TEMAS DE MATEMÁTICAS
(Oposiciones de Secundaria)

TEMA 55

LA GEOMETRÍA FRACTAL. NOCIONES BÁSICAS.

TEMA 55

LA GEOMETRÍA FRACTAL. NOCIONES BÁSICAS.

1. INTRODUCCIÓN A LA GEOMETRÍA FRACTAL.

1.1. Una Geometría para las Formas Irregulares.

Hasta ahora la matemática y, más concretamente, la geometría ha explorado el mundo físico casi siempre simplificando la realidad compleja que él mismo encierra en sus leyes y en sus formas.

Las dos simplificaciones más habituales se refieren por una parte a la linealización de las leyes (aproximación lineal de una ley que no lo es) y por otra, la regularización de las formas geométricas (se suponen suaves o lisas tanto líneas como superficies que en rigor no lo son).

Muy recientemente se ha descubierto cómo procesos regidos por leyes estrictamente deterministas (p.e., la temperatura en un punto de la Tierra) dan lugar a futuros inciertos e impredecibles de los que lo único que podemos saber es que “vagan” casi aleatoriamente por regiones geométricas de estructura muy irregular. Son los llamados Procesos Caóticos de tipo determinista. Si a esto unimos los caprichos del azar, es decir, la existencia de procesos puramente aleatorios, el resultado es una naturaleza con formas muy irregulares y caprichosas.

Pero la Matemática, una vez más, no se ha dejado vencer y asustar por este nuevo reto y, aunque en primera instancia utiliza para éstos nombres catastrofistas (irracional, caos, etc.), del mismo modo que racionalizó por medio de Dedekind el concepto de número irracional, ahora pretende explorar y encontrar orden y regularidades en formas geométricas aparentemente caóticas. Podemos afirmar pues que acaba de nacer la Geometría Fractal.

El término fractal fue acuñado recientemente por Mandelbrot para designar ciertos objetos geométricos de estructura irregular que él constató por primera vez, y que estaban presentes en muchos comportamientos y formas de la naturaleza, aunque ya habían sido tratados desde finales del s. XIX desde el punto de vista matemático dentro de lo que se conoce como Teoría Geométrica de la Medida.

Ha sido, por una parte, el descubrimiento de Mandelbrot y, por otra, el descubrimiento del caos determinista, lo que ha provocado el enorme desarrollo y la importancia que en poco tiempo ha adquirido esta geometría.

Hay muchos procesos en la naturaleza que conducen a formas irregulares. Pero podemos destacar tres sumamente importantes, en los que habitualmente está el origen de la irregularidad. Pasamos a describirlos.

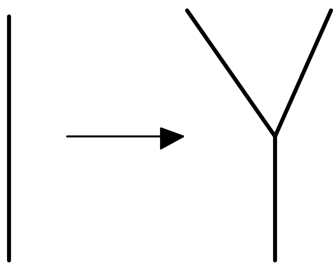
a) La Separación de Fronteras.

La frontera de separación de dos medios suele venir caracterizada por el hecho de que miradas a cualquier escala, se observan incursiones de un medio en el otro. Y cuando aumentamos el grado de resolución de la medida de la longitud o del área, éstas aumentan indefinidamente. Así pues, la modelización de estas fronteras, cuando esto se tiene en cuenta, ha de hacerse con un tipo especial de curvas (o superficies) con la curiosa propiedad de que la longitud (o el área) de las mismas es infinita, hechos que nunca ocurren con curvas o superficies suaves (diferenciables en todos los puntos).

Como ejemplos de uso de este tipo de modelización tenemos que es utilizada para el estudio de costas, accidentes geográficos, accidentes geológicos, superficies de fractura, superficies de separación de fluidos, etc.

b) Los Procesos de Ramificación.

Un proceso de ramificación se puede explicar esquemáticamente a partir de la figura siguiente:



Podemos ver que el segmento inicial se ve reemplazado, por ejemplo, por otros tres tales que la suma de sus longitudes resulta mayor que la del original. Es conocido que la naturaleza utiliza procesos similares en muchas ocasiones y a todas las escalas, resultando estructuras ramificadas de las que anteriormente la geometría clásica no se había ocupado.

Como ejemplos de este tipo de estructuras tenemos los polímeros ramificados, estructuras coralinas, etc.

c) La Formación de la Porosidad.

Si queremos modelizar fielmente la presencia de “islas” (poros) de todos los tamaños, de un medio en el seno de otro, esto ha de hacerse con objetos geométricos nuevos que, a todas las escalas, tengan “islas” que no pertenezcan a dicho objeto. Puede resultar así un sólido sin volumen, con otras propiedades que, en principio, choquen con la intuición.

Por ejemplo, puede pensarse en la geometría de una nube, una esponja ,etc.

El estudio de este nuevo tipo de objetos geométricos tiene aspectos y enfoques totalmente nuevos y diferenciados respecto a la geometría tradicional, que hacen de la geometría fractal una nueva geometría.

1.2. Geometría Fractal versus Geometría Diferenciable.

La característica más peculiar de la geometría fractal consiste en abordar el estudio de formas geométricas no diferenciables o quebradas, a cualquier escala que se miren. Este hecho, tal vez, queda oculto por la forma en que usualmente se contrapone geometría fractal a geometría euclídea, cuando sería mucho más preciso establecer la división entre geometría fractal y geometría diferenciable.

La geometría diferenciable estudia las formas geométricas que miradas en "pequeño" son lisas. En el caso de una curva, por ejemplo, no diferenciabilidad significa que, localmente, se comporta como una recta y, aunque las formas que estudia la geometría euclídea pueden ser diferenciables, la clasificación geometría euclídea/no euclídea no coincide con la clasificación geometría diferenciable/no diferenciable.

Cuando se estudia un fenómeno real, el mismo contexto establece habitualmente el alcance del término "en pequeño". El objeto estudiado tendrá medidas de determinada magnitud, y los intrumentos de medición o nuestro propio interés limitarán los mínimos relevantes de dichas medidas.

El modelo diferenciable es válido siempre que al estudiar muestro objeto con cierto grado de aproximación mayor que ese mínimo, su comportamiento local a una escala de tal orden sea liso. Debido a que observador dotado de una visión normal no puede apreciar las rugosidades en la superficie lunar, también estará dispuesto a admitir que una esfera es un modelo geométrico adecuado para ella. Sin embargo, un selenita que habitase en un cráter de la Luna podría oponer serias objeciones a tal comparación. Por tanto, la utilidad de cualquier modelo está en relación directa con la oscilación entre los valores mínimo y máximo considerados en las magnitudes que se estudian.

La evidencia experimental indica que la regularidad aceptada por la geometría diferenciable es excesivamente fuerte para poderse adaptar satisfactoriamente a la mayoría de las formas reales.

La geometría fractal ofrece un modelo alternativo que busca una regularidad en las relaciones entre un objeto y sus partes a diferentes escalas. Esta forma de regularidad no precisa el encorsetamiento del objeto en otras formas geométricas que, aunque elementales, no dejan de ser externas al mismo. Busca la lógica interna del propio objeto mediante relaciones intrínsecas entre sus elementos constitutivos cuando éstos se examinan a diferentes escalas. De esta forma no se pierden la perspectiva ni del objeto global ni del aspecto del mismo en cada escala de observación. La geometría fractal busca y estudia los aspectos geométricos que son invariantes con el cambio de escala.

Cuando se explora la lógica interna a que nos referíamos antes, puede construirse un modelo matemático del objeto expresable como el límite de un proceso geométrico iterativo que, con mayor o menor facilidad, se repite indefinidamente.

Dicho proceso iterativo, que resume la organización del objeto a sus diferentes escalas y lo caracteriza, puede provocar en cada iteración una ruptura (fractura) de la "suavidad" que conlleva la ausencia de diferenciabilidad del objeto límite. De esta forma, la geometría fractal, además de no perder la perspectiva del objeto en cada escala de observación, realiza el análisis local del objeto sin la necesidad de suavidad del mismo, hecho que requería la geometría diferencial para aplicar sus técnicas.

1.3. Geometría Fractal y Teoría Geométrica de la Medida.

Actualmente, lo que se entiende por geometría fractal es una parcela de las matemáticas cuyos límites reales no están todavía del todo claros. Históricamente, sus orígenes se remontan a finales del siglo XIX y principios del siglo XX, con la aparición en el campo de las matemáticas de conjuntos geométricos de propiedades aparentemente paradójicas.

En dichos conjuntos (curvas de Peano y Koch, conjunto de Cantor, etc.) parecía existir una discordancia entre su tamaño real y su configuración especial como conjunto de puntos (curvas con área o con longitud infinita entre dos de sus puntos, etc.)

Los ejemplos plantearon la necesidad de establecer una medida adecuada de su tamaño, por una parte, y por otra el estudio de su forma o propiedades geométricas. De esta forma, se inició una nueva parcela del análisis matemático denominada Teoría Geométrica de la Medida, que tuvo como punto de partida la definición del concepto de Dimensión de Hausdorff. Este concepto establecía da distinción del tamaño de los conjuntos paradójicos y sentó sus bases con los trabajos de Besicovitch, aproximadamente sobre 1920 a 1930. En ellos, con singular ingenio, estudió las propiedades geométricas de los conjuntos planos que él llamó *Irregulares*: eran el arquetipo de lo que hoy llamamos fractales, y sus trabajos fueron los cimientos de la geometría fractal.

A partir de entonces, matemáticos como Federer, Marstrand, Davies Falconer, etc, continúan el estudio de este tipo de conjuntos. En 1981, Hutchinson publica un trabajo donde desarrolla un concepto básico de la geometría fractal: el de conjunto autosemejante. En 1977, Mandelbrot, en su obra "La Geometría Fractal de la Naturaleza", además de acuñar el término fractal, definede una idea que se convertiría con el tiempo en la razón del crecimiento exponencial de las aplicaciones de ésta y de la actual popularización del término: las formas de la naturaleza son fractales y múltiples procesos de la misma se rigen por comportamientos fractales.

El último punto clave en el desarrollo de la geometría fractal ha sido el descubrimiento del Caos Determinista y el impacto del ordenador.

En sistemas dinámicos, el valor x_0 de un estado presente se va transformando con el tiempo, sometido a una ley fija F (función) y va tomando los valores sucesivos

$$x_0 \qquad x_1=F(x_0) \qquad x_2=F(x_1) \qquad \ldots\ldots \qquad x_n=F(x_{n-1}) \qquad \ldots\ldots$$

que, bajo ciertas condiciones, se van acercando a un conjunto ha llamado Atractor del sistema. A veces, puede suceder que dicho atractor tenga una estructura fractal (atractor extraño), hecho que suele ir unido a la circunstancia de que dos presentes próximos, x_0 y x'_0, pueden dar lugar a futuros que se acercan y se alejan con el tiempo de forma casi aleatoria, de los cuales, lo único que se sabe es que están, o se acercan con el tiempo, al atractor extraño. Se tiene así una situación que aun siendo determinista es, de hecho, impredecible: es el llamado caos determinista.

Por otra parte, la exploración de los futuros x_1, x_2, ..., x_n, ... mediante iteraciones de la función F, hoy en día es una tarea realizada por el ordenador, que ha supuesto una ayuda indispensable para aproximarse (sólo) a la geometría de esos atractores extraños.

2. ELEMENTOS GEOMÉTRICOS ESPECIALES.

A principios del siglo pasado, a la teoría de la medida le surgieron una serie de problemas derivados de la aparición de conjuntos con propiedades no concordantes con su estructura geométrica (topológica).

Con dichos conjuntos aparecían los primeros ejemplos de lo que llamamos fractales. Sus paradójicas y sorprendentes propiedades fueron uno de los sustos que la matemática, en toda su historia, ha padecido. Se llegaban a resultados capaces de violentar el sentido común y que obligaban a los matemáticos a prestar atención a los fundamentos de la misma.

En lo que se refiere al problema de evaluación del tamaño de los conjuntos geométricos, tales ejemplos ponen de manifiesto la insuficiencia de la medida de Lebesgue y levantan de nuevo, con más fuerza, los problemas de la teoría de la medida.

2.1. El Conjunto de Cantor.

Es un ejemplo clásico de conjunto no numerable con el mismo cardinal del continuo pero, a pesar de ello, con medida de Lebesgue unidimensional nula (longitud).

Se construye de la siguiente forma:

Partiendo del intervalo unidad E_0=[0,1], se divide dicho intervalo en tres partes iguales. Consideramos los dos intervalos cerrados de los extremos:

$$E_{11} = \left[0, \frac{1}{3}\right] \qquad E_{12} = \left[\frac{2}{3}, 1\right]$$

ambos de longitud $\frac{1}{3}$.

Cada uno de estos intervalos se divide a su vez en tres intervalos iguales, prescindiendo de los intervalos centrales. Tenemos, por tanto, cuatro nuevos intervalos:

$$E_{21} = \left[0, \frac{1}{9}\right] \qquad E_{22} = \left[\frac{2}{9}, \frac{1}{3}\right] \qquad E_{23} = \left[\frac{2}{3}, \frac{7}{9}\right] \qquad E_{24} = \left[\frac{8}{9}, 1\right]$$

siendo cada uno de longitud $\frac{1}{9}$.

Si continuamos indefinidamente este proceso, en el paso K-ésimo obtenemos 2^k intervalos cerrados:

$$E_{kj} \qquad j:1, 2, ..., 2^k$$

donde cada uno de ellos es de longitud 3^{-k}.

Para cada valor de k definimos:

$$E=\bigcup_{j=1}^{2^k} E_{kj}$$

Observemos que con los conjuntos E_k para k:1, 2, ... tenemos una sucesión decreciente, es decir

$$E_{k+1}\subset E_k \quad \forall k$$

DEF El conjunto límite de este proceso

$$C=\bigcap_{k=1}^{\infty} E_k$$

recibe el nombre de Conjunto Ternario de Cantor.

PROP El conjunto C de Cantor es no vacío y cerrado.

Dem.

En primer lugar, destaquemos que el conjunto de Cantor es No Vacío, pues en cada E_k están, por lo menos, los extremos de los 2^k intervalos cuya intersección buscamos.

Además, es Cerrado, por ser intersección de cerrados.

PROP El conjunto C de Cantor es No Numerable.

Dem.

Cada punto de C se representa de forma única mediante

$$a=\frac{a_1}{3}+\frac{a_2}{3^2}+\frac{a_3}{3^3}+\ldots+\frac{a_n}{3^n}+\ldots$$

donde a_i toma los valores 0 ó 2 $\forall i$.

Podemos, por tanto, escribirlo en base 3 de la forma:

$$a=0'a_1a_2a_3\ldots a_n\ldots$$

Recíprocamente, cada expresión de este tipo corresponde a un punto de C.

Supongamos que están todos en el siguiente cuadro (es decir, supongamos que es numerable):

$$a^1=0'a_1^1a_2^1a_3^1\ldots a_n^1\ldots$$
$$a^2=0'a_1^2a_2^2a_3^2\ldots a_n^2\ldots$$
$$a^3=0'a_1^3a_2^3a_3^3\ldots a_n^3\ldots$$

Entonces, formemos otro, de la forma

$$b = 0' b_1 b_2 b_3 ..b_n ...$$

con el criterio siguiente:

$$Si \quad a_n^n = 0 \quad \Rightarrow \quad b_n = 2$$
$$Si \quad a_n^n = 2 \quad \Rightarrow \quad b_n = 0$$

El número b construido de esta manera no está en el cuadro anterior, y sin embargo, es de C.

Luego C no es numerable.

PROP El conjunto C tiene medida de Lebesgue unidimensional nula.

<u>Dem.</u>

Para cualquier etapa k, la familia de intervalos $\{E_{kj}\}$ con j:1, 2, ..., 2^k es un recubrimiento de C formado por intervalos disjuntos.

Así tenemos:

$$L'(C) \le L'\left[\bigcup_{1}^{2^k} E_{kj}\right] = \sum_{j=1}^{2^k} L'\left(E_{kj}\right) = 2^k \cdot 3^{-k} = \left(\frac{2}{3}\right)^k$$

Puesto que la desigualdad es cierta $\forall$k y $\left(\frac{2}{3}\right)^k \to 0 \quad cuando \quad k \to \infty$, se obtiene

$$L'(C)=0$$

El conjunto de Cantor, además de las propiedades ya demostradas que le hacen contradictorio, tiene otras propiedades interesantes que dan idea de su estructura.

PROP El conjunto C no contiene intervalos, es Infinitamente Poroso.

<u>Dem.</u>

En primer lugar, cada punto viene determinado por la sucesión de intervalos $\{E_{kj}\}$ con j:1, 2, ..., 2^k, formado en cada etapa k por el intervalo E_{kj} $(1 \le j \le 2^k)$ que contiene al punto.

El diámetro de dichos intervalos tiende a cero. De esta forma, cualquier intervalo de la forma (a,b) que contenga al punto x, es tal que existe un intervalo E_{kj} de la sucesión $\{E_{kj}\}$ asociada al punto x tal que $E_{kj} \subset (a,b)$.

Ahora bien, los puntos del intervalo abierto central resultante de dividir E_{kj} en tres partes no son del conjunto C.

Por tanto, el conjunto C no contiene intervalos, lo cual significa que es Infinitamente Poroso.

PROP Todo punto de C es límite de una sucesión de puntos de C.

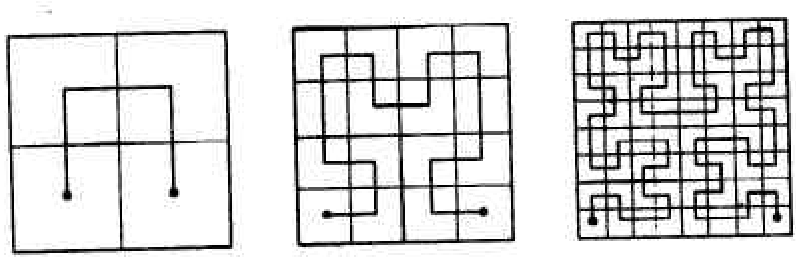
Dem.

Cada punto $x \in C$ es límite de la sucesión formada por los extremos de los intervalos E_{kj} de la sucesión $\{E_{kj}\}$ asociada a dicho punto.

2.2. Curvas de Peano y Hilbert.

En 1890, Peano construye una curva continua que pasa por todos los puntos del cuadrado unidad $[0,1]\text{x}[0,1]$. Era el primer ejemplo de una "curva que llena un espacio". Años más tarde Hilbert, interesado también por este tipo de problemas, construye otra del mismo tipo, con una construcción geométrica más simple de descubrir.

La curva de Hilbert se construye como sigue:

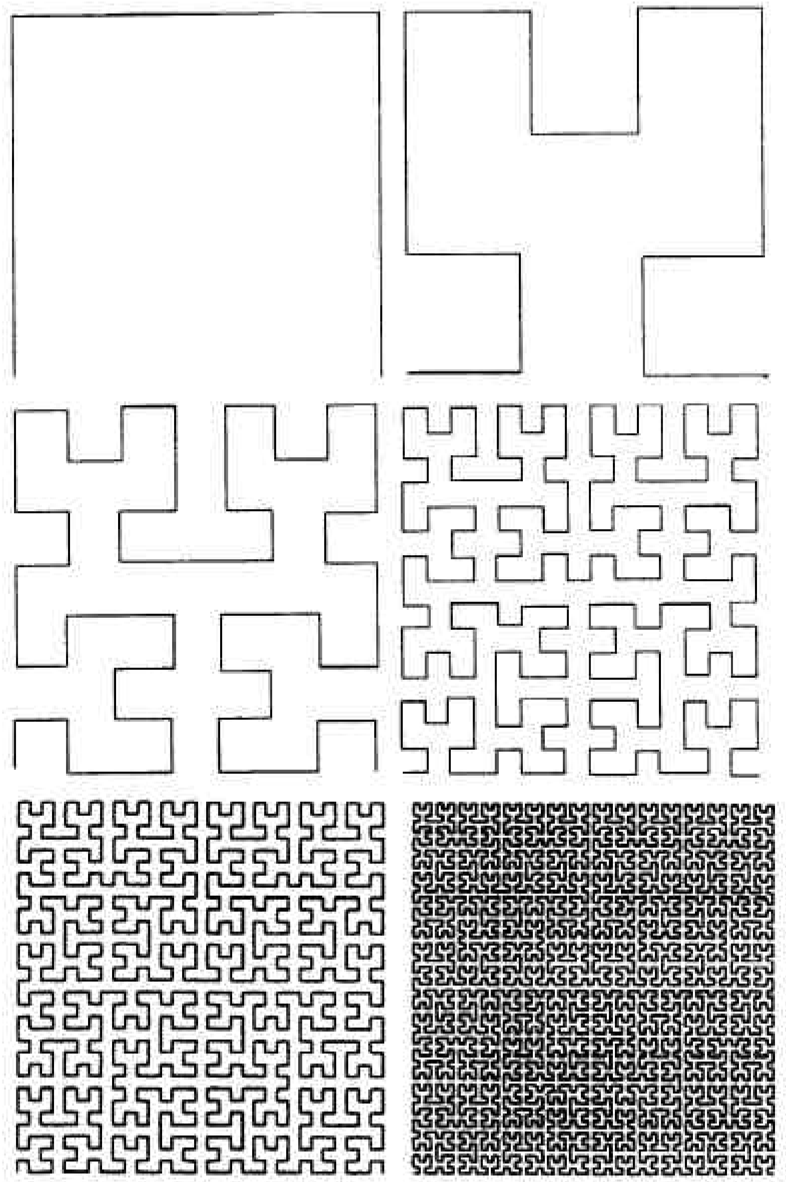


Dividimos el cuadrado unidad en cuatro cuadrados y unimos los centros de dichos cuadrados por segmentos, tal como se ve en la figura.

Cada uno de los nuevos cuadrados se divide nuevamente en otros cuatro cuadrados, y conectamos sus centros comenzando siempre por el cuadrado inferior izquierdo y terminando en el cuadrado inferior derecho.

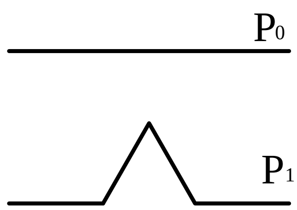
Se continúa así indefinidamente, uniendo los centros de los cuadrados que resultan en cada etapa. La curva límite de tales poligonales "llena" el cuadrado unidad.

En la figura siguiente tenemos las seis primeras iteraciones de este proceso infinito.



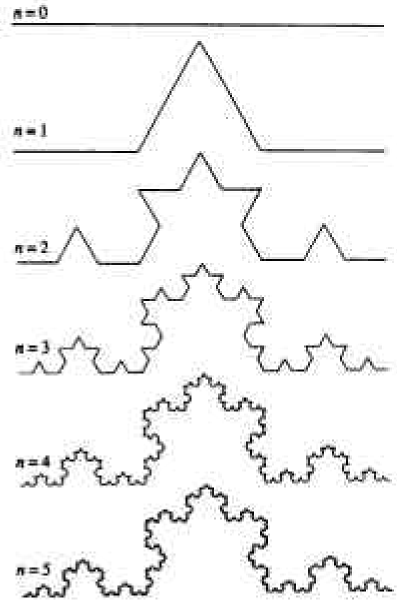
2.3. Curva de Koch.

En 1904, el matemático sueco Koch construye la curva que hoy lleva su nombre, de la forma siguiente: se parte del segmento unidad [0,1] y se divide en tres partes, sustituyendo la parte central por los dos segmentos que junto con dicha parte formarían un triángulo equilátero. Se obtiene así una poligonal P_1 de longitud $4/3$.



Cada uno de los cuatro segmentos que así quedan determinados vuelven a generar, mediante la misma operación, otra poligonal P_2, de longitud $16/9$.

Se procede indefinidamente de esta manera, obteniendo en cada etapa k una poligonal P_k de longitud $\left(\frac{4}{3}\right)^k$. En la figura siguiente aparecen 5 iteraciones de este proceso.



La curva de Koch se define como la curva límite a que converge la sucesión P_k cuando $k \to \infty$. Se trata, por tanto, de una curva de longitud infinita, ya que $\left(\frac{4}{3}\right)^k \to \infty$. Pero podemos decir más, la longitud de la parte de la curva comprendida entre dos puntos cualesquiera de la misma, también es infinita.

2.4. Funciones de Weierstrass.

Weierstrass dio otro ejemplo de una curva con comportamiento análogo a las anteriores, pero definida de forma analítica, es decir, como grafo de una cierta función.

La función de Weierstrass se define como:

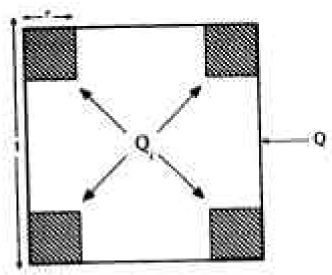
$$f(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda^{(s-2)i} \cdot \mathrm{sen}\left(\lambda^i x\right) \qquad con \quad 1 < s < 2 \quad y \quad \lambda < 1$$

Dicha función es continua pero no diferenciable en ningún punto.

3. LA DIMENSIÓN EN LA GEOMETRÍA FRACTAL.

3.1. Dimensiones Fraccionarias. Dimensión de Homotecía.

Vamos a construir un conjunto semejante al conjunto de Cantor, pero en este caso partiremos de un cuadrado cerrado (borde incluido) de lado 1, que llamaremos Q.



Tomemos en cada una de sus cuatro esquinas un cuadrado de lado r $\left(0 < r < \frac{1}{2}\right)$, de forma que los cuadrados no se solapen entre sí. Llamemos Q_i ($1 \le i \le 4$) a los cuatro cuadrados y sea $E_i = \bigcup_{i=1}^{4} Q_i$ el conjunto formado por la unión de ellos. Se repite ahora la construcción a escala sobre cada uno de los cuadrados Q_i, tomando en cada una de sus cuatro esquinas un cuadrado de lado r^2, a los que llamaremos Q_{ij} ($1 \le i,j \le 4$).

Obtenemos así una colección de 16 cuadrados de lado r^2, a cuya unión llamaremos E_2. Repitiendo este proceso, llegamos a la etapa n donde nos encontramos con 4^n cuadrados

$$Q_{i_1 i_2 \dots i_n} \quad 1 \le i_1, i_2, \dots, i_n \le 4$$

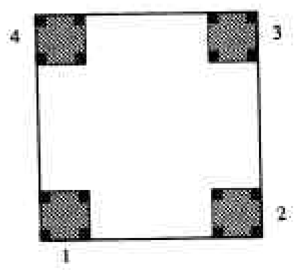
cuya unión es el conjunto E_n. Definimos entonces el conjunto E como intersección de todos los E_n.

$$E = \bigcap_{n=1}^{\infty} E_n$$

Una vez definido el conjunto E, lo que nos interesa saber es cuál será su dimensión.

Puesto que en cada una de las etapas, el conjunto E_n es unión de cuadrados, resulta tentador suponer que la dimensión de E es 2. Sin embargo, como E_n es unión de 4^n cuadrados disjuntos de lados r^n, la superficie de E_n es $4^n r^n$ y como se verifica que $r^n < \frac{1}{4}$, la superficie de E_n es tan pequeña como deseemos, con tal de tomar n suficientemente grande. Como E está incluido en E_n ($\forall n$) la superficie de E es nula, lo cual nos sugiere que descartemos el valor 2 para la dimensión de E.

Otra forma de ver la construcción de E es pensar en el primer paso, en el que quitamos al cuadrado Q el conjunto en forma de cruz complementario E_1 y nos quedamos con el resto, que es E_1. así continuamos en los sucesivos pasos del proceso. Razonando de esta manera, cabe pensar que para obtener E hemos vaciado el cuadrado inicial Q de forma tan exhaustiva que lo que resta no es una superficie. Pero entonces, ¿qué es lo que queda en E?



Para poder responder a la pregunta formulada, numeramos las cuatro esquinas de cada uno de los cuadrados de cada E_n con números del 1 al 4 según una regla fija (por ejemplo comenzando en la esquina inferior izquierda y siguiendo el movimiento contrario a las agujas del reloj).

Esta numeración permite asignar de forma biunívoca a cada sucesión finita de k números naturales i_1, i_2, ..., i_k comprendidos entre 1 y 4 uno de los cuadrados que componen E_k, el cual será el que se obtiene eligiendo primero el cuadrado que ocupe la esquina del cuadrado inicial Q, indicado por el número de la sucesión i_1, eligiendo después dentro de éste el cuadrado que ocupa la esquina indicada por i_2 y así sucesivamente.

Las sucesiones de números naturales comprendidos entre 1 y 4 son, de esta forma, una especie de escalera que permite “descender” a los interiores del conjunto cantoriano E.

De hecho, si consideramos sucesiones infinitas, en lugar de sucesiones finitas, con ayuda de ellas podremos llegar hasta los mismos puntos de E. Cada sucesión infinita va definiendo una sucesión de cuadrados, cada uno de ellos encerrado en el anterior y conteniendo al siguiente, y cuyos lados tienden a cero, de forma que la intersección de todos ellos define un único punto, según el principio de los intervalos encajados.

Es evidente que cada uno de los puntos así obtenidos está en el conjunto E pues lo está en cada E_n. Es fácil ver que cualquier punto de E se puede obtener de la misma forma, debido a que dicho punto debe pertenecer a algún cuadrado E_n en cada paso n, y el proceso de selección de cuadrados es precisamente el que nos lleva a la construcción de las escaleras infinitas.

Por otro lado, es claro que en el momento en que dos sucesiones difieren en un símbolo, los correspondientes puntos de E son diferentes, Es por ello que podemos afirmar que el conjunto E tendrá tantos puntos diferentes como sucesiones distintas se pueden formar con números comprendidos entre el 1 y el 4, siendo el número de éstas infinito y con potencia del continuo. Por tanto en E hay tantos puntos como en todo el cuadrado inicial Q. Es por ello que parece demasiado grande como para asignarle la dimensión 0.

Veamos ahora, por último, si la dimensión de E es 1. Ello sería posible si nos fijamos que la construcción de E se hace vaciando cada uno de los cuadrados que componen los conjuntos en toda su superficie, y nos fijamos en el perímetro de esos conjuntos y no en su superficie.

Podríamos concebir E como conjunto límite de las curvas formadas por los bordes de los cuadrados de los E_n. Sumando los perímetros de los 4^n cuadrados de lado r^n que componen E_n, obtenemos una longitud total para dichas curvas de:

$$P_n = 4^{n+1} r^n$$

- Si $r > \frac{1}{4}$ entonces $P_n \to \infty$ y E parece demasiado grande para considerarlo una curva.
- Si $r < \frac{1}{4}$ entonces $P_n \to 0$ y la dimensión de E parece intermedia entre 0 y 1.
- Si $r = \frac{1}{4}$ entonces $P_n = 4$ y sólo en este caso parece adecuado que la dimensión de E sea 1.

Así pues, si queremos que el proceso de medida dé como resultado un número finito, nos vemos abocados a prescindir del prejuicio de que las únicas dimensiones posibles son las enteras, lo que nos conduce a ensayar Dimensiones Fraccionarias.

Un procedimiento para asignar una dimensión fraccionaria a E consiste en considerar tal conjunto como límite de los conjuntos de E_n y asignarle, en consecuencia, una medida d-dimensional límite de las medidas d-dimensionales de los conjuntos E_n.

Si d=2 sabemos que la medida bidimensional que corresponde a E_n es $4^n r^{2n}$, o lo que es lo mismo, $4^n l_n^2$ donde $l_n=r^n$ es el lado de cada uno de los cuadrados que forman E_n.

Si d=1 habíamos estimado la medida unidimensional de E, que es $4 x 4^n l_n$. Es la longitud del perímetro de los cuadrados que lo determinan.

Por tanto, resultaría natural considerar la expresión $4^n x l_n^3$ como estimación de la medida tridimensional de E_n. Siguiendo el mismo razonamiento, podemos estimar la medida d-dimensional de E_n como

$$k{\cdot}4^n l_n^d$$

donde k es una constante que depende de la dimensión, pero que no varía, afectando sólo como factor de proporcionalidad en el límite, sin alterar el hecho de que éste pueda tomar los valores cero, finito o infinito, para una dimensión determinada.

Por el contrario, el parámetro que determina cual de estos resultados finales será el correcto es la dimensión d. Sabemos que salvo para $r=\frac{1}{4}$, las dimensiones enteras conducen siempre a límite 0 o infinito.

Vamos a tratar de ampliar las dimensiones fraccionarias para poder ajustar el valor de el parámetro d de tal forma que el límite de la expresión , la cual será nuestra estimación de la medida d-dimensional de E, no tome los valores 0 o infinito. Si podemos encontrar dicho valor de d, será la dimensión que asignaremos a E.

Basta tomar d de manera que:

$$l_n^d=\left(\frac{1}{4}\right)^n$$

ya que entonces

$$k{\cdot}4^n{\cdot}l_n^d=k \qquad \forall n$$

y éste será el valor que la expresión toma en el límite, y equivale a:

$$r^{nd}=\left(\frac{1}{4}\right)^n \qquad \text{pues } l_n=r^n$$

y por tanto

$$d = \frac{\log \frac{1}{4}}{\log r} = \frac{-\log 4}{\log r} = \frac{\log 4}{-\log r} = \frac{\log 4}{\log \frac{1}{r}}$$

Obtenemos que la dimensión es:

$$\dim E = \frac{\log 4}{\log \frac{1}{r}}$$

Podemos comprobar ahora mediante la expresión obtenida que:

- Si $\frac{1}{4} < r < \frac{1}{2} \Rightarrow 1 < \dim E < 2$
- Si $0 < r < \frac{1}{4} \Rightarrow 0 < \dim E < 1$
- Si $r = \frac{1}{4} \Rightarrow \dim E = 1$

Este procedimiento nos lleva a uno de los posibles conceptos de dimensión fraccionaria, y es la llamada dimensión de homotecia. Su aplicación exige que el conjunto en cuestión pueda ser descompuesto en copias de sí mismo a escala, propiedad muy específica de dichos conjuntos. Cuando las figuras no verifican la propiedad anterior no podemos aplicar la dimensión de homotecia, teniendo entonces que recurrir a la dimensión de Hausdorff.

3.2. Dimensión por Recuento de Cajas.

Aunque el concepto de dimensión con el que generalmente se trabaja en geometría fractal es el de dimensión de Hausdorff, existen otras definiciones de dimensión más fáciles de computar y coinciden con ella en los casos más interesantes.

Quizá el más extendido sea el de Dimensión por Recuento de Cajas. La idea central es encontrar un proceso de medida a cierta escala δ que ignore las irregularidades de tamaño menor y estudiar como varía dicha medida cuando $\delta \to 0$.

Supongamos una curva C no necesariamente rectificable (de la que no podemos calcular su longitud). Si reticulamos el plano con cuadrados de lado δ, podemos definir "δ-longitud de C" como la suma de las longitudes de los lados de los cuadrados del retículado que cortan a la curva C, y así, el número de éstos es $N_\delta(C)$ y la δ-longitud sería:

$$L_\delta(C) = N_\delta(C) \cdot \delta$$

Si la curva fuese rectificable, podríamos esperar que, cuando $\delta \to 0$, $L_\delta(C)$ tendiese a la longitud de dicha curva, pero si al ser mirada a cualquier escala siguiese mostrando irregularidades (es decir, una curva de "dimensión" mayor que 1) cuando hiciéramos tender $\delta \to 0$, el valor $L_\delta(C)$ tendería a infinito.

Definimos la dimensión de recuento por cajas de un determinado conjunto E como

$$\dim_B E = \lim_{\delta \to 0} \frac{\log N_\delta(E)}{-\log \delta}$$

donde $N_\delta(E)$ es el número de cubos de la δ-malla (en $\mathbb{R}^n$) que corta a E, siempre y cuando dicho límite exista.

Puede demostrarse que $N_\delta(E)$ se puede sustituir, entre otros, por los siguientes números:

- El menor número de cubos de lado δ que cubre E (no necesariamente pertenecientes a la δ-malla).
- El menor número de conjuntos de diámetro a lo sumo δ que cubre E.

Además, en los casos más importantes, el límite anterior suele existir, lo que permite simplificar su cálculo tomando:

$$\delta = \left(\frac{1}{2}\right)^k$$

Se tiene entonces

$$\dim_B E = \lim_{k \to 0} \frac{\log N_k(E)}{\log 2^k}$$

donde $N_k(E)$ es el número de cubos de la etapa k-ésima que cortan a E.

Como ejemplo de aplicación, si E fuese el conjunto de Cantor tenemos que:

$$\dim_B E = \frac{\log 2}{\log 3}$$

4. GEOMETRÍA FRACTAL EN LA NATURALEZA Y LAS CIENCIAS.

¿Qué significado preciso tiene decir que un objeto real, tal como una costa o la red capilar del sistema venoso, es un fractal? Lo que queremos decir con ello es que podemos definir un modelo matemático fractal que aproxime satisfactoriamente al objeto real en toda una franja de escalas limitada por ciertos valores máximo y mínimo que llamamos corte superior e inferior, según Mandelbrot.

Según lo expuesto en el párrafo anterior, en el mundo real no existen fractales, al igual que tampoco existen rectas ni esferas. Hablar de dimensión fractal de una costa no es más absurdo que hablar del radio de la Tierra.

4.1. Fronteras.

Las fronteras de separación entre diferentes medios físicos, biológicos o sociales proporcionan a menudo excelentes ejemplos de sistemas que se pueden analizar mediante fractales. Un ejemplo clásico es el de las costas, pero pueden ser los bordes de una nube, una superficie montañosa, la frontera entre dos paises, etc.

Los célebres Conjuntos de Julia son también fronteras (matemáticas) entre regiones del plano e igual sucede con el Conjunto de Mandelbrot.

La determinación histórica de una frontera es un proceso semejante a la formación de una curva fractal del tipo de la curva de Koch. Concretando, mediante simulación , la curva de Koch que simula la costa de Gran Bretaña tiene dimensión de Hausdorff igual a 1’26128, mientras que empíricamente, Richardson obtuvo el valor de 1’3.

4.2. Árboles.

Desde el punto de vista matemático, un árbol es un conjunto de puntos o vértices (que serían los nudos de ramificación de los árboles botánicos), unidos entre sí por arcos (ramas) de forma que si caminamos desde un vértice por una sucesión consecutiva de arcos diferentes, nunca regresaremos al vértice de partida.

Este modelo resulta aceptable de forma obvia y en primera aproximación para alguno de los objetos naturales. Una red fluvial es un modelo natural de curva característica de conjuntos fractales como la curva de Peano o de Hilbert

4.3. Movimiento Browniano.

En 1827, Brown descubrió como minúsculas partículas de polen en una suspensión acuosa realizaban una complicada danza compuesta de una sucesión de longitud y dirección aleatorias.

En 1905, Albert Einstein publicó un estudio del Movimiento Browniano basado en la teoría cinética de los gases, que posteriormente permitió a Prrin calcular el número de Avogadro.

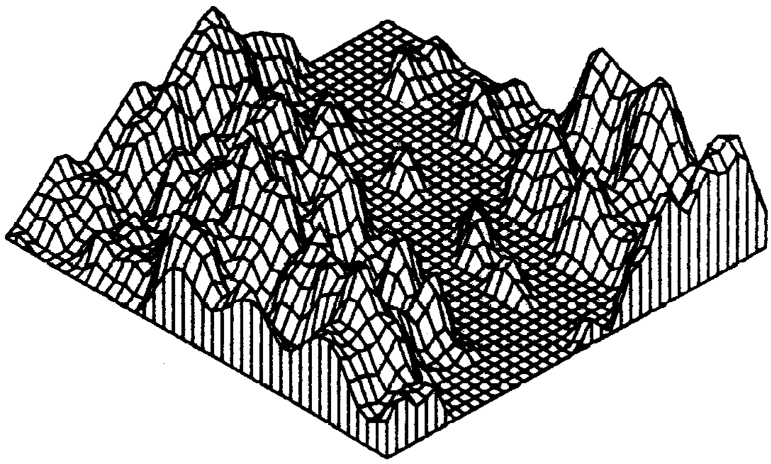
En 1923, Wiener construyó un modelo matemático de tipo aleatorio que describe el movimiento browniano con precisión satisfactoria. El modelo de Wiener refleja el comportamiento de variados fenómenos naturales en los que interviene el azar.

Un camino Browniano es continuo, pero sus cambios permanentes y bruscos de dirección causan, como en las curvas de Koch o de Hilbert, su no diferenciabilidad.

Sin embargo, las características de regularidad internas del movimiento browniano son de naturaleza esencialmente diferente a las que poseen las curvas anteriores. En este caso existe una regularidad de tipo estadístico que permite clarificar el movimiento browniano como un Fractal Aleatorio.

Utilizando gráficos de movimientos fractales brownianos definidos como funciones de dos varables, Mandelbrot y otros han conseguido paisajes fractales tan realistas que, al verlos, resulta difícil de imaginar que no son fotos tomadas de paisajes reales. En la figura siguiente aparece un esquema de paisaje fractal obtenido por ese procedimiento.

Si se corta el gráfico por cualquier plano vertical se obtiene el gráfico de un movimiento browniano fraccionario unidimensional.



BIBLIOGRAFÍA RECOMENDADA.

Estructuras Fractales y sus Aplicaciones. Aut. M. de Guzman y Otros. Ed. Labor.

Los Objetos Fractales. Aut. B. Mandelbrot. Ed. Busquets.