TEMAS DE MATEMÁTICAS
(OPOSICIONES DE SECUNDARIA)

TEMA 48

ESPIRALES Y HÉLICES. PRESENCIA EN LA NATUTALEZA, LA TÉCNICA Y EL ARTE.

TEMA 48

ESPIRALES Y HÉLICES. PRESENCIA EN LA NATUTALEZA, LA TÉCNICA Y EL ARTE

1.- INTRODUCCIÓN.

Existen en la Naturaleza numerosos ejemplos de formas enrolladas cuya representación gráfica es una espiral o una hélice.

Se trata en casi todos los casos de un crecimiento en forma de giro ligado a una expansión, por ejemplo: las galaxias espirales, las conchas de las caracolas y otros moluscos, el crecimiento de una planta trepadora a lo largo de un soporte, las astas de los carneros, etc.

Igualmente, el hombre ha necesitado también estas formas unas veces por necesidades prácticas y otras por necesidades estéticas. El diseño de una escalera de caracol, construcción de muelles y solenoides son ejemplos prácticos; las espirales en vasos, los volantes en arquitectura, etc., son manifestaciones artísticas.

El estudio de ellas se dificulta siempre porque las coordenadas rectangulares no son idóneas. Se precisan coordenadas polares. No obstante puede conseguirse una aproximación a ellos válida para último curso de ESO (con muchas reservas y prescindiendo de ecuaciones), y sobre todo para las matemáticas de la forma, del futuro Bachillerato artístico.

Estudiaremos en primer lugar las espirales, en especial las de Arquímedes, y la logarítmica o equiangular. Se citaran también otras espirales y “falsas” espirales.

2.- LA ESPIRAL DE ARQUÍMEDES.

Es la más antigua conocida. Ya Arquímedes la citaba como ejemplo de la trayectoria que sufre un punto móvil sometido a un giro a velocidad angular constante y a un crecimiento del radio también constante.

Se puede determinar su ecuación fácilmente:

Si á es el ángulo de giro en radianes, V_a la velocidad angular y t el tiempo, se tiene:

$$\alpha = V_a t$$

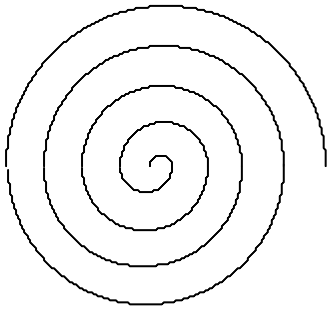
Si r es el radio de giro, V_1 la velocidad constante de crecimiento del radio, se tiene:

$$r = V_1 t\ .$$

eliminando *t*: $$r = V_1 \frac{\alpha}{V_a} = k\alpha$$

$r = k\alpha$ Ecuación espiral de Arquímedes en c. polares.

Es curioso el parecido que existe entre una recta que pase por el origen en coordenadas rectangulares $y = mx$, y la espiral de Arquímedes en coordenadas polares $r = k\alpha$.



La forma de la espiral de Arquímedes la determina el valor de k pues la distancia entre dos espiras se obtiene restando los radios de dos espiras consecutivas al dar una vuelta completa.

$$\left.\begin{aligned} r' &= k(\alpha + 2\pi) \\ r &= k\alpha \end{aligned}\right\} \quad r' - r = 2k\pi$$

lo que prueba que la “anchura de la espiral es constante.

Es claro también que al aumentar el radio las espiras se vayan pareciendo cada vez más a circunferencias.

<u>Actividades</u>:

1.- Puede tantearse la forma de la espiral usando “papel polar”, o marcando con ayuda de un semicírculo graduado ángulos cada 5º y determinando los radios correspondientes.

2.- Igualmente, un procedimiento en LOGO muy sencillo permite simular espirales de forma muy aproximada

```
PARA ESPIRAL  :LADO  :INC  :ANGULO
AV  :LADO     GD  :ANGULO
ESPIRAL  :LADO + :INC  :INC  :ANGULO
FIN
```

(Es conveniente indicar valores “pequeños”, por ejemplo ESPIRAL 1 1 20 construye una poligonal que ya se parece a una espiral). Como el incremento de lado es constante también lo es el del radio.

3.- Un procedimiento dinámico más útil, es el de los alfareros. Sobre el pivote central se coloca una regla fija, y se desplaza un lápiz a velocidad constante de dentro afuera. El lápiz describe una espiral, y la forma de la espiral depende de la velocidad del torno, y de la velocidad con que se desplaza el lápiz.

Este método, que explica por qué se utiliza tanto la espiral de Arquímedes como motivo artesanal, puede simularse también con un tocadiscos y un papel colocado sobre él.

3.- LA ESPIRAL EQUIANGULAR.

La Naturaleza no entiende de velocidades constantes, y así el crecimiento suele depender de lo crecido hasta entonces. Así, las espirales en la Naturaleza no suelen mantener la distancia entre espiras.

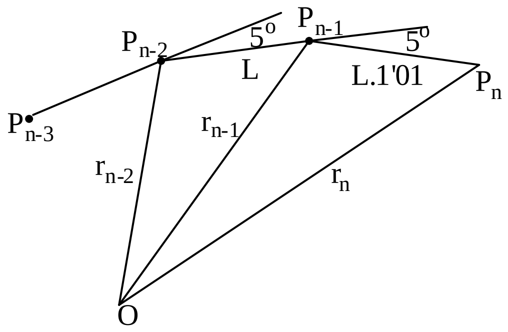
Como introducción, modifiquemos el procedimiento LOGO anterior así:

```
PARA ESPIRAL2  :LADO  :RAZON'  :ANGULO
AV  :LADO    GD  :ANGULO
ESPIRAL2  :LADO*:RAZON'  :RAZON  :ANGULO
FIN
```

y probemos, por ejemplo con ESPIRAL2 1 1’01 5.

Al describir la tortuga de LOGO un segmento forma con 0 un triángulo. El siguiente segmento dibujado forma con 0 otro triángulo semejante al anterior siendo la razón de semejanza 1’01. Entonces

$$\frac{r_n}{r_{n+1}} = 1'01$$



En este tipo de “espirales” el radio no se incrementa cada vez una longitud constante, sino que aumenta un porcentaje del valor anterior.

Supongamos ahora que el radio aumenta cada 10º un porcentaje del 20%, e intentemos hallar una fórmula que mida r (la línea descrita será poligonal).

$$0º \rightarrow r_0$$
$$10º \rightarrow r_0 + 0'2r_0 = r_0(1+0'2)$$
$$20º \rightarrow r_0(1+0'2) + r_0(1+0'2)0'2 = r_0(1+0'2)^2$$

Para un ángulo x (múltiplo de 10º) será:

$$r = r_0(1+0'2)^{\frac{x}{10}}$$

Intentemos hallar una expresión para cualquier valor de x, aunque no sea múltiplo de 10º.

Si dividimos el intervalo [x, x + 10] anterior en n partes, y así mismo que aproximamos cada $\frac{10}{n}$ el porcentaje de crecimiento sea $\frac{0'2}{n'}$, se tendría

$$r = r_0\left(1+\frac{0'2}{n}\right)^{\frac{nx}{10}}$$

La expresión “real” del radio debería ser

$$r = \lim_{n\to\infty} r_0 \left(1+\frac{0'2}{n}\right)^{\frac{nx}{10}} = \lim_{n\to\infty} r_0 \left[\left(1+\frac{1}{n/0'2}\right)^{\frac{n}{0'2}}\right]^{\frac{0'2x}{10}} = r_0 e^{\frac{0'2x}{10}}$$

La ecuación en polares de la espiral equiangular es:

$$r = r_0 e^{kq}$$

siendo k constante.

Expliquemos lo que significa k. Entre dos vueltas consecutivas:

$$\left.\begin{array}{l} r = r_0 e^{kq} \\ r' = r_0 e^{k(q+2p)} \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad \frac{r'}{r} = \frac{r_0 e^{k(q+2p)}}{r_0 e^{kq}} = e^{2kp} = cte.$$

Además, si fijamos un ángulo è’, se tiene $r' = r_0 e^{kq'}$, y cualquier ángulo è >è’ (è = è’ + h) verifica:

$$r = r_0 e^{kq} = r_0 e^{k(q'+h)} = r_0 e^{kq'} \cdot e^{kh} \qquad \Rightarrow \qquad r = r' e^{kh}.$$

Luego a partir del punto (è’, r’) la espiral es una copia ampliada (razón de semejanza r’) de la espiral inicial. Por eso se dice que la espiral equiangular es una curva de crecimiento armonioso.

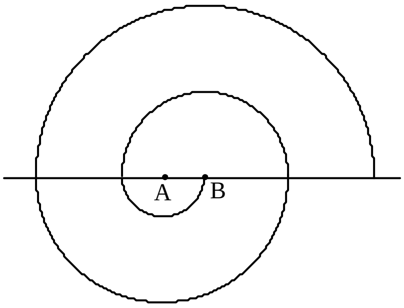
4.- OTRAS ESPIRALES.

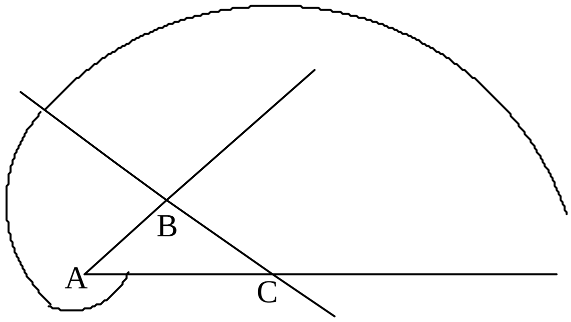
4.1. Hiperbólicas.

Cualquier ecuación en polares donde r no sea periódica (es decir, que dependa directamente de è) puede proporcionar una espiral. Por ejemplo $r = \frac{k}{q}$ representa una espiral hiperbólica, cuya forma depende mucho de los intervalos de ángulo considerado.

4.2. De dos, tres o cuatro centros o de paso $\sqrt{2}$.

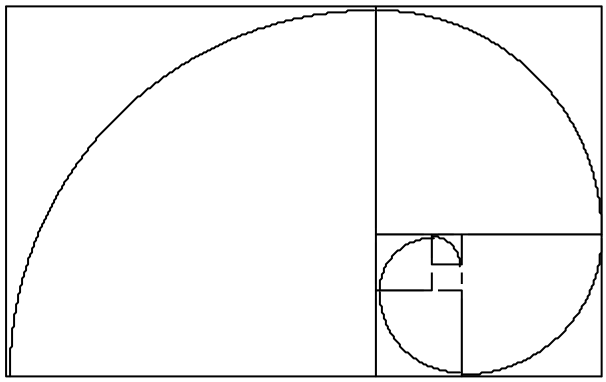
Pueden considerarse otras falsas espirales: espirales de dos centros, de tres centros , de cuatro centros, etc., o construidas mediante arcos de circunferencias cuyas longitudes y radios están en una proporción dada, por ejemplo $\sqrt{2}$, el número áureo (espiral de Durero, etc.).





4.3. Espiral de Durero

Espiral áurea o de Durero. Variantes de ella son, por ejemplo, la de paso gnómico $\sqrt{2}$, donde dos radios consecutivos están en esa proporción.



5.- HÉLICES.

La hélice es una forma muy abundante en la Naturaleza: la forma de crecimiento de las plantas trepadoras, la disposición de las brácteas de una piña, los cuernos de muchos rumiantes.

En otros casos es menos accesible pero quizás más importante: la doble hélice de la cadena de ADN.

También en la técnica se utiliza la hélice y sus propiedades: muelles, sacacorchos, tornillos, escalera de caracol, etc.

Puede considerarse la hélice como generada por un punto del espacio que gira alrededor de un eje, y se desplaza paralelamente al mismo.

Actividades:

1.- Puede construirse una hélice con una experiencia. Se coloca un cilindro de cartón hueco sujeto sobre un plato giradiscos y bien centrado. Fijamos una regla a lo largo de una de las generatrices y desplazamos el lápiz sobre el cilindro apoyado en la regla que ha de quedar fija.

2.- Como puede que el exponente anterior resulte muy pequeño, se sugiere esto otro: sobre un vaso cilíndrico gotea un poco de miel. Hay una mosca situada en otra generatriz. ¿Cuál es el camino más corto para la mosca para llegar a la miel?.

Si hacemos un desarrollo plano, vemos que dicho camino es la línea recta. Trazando de nuevo obtenemos un arco de hélice.

3.- Es posible construir una hélice trazando sobre un folio líneas paralelas a longitud constante (solo es preciso que al fabricar el cilindro casen las líneas).

5.1. Ecuaciones de la Hélice.

$$\left.\begin{array}{l} x = r\cos \boldsymbol{a} \\ y = r\sin \boldsymbol{a} \\ z = k\boldsymbol{a} \end{array}\right\}$$
$$\boldsymbol{a} \in IR$$

los puntos de la hélice están contenidos en el cilindro de ecuación $x^2 + y^2 = r^2$.

Al describir un giro completo, si P(x, y, z) es un punto de hélice para un valor á, P'(x, y, z') es un punto de la hélice situado sobre la generatriz para el valor $\boldsymbol{a} + 2\boldsymbol{p}$ siendo $z' = (\boldsymbol{a} + 2\boldsymbol{p})k$, luego el paso de la hélice es, entonces, 2ðk.

Es fácil medir la longitud de una espiral (recorrida por la hélice entre dos pasos consecutivos por la misma generatriz si recurrimos nuevamente a los desarrollos planos.

<u>Ejemplo</u>:

$$\left.\begin{array}{l} x = 3\cos \boldsymbol{a} \\ y = 3\sin \boldsymbol{a} \\ z = 2\boldsymbol{a} \end{array}\right\} \quad \text{La longitud de una espira es } L = \sqrt{36\boldsymbol{p}^2 + 16\boldsymbol{p}^2} = \sqrt{52}\boldsymbol{p}$$

<u>7.- HELICOIDES.</u>

La misma idea de hélice sugiere otra posibilidad, ¿qué ocurre cuando r no es constante y depende de á

<u>Ejemplo</u>:

$$\left.\begin{array}{l} x = a\cos a \\ y = a\sin a \\ z = a \end{array}\right\} a \in IR$$

Representa una línea, pero los puntos de L línea verifican $x^2 + y^2 - z^2 = 0$. Está por tanto contenida en un cono y recibe el nombre de helicoide.

En la Naturaleza existen numerosas muestras de helicoides, por ejemplo, en ciertos caracoles.

Estos movimientos son generados por 3 elementos: un giro alrededor del eje, una traslación vertical paralela al eje y un alejamiento del eje. Sin embargo, son muy complejas por lo que se recurre a otras técnicas. Puede ocurrir que la distancia entre espiras se mantenga a lo largo de una generatriz o que no (al igual que ocurría con las espirales).

Actividad:

Si desarrollamos el cono en el plano y dibujamos "espirales" con una plantilla polar (espirales incompletas por supuesto) al construir el cono se reproduce la helicoide (téngase en cuenta que las dos generatrices deben unir).

Bibliografía Recomendada.

No existe bibliografía matemática adecuada para un tema tan novedoso. Casi todas las actividades son repescadas de aquí y allá. Podríamos citar:

Mathemática vielle realitá de Inma Castelnuovo de 12 a 16: un proyecto de curriculo de matemáticas, grupo Cero. Publicaciones de los centros de profesores y grupos de trabajo de matemáticas.

Dibujo Técnico con varias editoriales, en especial Bruño.