TEMAS DE MATEMÁTICAS
(Oposiciones de Secundaria)

TEMA 40

GEOMETRÍA DE LA CIRCUNFERENCIA.

TEMA 40

GEOMETRÍA DE LA CIRCUNFERENCIA.

1. GENERALIDADES.

El conjunto de los puntos del plano cuya distancia a un punto O de éste es igual a un segmento r, se llama circunferencia de centro O y radio r.

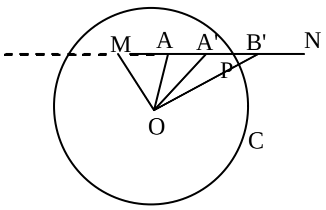
Si A es un punto de la circunferencia, el segmento OA es un radio. Cada segmento AA´, cuyos extremos pertenecen a la circunferencia, y que contiene O, es un diámetro.

El conjunto de los puntos cuya distancia a O es menor de r se llama círculo, y los puntos de éste, puntos interiores.

Aquellos puntos cuya distancia a O es mayor de r se llaman puntos exteriores.

1.1. Teorema fundamental.

Todo segmento cuyos extremos son uno interior y otro exterior a una circunferencia, tiene con ella un punto común y uno solo.



En efecto, clasifiquemos los puntos del segmento MN donde M es interior y N exterior en dos clases C_1 y C_2.

C_1 formada por los puntos interiores a C.

C_2 formada por los puntos no interiores a C.

a) Existen en el segmento MN puntos de ambas clases.

b) Todo punto del segmento MN es interior o no interior.

c) Todo punto de C_1 precede a todo punto de C_2 (propiedad de los oblicuos).

Por el axioma de continuidad (o de las cortaduras de Dedekiud), existe en MN un punto P y uno solo tal que todo punto que le precede es de C_1 y todo punto que se le sigue es de C_2, pero P pertenece a la circunferencia, pues en caso contrario si fuera interior, podríamos encontrar otro interior A´ que le sigue, y si fuera exterior podríamos encontrar otro exterior B' que le precede.

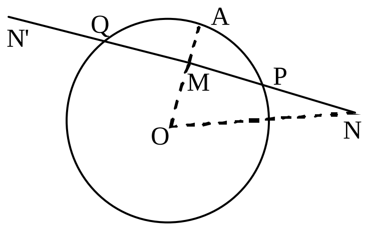
Así pues*: La circunferencia divide al plano en dos regiones (al igual que una recta divide al plano en dos semiplanos). La única diferencia es que en este caso una región es convexa, y la otra no.*

2. POSICIONES RELATIVAS DE UNA RECTA Y UNA CIRCUNFERENCIA.

2.1. Rectas secantes.

I - Proposición:

Si una recta tiene un punto interior a una circunferencia, tiene dos puntos comunes y solo dos, con ella.



Demostración:

Si la recta pasa por el centro, en cada semirrecta de origen O hay un punto y sólo uno cuya distancia de O es *r*, luego pertenece a la circunferencia.

Si la recta no pasa por O (origen), llevamos sobre cada semirrecta de origen M un segmento igual a *2r*, determinando N y N´, ambos exteriores, pues se tiene:

$$NO>MN-OM>2r-OM>r \quad y \quad N'O>r \quad \text{análogamente.}$$

Entonces por el teorema fundamental podemos determinar P y Q únicos sobre la circunferencia.

Definición:

Llamamos recta secante con una circunferencia a toda recta que tiene dos puntos comunes con ella. Si además pasa por el centro, la recta se llama diametral.

2.2. Rectas tangentes.

II- Proposición:

Si la distancia del centro de una circunferencia a una recta es igual al radio, la recta tiene un único punto común con la circunferencia, y los demás son exteriores.

Demostración:

Si H es el pie de la perpendicular a la recta se tiene OH=*r* luego H pertenece a la circunferencia. Cualquier otro punto P verifica OP>OH=*r*, y es exterior.

Definición:

Dicha recta se llama tangente a la circunferencia.

2.3. Rectas exteriores.

III- Proposición:

Si la distancia del centro de una circunferencia a una recta es mayor de r, la recta tiene todos sus puntos exteriores a la circunferencia.

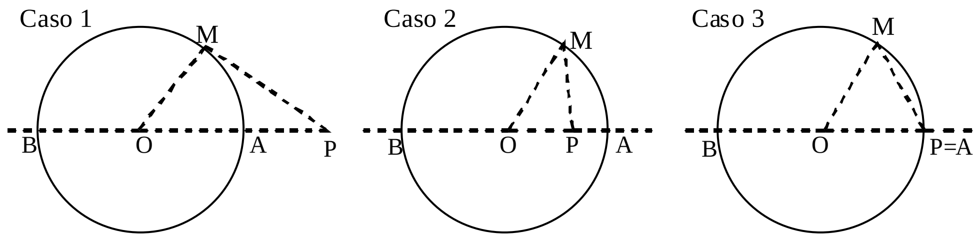
Demostración: Trivial.

Definición:

Toda recta que no tiene punto alguno común con la circunferencia se llama exterior.

3. DISTANCIA DE UN PUNTO A UNA CIRCUNFERENCIA.

Dado un punto P, la recta OP, donde O es el centro de una circunferencia, corta a ésta en dos puntos A y B.



Caso1.

Llamamos $\overline{OP} = d$ entonces

$$\left.\begin{array}{l}\overline{PA} = \overline{OP} - \overline{OA} = d - r \\ \overline{PB} = \overline{OP} + \overline{OA} = d + r\end{array}\right\}$$ y cualquier otro punto M verifica

$$\overline{PM} > \overline{OP} - \overline{OM} = d - r$$
$$\overline{PM} < \overline{OP} + \overline{OM} = d + r$$

Caso 2.

$$\left.\begin{array}{l}\overline{PA} = r - d \\ \overline{PB} = r + d\end{array}\right\}$$ y cualquier otro punto M de C verifica

$$\overline{PM} > \overline{OM} - \overline{OP} = r - d$$
$$\overline{PM} < \overline{OM} + \overline{OP} = r + d$$

Caso 3.

$$\left.\begin{array}{l}\overline{PA} = 0 \\ \overline{PB} = 2r\end{array}\right\}$$ cualquier otro punto M verifica $$\begin{array}{l}\overline{PM} > 0 \\ \overline{PM} < 2r\end{array}$$ (trivial)

Así pues, tiene sentido definir:

d(P,C) = min {d(P,M)} donde M recorre la circunferencia

= min $\{\overline{PA}, \overline{PB}\}$ donde PA es una recta diámetro(A,B puntos de la circunferencia)

Definición:

Llamamos cuerda a todo segmento que une dos puntos de una circunferencia. La mayor de las cuerdas es el diámetro.

4. POSICIONES RELATIVAS DE DOS CIRCUNFERENCIA.

Supongamos dos circunferencias C y C´ de centros O, O´ y radios r, r´ supongamos, de momento que r>r´ y sea OO´=d.

Se presentan los siguientes casos posibles:

4.1. Circunferencias exteriores.

$$d > r + r' > r - r'$$

En este primer caso, todos los puntos de C serán exteriores a C´ y recíprocamente. Las circunferencias son exteriores entre sí

4.2. Circunferencias tangentes exteriormente.

$$d = r + r' > r - r'$$

En este caso, las circunferencias no tendrán mas que un punto común en la recta de centros, siendo los demás puntos exteriores. Las circunferencias son tangentes exteriormente.

4.3. Circunferencias secantes.

$$r + r' > d > r - r'$$

En éste caso se tiene

$$\begin{matrix} d < r + r' \\ d > r - r' \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} d - r' < r \\ d + r' > r \end{matrix}$$

luego el punto de C´ más cercano a O es interior a C, y el punto de C´ mas alejado de O es exterior. Las circunferencias son secantes, se cortan en dos puntos.

4.4. Circunferencias tangentes interiormente.

$$r + r' > r - r' = d$$

En este caso $\qquad d = r - r' , \quad \Rightarrow \quad d + r' = r$

luego el punto de C´ mas alejado de O esta en C, y todos los demás son interiores. Las circunferencias son tangentes interiormente.

4.5. Circunferencias interiores.

$$r + r' > r - r' > d$$

En este caso: $\qquad r - r' > d \quad \Rightarrow \quad r' + d < r$

luego todos los puntos de C´ son interiores a C. La circunferencia C´ es interior a C.

En el caso que r=r´, el caso 4 se reduce a que la circunferencias coinciden y el caso 5 no tiene sentido.

5. ANGULOS EN LA CIRCUNFERENCIA.

5.1. Ángulo central. Arcos. Cuerdas.

Angulo central

Se llama ángulo central en una circunferencia al que tiene su vértice en el centro, es decir a cada uno de los ángulos determinados por dos semirrectas de origen O.

El conjunto de los puntos de la circunferencia situados en un ángulo central se llama arco abarcado por dicho ángulo, y el conjunto de puntos del circulo situados en un ángulo central se llama sector circular correspondiente a dicho ángulo.

Definición:

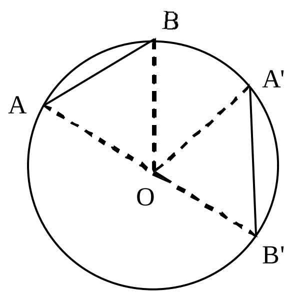
Dos ángulos (o dos sectores) de una misma circunferencia son equivalentes si sus ángulos centrales son iguales.

Puede establecerse una "suma" de arcos y un orden en los arcos pues para ello basta hacerlo con los ángulos centrales correspondientes.

Cada cuerda determina 2 arcos y se dice que la cuerda subtiende cada uno de estos arcos. Es claro que dado un arco solo hay una cuerda que lo subtiende.

Proposición.

En una misma circunferencia, entre dos arcos menores que una semicircunferencia, a menor arco corresponde menor cuerda y recíprocamente.

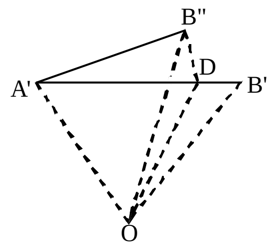


Demostración.

Supongamos:

Arco AB < Arco A´B´. entonces:

$$(\angle AOB) < (\angle A'OB').$$



Hagamos coincidir mediante un movimiento OA con OA' obteniendo un nuevo triángulo. OA'B" congruente con OAB.

La bisectriz del ángulo $\angle$B"OB' corta a A'B' en un punto D. Se tiene B"D=DB' pues B"OD=B'OD (al tener iguales 2 lados y el ángulo comprendido).

Entonces.

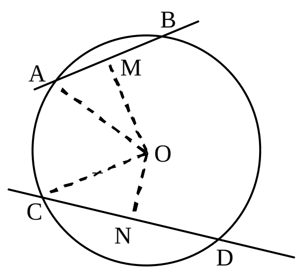
$$A'B' = A'B'' < A'D + DB'' = A'D + DB' = A'B'.$$

5.2. Diámetro perpendicular a una cuerda.

El diámetro perpendicular a una cuerda la corta en su punto medio e igualmente a los arcos que subtiende en dos arcos iguales (trivial).

En una circunferencia, las cuerdas iguales equidistan del centro y recíprocamente (trivial).

Si una cuerda es menor que otra, su distancia al centro es mayor pues los triángulos AOM y CON son rectángulos y tienen igual hipotenusa, luego si un cateto es menor que su correspondiente, el otro es mayor.



5.3. Angulos inscritos, semiinscritos y no inscritos.

Definición:

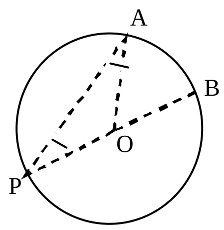
Se llama ángulo inscrito en una circunferencia a un ángulo cuyo vértice esta en ella y cuyos lados son secantes con la circunferencia.

Proposición:

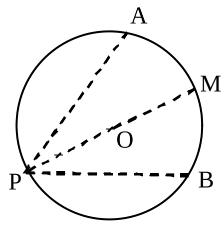
La medida de un ángulo inscrito es igual a la mitad del ángulo central que abarca el mismo arco.

Demostración: Pueden presentarse 3 casos.

1 El centro de la circunferencia está sobre un lado del ángulo. El ángulo AOB es exterior al triángulo POA, que es isósceles pues OP=OA, y vale la suma de los dos ángulos iguales de dicho triángulo.

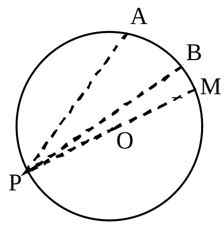


2 El centro de la circunferencia es interior al ángulo APB. Basta trazar el diámetro PM, y el ángulo APB se descompone en otros dos que son mitad respectivamente de los ángulos centrales que abarcan los arcos AM y MB.



3 Se traza el diámetro PM y el ángulo APB es diferencia de APM y BPM luego

$$\angle APB = \frac{\angle AOM}{2} - \frac{\angle BOM}{2} = \frac{\angle AOB}{2}$$



Definición:

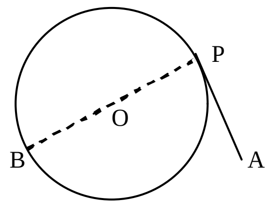
Se llama ángulo semiinscrito en una circunferencia a aquel que tiene su vértice sobre ella, y que tiene un lado secante.

Proposición:

Un ángulo semiinscrito tiene el mismo valor que cualquier inscrito que abarca el mismo arco.

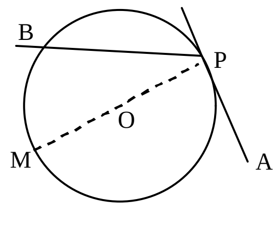
Demostración

Si el lado secante pasa por el centro, el ángulo abarca media circunferencia y es recta, como cualquiera de los inscritos que abarcan, dividen semicircunferencia.

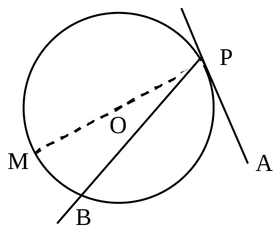


Si el centro O es interior al ángulo, el ángulo APB es suma de un recto y un ángulo inscrito de donde

$$APB = \frac{1}{2}(MOP + MOB).$$

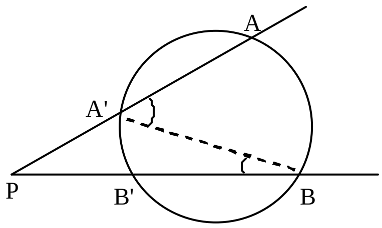


Si el centro O es exterior al ángulo, el ángulo APB es diferencia de un recto y un ángulo inscrito, de donde $APB = \frac{1}{2}(MOP - MOB)$



Definición:

Si el vértice del ángulo es interior o exterior a la circunferencia y sus lados cortan a la circunferencia, el ángulo se llama no inscrito.



Si el punto P es exterior y A´, B´ son los puntos de la circunferencia más cercanos a P situados en sus lados resulta.

$$\angle AA'B = \angle A'PB + \angle A'BP$$

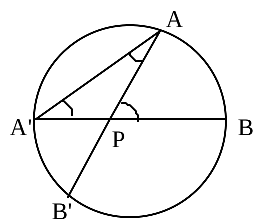
AA´B= Angulo inscrito que subtiende AB
A´BP= Angulo inscrito que subtiende A´B´

de donde APB= diferencia de los ángulos inscritos correspondientes a los dos arcos que abarcan sus lados.

Si el punto P es interior, entonces

$$\angle APB = \angle A'PB' = \angle AA'B + \angle A'AB' = \ldots$$

…= suma de los ángulos inscritos correspondientes a los dos arcos que abarcan sus lados.

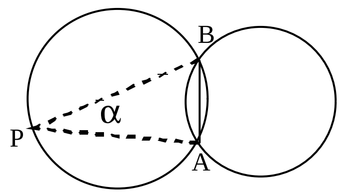


5.4. Arco capaz de un ángulo.

Definición:

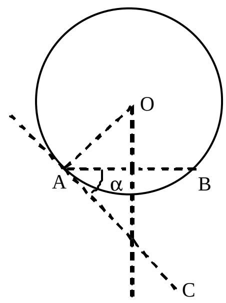
Dado un segmento AB y un ángulo α se llama arco capaz del ángulo α sobre el segmento AB al conjunto de puntos P del plano tal que APB=α (incluyendo A y B).

Todos los puntos P del lugar geométrico estarán sobre dos circunferencias de las que AB es una cuerda y APB es una ángulo inscrito o semiinscrito.



Construcción de una ángulo capaz:

Es fácil determinar los centros de las circunferencias sobre las que están los arcos capaces.



Basta construir el ángulo BAC=α, y trazar la perpendicular a la recta AC por A, que contendrá el centro. El punto de corte de dicha recta con la mediatriz de AB determina unívocamente O.

(En efecto la recta AC será tangente a una de las circunferencias buscada, y el ángulo semiinscrito BAC vale α)

Repitiendo la construcción desde B se determina el otro centro que será simétrico respecto AB.

Aplicaciones.

El arco capaz de un ángulo tiene muchas aplicaciones en problemas de construcciones geométricas e incluso en ramas tan dispares como navegación.

Problema de la carta o de Pothenot:

Desde un cierto punto P se determinan los ángulos APB=α y BPC=β. Podemos determinar el punto P mediante la intersección de los dos arcos capaces correspondientes.

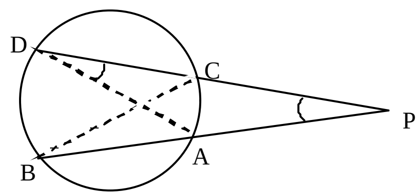
6. RELACIONES METRICAS EN LA CIRCUNFERENCIA.

Proposición:

Si por un punto P del plano se trazan secantes a una circunferencia, el producto de los segmentos determinantes por dicho punto y los de intersección de cada secante con la circunferencia, es constante.

Demostración:

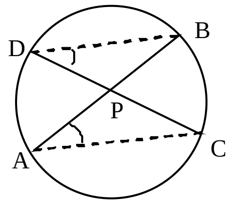
Caso1.



Los triángulos PAD y PBC tienen 2angulos iguales, luego son semejantes. Se tiene:

$$\frac{PA}{PC} = \frac{PD}{PB} \Rightarrow PA \cdot PB = PC \cdot PD = cte$$

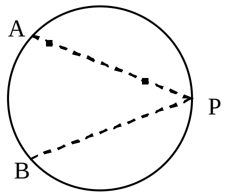
Caso2.



Los triángulos PDB y PAC son semejantes porque tienen 2 ángulos iguales. Luego:

$$\frac{PB}{PD}=\frac{PC}{PA}\Rightarrow PA\cdot PB=PC\cdot PD$$

Caso3.



Trivial porque uno de los dos segmentos es nulo en todos los casos.

6.1. Potencia de un punto respecto a una circunferencia.

Definición:

Dada una circunferencia C y un punto P del plano, se llama potencia de P respecto C al valor constante $PA\cdot PB$ donde A y B son los puntos de intersección de una secante que pasa por P con la circunferencia, y con signo positivo si P no separa A y B, y negativo en caso contrario.

Calculo de la potencia.

Caso1.

P exterior. Tracemos la recta PO, que corte a la circunferencia en A y B. Entonces

$$P=PA\cdot PB=(PO-OA)(PO+OA)=d^2-r^2$$

llamando PO=d como siempre la potencia será positiva.

Caso2.

P interior. $P=-(PA\cdot PB)=-(OA-OP)(OB+OP)=-(r^2-d^2)=d$

en este caso la potencia será negativa.

Caso3.

P en la circunferencia $\Rightarrow$ la potencia será 0.

Propiedad de la tangente.

Si P es exterior el segmento PM de tangente a la circunferencia trazado desde P es la raíz cuadrada de la potencia, y trivialmente también, dicho segmento es media proporcional de cualquier par de segmentos PA, PB donde A y B son intersección de una recta secante que pasa por P con la circunferencia.

6.2. Eje radical de dos circunferencias.

Definición:

Se llama eje radical de dos circunferencias al lugar geométrico de los puntos que tienen igual potencia respecto a dichas circunferencias.

Si P es un punto del lugar geométrico y O,O´ son centros de las circunferencias de radios r y r´ se verifica

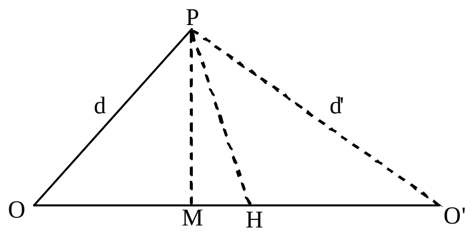
$$d^2 - r^2 = d'^2 - r'^2 \quad \begin{pmatrix} d = OP \\ d' = O'P \end{pmatrix}. \quad \Rightarrow \quad d^2 - d'^2 = r'^2 - r^2 = cte$$

Luego los puntos del lugar geométrico verifican $d^2 - d'^2 = cte$.

Proposición:

El eje radical de dos circunferencias es una recta perpendicular a la línea de centros.

Demostración:



Llamamos M a la proyección de P sobre OO´ y H al punto medio del segmento OO´. Se verifica en OPH y O´HP el teorema del coseno.

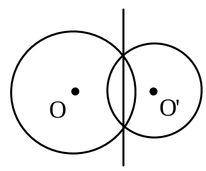
$$\left.\begin{array}{l} d^2 = OH^2 + PH^2 - 2OH \cdot MH \\ d'^2 = O'H^2 + PH^2 - 2O'H \cdot MH \end{array}\right\}$$

$$d^2 - d'^2 = -4 \cdot OH \cdot HM$$

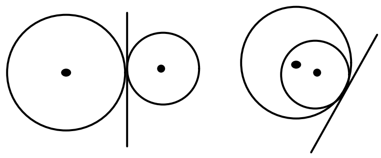
y siendo OH fijo, si $d^2 - d'^2 = cte$ debe ser el punto M fijo, luego P esta sobre una recta cuyos puntos se proyectan todos en M.

Determinación del eje radical.

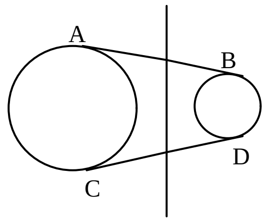
Si las circunferencias son secantes, los puntos de intersección de ambas tienen potencia O respecto a ambas, luego son del eje radical, que será la recta que pasa por dichos puntos.



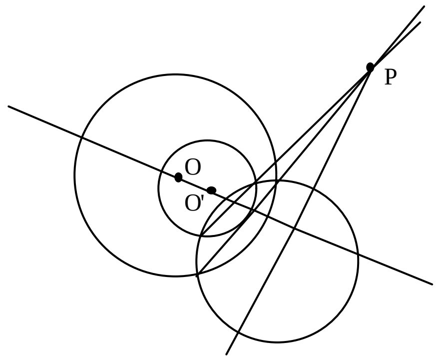
Si las circunferencia son tangentes interior o exteriormente, el eje radical será el tangente común.



Si las circunferencias son exteriores, los puntos medios de los segmentos de tangente AB y CD tienen igual potencia respecto a ambas circunferencias (propiedad de la tangente), luego el eje radical será la recta que los une.



En el caso que una sea interior a la otra basta trazar una circunferencia auxiliar secante con ambas (O,O´,O´´ no alineados) y determinar los ejes radicales de cada una de ellas, que se cortaran en un punto P. El eje radical es la recta perpendicular por P a la línea de centros.



6.3. Centro radical de tres circunferencias.

Dadas 3 circunferencias C, C´, C´´ se llama centro radical de las 3 circunferencias (si existe) al punto que tiene igual potencia respecto a las 3 circunferencias.

Obviamente, el centro radical no siempre existe, pero en caso de que exista, la construcción gráfica es trivial (mirar caso anterior). Para que exista basta que los centros de las circunferencias no estén alineados.

7. CIRCUNFERENCIAS ORTOGONALES.

Las circunferencias secantes se llaman ortogonales si las tangentes en los puntos de intersección son perpendiculares entre si.

Obviamente se cumple:

a) Los radios de una y otra circunferencia correspondientes a cada punto de intersección son perpendiculares entre sí.

b) Si d es la distancia entre los centros y r, r´ los radios. $d^2 = r^2 + r'^2$.

c) La potencia del centro de cada circunferencia, respecto otra es el cuadrado de su propio radio pues $d^2 - r^2 = r'^2$, $d^2 - r'^2 = r^2$.

(El concepto de circunferencia ortogonal se utiliza para la definición de polaridad, que por su extensión no es adecuado tratarla aquí).

Bibliografía Recomendada.

Elementos de Geometría Racional. Tomo 1. Rey Pastor, Puig Adam.

Curso de Geometría Métrica. Volumen 1. Puig Adam.