TEMAS DE MATEMÁTICAS
(Oposiciones de Secundaria)

TEMA 16

<u>DISCUSIÓN Y RESOLUCIÓN DE SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES. TEOREMA DE ROUCHE. REGLA DE CRAMER. MÉTODO DE GAUSS-JORDAN.</u>

TEMA 16

DISCUSIÓN Y RESOLUCIÓN DE SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES. TEOREMA DE ROUCHE. REGLA DE CRAMER. MÉTODO DE GAUSS-JORDAN.

1. INTRODUCCIÓN.

Por todos es conocida la importancia que tienen los sistemas de ecuaciones lineales en la resolución de problemas, tanto en la matemática pura como en la aplicada.

En este caso vamos a tratar de la resolución de sistemas de m ecuaciones lineales con n incógnitas cada uno y con coeficientes en un cuerpo K (que habitualmente será $\mathbb{R}$, pero puede ser $\mathbb{Q}$ o $\mathbb{C}$).

El teorema de Rouché-Fröbenius (también conocido bajo el nombre de Kronecker) nos da las condiciones necesarias y suficientes para la existencia de solución. La Regla de Cramer nos permite obtener dicha solución de forma explícita, aunque a costa de realizar un gran número de operaciones. Describiremos por tanto, diferentes métodos numéricos que nos permitirán de forma directa obtener la solución exacta.

La teoría de espacios vectoriales y de aplicaciones lineales nos va a permitir deducir resultados sobre el conjunto de las soluciones.

2. SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES.

2.1. Definición.

Un sistema de m ecuaciones lineales con n incógnitas y con coeficientes en un cuerpo K es un sistema de m ecuaciones de la forma.

$$\left.\begin{array}{c} a_{11}x_1+........+a_{1n}x_n=b_1 \\ .... \\ a_{m1}x_1+.......+a_{mn}x_n=b_m \end{array}\right\} \qquad (1)$$

donde $(a_{ij})\in K$, $b_i\in K$ $\quad 1 \le i \le m, \quad 1 \le j \le n$. Los a_{ij} reciben el nombre de coeficientes, los b_i de términos independientes y las x_j son las incógnitas.

DEF Dado el sistema de ecuaciones lineales (1), diremos que es homogéneo si $b_i = 0$ $1 \le i \le m$.

El sistema (1) se puede escribir de forma matricial como

$$\begin{pmatrix} a_{11}..........a_{1n} \\ .... \\ a_{m1}.........a_{mn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

o de forma más sencilla como

$$A \cdot X = B$$

DEF Diremos que

$$(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n) \in K^n$$

es una solución del sistema (1) si al sustituir cada incógnita x_i por α_i las ecuaciones se transforman en identidades. Al conjunto formado por todas las soluciones lo llamaremos solución del sistema.

2.2. Sistemas Equivalentes.

DEF Diremos que dos sistemas de ecuaciones lineales con el mismo número de incógnitas son Equivalentes si toda solución del primero lo es del segundo, y al revés. También serán equivalentes si ambos carecen de soluciones.

OBS En la definición de sistemas equivalentes, en ningún momento se alude a que deban mantener el mismo número de ecuaciones.

NOTACIÓN A partir de ahora escribiremos la ecuación de lugar i

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + ... + a_{in}x_n = b_i$$

como

$$e_i(x) = b_i$$

o, más sencillamente, por E_i

DEF Dado el sistema

$$\left.\begin{array}{l} e_1(x) = b_1 \\ e_2(x) = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ e_m(x) = b_m \end{array}\right. \qquad (2)$$

diremos que una ecuación ex = b es combinación lineal de las ecuaciones del sistema si existen números $\lambda_1, \lambda_2, \ldots., \lambda_m$ en el cuerpo K tales que se verifica

$$e(x) = \lambda_1 e_1(x) + ... + \lambda_m e_m(x) \quad \text{y} \quad b = \lambda_1 b_1 + ... + \lambda_m b_m$$

PROP Dado un sistema con m ecuaciones lineales $E_1, E_2, \ldots., E_m$ y n incógnitas, se pueden obtener sistemas equivalentes efectuando las siguientes operaciones elementales.

a) Permutar el orden de dos ecuaciones.

b) Sustituir una ecuación E_i por el resultado de multiplicar todos los elementos de la ecuación por un escalar $\lambda \in K$ no nulo.

c) Sustituir una ecuación E_i por el resultado de sumar a la ecuación el producto de un escalar arbitrario $\lambda \in K$ por otra ecuación. Ej (con $j \neq i$). Más generalmente, sustituir la ecuación E_i por $E_i + \sum_{j \neq i} \lambda_j E_j$. Ej para cualesquiera escalares $\lambda_j \in K$.

d) Añadir al (suprimir del) sistema de una ecuación que sea combinación lineal del resto.

<u>Dem.</u>

a) Al permutar el orden de dos ecuaciones obtenemos un nuevo sistema que tiene las mismas ecuaciones que el anterior, por tanto una solución para uno de ellos, también lo es para el otro.

b) Sea el sistema

$$\left.\begin{array}{l} E_1 \\ E_2 \\ \vdots \\ E_m \end{array}\right\}$$

con $E_i \equiv a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots\ldots + a_{in}x_n = b$

Sea $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in K^n$ solución del primer sistema. Entonces, por ser iguales, también es solución todas las ecuaciones del segundo sistema menos la del lugar i.

Comprobemos que para ésta también es solución:

$$\lambda a_{i1}\alpha_1 + \lambda a_{i2}\alpha_2 + \ldots\ldots + \lambda a_{in}\alpha_n = \lambda b_i$$

$$\lambda\left(a_{i1}\alpha_1 + \ldots\ldots + a_{in}\alpha_n\right) = \lambda b_i$$

Como $\lambda \neq 0$, $\exists \lambda^{-1} \in K$

$$a_{i1}\alpha_1 + \ldots\ldots + a_{in}\alpha_n = b_i$$

siendo la expresión cierta al ser $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ solución de E_i.

c) Dado el sistema

$$\left.\begin{array}{c} E_1 \\ E_2 \\ \vdots \\ E_m \end{array}\right\} \qquad (3)$$

sustituimos en el E_m por $E_m + \sum_{j=1}^{m-1} \lambda_j E_j$ (elegimos la última por comodidad)

$$\left.\begin{array}{c} E_1 \\ \vdots \\ E_{m-1} \\ E_m + \sum_{j=1}^{m-1} \lambda_j E_j \end{array}\right\} \qquad (4)$$

Ambos sistemas tienen las m – 1 primeras ecuaciones iguales, sólo la última es diferente, siendo

$$E_m + \sum_{j=1}^{m-1} \lambda_j E_j \equiv \lambda_1 e_1(x) + \lambda_2 e_2(x) + ... + \lambda_{m-1} e_{m-1}(x) + e_m(x) = \lambda_1 b_1 + \lambda_2 b_2 + ... + \lambda_{m-1} b_{m-1} + b_m$$

Veamos que ambos sistemas son equivalentes.

- Si $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in K^n$ es solución de (3), también lo es de (4).

Por ser α solución del primer sistema se verifica

$$E_i(\alpha) = b_i \qquad \forall i:1,\ldots, m$$

y también es cierto que $\lambda_i e_i(\alpha) = \lambda_i b_i$ $\quad \forall i:1,\ldots, m$ con $\lambda_i \in K$.

Sumando las m identidades obtenemos que

$$\lambda_1 e_1(\alpha) + \lambda_2 e_2(\alpha) + ... + \lambda_m e_m(\alpha) = \lambda_1 b_1 + ... + \lambda_m b_m$$

es cierto, y basta tomar $\lambda_m = 1$ (neutro de producto en K) para que esa expresión sea $E_m + \sum_{j=1}^{m-1} \lambda_j E_j$, la cual es cierta para $x = \alpha$. Como las m – 1 primeras de (4) coincidían con las de (3), también son ciertas y α es solución de (4).

- Si $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \in K^n$ es solución de (4), también lo es de (3).

Por ser α solución de (4) se verifica que

$$e_i(\alpha) = b_i \quad \forall i:1,....., m-1$$

$$\sum_{i=1}^{m-1} \lambda_i e_i(\alpha) + e_m(\alpha) = \sum_{i=1}^{m-1} \lambda_i b_i + b_m$$

Sólo hemos de comprobar que α es solución de la última ecuación de (3).

$$e_m(\alpha) = \left(\sum_{i=1}^{m-1} \lambda_i e_i(\alpha) + e_m(\alpha) = \sum_{i=1}^{m-1} \lambda_i b_i + b_m \right) = \left(\sum_{i=1}^{m-1} \lambda_i b_i + b_m \right) - b_1 - \ldots\ldots - b_{m-1} = b_m$$

Luego $e_m(\alpha) = b_m$ y la ecuación es cierta.

d) Dado el sistema (2), si añadimos una ecuación que sea combinación lineal del resto, obtenemos

$$\left.\begin{array}{c} e_1(x) = b_1 \\ e_2(x) = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ e_m(x) = b_m \\ \sum_{i=1}^{m} \lambda_i e_i(x) = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i b_i \end{array}\right\} \qquad (5)$$

Es claro que toda solución (5) es solución de (2) pues las ecuaciones del primer sistema son también ecuaciones del segundo.

Análogamente, una solución de (2) verifica las m primeras ecuaciones de (5), y también la última, como es fácil de comprobar, luego es solución de (5).

2.3. Tipos de sistemas.

Según el número de soluciones de un sistema de ecuaciones lineales, los podemos clasificar en:

DEF Diremos que un sistema es Compatible si tiene solución. Si es única será Compatible determinado y si es múltiple Compatible indeterminado. En el caso de no tener solución diremos que es incompatible.

$$Sistemas \begin{cases} Compatible \begin{cases} Determinados \\ \scriptstyle (Solución\ \ Unica) \\ Indeterminados \\ \scriptstyle (Solución\ \ Múltiple) \end{cases} \\ Incompatibles \quad (Sin\ solución) \end{cases}$$

2.4. Interpretación de un Sistema en Términos de una Aplicación Lineal.

A partir de ahora consideraremos que el cuerpo K es ℝ.

Dado un sistema de m ecuaciones con n incógnitas, expresado de forma matricial se escribe como

$$A \cdot X = B$$

Consideremos la única aplicación

$$F: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$$

que tiene como matriz asociada a A (por ejemplo, respecto de las bases canónicas).

La matriz columna X es un vector cualquiera $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ y la matriz columna B es un vector fijo $\vec{b} \in \mathbb{R}^m$.

Entonces el sistema se puede expresar como

$$f(\vec{x}) = \vec{b}$$

siendo la solución al sistema el conjunto $f^{-1}(\vec{b})$.

La expresión $f(\vec{x}) = \vec{o}$ corresponde al sistema homogéneo asociado a $f(\vec{x}) = \vec{b}$.

Las soluciones de un sistema homogéneo son los elementos de $f^{-1}(\vec{o})$ que por definición es, Kerf, el núcleo de la aplicación.

PROP El conjunto de soluciones de un sistema homogéneo forman un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^n$.

<u>Dem.</u>

Es debido a que Kerf tiene estructura de subespacio vectorial.

PROP El conjunto de soluciones de un sistema de ecuaciones lineales puede obtenerse sumando a una solución particular del sistema todas las soluciones del sistema homogéneo asociado.

<u>Dem.</u>

La suma de una solución particular $\alpha \in \mathbb{R}^n$ con una solución del sistema homogéneo asociado $\alpha_K \in \mathbb{R}^n$ es solución:

$$f(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{a}_K) = f(\boldsymbol{a}) + f(\boldsymbol{a}_K) = \vec{b} + \vec{o} = \vec{b}$$

Luego $\alpha + \alpha_K$ es solución del sistema.

- Toda solución del sistema puede descomponerse como suma de una solución particular $\alpha \in \mathbb{R}^n$ y una solución del sistema homogéneo asociado $\alpha_K \in \mathbb{R}^n$.

Sea $\beta \in \mathbb{R}^n$ solución del sistema $\Rightarrow$ $f(\beta) = \vec{b}$

Entonces

$$f(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}) = f(\boldsymbol{b}) - f(\boldsymbol{a}) = \vec{b} - \vec{b} = \vec{o}$$

Luego $\beta - \alpha \in \text{Ker} f$ y $\beta - \alpha = \alpha_K \in \text{Ker} f$

Y $\beta = \alpha + \alpha_K$ como queríamos probar.

Podemos ahora caracterizar los diferentes tipos de sistemas en términos de la aplicación lineal asociada.

- Si $\vec{b} \notin \text{Im}(f) \Rightarrow f^{-1}(\vec{b}) = \emptyset$ y el sistema es Incompatible.

- Si $\vec{b} \in \text{Im}(f) \Rightarrow \exists \boldsymbol{a}\ \mathbb{R}^n \,/\, f(\boldsymbol{a}) = \vec{b}$, dándose dos situaciones

  - Si $\text{Ker} f = \{\vec{o}\}$, la aplicación es inyectiva y la solución es única. Sistema Compatible determinado.

  - Si $\text{Ker} f \neq \{\vec{o}\}$, la solución no es única y el sistema es Compatible Indeterminado.

La matriz A asociada a la aplicación lineal f verifica

$$\text{Dim}\ (\text{Im}\ (f)) = \text{Rang}\ (A)$$

lo cual nos permite decir

$$\dim \text{Ker}\ (f) = \dim \mathbb{R}^n - \dim \text{Im}\ (f) = n - \text{Rang}\ (A)$$

y podemos caracterizar un sistema de ecuaciones compatible sólo con el número de incógnitas y el rango de la matriz de coeficientes.

OBS Un sistema homogéneo siempre es compatible ya que

$$\vec{O} \in \text{Im}(f)$$

3. TEOREMA DE ROUCHÉ-FRÖBENIUS

DEF Dado un sistema de ecuaciones lineales A · X = B, llamaremos matriz ampliada a la matriz que se obtiene de añadir la matriz columna B a la matriz A como (n + 1)- ésima columna. Se representa por (A/B).

$$(A/B) = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$$

TEOREMA. Teorema de Rouché-Fröbenius.

Sea A · X = B la representación matricial de un sistema de m ecuaciones lineales con n incógnitas.

AX = B es compatible $\Leftrightarrow$ rang (A) = rang (A/B).

Además, será compatible determinado si rang (A) = n e indeterminado en caso contrario.

<u>Dem.</u>

"$\Rightarrow$"

Supongamos que el sistema es compatible y sea $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^n$ una solución del mismo. Se tiene las siguientes identidades:

$$\left.\begin{array}{c} a_{11}\alpha_1 + a_{12}\alpha_2 + \ldots\ldots + a_{1n}\alpha_n = b_1 \\ a_{21}\alpha_1 + a_{22}\alpha_2 + \ldots\ldots + a_{2n}\alpha_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}\alpha_1 + a_{m2}\alpha_2 + \ldots\ldots + a_{mn}\alpha_n = b_m \end{array}\right\}$$

Si llamamos $\vec{a}_i = (a_{1i}, a_{2i}, \ldots\ldots, a_{mi})$ con $1 \le i \le m$ el sistema lo podemos escribir como

$$\alpha_1\vec{a}_1 + \alpha_2\vec{a}_2 + \ldots\ldots + \alpha_n\vec{a}_n = \vec{b}$$

lo cual nos indica que $\vec{b}$ es combinación lineal de $\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots\ldots, \vec{a}_n\}$ que son las columnas de A. Entonces

Rang (A) = rang (A/B)

Si el sistema es compatible determinado, la combinación lineal anterior es única y se deduce que $\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots\ldots, \vec{a}_n\}$ es un conjunto linealmente Independiente. Y de aquí podemos afirmar que

Rang (A) = n

"$\Leftarrow$"

Como por hipótesis

rang (A) = rang (A/B)

se da que $\vec{b}$ es combinación lineal de $\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots\ldots, \vec{a}_n\}$.

$$\exists\, \alpha_1, \alpha_2, \ldots\ldots, \alpha_n \in \mathbb{R} \,/\, \sum_{i=1}^{n} \alpha_i\vec{a}_i = \vec{b}$$

Entonces $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^n$ es solución del sistema

$$f(\boldsymbol{a}) = \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{a}_i a_i = \vec{b}$$

y el sistema es Compatible.

Si Rang (A) = n $\Rightarrow$ $\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots\ldots, \vec{a}_n\}$ es un conjunto Linealmente Independiente lo cual significa que la combinación lineal es única, siendo también la solución al sistema.

COROLARIO Sea AX = B un sistema de m ecuaciones lineales con n incógnitas. Se verifica

a) AX = B es Compatible Determinado $\Leftrightarrow$ rang (A) = rang (A/B) = n

b) AX = B es Compatible Indeterminado $\Leftrightarrow$ rang (A) = rang (A/B) < n

c) AX = B es Incompatible $\Leftrightarrow$ rang (A) $\neq$ rang (A/B)

Dem.

Inmediata sin más que tener en cuenta el teorema anterior.

OBS Si rang (A) = rang (A/B) = K con K < n tenemos que

$$\text{dim Kerf} = \dim \mathbb{R}^n - \text{dim Imf} = n - \text{Rang (A)} = n$$

y entonces las soluciones del sistema, al formar un subespacio de dimensión n – K, se expresa en función de n – K parámetros.

4. REGLA DE CRAMER.

DEF Diremos que un sistema con el mismo número de ecuaciones que de incógnitas es de Cramer si tiene solución única (si es compatible determinado).

PROP Un sistema con igual número de ecuaciones que de incógnitas es de Cramer si y solo si $|A| \neq 0$.

Dem.

Sea el sistema AX = B con A una matriz cuadrada de tamaño n. Entonces la matriz (A/B) es de orden n $\times$ (n + 1) siendo por tanto rang (A/B) $\leq$ n.

Sabemos que rang (A) = n $|A| \neq 0$

y aplicando el teorema de Rouche-Fröbenius obtenemos que el sistema es compatible determinado si y solo si $|A| \neq 0$.

Los sistemas de Cramer tienen una forma especial de resolverse, que es aplicando la llamada Regla de Cramer. Veamos en que consiste:

La condición $|A| \neq 0$ nos permite garantizar la existencia de A^{-1}. Por tanto, dado el sistema AX = B podemos despejar X como:

$AX = B \Rightarrow A^{-1} \cdot AX = A^{-1} B \Rightarrow X = A^{-1} \cdot B$

Siendo la solución única. Veamos ahora como desarrollar esa expresión para obtener el valor de cada incógnita.

Sabemos que

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\left(Adj(A)\right)^t$$

y podemos escribir la igualdad $X = A^{-1} \cdot B$ como:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{A_{11}}{|A|} & \frac{A_{21}}{|A|} & \cdots & \frac{A_{n1}}{|A|} \\ \frac{A_{12}}{|A|} & \frac{A_{22}}{|A|} & \cdots & \frac{A_{n2}}{|A|} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{A_{1n}}{|A|} & \frac{A_{2n}}{|A|} & \cdots & \frac{A_{nn}}{|A|} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \cdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

siendo cada A_{ij} el adjunto del elemento a_{ij} de la matriz A

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1(j-1)} & a_{1(j+1)} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2(j-1)} & a_{2(j+1)} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{(i-1)1} & a_{(i-1)2} & \cdots & a_{(i-1)(j-1)} & a_{(i-1)(j+1)} & \cdots & a_{(i+1)n} \\ a_{(i+1)1} & a_{(i+2)2} & \cdots & a_{(i+1)(j-1)} & a_{(i+1)(j+1)} & \cdots & a_{(i+1)n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{n(j-1)} & a_{n(j+1)} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

y detallando las operaciones necesarias para calcular cada incógnita

$$x_j = \frac{b_1 A_{1j} + b_2 A_{2j} + \ldots + b_n A_{nj}}{|A|} = \frac{\det\left(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots\ldots, \vec{a}_{j-1}, \vec{b}, \vec{a}_{j+1}, \ldots\ldots, \vec{a}_n\right)}{|A|}$$

OBS Si un sistema homogéneo es de Cramer, la única solución es la trivial.

La regla de Cramer también es aplicable a sistemas compatibles indeterminados, aunque para ello es necesario aplicarla a un sistema equivalente que verifique ser de Cramer.

Sea

$$\left.\begin{array}{c} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots\dots\dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots\dots\dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots\dots\dots + a_{mn}x_n = b_m \end{array}\right\}$$

un sistema compatible donde

$$rang(A) = rang(A/B) = K \le \{m, n\}$$

Supongamos, sin pérdida de generalidad, que

$$\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_K\}$$

es linealmente independiente (donde $\vec{a}_i \in \mathbb{R}^n$). Es lo mismo que afirmar

$$rang\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1K} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2K} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{K1} & a_{K2} & \cdots & a_{KK} \end{pmatrix} = K$$

Teniendo en cuenta que si en un sistema de ecuaciones se elimina una de ella que sea combinación lineal de las demás, el sistema que se obtiene es equivalente, podemos indicar que el sistema inicial es equivalente a

$$\left.\begin{array}{c} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots\dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{K1}x_1 + a_{K2}x_2 + \dots\dots + a_{Kn}x_n = b_K \end{array}\right\}$$

que se puede escribir como

$$\left.\begin{array}{c} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots\dots + a_{1K}x_K = b_1 - \sum_{j=K+1}^{n} a_{1j}x_j \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots\dots + a_{2K}x_K = b_2 - \sum_{j=K+1}^{n} a_{2j}x_j \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{K1}x_1 + a_{K2}x_2 + \dots\dots + a_{KK}x_K = b_K - \sum_{j=K+1}^{n} a_{Kj}x_j \end{array}\right\}$$

y llamando $c_i = b_i - \sum_{j=K+1}^{n} a_{ij} x_j$ nos queda

$$\left.\begin{array}{c} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1K}x_K = c_1 \\ a_{21}x_2 + a_{22}x_2 + ... + a_{2K}x_K = c_2 \\ .... \\ a_{K1}x_1 + a_{K2}x_2 + ... + a_{KK}x_K = c_K \end{array}\right\}$$

que es un sistema de Cramer, siendo los términos independientes funciones respecto de las incógnitas x_{K+1}, x_{K+2},….., x_n.

Aplicando la regla de Cramer tenemos

$$x_i = f_i(x_{K+1}, x_{K+2}, ..., x_n) \qquad 1 \le i \le K$$

y las soluciones del sistema inicial vienen dadas por

$$\left.\begin{array}{c} x_1 = f_1(l_{K+1}, l_{K+2}, ..., l_n) \\ .... \\ x_K = f_K(l_{K+1}, l_{K+2}, ..., l_n) \\ x_{K+1} = l_{K+1} \\ .... \\ x_n = l_n \end{array}\right\}$$

siendo λ_k,…., $\lambda_n \in \mathbb{R}$ parámetros.

5. MÉTODO DE GAUSS-JORDAN.

La regla de Cramer nos permite obtener la solución de cualquier sistema compatible, a cambio de realizar una gran cantidad de operaciones. Es por ello que su uso queda limitado a sistemas con pocas ecuaciones. Afinando un poco más, para obtener la solución de un sistema de n ecuaciones con n incógnitas, la regla de Cramer implica realizar (n + 1) · n! · n productos, (n + 1) · (n! – 1) sumas y n divisiones, lo cual es un total de $(n + 1)^2$ ·! – 1 operaciones.

Debido a la ineficacia del método de Cramer con sistemas de 5 o más ecuaciones, vamos a estudiar otras formas de resolver un sistema de ecuaciones lineales. Veremos el método de Gauss, y alguna de sus variantes, que nos dan la solución exacta gracias a una serie de operaciones elementales.

El método de Gauss transforma el sistema a resolver en otro equivalente, tal que su matriz de coeficientes sea triangular superior, siendo así fácilmente resoluble. El número de operaciones que hemos de realizar para resolver un sistema de n ecuaciones con n incógnitas es $\frac{2}{3}n^3 + \frac{3}{2}n^2 - \frac{7}{6}n$ que es muy inferior al Método de Cramer.

5.1. Método de Gauss.

El método de Gauss transforma un sistema

$$\left.\begin{array}{c} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + ...+ a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + ...+ a_{2n}x_n = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + ...+ a_{3n}x_n = b_3 \\ .... \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + ...+ a_{mn}x_n = b_m \end{array}\right\}$$

en otro equivalente con matriz de coeficiente triangular superior.

Partiendo del sistema de ecuaciones lineales anterior, veamos los pasos a seguir:

- Paso 1.

Se consiguen ceros en la primera columna por debajo de la diagonal principal (suponemos $a_{11} \neq 0$ reordenando el sistema si fuese necesario). Aplicando al sistema inicial las ecuaciones:

$$a'_{1j} = a_{1j} \qquad 1 \leq j \leq n$$

$$a'_{ij} = a_{ij} - a_{ij} - a_{1j} \cdot \frac{a_{i1}}{a_{11}} \qquad 2 \leq i \leq m \quad 1 \leq j \leq n$$

$$b' = b_1$$

$$b_i = b_i - b_1 \cdot \frac{a_{i1}}{a_{11}} \qquad 2 \leq i \leq m$$

obtenemos

$$\left.\begin{array}{c} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + ...+ a_{1n}x_n = b_1 \\ a'_{22}x_2 + a'_{23}x_3 + ...+ a'_{2n}x_n = b'_2 \\ a'_{32}x_2 + a'_{33}x_3 + ...+ a'_{3n}x_n = b'_3 \\ .... \\ a'_{m2}x_2 + a'_{m3}x_3 + ...+ a'_{mn}x_n = b'_m \end{array}\right\}$$

Resumiendo, las operaciones realizadas son

$$E'_1 = E_1 \quad y \quad E'_i = E_i - \frac{a_{i1}}{a_{11}}E_1 \quad 2 \leq i \leq m$$

• Paso 2.

Se consiguen ceros en la segunda columna por debajo de la diagonal principal (suponemos $a_{22} \neq 0$, reordenando el sistema si fuese necesario). Aplicamos al sistema obtenido en el paso 1 las ecuaciones:

$$a''_{ij} = a'_{ij} \qquad 1 \le i \le 2 \quad 1 \le j \le n$$

$$a''_{ij} = a'_{ij} - a'_{2j} \cdot \frac{a'_{i2}}{a'_{22}} \qquad 1 \le i \le m \quad 2 \le j \le n$$

$$b''_i = b'_i \qquad 1 \le i \le 2$$

$$b''_i = b'_i - b'_2 \cdot \frac{a'_{i2}}{a'_{22}} \qquad 3 \le i \le m$$

y obtenemos

$$\left.\begin{array}{c} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a'_{22}x_2 + a'_{23}x_3 + \ldots + a'_{2n}x_n = b'_2 \\ a''_{33}x_3 + \ldots + a''_{3n}x_n = b''_3 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a''_{m3}x_3 + \ldots + a''_{mn}x_n = b''_m \end{array}\right\}$$

Este sistema se ha obtenido aplicando al anterior las transformaciones

$$E''_i = E'_i \qquad 1 \le i \le 2$$

$$E''_i = E'_i - \frac{a'_{i2}}{a'_{22}} E'_2 \qquad 3 \le i \le m$$

• Paso K.

Se consiguen ceros en la columna K por debajo de la diagonal principal (podemos suponer que $a_{KK} \neq 0$, reordenando si fuese necesario, salvo que todos los $a_{jK} = 0$ con $K \le j \le m$,siendo innecesario entonces realizar este paso). Aplicamos al sistema obtenido el paso K – 1 las ecuaciones:

$$a_{ij}^{K)} = a_{ij}^{K-1)} \qquad 1 \le i \le K \qquad 1 \le j \le n$$

$$a_{ij}^{K)} = a_{ij}^{K-1)} - a_{Kj}^{K\cdot 1)} \cdot \frac{a_{iK}^{K-1)}}{a_{KK}^{K-1)}} \qquad K+1 \le i \le m \qquad K \le j \le n$$

$$b_i^{K)} = b_i^{K-1} \qquad 1 \le i \le K$$

$$b_i^{K)} = b_i^{K-1)} - b_K^{K-1} \cdot \frac{a_{iK}^{K-1}}{a_{KK}^{K-1}} \qquad K+1 \le i \le m$$

obteniendo un nuevo sistema equivalente al del paso K – 1, y por tanto, a todos los anteriores. Las operaciones elementales aplicadas han sido:

$$E_i^{K)} = E_i^{K-1)} \qquad 1 \le i \le K$$

$$E_i^{K)} = E_i^{K-1} - \frac{a_{iK}^{K-1)}}{a_{KK}^{K-1}} \cdot E_K^{K-1} \qquad K+1 \le i \le m$$

Después de m – 1 pasos como mucho, se obtiene un sistema equivalente al inicial con matriz de coeficientes triangular superior.

El sistema AX = B será equivalente a TX = C con T triangular superior.

Se verifica

rang (A) = rang (T)

rang (A/B) = rang (T/C)

que resuelve fácilmente sin mas que tener en cuenta:

1) El Sistema es Incompatible si y solo si rang (T) ≠ rang (T/C). Y eso es equivalente a encontrar en TX = C una ecuación del tipo 0 = C siendo C ≠ 0.

2) El sistema es Compatible determinado si y solo si rang (T) = rang (T/C) = n, que es equivalente a que el sistema TX = C sea de la forma:

$$\left.\begin{array}{c} t_{11}x_1 + t_{12}x_2 + t_{13}x_3 + \ldots\ldots + t_{1n}x_n = c_1 \\ t_{22}x_2 + t_{23}x_3 + \ldots\ldots + t_{2n}x_n = c_2 \\ t_{33}x_3 + \ldots\ldots\ldots + t_{3n}x_n = c_3 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ t_{nn}x_n = c_n \end{array}\right\}$$

siendo los elementos de la diagonal principal todos no nulos. El sistema se resuelve partiendo de la última ecuación y ascendiendo hasta la primera.

3) El sistema es Compatible Indeterminado si y solo si rang (T) =rang(T/C) = K < n. Supongamos , sin pérdida de generalidad, que

$$K = rang\begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} & \cdots & t_{1K} \\ 0 & t_{22} & \cdots & t_{2K} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & t_{KK} \end{pmatrix}$$

lo que obliga a que todos los elementos de la diagonal principal sean no nulos hasta la fila K. Entonces el sistema inicial, AX = B, es Compatible Indeterminado si y solo si el sistema equivalente TX = C puede escribirse como:

$$\left.\begin{array}{c} t_{11}x_1 + t_{12}x_2 + \ldots\ldots + t_{1K}x_K = f_1(c_1, x_{K+1}, \ldots\ldots, x_n) \\ t_{22}x_2 + \ldots\ldots + t_{2K}x_K = f_2(c_2, x_{K+1}, \ldots\ldots, x_n) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ t_{KK}x_K = f_K(c_K, x_{K+1}, \ldots\ldots, x_n) \end{array}\right\}$$

siendo las soluciones al sistema:

$$x_i = g_i(l_{K+1}, \ldots., l_n) \qquad 1 \le i \le K$$

$$x_j = l_j \qquad K + 1 \le j \le n$$

donde los parámetros $l_{K+1}, \ldots., l_n$ son números reales.

OBS En el paso K, siendo $1 \le K \le m - 1$, el coeficiente $a_{KK}^{K-1)}$ debe ser no nulo para que las correspondientes ecuaciones tengan sentido. Basta realizar una reordenación de las ecuaciones para poder obtener dicha hipótesis, variación que no afecta a las incógnitas. Lo que si que es un inconveniente importante es el hecho de que $a_{KK}^{K-1)}$ sea muy pequeño y, por tanto, $a_{iK}^{K-1)} / a_{KK}^{K-1)}$ muy grande, pudiendo presentar dificultades el trabajar con estos números. Los errores de redondeo podrían ir reduciéndose y aumentar paso a paso, desvirtuando la solución. A fin de resolver esta dificultad, veremos a continuación variantes del método de Gauss.

5.2. Método de Gauss con Pivote Parcial.

Consiste en tomar, en el paso K, en lugar del elemento $a_{KK}^{K-1)}$ el elemento $a_{rK}^{K-1)}$ tal que

$$\left|a_{rK}^{K-1)}\right| = max\left\{\left|a_{iK}^{K-1)}\right| / K \le i \le m\right\}$$

Se trata, en definitiva, de intercambiar la fila K por la r y seguir aplicando en método de Gauss.

5.3. Método de Gauss con Pivote Total.

Al igual que el anterior, en el paso K, tomaremos en lugar del elemento $a_{KK}^{K-1)}$ el elemento

$$max\left\{\left|a_{ij}^{k-1)}\right| / K \leq i \leq m \quad K \leq j \leq n\right\}$$

Ahora no sólo intercambiamos filas (ecuaciones) si no también columnas (incógnitas). Una vez realizado el intercambio y colocado el elemento elegido en el lugar de $a_{KK}^{K-1)}$, se sigue aplicando el método de Gauss.

5.4. Método de Gauss-Jordan.

Dado el sistema AX = B, si A es una matriz cuadrada con $|A| \neq 0$, el método de Gauss puede ser completado triangulando también la parte superior, convirtiendo así a la matriz A en una matriz diagonal. Esta variante se conoce con el nombre de Método de Gauss-Jordan, y consiste en convertir a cero todos los elementos de matriz A menos los de diagonal principal.

Dado el sistema AX = B se transforma la matriz

$$(A/B) = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & b_n \end{array}\right)$$

por el método de Gauss en

$$(T/C) = \left(\begin{array}{cccc|c} t_{11} & t_{12} & \cdots & t_{1n} & c_1 \\ 0 & t_{22} & \cdots & t_{2n} & c \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & t_{nn} & c_n \end{array}\right)$$

obteniéndose el sistema TX = C.

Para obtener ceros por encima de la diagonal principal en T, se procede de forma similar, siguiendo el siguiente algoritmo.

- Primer paso.

Se consiguen ceros en la columna de al matriz (T/C) por encima de la diagonal principal, transformando cada ecuación E_i en E'_i mediante

$$E'_n = E_n$$

$$E'_i = E_i - \frac{t_{in}}{t_{nn}} E_n \qquad 1 \le i \le n-1$$

- Paso K.

Se consiguen ceros en la columna n – K + 1 por encima de la diagonal principal, partiendo del sistema en el paso K – 1, transformando cada ecuación $E_i^{K-1)}$ en $E_i^{K)}$ mediante

$$E_i^{K)} = E_i^{K-1)} \qquad n-K+1 \le i \le n$$

$$E_i^{K)} = E_i^{k-1)} - \frac{t_{i(n-K+1)}^{K-1)}}{t_{(n-K+1)(n-K+1)}^{K-1)}} E_{n-K+1}^{K-1)} \qquad 1 \le i \le n-K$$

En a lo sumo n – 1 pasos obtenemos el sistema

$$\left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & 0 & \cdots & 0 & p_1 \\ 0 & d_{22} & \cdots & 0 & p_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & d_{nn} & p_n \end{array}\right)$$

obteniéndose de forma trivial la solución como

$$x_j = \frac{P_j}{d_{jj}} \qquad 1 \le j \le n$$

Bibliografía Recomendada.

- Álgebra Lineal. Aut: Alberto Luzárraga.
- Álgebra y Geometría. Aut: Braulio de Diego. Edit: Deimos.
- Curso de Álgebra y Geometría. Aut: Juan de Burgos. Edit: Alhambra.
- Curso de Matemáticas Serie A. Aut: A. Negro, V. Zorio. Edit: Alhambra.