurísticas son las más apropiadas para tal fin.

Enseñar vía la resolución de problemas

Enseñar la matemática a través de problemas.

En un seminario celebrado en La Laguna en 1982 e impartido por el profesor Gaulin (M. Fernández 1982), al ser preguntados por objetivos de la resolución de problemas, los profesores asistentes enumeran los siguientes:

- Desarrollo de la capacidad de razonamiento
- Aplicación de la teoría previamente expuesta.
- Resolución de cuestiones que la vida diaria plantea.

La primera propuesta, aunque durante mucho tiempo fue un argumento aceptado generalmente sobre las virtudes de la educación matemática, con el paso del tiempo se ha convertido en un mito. Las dos últimas caen dentro de la primera interpretación anterior. En el mismo artículo, el autor M. Fernández que actuó como informador del seminario, concluye con la siguiente redacción: *Al final, pareciéndome que el profesor buscaba algo más, me aventuré a indicar lo que creo suele olvidarse: la propuesta de problemas con el fin de elaborar una teoría, esto es, para explorar y aprender nuevos conceptos. En efecto, comentó, pese a ser eminentemente formativa, no es frecuente que se tenga en cuenta por el profesorado.*

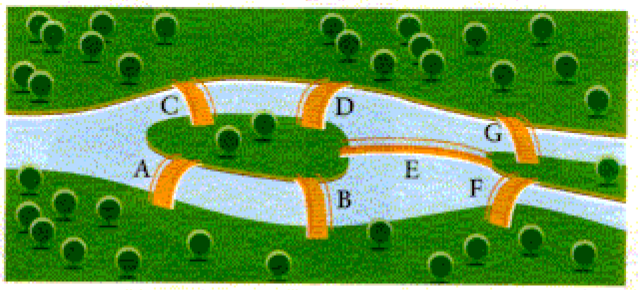
Esta es claramente la interpretación tercera de las enumeradas más arriba. Sin embargo, el comentario del Profesor Gaulin deja las cosas de nuevo en su sitio. ¿Por qué no se tiene en cuenta por el profesorado?

3. IMPORTANCIA HISTÓRICA. ALGUNOS PROBLEMAS CLÁSICOS.

La resolución de problemas ha sido, es y será, el auténtico motor de las matemáticas. Una vez que un problema era resuelto, surgían otros nuevos, los cuales constituían nuevos retos para las hornadas de matemáticos. Sin embargo, podemos encontrar en la historia de las matemáticas unos cuantos problemas, de enunciado y propósito sencillo, que se pueden considerar universales. Muchos de ellos fascinaron en su infancia a muchos grandes matemáticos, según han confesado después ellos mismos. El problema de los matemáticos no es inventar nuevas ramas de forma gratuita. Se inventan para resolver problemas a veces propuestos siglos antes.

3.1. Problemas Famosos.

3.1.1. Los puentes de Köninsberg.



En la ciudad de Köninsberg (ahora se llama Kaliningrado) (donde nació Kant y Hilbert) hay una isla, Kneihof, rodeada por dos brazos del río Pregel. Hay siete puentes que lo cruzan. ¿Puede una persona realizar un paseo de modo que cruce cada uno de los puentes una sola vez?

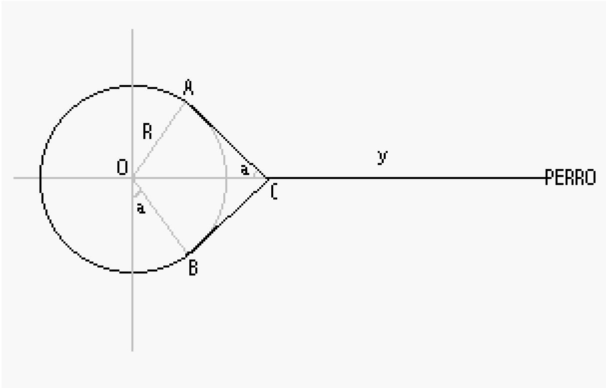
Solución: Euler demostró que no se puede hacer.

3.1.2. Problema de Teofrasto

Teofrasto fue a ver a Aristoteles, para hablar sobre la clasificación de las plantas. Llevaba a su perro, un mastín, atado con una cuerda de longitud L. Cuando llegó, ató la cuerda con un nudo corredizo, alrededor de una columna de radio R.

El perro, al que no le gustaba estar atado, tensionó la cuerda, y la cuerda se rompió. Hallar a que distancia del perro estaba el nudo corredizo cuando se rompió la cuerda.

Solución:



Sea y la distancia entre el perro y el nudo corredizo, x, la distancia entre el nudo corredizo y el punto en que la cuerda toca a la columna y a el ángulo que forma la cuerda con el eje de abscisas en C (el nudo).

La longitud de la cuerda es L = y + AC + AB + BC

La cuerda es tangente a la circunferencia en A y en B, por lo tanto el ángulo que forma la cuerda con el radio será de 90º.

Como se puede ver en el dibujo el ángulo en O correspondiente al arco de circunferencia en contacto con la cuerda es p + 2a, luego la longitud de la cuerda en contacto con la columna es (p + 2a)R.

Entonces L = y + 2x + (p + 2a)R

y = L - 2x - (p> + 2a)R

tg a = R/x

a = arctg R/x

y = L - 2x - p R - 2R arctg R/x

Obteniendo el máximo de esta función se resolvería el problema.

3.1.3. Coloreando los mapas.

Demostrar que para colorear un mapa, de forma que países con frontera común se pinten con colores distintos, sólo se necesitan cuatro colores.

Este problema fue propuesto a Augustus de Morgan por un antiguo alumno suyo, Francis Guthrie. El profesor no fue capaz de resolverlo y se lo envió a Hamilton en una carta de fecha 23 de octubre de 1852.

El problema ha resistido los embates de muchos matemáticos. En 1976 Kenneth Apel y Wolfgang Haken, de la Universidad de Urbana (Illinois) dieron una demostración con ordenador pero no existe ninguna demostración matemática.

3.2. Problemas sin Solución.

3.2.1. Problema Délico o Duplicación del Cubo.

Dado un cubo cuya arista tiene longitud 1 se pide construir un cubo de volumen doble, utilizando regla (una regla sin marcas) y compás.

El nombre del problema se debe a que en Delfos (una isla griega) había un templo que era famoso por sus oráculos. Un rey acudió al templo para que le hiciesen un oráculo (adivinar el porvenir) y después de hacérselo le dijo a la sacerdotisa que le pidiese lo que quisiera. La sacerdotisa le pidió que construyese un altar del doble de volumen que el que tenía.

Se trata de calcular, con regla y compás un número que sea igual a la raíz cúbica de 2. La solución es un número irracional y con regla y compás sólo se pueden obtener números fraccionarios, por lo tanto es imposible.

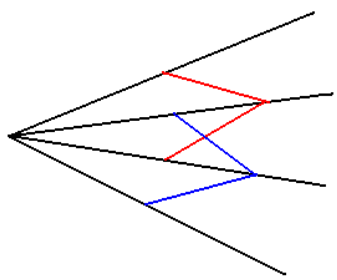
Tendríamos que resolver la ecuación $x^3 = 2$. No existe ningún número fraccionario que elevado al cubo dé 2.

3.2.2. Trisección de un ángulo.

Dado un ángulo alfa, se trata de dividirlo en tres partes iguales, utilizando regla y compás.

La trisección de un ángulo es equivalente a la resolución de la ecuación de tercer grado $\cos 3x = 4 (\cos x)^3 - 3 \cos x$.

Descartes resolvió este problema utilizando un compás como el de la figura



Las barras de colores rojo y azul están fijas en su extremo más cercano al vértice en un punto situado a la misma distancia en los cuatro brazos del compás. El otro extremo de las barras de colores se puede deslizar solidariamente con la barra compañera.

3.2.3. Rectificación de una circunferencia.

Dada una circunferencia de radio R, se trata de construir, con regla y compás, un segmento de longitud igual a la circunferencia.

3.2.4. Cuadratura del círculo.

Dado un círculo de radio R, se trata de construir, utilizando regla y compás, un cuadrado de igual superficie.

Sea L el lado del cuadrado. Tendríamos $L^2 = p\ R^2$

Resulta que Lindemann demostró que p no es solución de ningún polinomio.

El primero que intentó resolver este problema fue Anaxágoras, mientras estaba en la cárcel como prisionero político (fue liberado gracias a la intervención de Pericles, de quien había sido profesor). Dicen que llenó las paredes de la celda con los cálculos.

3.2.5. Construcción de n-ágonos regulares.

Dado un círculo de radio R, se pide construir un n-ágono (un polígono de n lados) regular inscrito en él.

Este problema sólo tiene solución si n tiene la forma $2^k +1$.

3.3. Problemas de Números.

a) ¿Existe una cantidad infinita de números perfectos?

Números perfectos son números cuya suma de divisores suman el número (p.e 6)

b) ¿Existe una cantidad infinita de números primos gemelos?

Los primos gemelos son parejas de números primos que están separados por un solo número (p.e 5,7, 17 y 19)

c) Demostrar que todos los números pares > 4 se pueden obtener como suma de dos primos.

Este problema se llama la conjetura de Goldbach. Goldbach era un matemático, que fue tutor del zar Pedro II. Goldabach planteó este problema a Euler y no fue capaz de resolverlo.

d) Demostrar que todos los números impares > 9 se pueden obtener como suma de tres primos.

Este problema se llama la conjetura de Goldbach. Goldbach era un matemático, que fue tutor del zar Pedro II. Goldabach planteó este problema a Euler y no fue capaz de resolverlo.

3.4. Problemas del Milenio.

3.4.1. P contra NP.

Stephen Cook y Leonid Levin formularon este problema independientemente en 1971.

Stephen Cook lo explicó con un ejemplo semejante a éste. Usted llega a una fiesta, el salón está lleno de gente y se pregunta si conoce a alguna persona de la fiesta. Se lo pregunta al anfitrión y este le dice que usted conoce a la persona que está en la ventana. Inmediatamente usted ratifica lo dicho por el anfitrión (es fácil comprobarlo). Sin embargo, si no tuviese esta ayuda , tendría que examinar una a una a toda la gente y determinar si la conoce. Tardaría mucho tiempo en hacer esta operación.

La explicación de las siglas P y NP se refieren a los tiempos "polinómico" y "polinómico no determinista".

3.4.2. La conjetura de Hodge.

Durante el siglo XX, los matemáticos descubrieron formas de investigar las formas de objetos complicados. La idea básica es preguntar en qué medida podemos aproximar la forma de un objeto dado uniendo formas geométricas simples.

La conjetura de Hodge dice que para un tipo particular de formas, llamadas variedades algebraicas proyectivas, las formas llamadas ciclos de Hodge son combinaciones de formas geométricas llamadas ciclos algebraicos.

3.4.3. La conjetura de Poincaré.

Henri Poincaré era el rival francés del alemán Hilbert.

Poincaré llegó a unas conclusiones sobre las esferas en el espacio de tres dimensiones que, posteriormente, han resultado imposible trasladar al espacio de cuatro dimensiones. Esta incógnita resultó ser extraordinariamente difícil en el momento de su planteamiento y los matemáticos siguen hoy luchando por darle una solución.

3.4.4. La hipótesis de Riemann.

Los números primos han traído de cabeza a los matemáticos desde los inicios de las matemáticas.

Uno de los temas que se resiste es la distribución de los números primos (no parece seguir ningún patrón regular). El matemático alemán Georg Riemann propuso en el siglo XIX, que su frecuencia está íntimamente relacionada con el comportamiento de una función matemática llamada función Zeta. La hipótesis de Riemann se ha confirmado en muchos casos, pero todavía no existe una demostración general.

Éste es el único de los siete problemas que estaba en la lista de 1900 de Hilbert.

3.4.5. La teoría de Yang-Mills.

Hace casi una centuria, los físicos Yang y Mills descubrieron ciertas relaciones entre la geometría y las ecuaciones de la física de partículas que, más tarde, resultaron de gran utilidad para unificar tres interacciones fundamentales de la materia en una sola teoría. A pesar de ello, no se conocen soluciones compatibles con la mecánica cuántica de las soluciones de Yang y Mills. El progreso de este problema requerirá la introducción de nuevas ideas fundamentales en la física y en matemáticas.

3.4.6. Las ecuaciones de Navier-Stokes.

Las ecuaciones de Navier-Stokes describen el comportamiento de los fluidos, cuando se mueven en movimiento turbulento.

A pesar que las ecuaciones se escribieron en el siglo XIX nadie ha sabido resolverlas hasta el momento.

3.4.7. La conjetura de Birch y Swinnerton-Dyer.

El décimo problema planteado por Hilbert en 1900 en París, planteaba si existía algún método para saber si las ecuaciones $x^n + y^n = z^n$ tienen soluciones que sean números enteros. El matemático Yu Matiyasevich demostró, en 1970, que no había ningún método general, pero Birch y Swinnerton-Dyer propusieron algunos métodos parciales que, todavía hoy, no se han demostrado.

BIBLIOGRAFÍA RECOMENDADA.

Pensar Matemáticamente. Aut. Mason, Burton y Stacey. edit. MEC Labor

Cómo plantear y resolver problemas. Aut.: Polya. Edit.:Trillas, Mexico

Elementos de Resolución de Problemas. Aut.: L. Puig. Edit.: Comares