TEMAS DE MATEMÁTICAS
(OPOSICIONES DE SECUNDARIA)

TEMA 42

HOMOTECIA Y SEMEJANZA EN EL PLANO.

TEMA 42

HOMOTECIA Y SEMEJANZA EN EL PLANO.

1. INTRODUCCIÓN.

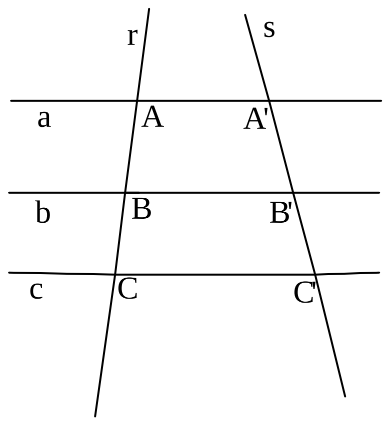
Vamos a indicar algunos teoremas y propiedades de los que haremos uso a lo largo del tema

Teorema de Thales.

Los segmentos limitados por los puntos de intersección de varias paralelas en dos secantes, son proporcionales.

Teorema recíproco al de Thales.

Si los segmentos A´B´ y A´C´ son proporcionales a AB y AC siendo las rectas a y b paralelas, se verifica que la recta c es paralela a la b, o bien los puntos A y A´ coincidentes.



Razón simple de tres puntos.

Dados tres puntos A,B,C de una recta se determina el cociente, AB/AC que se representa (ABC) de las distancias del primero al segundo y al tercero. A este cociente se le llama razón simple. Ya que AC=tAB   (ABC)=t

Movimientos.

En toda aplicación biyectiva que conserva la distancia

- Los movimientos transforman rectas en rectas
- Conservan los ángulos.

2. HOMOTECIAS EN EL PLANO.

Definición.

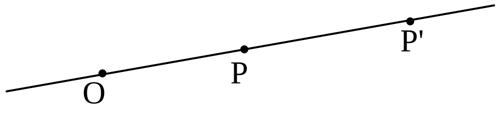
Sea O un punto del plano y k un número real, $k \neq 0$. Llamaremos homotecia de centro O y razón k, y la designaremos por $H_{o,k}$ a la aplicación del plano en sí mismo que hace corresponder a cada punto P distinto de O, otro punto P´ tal que OP´=kOP.

Al punto P´ se le llama homotetico de P y se escribe

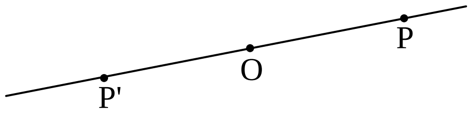
$$H_{o,k}(P)=P'$$

De la definición se deduce que O, P, P´ están alienados.

Si k>0 P y P´ están en la misma semirrecta de origen O.



Si k<0 P y P´ están separados por el centro O



Cuando k=1 OP´=-OP es decir P y P' coinciden. Por lo tanto la homotecia $H_{o,k}$=I identidad.

Cuando k=-1 OP'=-OP la homotecia es una simetría de centro C.

Proposición.

a) Si k=1 todos los puntos son invariantes.

b) Si $k \neq 1$ el único punto invariante es el centro de la homotecia.

c) Las rectas que pasan por el centro de la homotecia son invariantes globalmente.

Demostración.

a) Si k=1 $H_{o,k}$=I y la identidad mantiene todos los puntos invariantes.

b) Si P es un punto invariante y P´ es su homotetico tal que P=P´ $OP = kOP \Rightarrow OP - kOP = 0 \Rightarrow (1-k)OP = 0$ y como $k \neq 1 \Rightarrow$ OP=0 luego P=0

c) Es inmediata por la definición de homotecia.

Proposición.

Sea $H_{o,k}$ una homotecia. Entonces se verifica que $H_{o,k}$ es una biyección.

Demostración.

Por la definición tenemos que $H_{o,k}$ es una aplicación. Demostraremos que $H_{o,k}$ es una biyección, probando la existencia de una aplicación inversa de $H_{o,k}$.

Sea $H_{o,k^{-1}}$ la homotecia de centro O y razón k^{-1}.

Sea P un punto $P \neq 0$ y probemos que $H_{o,k^{-1}} \circ H_{o,k} = I$

$$H_{o,k^{-1}}\,(H_{o,k}\,(P)) = H_{o,k^{-1}}\,(P´) = P´´$$

Como $H_{o,k}$ (P)=P´ O,P,P´ están alineados y OP´=k OP.

Como $H_{o,k^{-1}}$ (P´)=P´´ O, P´,P´´ están alineados y OP´= k^{-1} OP´.

Como O, P, P´ están alineados y O, P´, P´´ están alineados entonces O,P,P´,P´´ están alineados entonces O,P,P´´ están alineados y

$$OP´´ = k^{-1}\,OP´ = k^{-1}\,kOP = OP \qquad \Leftrightarrow \qquad P´´ = P$$

y como P es un punto cualquiera del plano, se deduce $H_{o,k^{-1}}$ o $H_{o,k}$ =I. De forma análoga se demuestra $H_{o,k}$ o $H_{o,k^{-1}}$ =I.

Por lo tanto $\exists\, Ho,k^{-1}$ tal que $\begin{matrix} H_{o,k} \circ H_{o,k^{-1}} = I \\ H_{o,k^{-1}} \circ H_{o,k} = I \end{matrix}$ $H_{o,k}$ es una biyección

2.1. Propiedades de la homotecia en el plano.

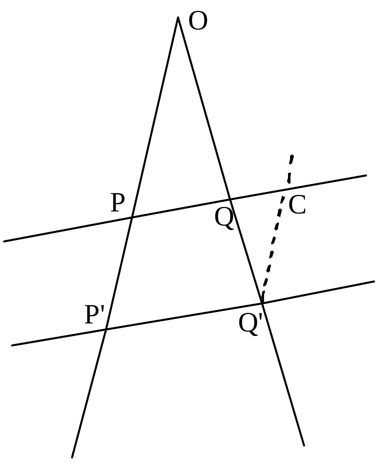
Proposición 1.

La razón de las distancias entre dos puntos homólogos y sus originales es igual a la razón de la homotecia en valor absoluto.

Demostración.

Sea P, Q dos puntos cualesquiera del plano P´, Q´ sus transformadas por una homotecia de centro O y razón k.
Entonces se cumple

$$OP´ = kOP \qquad OQ´ = kOQ \qquad \text{luego} \qquad \frac{OP´}{OP} = \frac{OQ´}{OQ} = k$$



Sea C el punto en el que la paralela a OP trazada por Q´ corta a la recta PQ. Por el teorema de Thales se deduce que (QPC)=(QOQ´)

Utilizando las propiedades de las razones simples (PCQ)=(OQ´Q)=k es decir

$$\frac{PC}{PQ} = \frac{OQ´}{OQ} = k \qquad \frac{PC}{PQ} = |k|$$

Pero como PCQ´P´ es un paralelogramo ya que PQ//P´Q´ (por el reciproco del teorema de Thales) y PP´//CQ´ por construcción resulta que PC=P´Q´

Luego $\frac{P'Q'}{PQ} = |k|$ o $\frac{d(P',Q')}{d(P,Q)} = |k|$

Proposición 2.

Si P, Q son dos puntos del plano y P´, Q´ son sus homólogos es una transformación H en el plano tal que P´Q´=k PQ, entonces H es una homotecia si $k \neq 1$ y una traslación si k=1.

Demostración.

Si k=1 P´Q´=PQ y como los segmentos P´Q´ y PQ son paralelos y

$$\frac{d(P',Q')}{d(P,Q)} = 1 \Rightarrow PP' = QQ'$$

lo cual indica que H es una traslación del vector PP´.

Si $k \neq 1$ PP´ no es paralela a QQ´ y por lo tanto se cortan en un punto que llamamos O.

Como P´Q´=k PQ tenemos que $\frac{d(P',Q')}{d(P,Q)} = |k|$ y como los puntos O, P, P´ y O, Q, Q´ están alineados la transformación es una homotecia de centro O y razón k.

Proposición 3.

Las homotecias transforman puntos alineados en puntos alineados.

Demostración.

En efecto. Sean P, Q, R tres puntos alineados y sean P´, Q´, y R´ sus homólogos mediante $H_{o,k}$. Se trata de demostrar que P´, Q´ y R´ están alineados.

De acuerdo con la Proposición 1 se tiene:

$$P'Q' = |k|PQ \qquad P'r' = |k|PR \qquad Q'R' = |k|QR$$

Si P, Q y R están alineados, uno de los tres puntos estará situado entre los dos restantes. Sea por ejemplo $Q \in PR$. Entonces se tiene:

$$PR = PQ + QR$$

Luego $|k|PR = |k|(PQ + QR) = |k|PQ + |k|QR$ esto es P´R´=P´Q´+Q´R´

Con esto queda demostrado no solo que P´, Q´, y R´ forman una recta, sino que además, si Q esta entre P y R, Q´ esta entre P´ y R´. Es decir las homotecias transforman rectas en rectas y conservan la posición relativa de los puntos.

Nota. Cuando decimos que las homotecias forman rectas en rectas queremos decir que transforman puntos de una recta en puntos de una recta ya que una homotecia es una aplicación entre puntos.

Proposición 4.

Las homotecias transforman rectas paralelas en rectas paralelas.

Demostración.

Sea $H_{o,k}$ una homotecia, sean P y Q los puntos que determinan la recta y P´, Q´ sus transformadas por $H_{o,k}$. Se trata de demostrar que la recta PQ es paralela a la recta P´Q´.

a) $Q \in OP$. Como por la definición de homotecia O,P,P´ están alineado y O,Q,Q´ también. Tenemos que $P´,Q´ \in PQ$. Entonces las rectas PQ y P´Q´, son paralelas, porque coinciden.

b) $Q \notin OP$. Como OP´=k OP y OQ´=k OQ, tenemos que $\frac{OQ'}{OQ} = \frac{OP'}{OP} = k$ y por el reciproco del teorema de Thales se tiene que las rectas PQ y P´Q´´ son paralelas.

Proposición 5.

Los homotecios transforman puntos no alineados en puntos no alineados.

Demostracion.

Si P,Q,R no estan alineados, debera tenerse que:

$$\overline{PR} < \overline{PQ} + \overline{QR} \qquad \overline{PR} > \overline{PQ} - \overline{QR}$$

Sean P´,Q´ y R´ los transformados por la homotecia $H_{o,k}$ entonces se tiene que:

$$\overline{P'R'} = |K|\overline{PR} \qquad \overline{P'Q'} = |K|\overline{PQ} \qquad \overline{Q'R'} = |K|\overline{QR} \qquad \text{(Prop1)}$$

Como $|K|$>0, multiplicando las desigualdades por $|K|$

$$|K|\overline{PR} < |K|\overline{PQ} + |K|\overline{QR} \qquad |K|\overline{PR} > |K|\overline{PQ} - |K|\overline{QR}$$

luego $\overline{P'R'} < \overline{P'Q'} + \overline{Q'R'}$ $\overline{P'R'} > \overline{P'Q'} - \overline{Q'R'}$ esto es P´,R´ y Q´ no estan alineados.

Proposición 6.

Las homotecias transforman segmentos en segmentos.

Demostracion.

Como consecuencia de la proposición 3.

Proposición 7.

Las homotecias transforman triangulos en triangulos semejantes.

Demostracion.

(Dos triángulos son semejantes si tienen sus ángulos homólogos iguales y sus lados correspondientes proporcionales).

Sea ABC un triangulo y sean A´= $H_{o,k}$ (A), B´= $H_{o,k}$ (B), y C´= $H_{o,k}$ (C). Se trata de demostrar que A´B´C´ es un triangulo semejante al ABC.

Por la proposicion 5 A,B,C no alineados $\Rightarrow$ A´,B´,C´ no alineados.

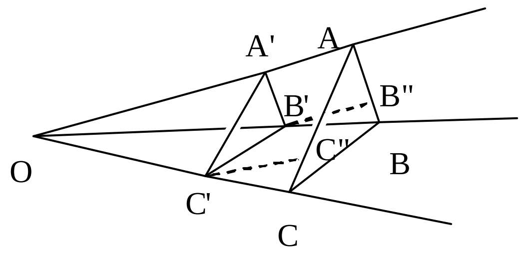
luego A´B´C´ constituyen un triangulo.

Por la proposicion 1 se tiene que

$$A'B' = |K|\,AB \quad B'C' = |K|\,BC \quad A'C' = |K|\,AC.$$

luego los triangulos ABC y A´B´C´ tienen sus lados proporcionales. Bastara por tanto demostrar que tienen sus angulos homologos iguales.

Consideremos, por ejemplo, el angulo CAB.



Trazando por C´ una recta paralela a la A´A se obtiene en su interseccion con AC, el punto C´´ tal que AC´´=A´C´.

Del mismo modo, en la semirecta de origen A que contiene a B existe un punto B´´ tal que AB´´=A´B´ Por lo tanto se tiene

$$\frac{AC''}{AC} = \frac{A'C'}{AC} = |K|$$

$$\frac{AB''}{AB} = \frac{A'B'}{AB} = |K|$$

Luego $$\frac{AC''}{AC} = \frac{AB''}{AB} = |K|$$

Esto nos indica que B´´ y C ´´ son las transformaciones respectivas de B y C, en la homotecia de cnetro A y razon $|K|$, luego por la proposicion 1 se tiene:

$$\frac{B''C''}{BC} = |K| \Leftrightarrow B''C'' = |K|BC = B'C'$$

Por tanto, los triangulos AB´´C´´ y A´B´C´ son iguales por tener sus lados iguales:

AB´´=A´B´ y AC´´=A´C´ por construccion y

B´´C´´=B´C´según hemos visto en .

Luego AB´´C´´ y A´B´C´ tendran sus angulos correspondientes, respectivamente iguales. En particular

B´A´C´=B´´AC´´.

Pero la eleccion de B´´ y C´´se tiene que B´´AC´´=BAC.

Analogamente probariamos la igualdad de los otros angulos. Con lo que queda demostrado que los homotecios tranforman triangulos en triangulos semejantes.

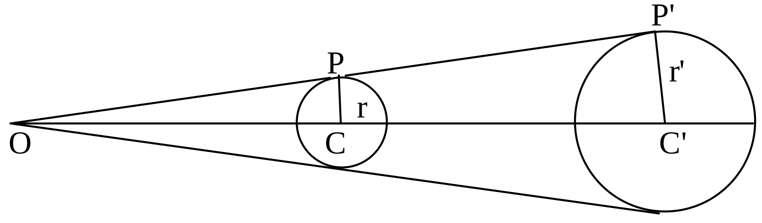
Proposición 8.

Los homotecios transforman circunferencias en circunferencias.

Demostracion.

Sea una circunferencia de centro C y radio r. Su transformada por una homotecia de centro O y razon k es otra circunferencia de centro C´=Ho,k(C) y radio r´=$|K|$r, pues se verifica que

d(C´,P´)$|K|$d(C,P)

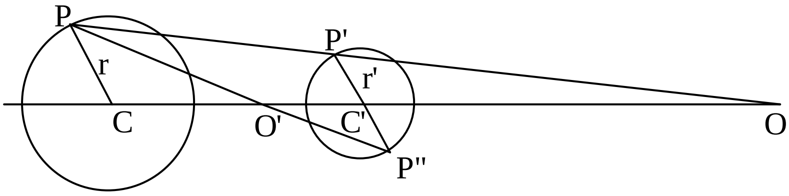


$$OP' = KOP \qquad \frac{OP'}{OP} = \frac{OC'}{OC} = K \qquad \text{Por la propiedad 1} \ \frac{C'P'}{CP} = |K|$$
$$OC' = KOC$$

Proposición 9.

Dadas dos circunferencias cualesquiera siempre hay dos homotecias, una de razon k>0 y otra de razon k´<0, respecto de los cuales las dos circunferencias son homoteticas.

Demostración.



Sean las circunferencias de radios r y r´ y centros C y C´, tracemos sobre la primera circunferencia un radio CP y sobre la segunda, los radios opuestos C´P´ y C´P´´ paralelos a CP.

Las rectas PP´ y CC´ se cortan en el punto O, que es el cnetro de una homotecia de razon k>0 que transforma la primera circunferencia en la segunda ya que:

$$\frac{OP'}{OP} = \frac{OC'}{OC} = K$$ siendo K>0 la razon de la homotecia.

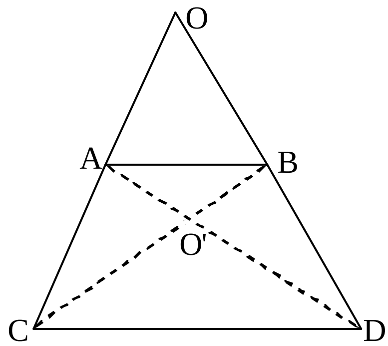
Las rectas que determinan CC´ y PP´´ se cortan en el punto O´, que es el centro de la homotecia de razon K´<0, K´=-K que transforma la primera circunferencia en la segunda. En efecto

$$\frac{O'P''}{O'P} = \frac{O'C'}{O'C} = K'$$ siendo K la razon. K´=-K ya que $$K' \frac{C'P''}{CP} = \frac{-C'P'}{CP} = -K$$

Proposición 10.

Sean AB, CD dos segmentos paralelos distintos, no situados en la misma recta. Entonces existen dos homotecios h_1 y h_2 que transforman AB en CD.

Demostración.



Sean O=AC∩BD y O´=AD∩BC.

Demostramos que la homotecia de centro O y razon $k = \frac{OC}{OA}$ transforma AB en CD. Para ello teniendo en cuenta las propiedades anteriores, bastara demostrar que $H_{o,k}$(A)=C $H_{o,k}$ (B)=D.

Sea $H_{o,k}$ (A)=A´ por definición de $H_{o,k}$, O, A, A´ estan alineados y verifican

$$\frac{OA'}{OA} = k = \frac{OC}{OA} \quad \Leftrightarrow \quad OA' = OC \quad \Rightarrow \quad A' = C$$ luego $H_{o,k}$ (A)=C

Sea $H_{o,k}$ (B)=B´ $\Rightarrow$ O, B, B´ estan alineados

$$\frac{OB'}{OB} = k = \frac{OC}{OA} = \frac{OD}{OB} \quad \Rightarrow \quad OB' = OD \quad \Rightarrow \quad B' = D$$ Luego $H_{o,k}$ (B)=D

Demostraremos ahora que la homotecia de centro O´ y razon $k´ = \frac{O´C}{O´B}$ transforman AB en CD, para ello probaremos que $H_{o´,k´}$ (A)=D y $H_{o´,k´}$(B)=C

Sea $H_{o´,k´}$(A)=A´ y O´, A, A´ estan alineados y cumplen que

$$\frac{O´A´}{O´A} = k = \frac{O´C}{O´A} \quad \Rightarrow \quad O´A´ = O´D \quad \Rightarrow \quad A´ = D$$ luego $H_{o´,k´}$(A)=D

De forma análoga $H_{o´,k´}$ (B)=C

Por tanto existen dos homotecias que transforman el segmento AB en el CD

Proposición 11.

Sean AB y CD dos segmentos de la misma recta y tales que AC $\neq$ BD. Entonces se verifica que existe una unica homotecia que transforman AB en CD.

Demostración.

Supongamos que exista la homotecia y sea O su centro. Entonces

$$H_{o,k}(A)=C \text{ y } H_{o,k}(B)=D \quad \Rightarrow \quad \frac{OC}{OA} = \frac{OD}{OB} = k$$

De acuerdo con las propiedades de las proporciones

$$\frac{AO}{CO} = \frac{BO}{DO} \quad \Rightarrow \quad \frac{AO}{BO} = \frac{CO}{DO} = \frac{CA + AO}{DB + BO} \quad \Rightarrow \quad \frac{AO}{BO} = \frac{CO + AO}{DO + BO} = \frac{CA}{DB}$$

Por lo tanto se tiene $\frac{AO}{BO} = \frac{CA}{DB} \quad \Rightarrow \quad \frac{OA}{OB} = \frac{AC}{BD}$

Como AC $\neq$ BD $\Rightarrow$ $\frac{AC}{BD} \neq 1$ Sea $\frac{AC}{BD}$ =k

Por tanto $\frac{AO}{BO} = k \quad \Leftrightarrow \quad AO = kBO$

Es decir, O es unico. La homotecia es pues una homotecia de centro O y razon $\frac{OA}{OC}$

2.2 Producto de homotecias.

2.2.1. Producto de homotecias del mismo centro.

El producto de dos homotecias del mismo centro es otra homotecia del mismo centro y de razon el producto de las razones de las homotecias.

Demostración.

Sean $H_{o,k1}$ y $H_{o,k2}$ dos homotecias. Si P es un punto del plano, $H_{o,k1}$ (P)=P´ y $H_{o,k2}$(P´)=P´´ se cumple OP´= k_1OP OP´´= k_2OP´

Luego OP´´= k_2OP´= k_2 k_1OP$\Rightarrow$P´´ es el transformado de P por una homotecia de centro O y razon k_1 k_2. Luego $H_{o,k2}$ $H_{o,k1}$ =$H_{o,k1k2}$.

Proposición.

La inversa de $H_{o,k}$ es $H_{o,1/k}$.

Demostración.

Si P y P´ son puntos homoteticos tendremos

$$\frac{OP'}{OP}=k \Leftrightarrow \frac{OP}{OP'}=\frac{1}{k} \qquad H_{o,k}\,H_{o,1/k}=H_{o,1}$$

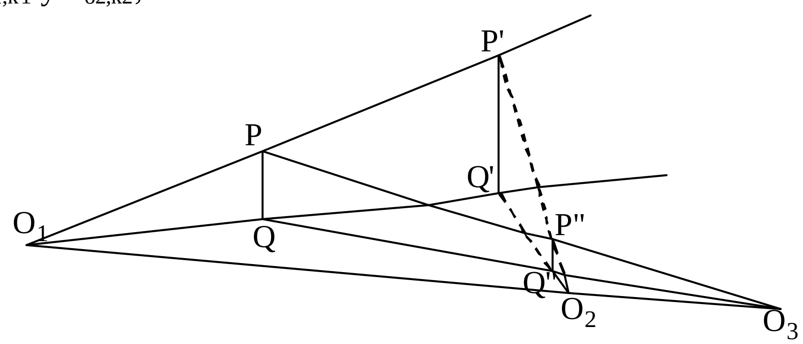
Consecuencia: el conjunto de las homtecias de centro un punto dado, con el producto definido forma un grupo abeliano.

2.2.2 Producto de dos homotecias de distinto centro.

El producto de dos homotecias de distinto centro es otra homotecia cuyo centro esta alineado con los anteriores y cuya razon es el producto de las razones de las homotecias dadas.

Demostración.

Sean $H_{o1,k1}$ y $H_{o2,k2}$, dos homotecias.



Consideremos los puntos P y Q del plano, que se transforman por $H_{o1,k1}$ en P´, Q´. Estos ultimos se transforman a su vez en A´´, B´´ por $H_{o2,k2}$.

Se verifica que:

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{O_1P'}{O_1P}=\dfrac{O_1Q'}{O_1Q}=\dfrac{P'Q'}{PQ}=k_1\\[2ex]\dfrac{O_2P''}{O_2P'}=\dfrac{O_2Q''}{O_2Q'}=\dfrac{P''Q''}{P'Q'}=k_2\end{array}\right\}\qquad\Rightarrow\dfrac{P''Q''}{PQ}=k_1\cdot k_2$$

que define una homotecia de razon $k_1 \cdot k_2$.

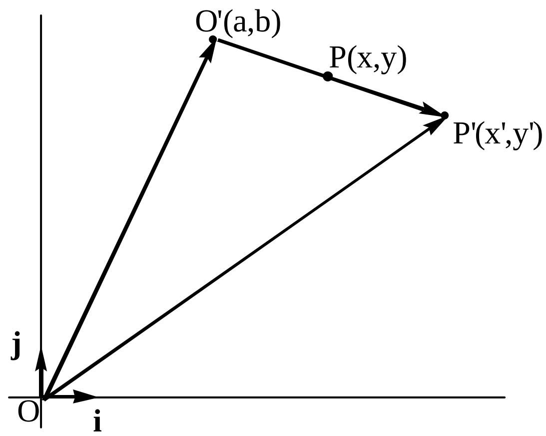
Como la recta O_1 O_2 es homologa a las dos homotecias, tambien lo sera a su producto y por tanto estara en ella el centro O_3 de la homotecia producto.

Luego $H_{o2,k2}$ $H_{o1,k1}= H_{o3,k1k2}$.

Si k_1k_2=1. la homotecia es una traslación.

2.3 Ecuaciones de la homotecia.

Sea R= $\{O,\vec{i},\vec{j}\}$ un sistema de referencia ortonormal del plano.



Consideramos la homotecia $H_{o',k}$ con centro O´(a,b) y razón k que transforma P(x,y) en P´(x´,y´)

O´P´=k O´P

OP´=OO´+O´P´=OO´+k O´P

Sustituyendo sus componentes queda

(x´,y´)=(a,b)+k(x-a,y-b)

$$\left.\begin{array}{l}x'=a+k(x-a)\\ y'=b+k(y-b)\end{array}\right\}\quad \text{o bien}\quad \left.\begin{array}{l}x'=kx+(1-k)a\\ y'=ky+(1-k)b\end{array}\right\}$$

Que son las ecuaciones de la homotecia con centro O´(a,b) y razon k. Si añadimos 1=1 se puede escribir en forma matricial.

$$(1,x',y') = \begin{pmatrix} 1 & x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & (1-k)b & (1-k)b \\ 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & k \end{pmatrix}$$

3 SEMEJANZA EN EL PLANO

Definición.

Se llama semjanza en el plano a toda aplicación del plano en si mismo, que puede descomponer en producto de una homotecia por un movimiento o de un movimiento por una homotecia.

Si el movimiento es directo, la semejanza se llama directa y si el movimiento es inverso, la semejanza se llama inversa.

En particular, si consideramosn la homotecia identidad. Las semejanzas son movimientos.

3.1 Propiedades de las semejanzas.

Proposición 1.

La razon de las longitudes de dos segmentos homologos es una semejanza es constante. A esa constante le llamaremos razon de semejanza.

Demostración.

Consideremos una semejanzas S igual al producto de una homotecia $H_{o,k}$ y de un movimiento M, es decir, S=mo $H_{o,k}$.

Sea A y B dos puntos del plano cuyas transformadas por la homotecia son A´ y B´, y que se transforman a su vez en A´´, B´´ por el movimiento M.

Se verifica entonces que:

A´B´=A´´B´´ y A´B´=k AB de donde

$$A''B'' = k \cdot AB \Rightarrow d(A'',B'') = |k| D(A,B) \Rightarrow \frac{d(A'',B'')}{d(A,B)} = |k|$$

siendo k la razon de la homotecia, $|k|$ es la razon de la semejanza.

Nota: Cuando se habla de razon de semejanza se supone k>0.

Proposición 2.

Las semejanzas transforman puntos alineados en puntos alineados y como consecuencia rectas en rectas.

Demostración.

Sean A, B, C tres puntos alineados, para los puntos semejantes tenemos que aplicar una homotecia y un movimiento. Como la homotecia y el movimiento conservan la alineación, los puntos semejantes estan alineados.

Proposición 3.

Las semejanzas transforman angulos en angulos iguales, del mismo sentido si la semejanza es directa y de sentido contrario si esinversa.

Demostracion.

Las homotecias conservan angulos y el sentido, por lo tanto, si la semejanza es directa, el movimiento es directo y conserva angulos y sentido. Si la semejanza es inversa, el movimiento tambien y cambia el sentido de los angulos.

<u>Observación.</u>

Teniendo en cuenta las propiedades anteriores se dice que dos figuras son semejantes cuando tienen los angulos correspondientes iguales y los lados homologos proporcionales.

3.2 Producto de semejanzas

Proposición.

El producto de dos semejanzas de razones k_1, y k_2 es otra semejanza de razón $k_1 \cdot k_2$.

Demostración.

En efecto, sean A, B dos puntos del plano que se transforman en A´, B´ respectivamente, por una semejanza de razón k_1 y sean A´´, B´´ las transformadas de A´, B´ por la semejanza de razon k_2.

Se verifica que

$$\left.\begin{array}{l} d(A',B') = k_1 d(A,B) \\ d(A'',B'') = k_2 d(A',B') \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad d(A'',B'') = k_2 k_1 d(A,B)$$

lo que indica que el producto de semejanzas de razon $k_1 \cdot k_2$.

Proposición.

Existe el elemento inverso de una semejanza.

Demostración.

Supongamos que S es igual al producto de una homotecia H por un movimiento M, es decir S=MH. Tanto H como M tienen inversos H^{-1} y M^{-1} y por tanto $H^{-1} \circ M^{-1}$ existe. Veremos que $H^{-1} \circ M^{-1} = S^{-1}$

$$S \circ S^{-1}(M \circ H) \circ (H^{-1} \circ M^{-1}) = M \circ I \circ M^{-1} = M \circ M^{-1} = I$$
$$S^{-1} \circ S(H^{-1} \circ M^{-1}) \circ (M \circ H) = H^{-1} \circ I \circ H = H^{-1} \circ H = I$$

Conclusión: el conjunto de las semejanzas del plano, con el producto definido, forman un grupo no conmutativo.

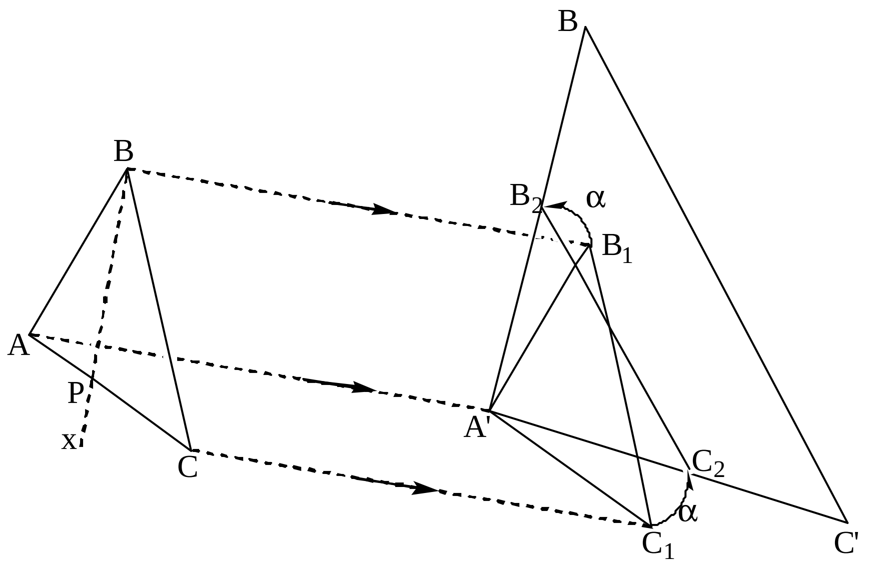
El grupo se llama equiforme porque las semejanzas conservan la forma de las figuras.

El conjunto de las emejanzas directas es un subgrupo del anterior, no asi el de las semejanzas inversas ya que el producto de dos semejanzas inversas es un directa.

Teorema fundamental de la semejanza.

Existe una unica semejanza que transforma un triangulo en otro semejante a el.

Demostración



Existencia.

Sea el triangulo ABC, semejante al A´,B´,C´, es decir, ambos triangulos tienen sus angulos respectivamente iguales y sus lados proporcionales.

La traslación $t_{AA'}$ de vector AA´, transforma el triangulo ABC en el triangulo A´B_1C_1, por tanto

$$ABC \xrightarrow{\quad t_{AA'} \quad} A'\,B_1C_1$$

El giro de centro A´ y ángulo orientado $B_1A´B_2$ de semirrecta origen $A´B_1$ y de semirrecta extremo A´B´, transforma

B_1 en B_2.

Luego el triangulo $A´B_1C_1, \xrightarrow{\quad G(A'B_1\ A'B_2) \quad} A´B_2C_2,$

En la composición G(A´)o $t_{AA'}$

$$\begin{tikzcd}
\widehat{ABC} \arrow[r, "t_{AA'}"] \arrow[rr, bend right, "G(A',B_1A'B_2)\ o\ t_{AA'}"'] & \widehat{A'B_1C_1} \arrow[r, "G(A',B_1A'B_2)"] & \widehat{A'B_2C_2}
\end{tikzcd}$$

Puede ocurrir que en el $G(A´,B,A´B_2)$, la semirrecta A´ C_2 coincida cona la A´C´ (como indica en la figura), o bien estas dos semirrectas pudieran ser simétricas respecto de la A´B´. En este ultimo caso es necesario aplicar al $A´B_2C_2$ una simetría axial de eje A´B´ con lo que se obtendría un $A´B_2C_3$ igual al $A´B_2C_2$ que tendría el angulo $B_2A´C_2$ coincidiendo como ocurre en nuestro caso, con el B´A´C´.

Situados ya los dos triangulos.

1º caso A´B´C´ y $A´B_2C_2$.

2º caso A´B´C´ y $A´B_2C_3$.

con estos dos angulos coincidiendo, esto es

1º caso A´B´C´ coincidiria con $A´B_2C_2$.

2º caso A´B´C´ coincidiria con $A´B_2C_3$.

se tiene que la proporcionalidad

$$1^{\text{o}} \text{ caso } \frac{A´B_2}{A´B´} = \frac{A´C_2}{A´C´}$$

$$2^{\text{o}} \text{ caso } \frac{A´B_2}{A´B´} = \frac{A´C_3}{A´C´}$$

Existe por tanto en ambos caso una homotecia de centro A´ y razon k (la obtenida anteriormente) que nos transforma el triangulo.

$$A´B_2C_2. \longrightarrow A´B´C´$$

o bien $A´B_2C_3. \xrightarrow{\quad H(A'\ \overline{A'C_3}\,\overline{A'C'}) \quad} A´B´C´$

La transformación producto

H(A´,k) o G(A´,α) o $t_{AA'}$ transforma el triangulo ABC en el A´B´C´

y como los movimientos y las homotecias son semejantes, el producto de dos semejanzas es una semejanza. Luego existe una semejanza que transforma el triangulo ABC en el A´B´C´.

Unicidad (por reducción al absurdo)

Supongamos que existiesen dos semejanzas f y g que nos transforman el triangulo ABC en A´B´C´.

Sea x un punto cualquiera, que tendra

f(x)=x´
g(x)=x´´.

La recta BX corta a AC en un punto P y sean

$$\begin{matrix} f(P) = P' \\ g(P) = P'' \end{matrix} \text{ se verifica que } \frac{PB}{PC} = \frac{P'B'}{P'C'}$$

ya que la semejanza conserva las razones simples (PBC)=(P´B´C´)

Análogamente

$$\frac{PB}{PC} = \frac{P''B'}{P''C'} \text{ por ser (PBC)=(P´´B´C´)}$$

luego es evidente $\frac{P'B'}{P'C'} = \frac{P''B'}{P''C'} \Rightarrow (P'B'C') = (P''B'C')$

Lo cual obliga por las propiedades de las razones simples P´ $\equiv$ P´´

Del mismo modo

$$(XAP)=(X',A',P') \Rightarrow \frac{XA}{XP} = \frac{X'A'}{X'P'}$$

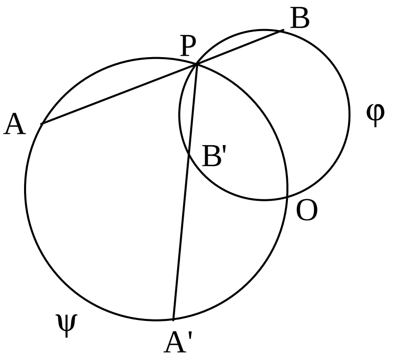
$$(XAP)=(X'',A',P') \Rightarrow \frac{XA}{XP} = \frac{X''A'}{X''P'}$$

por tanto (X´A´P´)=(X´´A´P´) $\Rightarrow X' \equiv X''$

luego la semejanza es única.

3.3 Construccion del centro de semejanza directa.

En el producto de un giro por una homotecia es interesante determinar o hallar el punto O que sea a la vez centro de giro y centro de homotecia, que transforma un segundo AB en otro A´B´ siendo estos segmentos directamente semejantes.



Prolongar A´B´ hasta que corte la recta A´B´ al segmento AB en un punto P.

Construir

-La circunferencia ψ que pasa por P, A y A´

-La circunferencia φ que pasa por P, B y B´

El segundo punto de intersección de ψ con φ, el O, es el buscado.

En efecto

Deberan ser iguales OAB=OA´B´ siendo A´ y B´ los transformados de los A y B.

Sobre la circunferencia φ, OAB abarca el OP en ψ y OA´B´ abarca tambien el OP, luego OAB=OA´B´

Tambien puede verificarse que OBA=OB´A´

En efecto $\left.\begin{array}{r} A'B'O + OB'P = 180^o \\ \text{y en } \boldsymbol{j} \quad \mathrm{PBO} + \mathrm{OB'P} = 180^o \end{array}\right\} \Rightarrow$ A’B’O=PBO

El angulo PBO, sobre φ abarca el arco PO (que contiene B´)

El angulo OBA, sobre φ abarca el arco PO

Luego PBO=OBA por tanto OB´A´=PBO=OBA OB´A´=OBA

3.4 Ecuaciones de la semejanza

Como semejanza se puede descomponer en una homotecia y un movimiento o viceversa, las ecuaciones se obtienen aplicando en cada caso las ecuaciones correspondientes del movimiento y de la homotecia.

Veamos el caso en que la semejanza S se puede descomponer en producto de una homotecia Ho,k de centro O(a,b) y razon k, y una traslación Tu de vector (a´,b´), es decir S=Tu o Ho,k

Sea A(x,y) un punto que se transforma en A´(x´,y´) mediante la homotecia y este en A´´(x´´,y´´) por la traslación.

Entonces se obtiene

aplicando Ho,k
$$\left.\begin{array}{l} x' = a + k(x-a) \\ y' = b + k(y-b) \end{array}\right\}$$

y si aplicamos T_u
$$\left.\begin{array}{l} x'' = x' + a' = a + k(x-a) + a' \\ y'' = y' + b' = b + k(y-b) + b' \end{array}\right\}$$
o bien

$$\left\{\begin{array}{l} x'' = kx + (1-k)a + a' \\ y'' = ky + (1-k)b + b' \end{array}\right.$$

que son las ecuaciones de la semejanza dada. Si añadimos 1=1 se puede expresar en forma matricial

$$(1, x'', y'') = (1 \quad x \quad y)\begin{pmatrix} 1 & (1-k)a + a' & (1-k)b + b' \\ 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & k \end{pmatrix}$$

<u>Bibliografía Recomendada.</u>

Puig Adam, P. Curso de Geometría Métrica. Ed.Biblioteca Matemática.

Queysannne, H y Revuz,A. Geometría. Ed.C.E.C.S.A.

Tuduri, Fortuni, Jovellanos. Matemáticas COU

Angel Primo Martínez. Matemáticas COU. Ed.S.M.