TEMAS DE MATEMÁTICAS
(Oposiciones de Secundaria)

TEMA 24

FUNCIONES DADAS EN FORMA DE TABLA. INTERPOLACIÓN POLINOMICA. INTERPOLACIÓN Y EXTRAPOLACIÓN DE DATOS.

TEMA 24

FUNCIONES DADAS EN FORMA DE TABLA. INTERPOLACIÓN POLINOMICA. INTERPOLACIÓN Y EXTRAPOLACIÓN DE DATOS.

1. INTRODUCCIÓN.

Al observar los fenómenos que se producen en la naturaleza podemos darnos cuenta que se pueden elegir dos magnitudes x e y entre las cuales existe una dependencia funcional que expresa el aspecto cuantitativo del fenómeno estudiado.

Conocidos algunos pares de valores de la relación, el problema que vamos a tratar de resolver es hallar una curva que contenga dichos puntos y exprese de forma matemática la ley que rige dicha función.

La función viene a expresar en términos cuantitativos la dependencia de una de las magnitudes respecto de la otra. Por ejemplo, la temperatura de una localidad es función del tiempo, el precio de un crédito hipotecario es función de los tipos de interés, etc.

Lo cierto es que unos cuantos valores de la función no la determinan, a no ser que impongamos alguna condición extra, como podría ser la de pertenecer a una determinada clase. Sin ninguna restricción extra, podemos encontrar multitud de curvas que pasen por unos puntos determinados.

Por tanto, para poder resolver el problema de forma completa, debemos fijar de antemano el tipo de función que ha de pasar por los puntos dados, viendo si son suficientes o no para su determinación.

La interpolación consiste en la determinación de valores dentro del rango de al variable, a partir de la función calculadora. La extrapolación consiste en evaluar la función de interpolación obtenida en puntos que no estén dentro del rango de los datos. Podemos así comprobar si los resultados obtenidos se aproximan a los esperados.

1.1. Formas diversas de expresión de Funciones.

a) Funciones dadas en forma de tabla.

En esta forma de expresar una función se disponen los valores del argumento en cierto orden $x_1, x_2, \ldots, x_n$ y de la misma manera se escriben los valores correspondientes de la función $y_1, y_2, \ldots, y_n$.

De este tipo son las tablas de las funciones trigonométricas, las de logaritmos, etc.

Tablas que expresan la dependencia funcional que existe entre magnitudes medidas pueden aparecer también como resultado del estudio experimental de ciertos fenómenos.

b) Representación gráfica.

Dado en el plano del sistema de coordenadas rectangulares o cartesianas un conjunto de puntos P, tal que ningún par de puntos caiga sobre una recta paralela al eje y, podemos decir que el conjunto mencionado determina una función y = f(x). Las abscisas de los puntos son los valores del argumento e variable independiente, y los de la función, las ordenadas correspondientes.

Se llama gráfica de una función al conjunto de puntos del plano cuyas abscisas son los valores de la variable independiente y las ordenadas, los correspondientes de la función.

c) Representación Analítica de las funciones.

Se llama expresión analítica a la notación simbólica del conjunto de las operaciones matemáticas conocidas que se han de realizar en cierto orden con los números y letras que designan magnitudes constantes o variables.

Si la dependencia funcional y = f(x) es tal que f es una expresión analítica, se dice que la función y de x está dada analíticamente.

2. INTERPOLACIÓN POLINÓMICA.

2.1. Descripción del problema de Interpolación.

Gran cantidad de operaciones con funciones exigen un paso al límite, como derivación e integración. Por tanto, sería conveniente conseguir lo que podríamos llamar "aproximación polinomial", que es sustituir la función por un polinomio. Las operaciones anteriores sobre polinomios son operaciones algebraicas. Además, dada una función continua en un intervalo, es posible encontrar aproximaciones polinomiales tan buenas como se quiera.

El problema consiste en, dados n puntos de una función de la cual desconocemos su expresión matemática, hallar otra función real de variable real que tome esos valores. La función obtenida debe permitir calcular el valor correspondiente en un punto intermedio de los que tenemos, de forma que el resultado obtenido se ajuste con el menor error posible al esperado. Y también hemos de poder comprobar si la función se ajusta a los resultados esperados para valores de x fuera del intervalo.

Si representamos los puntos $(x_1, y_1),\ldots, (x_n, y_n)$ en un sistema de coordenadas cartesianas, la curva que los une resuelve el problema de la interpolación. Si llamamos y = g(x) a la función que une dichos puntos, tendremos que el valor de g(x) con $x \in [x_1, x_n]$ dependerá de la curva elegida. A veces podemos demostrar que la elección de la curva es la adecuada, pero otras veces sólo contaremos con el conocimiento del fenómeno estudiado que tenga la persona que trata de resolver el problema.

Consideremos una cierta función f(x), que puede ser conocida o no, pero de la que tenemos los puntos $(x_1, y_1),\ldots, (x_n, y_n)$. Cualquier función g(x) que pase por esos puntos recibe el nombre de función interpolación. Como lo que tratamos es de sustituir f(x) por g(x), ésta última ha de ser más sencilla que f(x). Es por ello que se suelen elegir las funciones polinómicas, que presentan como ventajas la facilidad de realizar operaciones con ellas, son expresiones sencillas, es fácil calcular el error que se comete al sustituir una por otra, etc.

El error de interpolación es la diferencia, en valor absoluto, entre el valor de la función dada, f(x), y el que toma la función de interpolación, g(x):

$$E = \left| f(x) - g(x) \right|$$

A partir de ahora vamos a tratar de calcular funciones de interpolación que verifiquen dos condiciones:

1) Que sean lo más sencillas posibles.

2) Que el error cometido sea mínimo.

2.2. Interpolación Lineal.

La expresión de una función lineal es

$$f(x) = ax + b$$

Debido a que tenemos dos parámetros, a y b, es necesario dar dos condiciones para determinar completamente la función. Las dos condiciones son dos puntos, $A(x_1, y_1)$ y $B(x_2, y_2)$, que pertenecen a la gráfica de la función.

Si sustituimos A y B en f(x) tenemos que

$$\left.\begin{array}{l} y_1 = ax_1 + b \\ y_2 = ax_2 + b \end{array}\right\}$$

Para resolver el sistema aplicamos la regla de Cramer:

$$a = \frac{\begin{vmatrix} y_1 & 1 \\ y_2 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x_1 & 1 \\ x_2 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} \qquad b = \frac{\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x_1 & 1 \\ x_2 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{x_1 y_2 - x_2 y_1}{x_1 - x_2}$$

y la solución existe siempre que $x_1 \neq x_2$, siendo única.

Si f(x) es una función cualquiera y [a, b] es un intervalo del dominio de definición de f(x), podemos aproximar la función de manera lineal con

$$p(x) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \cdot x + \frac{bf(a) - af(b)}{b - a}$$

donde ambas funciones coinciden en los extremos del intervalo

A(a, f(a)) y B(b, f(b))

Sustituyendo en p(x) la variable x por un valor intermedio entre a y b se obtiene el valor aproximado.

2.3. Interpolación Cuadrática.

Una función cuadrática es de la forma

$$p(x) = ax^2 + bx + c$$

Dada una función f(x), si queremos aproximarla mediante una función cuadrática, necesitamos conocer tres puntos, ya que hemos de calcular los tres parámetros. Igualmente, si de la función f(x) sólo conocemos tres puntos por los que pasa, podremos aproximarla por un polinomio de grado dos.

Sean $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ y $C(x_3, y_3)$ los puntos por los que pasa f(x). Vamos a suponer que los tres puntos no estén alineados, ya que en caso contrario, el polinomio más simple sería de primer grado (una recta) y no el de segundo grado.

Sustituyendo los puntos en p(x) y aplicando la regla de Cramer para resolver el sistema que se obtiene:

$$\left.\begin{array}{l} ax_1^2 + bx_1 + c = y_1 \\ ax_2^2 + bx_2 + c = y_2 \\ ax_3^2 + bx_3 + c = y_3 \end{array}\right\}$$

$$a = \frac{\begin{vmatrix} y_1 & x_1 & 1 \\ y_2 & x_2 & 1 \\ y_3 & x_3 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x_1^2 & x_1 & 1 \\ x_2^2 & x_2 & 1 \\ x_3^2 & x_3 & 1 \end{vmatrix}} \qquad b = \frac{\begin{vmatrix} x_1^2 & y_1 & 1 \\ x_2^2 & y_2 & 1 \\ x_3^2 & y_3 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x_1^2 & x_1 & 1 \\ x_2^2 & x_2 & 1 \\ x_3^2 & x_3 & 1 \end{vmatrix}} \qquad c = \frac{\begin{vmatrix} x_1^2 & x_1 & y_1 \\ x_2^2 & x_2 & y_2 \\ x_3^2 & x_3 & y_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x_1^2 & x_1 & 1 \\ x_2^2 & x_2 & 1 \\ x_3^2 & x_3 & 1 \end{vmatrix}}$$

Y como el denominador es el determinante de Vandermonde, tenemos que

$$\begin{vmatrix} x_1^2 & x_1 & 1 \\ x_2^2 & x_2 & 1 \\ x_3^2 & x_3 & 1 \end{vmatrix} = (x_3 - x_1)(x_3 x_2)(x_2 - x_1)$$

el cual es no nulo ya que los tres puntos son distintos. Por tanto la solución del sistema existe y es única.

Si $x_1 < x_2 < x_3$ tenemos que podemos sustituir la función f(x) en $[x_1, x_3]$ por p(x), coincidiendo ambas en los tres puntos.

2.4. Interpolación General.

Si la tabla de valores de la función a interpolar tiene n + 1 puntos, (x_o, y_o) $(x_1\ y_1)$…… $(x_n\ y_n)$, el polinomio resultante de la interpoblación será, como máximo, de grado n.

Sea $p(x)=\sum_{i=0}^{n} a_i x^i$ el polinomio interpolador. Los coeficientes $(a_i)_{0\le i\le n}$ son los valores que queremos encontrar. Para ello obligamos al polinomio a pasar por los (n + 1) puntos, obteniendo un sistema de n + 1 ecuaciones con n + 1 incógnitas.

$$\left.\begin{array}{c} a_o + a_1 x_o + a_2 x_o^2 + ...+ a_n x_o^n = y_o \\ a_o + a_1 x_1 + a_2 x_1^2 + ...+ a_n x_1^n = y_1 \\ .... \\ a_o + a_1 x_1 + a_2 x_n^2 + ...+ a_n x_n^n = y_n \end{array}\right\}$$

El determinante de la matriz de coeficientes es el determinante de Vandermonde.

$$\begin{vmatrix} 1 & x_o & x_o^2 & \cdots & x_o^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^n \end{vmatrix} = (x_1 - x_o)(x_2 - x_o)(x_2 - x_1)(x_3 - x_o)........(x_n - x_{n-1})$$

y sabemos que es no nulo si $x_i \neq x_j$ para $i \neq j$.

Aplicando la regla de Cramer, calculamos el valor de los n + 1 coeficientes, obteniendo así la expresión del polinomio interpolar.

Veamos ahora otros métodos que nos van a permitir calcular el polinomio de interpolación del grado n de una forma más rápida y sencilla.

2.4.1. Fórmula de Lagrange.

Se trata de conseguir un polinomio de grado n que se anule en los (n + 1) puntos $(x_o,\ y_o)$, $(x_1,\ y_1)$,….., $(x_n,\ y_n)$. Para ello vamos a construir n + 1 polinomios, donde el polinomio $P_K(x)$ tome el valor $P_K(x_K) = y_K$ y se anule en los restantes n puntos, recorriendo K los valores {0,…., n}.

Definiremos $P(x)=\sum_{K=0}^{n} P_K(x)$ donde

$$P_o(x) = l_o(x - x_1)(x - x_2)\cdot.......\cdot(x - x_n) = l_o \prod_{\substack{j=0 \\ j\neq 0}}^{n}$$

$$P_1(x) = l_1(x-x_o)(x-x_2)\cdot ....\cdot(x-x_n) = l_1 \cdot \prod_{\substack{j=0\\ j\neq 0}}^{n}(x-x_j)$$

y en general

$$P_K(x) = l_K \prod_{\substack{j=0\\ j\neq 0}}^{n}(x-x_j)$$

Para calcular los coeficientes de los polinomios $P_K(x)$ $K\in\{0,\ldots, n\}$ apliquemos las condiciones que conocemos

$$\forall K \in \{0,...,n\} \quad P_K(x_K) = y_K \Rightarrow l_K \prod_{\substack{j=0\\ j\neq K}}^{n}(x_K - x_j) = y_K$$

Luego $\displaystyle l_K = \frac{y_K}{\prod_{\substack{j=0\\ j\neq o}}^{n}(x_K - x_j)} \qquad \forall K \in \{0,....,n\}$

Si sustituimos en P(x) tenemos

$$P(x) = \sum_{K=0}^{n} P_K(x) = \sum_{K=0}^{n}\left(l_K \prod_{\substack{j=0\\ j\neq K}}^{n}(x-x_j)\right) = \sum_{K=0}^{n}\left(y_K \prod_{\substack{j=0\\ j\neq 0}}^{n}\frac{(x-x_j)}{(x_K - x_j)}\right) =$$

$$= y_o \frac{(x-x_1)(x-x_2)......(x-x_n)}{(x_o-x_1)(x_o-x_2).......(x-x_n)} + y_1 \frac{(x-x_o)(x-x_2)......(x-x_n)}{(x_1-x_o)(x_1-x_2)......(x-x_n)} +$$

$$+ ....+ y_n \frac{(x-x_o)(x-x_1).......(x-x_{n-1})}{(x_n-x_o)(x_n-x_1)........(x_n-x_{n-1})}$$

Es fácil ver que $P(x_K) = 0$ $\forall K\in\{0,\ldots, n\}$, siendo P(x) el único polinomio de grado n que pasa por los (n + 1) puntos dados.

DEF Los cocientes $\displaystyle\prod_{\substack{j=0\\ j\neq 0}}^{n}\frac{(x-x_j)}{(x_K-x_j)}$ reciben el nombre de coeficientes de Lagrange.

OBS Si utilizamos la fórmula de Lagrange para hallar el polinomio de interpolación de grado 1 que pasa por dos puntos, obtenemos el mismo resultado que en 22.

Análogamente, al aplicar la fórmula de Lagrange para hallar el polinomio de interpolación de grado 2 que pasa por tres puntos, se obtiene el resultado de 2.3.

Ellos es debido a que el polinomio es único.

Este procedimiento de obtención del polinomio de grado n que pasa por (n + 1) puntos presenta dos inconvenientes:

1) El polinomio no se presenta ordenado según potencias de x.

2) Si después de obtener P(x), añadimos un nuevo punto, para calcular el nuevo polinomio no nos sirve nada del trabajo anterior, siendo necesario rehacer todas las cuentas.

DEF Se define el resto de la interpolación como la función

$$R_n(x) = f(x) - P(x)$$

siendo P(x) el polinomio de interpolación de f(x) de grado n.

Si sustituimos P(x) por su expresión mediante la fórmula de Lagrange tenemos:

$$R_n(x) = f(x) - \sum_{K=0}^{n} y_K \cdot \left(\prod_{\substack{j=0 \\ j\neq 0}}^{n} \frac{(x - x_j)}{(x_K - x_j)} \right)$$

DEF La magnitud del error cometido viene definido por $|R_n(x)|$ y que sabemos que es cero cuando $x = x_K$ $\forall K \in \{0,\ldots, n\}$.

Podemos fácilmente comprobar, que tal y como esta definido el resto, depende de las propiedades de al función f(x) (la cual generalmente desconoceremos) así como de los nodos de interpolación x_K con $K \in \{1,\ldots, n\}$. Es por ello que se han construido diferentes formas de representar el error. Veamos ahora la que podemos considerar mas importante.

Si $f \in C^{(n+1)}([a, b])$ entonces $\exists \xi \in (a, b)$ tal que

$$R_n(x) = \frac{w(x)}{(n+1)!} f^{\,n+1)}(\boldsymbol{x})$$

siendo $w(x) = (x - x_0)(x - x_1) \cdot \ldots \cdot (x - x_n)$

<u>Dem.</u>

Si $x = x_K$ con $K \in \{0,\ldots, n\}$ el teorema es cierto, ya que $R_n(x_K) = 0$ y

$$f(x_K) = P(x_K)$$

Supongamos pues que $x \neq x_K$

Definimos las funciones

$$g(x) = \frac{R_n(x)}{w(x)} \qquad \forall x \in [a,b] - \bigcup_{K=0}^{n} \{x_K\}$$

$$h(y) = R_n(y) - g(x) \cdot w(y) \qquad \forall y \in [a,b]$$

Entonces tenemos:

Si $y = x_K \Rightarrow h\left(x_K\right) = R_n\left(x_K\right) - g(x) \cdot w\left(x_K\right) = 0 \quad \forall K \in \{0, \ldots, n\}$

Si $y = x \neq x_K \Rightarrow h(x) = R_n(x) - g(x) \cdot w(x) = 0 \quad \forall K \in \{0, \ldots, n\}$

Por tanto, la función h(y) posee (n + 2) ceros en [a, b] (x, x_o,…., x_n), y aplicando el teorema de Rolle, h´(y) posee, al menos, (n + 1) ceros en (a, b), h´´ posee al menos n ceros en (a, b) y al final llegamos a que $h^{n+1)}$ posee al menos un cero en (a, b). Llamemos a ese cero ξ. Se verifica

$$h^{n+1)}(\xi) = 0$$

$$h^{n+1)}(\xi) = f^{\,n+1)}(\xi) - g(x) \cdot (n+1)!$$

Y entonces

$$g(x) = \frac{1}{(n+1)!} f^{\,n+1)}(\xi)$$

Y como $g(x) = \dfrac{R_n(x)}{w(x)}$ nos queda

$$R_n(x) = g(x) w(x) = \frac{w(x)}{(n+1)!} f^{\,n+1)}(\xi) \qquad \text{c.qd.}$$

La expresión que hemos obtenido para el error de interpolación es poco práctica, ya que , si habitualmente de f(x) sólo vamos a conocer un conjunto de puntos, no podemos estar en condiciones de saber si es de clase (n + 1), y menos todavía saber el valor de ξ. En caso de conocer, al menos, si la derivada del orden (n + 1) está acotada, podríamos dar una cota superior para el error, $R_n(x)$.

2.4.2. Fórmula de Newton.

El objetivo que tenemos sigue siendo el mismo: conseguir un polinomio de grado n que pase por (n + 1) puntos de la función f(x), la cual puede ser desconocida.

Sean los (n + 1) puntos de f(x)

$(x_o, y_o), (x_1, y_1), \ldots, (x_n, y_n)$

El polinomio de interpolación de Newton es

$$P(x) = A_o + A_1(x - x_o) + A_2(x - x_o)(x - x_1) + \ldots.. + A_n(x - x_o)(x - x_1)\ldots...(x - x_{n-1})$$

y a partir de las condiciones

$P(x_K) = y_K \qquad \forall K \in \{0,\ldots, n\}$

Hemos de hallar los coeficientes A_K.

Para ello, sustituimos en el polinomio las condiciones:

$P(x_o) = y_o \Rightarrow P(x_o) = A_o \qquad$ Luego $A_o = y_o$

$P(x_1) = y_1 \Rightarrow P(x_1) = A_o + A_1(x_1 + x_o) \Rightarrow y_o + A(x_1 - x_o) = y_1 \Rightarrow$

$$A_1 = \frac{y_1 - y_o}{x_1 - x_o}$$

$P(x_2) = y_2 \Rightarrow P(x_2) = A_o + A_1\,(x_1 - x_o) + A_2\,(x_2 - x_o)(x_2 - x_1) =$

$$= y_o + \frac{y_1 - y_o}{x_1 - x_o}(x_2 - x_o) + A_2(x_2 - x_o)(x_2 - x_1)$$

$$y_2 - y_o = \frac{y_1 - y_o}{x_1 - x_o}(x_2 - x_o) + A_2(x_2 - x_o)(x_2 - x_1)$$

$$A_2 = \frac{(y_2 - y_o)(x_1 - x_o) - (y_1 - y_o)(x_2 - x_o)}{(x_1 - x_o)(x_2 - x_o)(x_2 - x_1)}$$

y así sucesivamente obtendríamos el valor de todos los coeficientes A_K.

Otra forma de hallar los coeficientes sería la siguiente:

Escribimos el polinomio de interpolación como:

$$P(x) = A_o + (x - x_o)[A_1 + A_2(x - x_1) + \ldots.. + A_n(x - x_1)\ldots..(x - x_{n-1})] = A_o + (x - x_o)P_1(x)$$

Entonces $\quad P(x_o) = A_o \Rightarrow y_o = A_o$

Y $\quad P_1(x) = \dfrac{P(x) - P(x_o)}{x - x_o}$

El polinomio $P_1(x)$ no sabemos cual es, ya que los coeficientes $A_1,\ldots.., A_n$ no los conocemos, pero si sabemos su valor en los puntos $x_1,\ldots., x_n$

$$P_1(x_K)=\frac{P(x_K)-P(x_o)}{x_K-x_o}=\frac{y_K-y_o}{x_K-x_o}\qquad \forall k=1,\ldots,n$$

De la expresión

$$P(x)=A_o+(x-x_o)P_1(x)$$

resulta

$$P_1(x)=A_1+(x-x_1)[A_2+A_3(x-x_2)+\ldots+A_n(x-x_2)\ldots(x-x_{n-1})]=A_1+(x-x_1)P_2(x)$$

y $P_1(x_1)=A_1$

quedando $$P_2(x)=\frac{P_1(x)-P_1(x_1)}{x-x_1}$$

Reiterando el proceso obtenemos que

$$\begin{aligned}
A_o &= P(x)\\
A_1 &= P_1(x_1)\\
A_2 &= P_2(x_2)\\
&\vdots\\
A_n &= P_n(x_n)
\end{aligned}$$

que determina la expresión denominada Fórmula de Newton.

2.4.3. Interpolación Basada en diferencias.

Recordemos el problema que presentaba la fórmula de Lagrange: Al construir el polinomio de grado n que pasa por (n + 1) puntos de y = f(x) si su aproximación no es buena y añadimos un nuevo punto, hemos de rehacer todos los cálculos para obtener el polinomio de grado (n + 1), no sirviendo para nada el trabajo anterior.

Por ello es aconsejable conseguir una forma de obtención de P(x) tal que los cálculos previos no tengan que repetirse si añadimos nuevos puntos, si no que únicamente hayan de añadirse unos sumandos más.

Después de ver la obtención de los coeficientes en la fórmula de Newton, podemos afirmar que dicho polinomio verifica la condición anterior.

Vamos ahora a construir dicho polinomio por pasos, donde cada uno de ellos añadiremos un nuevo punto a los que tengamos.

- Construcción de P(x), que pasa por $(x_o, f(x_o))$ y $(x_1, f(x_1))$

$P_1(x) = f(x_o) + A_1 \cdot r_1(x)$ siendo A_1 una constante y $r_1(x)$ lineal, ya que $P_1(x)$ es lineal.

$$\left.\begin{array}{r} P_1(x_o) = f(x_o) + A_1 r_1(x_o) \\ P_1(x_o) = f(x_o) \end{array}\right\} \Rightarrow r_1(x_o) = 0 \Rightarrow r_1(x_o) = x_1 - x_o$$

Es claro que $A_1 \neq 0$ ya que en caso contrario $P_1(x)$ sería constante, lo que no es cierto.

$$\left.\begin{array}{r} P_1(x_1) = f(x_o) + A_1 r_1(x_1) \\ P_1(x_1) = f(x_1) \end{array}\right\} \Rightarrow f(x_1) = f(x_o) + A_1(x_1 - x_o) \Rightarrow A_1 = \frac{f(x_1) - f(x_o)}{x_1 - x_o}$$

Llamaremos a $A_1 = \dfrac{f(x_1) - f(x_o)}{x_1 - x_o} = D(f(x_o))$ diferencia de $f(x_o)$

Nada queda $P_1(x) = f(x_o) + Df(x_o) \cdot (x - x_o)$

- Añadimos el punto $(x_2, f(x_2))$

Ahora, al tener tres puntos, el polinomio ha de ser de 2º grado.

Entonces

$$\left.\begin{array}{r} P_2(x_o) = P_1(x_o) + A_2 r_2(x_o) \\ P_2(x_o) = f(x_o) \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\left.\begin{array}{r} f(x_o) = f(x_o) \grave{A}_2 r_2(x_o) \Rightarrow r_2(x_o) = 0 \\ f(x_1) = f(x_1) + A_2 r_2(x_1) \Rightarrow r_2(x_1) = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\left.\begin{array}{r} P_2(x_1) = P_1(x_1) + A_2 r_2(x_1) \\ P_2(x_1) = f(x_1) \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow r_2(x) = (x - x_o)(x - x_1)$$

$$\left.\begin{array}{r} P_2(x_2) = P_1(x_2) + A_2 r_2(x_2) \\ P_2(x_2) = f(x_2) \end{array}\right\} \Rightarrow A_2 = \frac{f(x_2) - P_1(x_2)}{(x_2 - x_o)(x_2 - x_1)} =$$

Llamaremos a la expresión obtenida para A_2 como $D^2 f(x_o)$.

- En general, al añadir el punto $(x_K, f(x_K)$ el nuevo polinomio $P_K(x)$ coincidirá con $P_{K-1}(x)$ para $x = x_j$ $j \in \{0, \ldots, K-1\}$

Dicho polinomio ha de satisfacer la relación de recurrencia

$P_K(x) = P_{K-1}(x) + A_K \cdot r_K(x)$ donde $A_K \neq 0$ y r_K (x) es de grado K.

Se debe verificar que

$$P_K(x_j) = f(x_j) = P_{K-1}(x_j) \qquad \forall j \in \{0,...,K-1\}$$

Por tanto $r_K(x) = \prod_{j=0}^{K-1}(x - x_j)$

$$\text{Y} \quad \left.\begin{array}{r} P_K(x_K) = P_{K-1}(x_K) + A_K \cdot \prod_{j=0}^{K-1}(x_K - x_j) \\ P_K(x_K) = f(x_K) \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A_K = \frac{f(x_K) - P_{K-1}(x_K)}{\prod_{j=0}^{K-1}(x_K - x_j)}$$

La expresión para A_K recibe el nombre de $D^K f(x_o)$.

Después de todo el proceso, obtenemos que la expresión para el polinomio de interpolación P(x) de grado n es:

$$P(x) = f(x_o) + (x - x_o)Df(x_o) + (x - x_o)D^2 f(x_o) + ... + (x - x_o) \cdot ...... \cdot (x - x_{n-1})D^n f(x_o)$$

El cálculo teórico realizado par la obtención de P(x) es bastante farragoso. Se puede simplificar considerablemente si elegimos los puntos equidistantes entre si, llamando h a esa distancia.

Entonces $x_j - x_{j-1} = h \quad \forall j : 1,....,n$

Y $x_j - x_o = j \cdot h \quad \forall j : 0,...,n$

Definimos una nueva notación como sigue:

$Af(x_o) = f(x_1) - f(x_o)$; $Af(x_1) = f(x_2) - f(x_1)$; y en general $Af(x_K) = f(x_{K+1}) - f(x_K)$

$$A^2 f(x_o) = f(x_2) - 2f(x_1) + f(x_o) = f(x_2) - f(x_1) - (f(x_1) - f(x_o)) = Af(x_1) - Af(x_o)$$

$$A^3 f(x_o) = f(x_3) - 3f(x_2) + 3f(x_1) - f(x_o) = A^2 f(x_1) - A^2 f(x_o)$$

Y en general

$$A^K f(x_o) = A^{K-1} f(x_1) - A^{K-1} f(x_o)$$

Esta notación recibe el nombre de diferencias de primer, segundo, tercer y K-ésimo orden, respectivamente.

Con esta nueva notación podemos expresar

$$D^K f(x_o) = \frac{A^K f(x_o)}{K!h^K}$$

La comprobación se haría por inducción.

Así, el polinomio de interpolación, obtenido mediante la fórmula de Newton usando esta notación, se escribe como

$$P(x) = f(x_o) + (x - x_o)\frac{Af(x_o)}{h} + (x - x_o)(x - x_1)\frac{A^2 f(x_o)}{2!h^2} + \ldots + (x - x_{n-1}) \cdot \ldots \cdot (x - x_{n-1})\frac{A^n f(x_o)}{n!h^n}$$

Podemos simplificar la expresión de P(x) mediante el siguiente cambio de variable:

$x - x_o = hz$

Entonces

$$x - x_K = (x - x_o) - (x_K - x_o) = hz - hz_K = h(z - z_K)$$

Y sustituyendo

$$P_n(z) = f(x_o) + (z - z_o)Af(x_o) + \frac{(z - z_o)(z - z_1)}{z!}A^2 f(x_o) + \ldots + \frac{(z - z_o)(z - z_1)\ldots\ldots(z - z_{n-1})}{n!}A^n f(x_o)$$

Que se suele escribir como:

$$P_n(z) = f(x_o) + \begin{pmatrix} z \\ 1 \end{pmatrix} Af(x_o) + \begin{pmatrix} z \\ z \end{pmatrix} A^2 f(x_o) + \ldots. + \begin{pmatrix} z \\ n \end{pmatrix} A^n f(x_o)$$

siendo $\begin{pmatrix} z \\ K \end{pmatrix} = \frac{(z - z_o)(z - z_1)\ldots\ldots.(z - z_{K-1})}{K!}$

2.4.4. Error del polinomio de Interpolación de Newton.

El polinomio de interpolación es único, se calcule de la forma que se calcule, por tanto, el error cometido es

$$R(x) = f(x) - P(x) = \frac{W(x)}{(n+1)!} f^{n+1)}(x) = \frac{(x - x_o)(x - x_1)\ldots\ldots(x - x_n)}{(n+1)!} f^{n+1)}(x)$$

Si lo expresamos en términos de la variable $z = \frac{x - x_o}{h}$

$$R(x) = f(x) - P(z) = \frac{h^{n+1}(z-z_o)(z-z_1)\ldots\ldots(z-z_n)}{(n+1)!} f^{n+1)}(x) = \begin{pmatrix} z \\ n+1 \end{pmatrix} h^{n+1} \cdot f^{n+1)}(x)$$

Luego el error puede expresarse como el primer término despreciado del polinomio.

2.4.5. Polinomios de Bernstein.

Dada una función continua f(x) en el intervalo [a, b]. ¿Puede ser aproximada mediante un polinomio P(x) con un grado de precisión previa fijado?. O lo que es lo mismo ¿sería posible encontrar un polinomio P(x) tal que la diferencia en valor absoluto entre f(x) y P(x) sea inferior, en todo lo puntos del intervalo [a, b], a cualquier número positivo ε previamente dado?. El teorema que vamos a enunciar nos da una respuesta afirmativa a la pregunta.

OBS El polinomio de interpolación de Lagrange no permite responder a la pregunta. En los puntos x_0, x_1, x_2,…, x_n los valores del polinomio coinciden con los de la función, pero en el resto de puntos, los valores pueden diferir notablemente.

TEOREMA. Teorema de Weierstrass.

Si la función f(x) es continua en el intervalo [a, b], entonces para todo ε > 0 existe un polinomio P(x) tal que en cada punto de este intervalo se verifica:

$$|f(x) - P(x)| < e$$

El matemático soviético S. N. Bernstein a proporcionado el siguiente método para la formulación directa de polinomios aproximadamente iguales a la función continua f(x) en el intervalo dado.

Supongamos que f(x) es continua en [0, 1].

Sea la expresión

$$B_n(x) = \sum_{m=0}^{n} f\left(\frac{m}{n}\right) \cdot C^m \cdot x^m \cdot (1-x)^{n-m}$$

donde $f\left(\frac{m}{n}\right)$ es el valor de la función dada en $x = \frac{m}{n}$

Y C^m son los coeficientes del binomio de Newton $C^m = \begin{pmatrix} n \\ m \end{pmatrix}$

Llamamos a $B_n(x)$ polinomio de Bernstein de grado n.

Para todo número arbitrariamente pequeño $\varepsilon > 0$, se puede buscar un polinomio de Bernstein (elegir su grado) de manera que para todos los valores $x \in [0, 1]$ se cumple:

$$\left|B_n(x) - f(x)\right| < e$$

Si en lugar de tener el intervalo [0, 1] basta realizar el cambio de variable $x = a + t \cdot (b - a)$

2.5. Interpolación Inversa.

El problema de interpolación inversa consiste en obtener, a partir del polinomio de interpolación, obtener el valor de la variable independiente a partir de un valor dado de la variable dependiente.

Aplicando el teorema de la función inversa, sabemos que $x = f^{-1}(y)$ existe y es única si $\dfrac{dy}{dx}$ existe y no se anula en un entorno del punto en el que deseamos obtener la interpolación inversa.

Bajo estas hipótesis, existe un mecanismo de interpolación llamado método de Aitken que se puede aplicar para obtener la solución, simplemente intercambiando x e y.

3. EXTRAPOLACIÓN DE DATOS.

Supongamos conocida la función f(x) para un conjunto finito y ordenado de puntos x_o, x_1, x_2,….., x_n. Si queremos estimar la función en un punto x tal que se verifica que

$$x \notin [x_o, x_n]$$

estamos ante un problema de extrapolación de datos.

La diferencia con la interpolación es que en esta última el valor x para el cual se quiere determinar el valor de la función f está incluido en el intervalo $[x_o, x_n]$ mientras que en la extrapolación el valor está fuera.

La problemática en cuanto al riesgo en la aproximación del valor y, por tanto, en su validez, es idéntico a la interpolación. Incluso en algunos casos se puede ver acentuado dicho riesgo.

Igualmente, todos los métodos vistos para obtener el polinomio de interpolación tienen su aplicación en la extrapolación de datos.

Bibliografía Recomendada.

Análisis Matemático I. Aut. J.A. Fernández Viña. Ed. Tecnos

Lecciones de Cálculo Infinitesimal I. Aut. R. Molina Legaz, M. Franco. Ed. Universidad de Murcia.

Principios de Análisis Matemático. Aut. W. Rudin. Ed. McGraw-Hill

Curso de Análisis Matemático I. Aut. E.L. Luna. Ed. Edunsa, 1991.

Calculus. Aut. M. Spivak. Ed. Reverté.

Análisis Matemático. Aut. M. de Guzmán, B. Rubio. Ed. Pirámide.

Calculus. Aut. Apostol. Ed. Reverté

Introducción al Análisis Matemático. Aut. J.M. Ortega. Ed. Labor