TEMAS DE MATEMÁTICAS
(Oposiciones de Secundaria)

TEMA 29

EL PROBLEMA DEL CÁLCULO DEL ÁREA. INTEGRAL DEFINIDA.

TEMA 29

EL PROBLEMA DEL CÁLCULO DEL ÁREA. INTEGRAL DEFINIDA.

1. INTRODUCCIÓN.

El cálculo trata, principalmente, dos problemas geométricos:

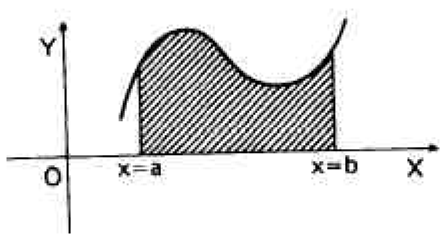
1) Encontrar la recta tangente a una curva.

2) Hallar el área limitada por una curva.

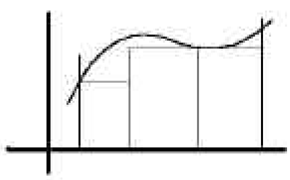
El primero lo hemos resuelto mediante un paso al límite, conocido con el nombre de diferenciación. El segundo vamos a ver que también lo resolveremos mediante un paso al límite, y lo llamaremos integración.

Hasta ahora sólo se podían calcular áreas encerradas por polígonos que se ueden formar como composición de las anteriores.

Si queremos hallar el área encerrada entre una curva $y=f(x)$, el eje OX y las rectas verticales $x=a$ y $x=b$:



lo que haremos será utilizar la idea anteriormente expuesta, es decir, vamos a usar la fórmula del área de un rectángulo para aproximar y calcular el área A.



Si sumamos el área encerrada en los rectángulos R_1, R_2 y R_3 obtendremos una aproximación del área A que en este caso será por defecto.

La pregunta es: ¿Podemos conseguir calcular el área A usando el área de rectángulos? La respuesta es afirmativa, pero para ello debemos encontrar rectángulos de base infinitesimal, es decir, rectángulos de base puntual. Así, al sumar las áreas de todos los rectángulos estamos sumando las longitudes de todas las líneas verticales que hay entre $x=a$ y $x=b$ (limitadas por el eje OX y la propia curva) y esto formará el área A.

Esta idea o concepto lo llamaremos integral de Riemann. Esto nos proporciona una idea fundamental: la integración consiste en realizar una suma.

2. DEFINICIÓN DE INTEGRAL DE RIEMANN.

2.1. PARTICIONES.

DEF Sea $[a,b] \subset R$ un intervalo cerrado. El conjunto

$$\pi = \{ x_0, x_1, \ldots, x_n \}$$

que satisface todas las desigualdades

$$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$$

recibe el nombre de partición de [a,b].

DEF Designamos por $\prod[a,b]$ al conjunto formado por todas las particiones del intervalo [a,b].

DEF Sean $\pi_1, \pi_2 \in \prod [a,b]$. Diremos que π_2 es más fina que π_1 y se denotará por $\pi_1 < \pi_2$, si todos los puntos de π_1 pertenecen a π_2 $(\pi_1 \subset \pi_2)$.

PROP La relación "más fina que" define una relación de orden en el conjunto $\prod [a,b]$.

Dem:

Trivial.

OBS Dados $\pi_1, \pi_2 \in \prod [a,b]$ se verifica que $\pi_1 \cup \pi_2$ es una partición de [a,b] siendo más fina que π_1 y que π_2.

2.2 SUMA SUPERIOR Y SUMA INFERIOR.

Dada una partición $\pi_1 \in \prod[a,b]$ con $\pi_1 = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ si para cada intervalo $[x_{i-1}, x_i]$ con i: 1,...,n llamamos:

$$m_i = \text{Inf}\{f(x) \ / \ x \in [x_{i-1}, x_i]\}$$

$$M_i = \text{Sup}\{f(x) \ / \ x \in [x_{i-1}, x_i]\}$$

entonces podemos definir:

1) Suma inferior de f(x) en la partición π_1 a:

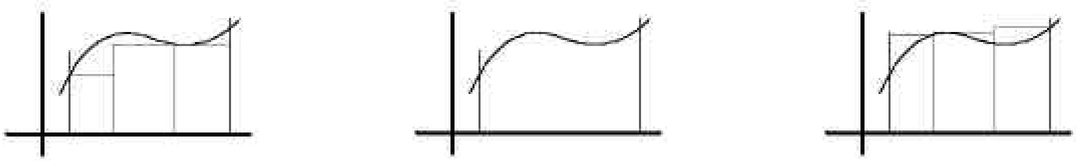
$$s(f, \pi_1) = \sum_{i=1}^{n} m_i (x_i - x_{i-1})$$

2) Suma superior de f(x) en la partición π_1 a:

$$S(f,\pi_1) = \sum_{i=1}^{n} M_i (x_i - x_{i-1})$$

y se verifica que:

$$s(f, \pi_1) \leq A \leq S(f, \pi_1)$$



DEF Llamaremos integral inferior de f(x) en [a,b] y se representa por $\int_{\underline{a}}^{b} f$ al número:

$$\int_{\underline{a}}^{b} f = \mathrm{Sup}\ \{s(f,\pi) \,/\, \pi \in [a,b]\ \}$$

DEF Llamaremos integral superior de f(x) en [a,b] y se representa por $\int_{a}^{\overline{b}} f$ al número:

$$\int_{a}^{\overline{b}} f = \mathrm{Inf}\ \{S(f, \pi) \,/\, \pi \in \prod [a,b]\}$$

PROP Sean $\pi_1, \pi_2 \in \prod$ [a,b]. Se verifica:

$$s(f, \pi_1) \leq S(f, \pi_2)$$

<u>Dem</u>

$s(f, \pi_1) \leq (f, \pi_1 \cup \pi_2) \leq S(f, \pi_1 \cup \pi_2) \leq S(f,\pi_2)$

<u>2.3. INTEGRAL DE RIEMANN.</u>

DEF Sea f:[a,b]$\rightarrow$R función acotada. Diremos que es integrable en sentido Riemann si:

$$\int_{\underline{a}}^{b} f = \int_{a}^{\overline{b}} f$$

y el número que resulta se expresa como:

$$\int_{a}^{b} f$$

PROP Sea f:[a,b]$\rightarrow$R acotada. Son equivalentes:

1) f es integrable Riemann.

2) $\forall\varepsilon>0\ \exists\pi\in\prod[a,b]\ /\ S(f,\pi) - s(f,\pi) < \varepsilon$

<u>Dem</u>

1)⇒2). Llamaremos $A=\underline{\int_a^b} f = \overline{\int_a^b} f = \int_a^b f$ y sea $\varepsilon>0$.

Como $A=\text{Sup}\{s(f,\pi)\ /\ \pi\in\prod[a,b]\} \Rightarrow$ dado $\varepsilon/2>0\ \exists\pi_2\in\prod[a,b]\ /\ A+\varepsilon/2 > S(f,\pi_2)$.

Teniendo en cuenta que $\pi_1\cup\pi_2$ es más fina que π_1 y π_2:

$A-\varepsilon/2 < s(f,\pi_1) \leq s(f,\pi_1\cup\pi_2) \leq S(f,\pi_1\cup\pi_2) < A+\varepsilon/2$

y entonces

$A-\varepsilon/2 < s(f,\pi_1\cup\pi_2) \leq S(,f\pi_1\cup\pi_2) < A+\varepsilon/2$

Llamando $\pi_1\cup\pi_2=\pi$ llegamos a que

$S(f,\pi) - s(f,\pi) < \varepsilon$

2)⇒1) Sea $\pi\in\prod[a,b]\ /\ S(f,\pi) - s(f,\pi) < \varepsilon$. Por definición $\overline{\int_a^b} f \leq S(f,\pi)$ y

$s(f,\pi) \leq \underline{\int_a^b} f$. Entonces $\overline{\int_a^b} f - \underline{\int_a^b} f < \varepsilon$.

Y como por hipótesis la desigualdad es cierta para todo ε mayor que cero, deducimos:

$$\underline{\int_a^b} f = \overline{\int_a^b} f$$

PROP Sea $f:[a,b]\to R$ una función acotada.

1) Si f es contínua ⇒ f es integrable Riemann.

2) Si f es monótonoa ⇒ f es integrable Riemann.

<u>Dem</u>

1) Para ver que f es integrable Riemann basta ver que para cada $\varepsilon>0\ \exists\pi\in\pi[a,b]$ de modo que $S(f,\pi)-s(f,\pi) < \varepsilon$. Como f es contínua en un cerrado entonces f es uniformemente contínua, luego dado $\varepsilon>0$ tomamos:

$$\varepsilon' = \frac{e}{b-a} \Rightarrow \exists d>0\ /\ |x-x'| < d \Rightarrow |f(x)-f'(x)| < e'$$

Sea $\pi\in[a,b]$ una partición para la que dos pntos consecutivos disten menos que δ:

$\pi=\{x_0,x_1,....,x_n\}$ / $|x_i-x_{i-1}|<\delta$ $\forall i:1...n$

Entonces:

$$S(f,\pi)-s(f,\pi) = \sum_{i=1}^{n} M_i(x_i-x_{i-1}) - \sum_{i=1}^{n} m_i(x_i-x_{i-1}) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n}(M_i-m_i)(x_i-x_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n}(f(\alpha_i)-f(\beta_i))(x_i-x_{i-1})$$

donde
$f(\alpha_i)$ es el valor máximo de la función en $[x_{i-1},x_i]$ y $x=\alpha i$ donde se alcanza.

$f(\beta_i)$ es el valor mínimo de la funcion en $[x_{i-1},x_i]$ y $x=\beta i$ donde se alcanza.

Como $|\alpha_i-\beta_i| < \delta \Rightarrow |f(\alpha_i)-f(\beta_i)| < \varepsilon'$

$$\leq \sum_{i=1}^{n}\varepsilon'(x_i-x_{i-1}) = \varepsilon'(b-a) = \varepsilon$$

Luego f es integrable en sentido Reimann.

2) Veamos el caso de ser f creciente (si f es decreciente la demostración es análoga). Sea $\pi\in\prod[a,b]$ una partición, $\pi=\{x_0,...,x_n\}$ y $|x_i-x_{i-1}|<\delta$ $\forall i$: 1...n.

$$S(f,\pi)-s(f,\pi) = \sum_{i=1}^{n}(M_i-m_i)(x_i-x_{i-1}) =$$

como f es monótona creciente $M_i=f(x_i)$ y $m_i=f(x_{i-1})$

$$= \sum_{i=1}^{n}(f(x_i)-f(x_{i-1}))\cdot(x_i-x_{i-1}) < \sum_{i=1}^{n}(f(x_i)-f(x_{i-1}))\cdot\delta =$$

$$=\delta\cdot\sum_{i=1}^{n}(f(x_i)-f(x_{i-1})) = \delta\cdot(f(b)-f(a)) = \varepsilon$$

Tomando $\delta = \dfrac{\varepsilon}{f(b)-f(a)}$

DEF Dada una partición $\pi\in\pi[a,b]$, llamamos suma de Riemann a cualquier suma $S(f,\pi,\tau) = \sum_{i=1}^{n} f(\tau_i)(x_i-x_{i-1})$, donde $\pi=\{x_0,...,x_n\}$ y $\tau_i\in[x_{i-1},x_i]$.

PROP Sea $f:[a,b]\to R$ una función acotada. Son equivalentes:

1) f es integrable Riemann en [a,b].

2) $\exists A\subset R$ / $\forall\varepsilon>0\ \exists\pi_0\in[a,b]$, si $\pi>\pi_0$ y consideramos una suma de Riemann de π, se verifica que:

$$|A-S(f,\pi,\tau)|<\varepsilon \text{ y además } A=\int_a^b f$$

<u>Dem</u>

1)$\Rightarrow$2). Sea $A=\int_a^b f$. Veamos que A cumple 2).

$$s(f,\pi)\leq \int_a^b f=\underline{\int_a^b} f=\overline{\int_a^b} f\leq S(f,p)\quad \forall p\in[a,b]$$

Se verifica que $s(f,\pi)\leq S(f,\pi,\tau)\leq S(f,\pi)$

Entonces:

$$|A-S(f,\pi,\tau)|\leq S(f,\pi)-s(f,\pi)$$

Como f es integrable Riemann:

Dado $\varepsilon>0\ \exists\pi_0\in\pi[a,b]$ / $S(f,\pi)-s(f,\pi)<\varepsilon$

Si $\pi>\pi_0\Rightarrow S(f,\pi)-s(f,\pi)\leq S(f,\pi_0)-s(f,\pi_0)<\varepsilon\Rightarrow|A-S(f,\pi,\tau)|\leq S(f,\pi)-s(f,\pi)<\varepsilon$

$\Rightarrow|A-S(f,\pi,\tau)|<\varepsilon$

2)$\Rightarrow$1) Veamos que $A=\overline{\int_a^b} f$ y $A=\underline{\int_a^b} f$. Para ver que $A=\overline{\int_a^b} f$ basta comprobar que dado $\varepsilon>0\ \exists\pi\in\pi[a,b]$ / $|A-S(f,\pi)|<\varepsilon$

Por 2) dado $\varepsilon>0\ \exists\pi_0\in\prod[a,b]$ / $|A-\sum_{i=1}^{n} f(t_i)(x_i-x_{i-1})|<\varepsilon/2$ y $\forall\pi>\pi_0$

$$M_i-f(\tau_i)<\frac{e}{2(b-a)}(b-a)=e/2$$

Entonces:

$$|A-S(f,\pi)|\leq|A-S(f,\pi,\tau)|+|S(f,\pi,\tau)-S(f,\pi)|<\varepsilon/2+\varepsilon/2=\varepsilon.$$

Luego $A=\overline{\int_a^b} f$.

De forma análoga se demuestra que A= $\underline{\int_a^b} f$ y por tanto A= $\int_a^b f$ siendo f integrable Riemann.

3. PROPIEDADES DE LA INTEGRAL.

PROP Sea R[a,b] el conjunto de todas las funciones integrables Riemann en [a,b].

1) Si f,g$\in$ R[a,b] $\Rightarrow$ f+g$\in$ R[a,b] y $\int_a^b (f+g) = \int_a^b f + \int_a^b g$

2) Si $\lambda\in$ R y f$\in$ R[a,b] $\Rightarrow\lambda$f$\in$ R[a,b] y $\int_a^b (lf) = l\int_a^b f$.

3)Si f$\geq$0 $\Rightarrow$ $\int_a^b f \geq 0$, y por tanto si f$\leq$g $\Rightarrow$ $\int_a^b f \leq \int_a^b g$.

Dem

1) f$\in$R[a,b] $\Rightarrow\forall\varepsilon>0$ S(f, π_1)-s(f, π_2) < ε/2 con $\pi_1\in\pi$[a,b].

g$\in$ R[a,b] $\Rightarrow$ $\forall\varepsilon>0$ S (f, π_2)-s(g, π_2) < ε/2 con $\pi_2\in\pi$[a,b].

Se verifica S(f, $\pi_1\cup\pi_2$)-s(f, $\pi_1\cup\pi_2$) < ε/2.

S(g, $\pi_1\cup\pi_2$)-s(g, $\pi_1\cup\pi_2$)<ε/2,

con $\pi_1\cup\pi_2 = \{x_0,...,x_n\}$.

Llamemos $m_i = Inf\{f(x) / x\in [x_{i-1},x_i]\}$, $M_i = Sup\{f(x) / x\in [x_{i-1},x_i]\}$,
$m_i´ = Inf\{g(x) / x\in [x_{i-1},x_i]\}$, $M_i´ = Sup\{g(x) / x\in [x_{i-1},x_i]\}$,
$m_i´´ = Inf\{f(x)+g(x) / x\in [x_{i-1},x_i]\}$, $M_i´´ = Sup\{f(x)+g(x) / x\in [x_{i-1},x_i]\}$

S(f+g,$\pi_1\cup\pi_2$)-s(f+g,$\pi_1\cup\pi_2$) = $\sum_{i=1}^{n}(M_i´´-m_i´´)(x_i - x_{i-1}) \leq$

teniendo en cuenta que:

$M_i´´\leq M_i+M_i´$
$m_i´´\leq m_i+m_i´$

$\Rightarrow M_i´´-m_i´´\leq (M_i-m_i)+(M_i´-m_i´)$

$\leq \sum_{i=1}^{n}(M_i - m_i)(x_i - x_{i-1}) + \sum_{i=1}^{n}(M_i´-m_i´)(x_i - x_{i-1}) =$ S(g,$\pi_1\cup\pi_2$)-s(g,$\pi_1\cup\pi_2$) <
<ε/2+ε/2 = ε.

Entonces f+g$\in$ R[a,b].

Veamos ahora que $\int_a^b (f+g) = \int_a^b f + \int_a^b g$.

Dado $\varepsilon>0$ como $f,g,f+g\in R[a,b]$

$\exists\pi_0\in\prod[a,b]$ / Si $\pi>\pi_0 \Rightarrow |A-S(f,\pi,\tau)|<\varepsilon/3$

$\exists\pi_0'\in\prod[a,b]$ / Si $\pi>\pi_0' \Rightarrow |B-S(g,\pi,\tau)|<\varepsilon/3$

$\exists\pi_0''\in\prod[a,b]$ / Si $\pi>\pi_0'' \Rightarrow |C-S(f+g,\pi,\tau)|<\varepsilon/3$

Consideremos $\pi=\{x_0,\dots,x_n\}$:

$S(f+g,\pi,\tau) = \sum_{i=1}^{n}(f+g)(t_i)(x_i-x_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n} f(t_i)(x_i-x_{i-1}) + \sum_{i=1}^{n} g(t_i)(x_i-x_{i-1}) = S(f,\pi,\tau)+S(g,\pi,\tau)$.

Entonces:

$|C-(A+B)| = |C-S(f+g,\pi,\tau)+S(f+g,\pi,\tau)-A+S(f,\pi,\tau)-S(f,\pi,\tau)-B+S(g,\pi,\tau)-S(g,\pi,\tau)| =$

aplicando lo anterior

$= |C-S(f+g,\pi,\tau)|+|-A\ S(f,\pi,\tau)|+|-B+S(g,\pi,\tau)| < \varepsilon/3+\varepsilon/3+\varepsilon/3 = \varepsilon$.

Luego $C=A+B \Rightarrow \int_a^b (f+g) = \int_a^b f + \int_a^b g$.

2) Sean:
$m_i = \text{Inf}\{f(x) / x\in[x_{i-1},x_i]\}$, $M_i = \text{Sup}\{f(x) / x\in[x_{i-1},x_i]\}$,
$m_i' = \text{Inf}\{\lambda f(x) / x\in[x_{i-1},x_i]\}$, $M_i' = \text{Sup}\{\lambda f(x) / x\in[x_{i-1},x_i]\}$,

Sea $\lambda\in R-\{0\}$.

$S(\lambda f,\pi)-s(\lambda f,\pi) = \sum_{i=1}^{n}(M_i'-m_i')(x_i-x_{i-1}) =$ como $M_i'-m_i' = \lambda(M_i-m_i)$ si $\lambda>0$ ó

$M_i'-m_i' = \lambda(m_i-M_i) = \sum_{i=1}^{n} l(M_i'-m_i')(x_i-x_{i-1}) = |\lambda|(S(f,\pi)-s(f,\pi))$

Dado $\varepsilon>0$ tomamos $\varepsilon'=\varepsilon/|\lambda|$ y $\exists\pi\in\pi[a,b]$ / $S(f,\pi)-s(f,\pi) < \varepsilon'$

$S(\lambda f,\pi)-s(\lambda f,\pi) \Rightarrow N(S(f,\pi)-s(f,\pi)) \le |\lambda|\cdot\varepsilon' = |\lambda|\cdot\varepsilon/|\lambda| = \varepsilon$.

Luego λf es integrable Riemann.

Si $\lambda=0 \Rightarrow \lambda f = 0$ y 0 es integrable Riemann.

Llamemos A= $\int_a^b f$ y B= $\int_a^b \lambda f$.

Sea |A-S(f, π,τ)| < ε
|B-S(λf, π,τ)|<ε

⇒ 0≤|λA-B|<2ε ∀ε≥0 λA = B y por tanto $\int_a^b \lambda f = \lambda \int_a^b f$.

3) Sea f≥0. como f es integrable Riemann $\int_a^b f = \int_a^{\bar{b}} f$ y $\int_a^{\bar{b}} f = Sup\{\sum M_i(x_i - x_{i-1})\}$

Cada sumando es mayor o igual a cero (suma de Reimann), luego el supremo también lo es. Y como la función es integrable Riemann, su integral es mayor o igual que cero.

Si f≥g ⇒ f-g ≥0 ⇒ $\int_a^b (f-g) \geq 0 \Rightarrow \int_a^b f - \int_a^b g \geq 0 \Rightarrow \int_a^b f \geq \int_a^b g$

PROP Sea f:[a,b]→R una función integrable Riemann y c∈[a,b]. Entonces:

1) $f|_{[a,c]}$: [a,c] →R es integral Reimann.

2) $f|_{[c,b]}$: [c,b] →R es integrable Reimann.

3) $\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$

<u>Dem</u>

1) $f|_{[a,c]}$:[a,c]→R.

Como f es integrable Reimann en [a,b], dado ε>0 ∃π∈∏ [a,b] / S(f,π)-s(f,π)<ε

Sea π´ =π∪{c} ⇒ S(f, π´)-s(f, π´) < ε. Por otro lado:

S($f|_{[a,c]}$, π´∩[a,c])-s($f|_{[a,c]}$,π´∩[a,c]) ≤ S(f, π´)-s(f, π´). Uniendo ambas

desigualdades obtenemos que $f|_{[a,c]}$ es integrable.

2) Análoga.

3) Inmediata

COROLARIO Si m≤f(x)≤M ∀x∈[a,b] entonces m(b-a)≤ $\int_a^b f \leq M(b-a)$

<u>Dem</u>

Si m≤f(x)≤M ⇒ $\int_a^b m \leq \int_a^b f \leq \int_a^b M$.

$$\int_a^b m = m\int_a^b 1 = m\cdot Inf\,(S(1,p)\ /\ p\in p[a,b]) = m(b-a).$$

Análogamente $\int_a^b M = M(b-a)$

Sustituyendo, obtenemos lo que se quería demostrar.

PROP Si f es integrable Riemann $\Rightarrow$ |f| es integrable Riemann y se verifica:

$$\left|\int_a^b f\right| \le \int_a^b |f|$$

<u>Dem</u>

Sabemos que si f es integrable Riemann

dado $\varepsilon>0$ $\exists\pi_0\in\pi[a,b]$ / $S(f,\pi_0)-s(f,\pi_0)<\varepsilon$

siendo $S(f,\pi_0)-s(f,\pi_0)= \sum_{i=1}^{n}(M_i - m_i)(x_i - x_{i-1}) =$ con

$m_i = Inf\{f(x)\ /\ x\in[x_{i-1},x_i]\}$
$M_i = Sup\{f(x)\ /\ x\in[x_{i-1},x_i]\}$,

Sean $t,s\in[x_{i-1},x_i]$, y $m_i' = Inf\{|f(x)|\ /\ x\in[x_{i-1},x_i]\}$ $M_i' = Sup\{|f(x)|\ /\ x\in[x_{i-1},x_i]\}$

$||f(t)|-|f(s)|| \le |f(t)-f(s)| \le M_i-m_i$ y por tanto

$$\sum_{i=1}^{n}(M_i' - m_i')(x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n}(M_i - m_i)(x_i - x_{i-1})$$

de lo que deducimos que |f| es integrable Reimann.

Sabemos que $-|f|\le f\le|f|$. Entonces $\int_a^b -|f| \le \int_a^b f \le \int_a^b |f|$ y

$-\!-\int_a^b |f| \le \int_a^b f \le \int_a^b |f|$ y obtenemos $\left|\int_a^b f\right| \le \int_a^b |f|$.

PROP Sea f integrable riemann y sea $c\in[a,b]$. Si dado un escalar α, definimos:

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & x\ne c \\ \boldsymbol{a} & x = c \end{cases}$$

entonces $\tilde{f}$ es integrable Riemann y $\int_a^b \tilde{f} = \int_a^b f$.

Dem

Como f∈ R[a,b] ⇒ ∃π_0∈∏ [a,b] / S(f, π_0)-s(f, π_0) < ε/2.

$$S(\tilde{f},\pi)-s(\tilde{f},\pi) = \sum_{i=1}^{n}(M_i' - m_i')(x_i - x_{i-1}) = \sum_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{n}(M_i - m_i)(x_i - x_{i-1}) +$$

$$+(M_j - m_j)(x_j - x_{j-1}) \leq$$

siendo c∈ [x_{j-1},x_j] para algún j∈ {1,...,n}.
≤ε/2 + ε/2 = ε.

ya que $(M_j' - m_j')(x_j - x_{j-1}) < e/2$ eligiendo x_{j-1} y x_j suficientemente cerca.

Veamos ahora que ambas integrales son iguales:

$$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f \quad \text{y} \quad \int_a^b \tilde{f} = \int_a^c \tilde{f} + \int_c^b \tilde{f}$$

$\left|\int_a^c \tilde{f} - \int_a^c f\right|$ es igual al último rectángulo, y se podrá hacer tan pequeño como se quiera, por tanto ambas integrales son iguales.

Análogamente se demuestra que:

$$\int_c^b \tilde{f} = \int_c^b f$$

llegando así a comprobar que:

$$\int_a^b \tilde{f} = \int_a^b f$$

Este resultado nos viene a demostrar que dos funciones que se diferencien en un punto y una de ellas sea integrable, la otra también lo es y la integral coincide.

El resultado puede extenderse a que si f es integrable Riemann y se modifica en un número finito de puntos, la nueva función también es integrable y ambas integrales son la misma.

PROP Sean f,g∈ R[a,b]⇒fg∈ R[a,b]

Dem

La demostración la vamos a realizar en varios pasos.

1) Caso f=g≥0

$S(f^2,\pi)-s(f^2,\pi) < s(f^2,\pi)<\varepsilon$

Sea f: $[a,b]\to R$ acotada (por ser integrable Riemann)

entonces $|f(x)|\leq k$.

Como f es integrable Riemann

dado $\varepsilon>0$ $\exists\pi\in\prod[a,b]$ / $S(f, \pi) - s(f, \pi) <\varepsilon/2k$

siendo $S(f^2, \pi) - s(f^2, \pi) =$
$$\sum_{i=1}^{n}(M_i{}'-m_i{}')(x_i-x_{i-1})=\sum_{i=1}^{n}(M_i{}^2-m_i{}^2)(x_i-x_{i-1})=\sum_{i=1}^{n}(M_i-m_i)(M_i+m_i)(x_i-x_{i-1})\leq$$

Como $f\geq0$ $M_i+m_i \leq 2k$

$$\leq 2k\sum_{i=1}^{n}(M_i-m_i)(x_i-x_{i-1})=2k(S(f,p)-s(f,p))<2k\frac{e}{2k}=e$$

Luego f^2 es integrable Riemann siempre que $f\geq0$. O expresado para cualquier f:

$|f^2|$ es integrable Riemann (ya que $|f(x)|\geq0$).

2) Caso f=g.

f^2 es integrable Riemann ya que $f^2=|f|\cdot|f| = |f|^2$ y $|f|^2\in R[a,b]$

3) Caso $(f+g)^2$

Como $f,g\in R[a,b] \Rightarrow f+g\in R[a,b]$ y por el caso anterior $(f+g)^2\in R[a,b]$.

Pero si $(f+g)^2\in R[a,b] \Rightarrow$ podemos expresar $f\cdot g = \frac{1}{2}((f+g)^2-f^2-g^2)$, y como $f^2\in R[a,b]$, $g^2\in R[a,b]$ y $(f+g)^2\in R[a,b]$ obtenemos que $f\cdot g\in R[a,b]$.

TEOREMA. Teorema de Lebesgue.

Sea f: $[a,b]\to R$ acotada y D el conjunto de las discontinuidades de f en [a,b]. Entonces son equivalentes:

1) $f\in R[a,b]$.

2) D tiene medida cero.

<u>Dem</u>

1) $\Rightarrow$ 2)

Supongamos que D no tiene medida cero. Vamos a demostrar que f no es integrable legando a una contradicción.

Podemos escribir D como una reunión numerable de conjuntos D= $\bigcup_{C=1}^{n} D_r$ donde

$D_r=\{x\in [a,b]\ /\ w_f(x)\geq 1/r\}$ y $w_f(x) = \lim_{h\to 0+}f(x+h)-\lim_{h\to 0-}f(x+h)$ llamada

oscilación de f en x. Si $x\in D \Rightarrow w_f(x)>0$ luego D es la unión de los conjuntos D_r

con r=1,2,...

Si D no tiene medida cero $\Rightarrow \exists r_0$ / D_{ro} no tiene mediad cero. Por tanto existe un cierto $\varepsilon>0$ para el que cualquier colección numerable de intervalos abiertos que recubra D_{ro} tendrá una suma de longitudes $\geq\varepsilon$.

Dada $\pi\in\prod[a,b]$ tenemos que:

$$S(f,\pi) - s(f,\pi) = \sum_{i=1}^{n}(M_i - m_i)(x_i - x_{i-1}) = S_1 + S_2 \geq S_1$$

con S_1 que contine los términos que provienen de subintervalos que en su interior contienen puntos D y S_2 contiene los términos restantes.

Los intervalos abiertos de S_1 recubren D_{ro}, excepto un subconjunto finito en D_r, de medida cero, luego la suma de sus longitudes es por lo menos ε. Pero en estos intervalos tenemos:

$M_k(f) - m_k(f) \geq 1/r \quad\Rightarrow\quad S_1\geq \varepsilon/r$

y eso significa que

$S(f,\pi)-s(f,\pi) \geq\varepsilon/r$

para cada $\pi\in\prod[a,b]$.

Por tanto f no es integrable Riemann.
Como llegamos a una contradicción, nuestra suposición es falsa y D tiene medida cero.

2) $\Rightarrow$ 1) Supongamos que D tiene medida cero.

Sea D = $\bigcup_{r=1}^{n} D_r$, siendo D_r los mismos que antes. Como $D_r\subset D$ $\forall r$:1,...,n $\Rightarrow$ D_r tiene medida 0 $\forall r$: 1,...,n $\Rightarrow$ $\forall r$: 1,...,n D_r se puede recubrir por medio de intervalos abiertos cuyas longitudes sean <1/r.

Como D_r es compacto, se puede recubrir mediante una cantidad finita de dichos abiertos. La unión de esos abiertos la llamaremos A_r.

Sea $B_r = [a,b] - A_r$ su complementario $\Rightarrow$ B_r es la unión de un número finito de

subintervalos cerrados de [a,b].

Sea I un subintervalo típico de B_r. Si $x\in I \Rightarrow$ se verifica $w_f(x) < 1/r$ entonces $\exists\delta_r>0$ tal que I puede ser subdivido en un número finito de subintervalos T de longitud menor que δ_r que verifican $\Omega_f(T) < 1/r$ siendo $\Omega_f(T)$ $\sup\{w_f(x) / x\in T\}$

Los extremos de todos esos subintervalos definen $\pi_r\in\prod[a,b]$.

Sea $\pi>\pi_r \Rightarrow S(f, \pi) - s(f, \pi) = \sum_{i=1}^{n}(M_i - m_i)(x_i - x_{i-1}) = S_1 + S_2$ donde S_1 contine los términos que provienen de los subintervalos que contien puntos de D_r y S_2 contiene los términos restantes. En el k-ésimo término de S_2 tenemos:

$M_k-m_k < 1/r \quad \Rightarrow \quad S_2 < (b-a)/r$

Como A_r recubre todos los intervalos que intervienen en S_1 tenemos:

$$S_1 \leq \frac{M-m}{r}$$

donde m= Inf $\{f(x) / x\in[a,b]\}$ y M=Sup $\{f(x) / x\in[a,b]\}$

por consiguiente

$$S(f, \pi)-s(f, \pi) < \frac{M-m+b-a}{r}$$

Como esto es cierto $\forall r\geq 1 \Rightarrow$ La condición de Riemann se verifica y $f\in R[a,b]$

c.q.d.

DEF Diremos que una propiedad se verifica "casi en todo" $A\subset R$ si se verifica en todo A salvo en un conjunto de medida cero.

El teorema de Lebesgue establece que dada f acotada en [a,b].

$f\in R[a,b] \Leftrightarrow$ f es contínua casi en todo [a,b]

Ejemplos:

1) $f_1(x)=\begin{cases} 0 & si \quad x\in Q \\ 1 & si \quad x\notin Q \end{cases}$ $\qquad f_1:[0,1]\rightarrow R.$

Sabemos que $f_1(x)$ no es continua en ningún punto. Entonces, el conjunto de discontinuidades D=[0,1]. Como D no tiene medida cero ⇒ f_1 es integrable.

2) $f_2(x)=\begin{cases} 0 \;\; si \;\; x \notin Q \\ 1/q \;\; si \;\; x \in Q \; con \;\; x = p/q \;\; irreducible \end{cases}$

$f_2(x)$: [0,1] → R. Sabemos que $f_2(x)$ es contínua en $Q^c \cap [0,1]$. Entonces, el conjunto de discontinuidades $D=Q\cap[0,1]$ es numerable, y por tanto, es de medida cero.

f_2 es integrable.

TEOREMA. Teorema del valor medio.

Sea f continua en [a,b] entonces $\exists \xi \in [a,b]$ / $\int_a^b f(x)dx = f(x)(b-a)$.

Dem

Como f es continua en [a,b] ⇒ $f\in R[a,b]$.

Sean M=max $\{f(x) / x\in [a,b]\}$ y m=Min{f(x)/x[a,b]}.

Entonces:

$m\leq f(x)\leq M \Rightarrow m(b-a) = \int_a^b m \leq \int_a^b f \leq \int_a^b M = M(b-a)$

y tenemos $m\leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f \leq M$ y como f es continua en [a,b], alcanza todos los valores entre M y m.

Por tanto $\exists \xi \in [a,b]$ / $f(\xi) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f$

4. TEOREMA FUNDAMENTAL DEL CÁLCULO Y REGLA DE BARROW.

TEOREMA. Primer teorema fundamental del cálculo.

Sea $f\in R[a,b]$. Para cada $x\in [a,b]$ definimos:

$F(x) = \int_a^x f$

entonces se verifica:

1) F es continua en [a,b].

2) Si f es continua en c∈[a,b] ⇒ F es derivable en c y F´(c)=f(c).

<u>Dem</u>

1) Para demostrar que F es contínua en [a,b] lo haremos comprobando que es continua en un punto cualquiera c∈[a,b].

$$|F(x)-F(c)| = \left|\int_a^x f - \int_a^c f\right| = \left|\int_c^x f\right| \leq \int_c^x |f| \leq \int_c^x M = M(x-c)$$

Tomando δ= ε/M tenemos

∀ε>0 ∃δ>0 / |x-c|<δ ⇒ |F(x)-F(c)|<ε

Luego F es continua en [a,b].

2) Si f es continua en c:

$$f(c) = \lim_{h\to 0} \frac{F(c+h)-F(c)}{h} \Leftrightarrow \lim_{h\to 0}\left|\frac{F(c+h)-F(c)}{h} - f(c)\right| = 0$$

$$\left|\frac{\int_a^{c+h} f - \int_a^c f}{h} - f(c)\right| = \left|\frac{\int_c^{c+h} f}{h} - f(c)\right| = \left|\frac{\int_c^{c+h} f - h\cdot f(c)}{h}\right| = \left|\frac{\int_c^{c+h} f - \int_c^{c+h} f(c)}{g} = \right|$$

$$\left|\frac{\int_c^{c+h} (f - f(c))}{h}\right| = \frac{\left|\int_c^{c+h} f - f(c)\right|}{|h|} \leq \frac{\left|\int_c^{c+h} |f - f(c)|\right|}{|h|} \leq \frac{\left|\int_c^{c+h} M\right|}{|h|} \leq \frac{M\cdot|h|}{|h|} = M$$

Siendo M=Sup{|f(x)-f(c)| / x∈[c,c+h]}.

Como f(x) es continua en x=c

∀ε>0 ∃δ>0 / |x-c| < δ ⇒ |f(x)-f(c)| < ε

o lo que es lo mismo M≤ε.

Luego ∀ε>0 ∃δ>0 / |h|<δ ⇒ $\left|\frac{F(c+h)-F(c)}{h}\right| < e$ y por tanto F´(c)=f(c).

DEF Una función g se dice que es una primitiva de f si g es derivable y su derivada g´=f.

TEOREMA. Segundo teorema fundamental del cálculo.

Si f es integrable en [a,b] y F es una primitiva de f, entonces

$$\int_a^x f(t)dt = F(x) - F(a) \qquad \forall x \in [a,b]$$

Dem

Sea $x \in [a,b] \Rightarrow$ f es integrable en $[a,x]$ y sea $\pi \in \prod[a,x]$ con $\pi = \{a=x_0,\dots,x_n=x\}$

Aplicando el teorema del valor medio a F en $[x_{i-1},x_i]$.

$F(x_i)-F(x_{i-1}) = F'(\xi_i)(x_i-x_{i-1}) \qquad$ con $\quad \xi_i \in (x_{i-1},x_i)$

o lo que es lo mismo

$F(x_i)-F(x_{i-1}) = f(\xi_i)(x_i-x_{i-1}), \qquad$ con $\xi_i \in (x_{i-1}-x_i)$

Entonces:

$m_i(x_i-x_{i-1}) \le F(x_i)-F(x_{i-1}) \le M_i(x_i-x_{i-1}) \qquad \forall i: 1,\dots,n$

por tanto sumando todas las desigualdades para i: 1,...,n

$s(f,\pi) \le F(x)-F(a) \le S(f,\pi) \qquad \forall \pi \in \prod[a,b]$

y como $f \in R[a,b]$ se deduce que

$$\int_a^x f = F(x) - F(a)$$

COROLARIO. Regla de Barrow.

Sea f integrable en [a,b] y F una primitiva de f. Se cumple:

$$\int_a^b f = F(b) - F(a)$$

Dem

Inmediata.

5. DERIVACIÓN DE UNA FUNCIÓN DEFINIDA MEDIANTE UNA INTEGRAL.

Puede ocurrir que nos definan una función mediante una integral:

$$F(x) = \int_{h(x)}^{g(x)} f(t)dt$$

y que nos pidan que estudiemos las propiedades de esa función, extremos, crecimiento, decrecimiento, puntos de inflexión, etc. En este caso nos veríamos en la obligación de tener que derivar F(x) y por lo tanto necesitamos saber como hacerlo.

TEOREMA. Sea f: R→R una función real de variable real, tal que su primitiva viene definida por T(x), es decir, T´(x)=f(x). Entonces si definimos:

$$F(x) = \int_{h(x)}^{g(x)} f(t)dt$$

se verifica que:

$$F´(x) = f(g(x))\cdot g´(x)-f(h(x))h´(x).$$

<u>Dem</u>

F(x) = $\int_{h(x)}^{g(x)} f(t)dt = [T(t)]_{h(x)}^{g(x)} = T(g(x)) - T(h(x))$ entonces si queremos derivar F(x) se tiene que:

F´(x) = (T(g(x))-T(h(x)))´ = (T(g(x)))´ - (T(h(x)))´ = {aplicando la regla

de la cadena}= T´(g(x))·g´(x) - T´(h(x))h´(x) = {aplicando que T´(x)=f(x)} =

= f(g(x)) g´(x) - f(h(x))h´(x).

Por lo tanto:

F´(x) = f(g(x))g´(x) - f(h(x))h´(x).

Como hemos visto en el teorema anterior, podemos derivar una función definida mediante una integral, sin necesidad de tener que hacer la integral, si no que lo único que debemos hacer es evaluar la función en los límites de integración y estos a su vez derivarlos.

Ejemplo:

º F(x) = $\int_0^{x^2} sentdt$ entonces tenemos que:

F´(x) = senx^2·2x - sen 0 ·0 ⇒ F´(x) = 2xsenx^2

º Calcular los extremos relativos de la función definida por:

F(x) = $\int_0^{x^4} e^{-t^2} dt$, derivando tenemos que:

F´(x) = $e^{-x8}4x^3$-0 = $4x^3e^{-x8}$ ⇒ F´(x)=0 ⇒ $4x^3e^{-x8}$=0 ⇒ x^3=0 ⇒ x=0 Punto crítico

F´(x) = $4x^3e^{-x8}$ como $4e^{-x8}$ >0 ∀x ⇒ el signo viene dado por x^3 ⇒ F´(x)>0 ∀x>0

y F´(x)<0 ∀x<0 ⇒ tenmos un mínimo en x=0.

<u>6. SUMAS DE RIEMANN.</u>

Como ya hemos visto anteriormente la integral definida se define como la suma de áreas de rectángulos cuando las bases de los rectángulos tienden a cero, es decir, cuando la partición tiende a ser la más fina posible. Entonces si tenemos un límite cuando n tiende a infinito de un sumatorio en el que la sucesión se puede expresar como el producto de una sucesión que tiende a cero (b_n) y que representa a la base de los rectángulos, por otra que representa a las alturas de los rectángulos ($f(j_n)$) entonces podemos transformar esa expresión en una integral de la función f(x), es decir:

$$\lim_{n\to+\infty}\sum_{j=1}^{n} b_n f(j_n) = \int_a^b f(x)dx \quad donde \quad a \le j_n \le b$$

Ejemplo: calcular:

$$\lim_{n\to+\infty}\sum_{j=1}^{n}\frac{n}{n^2+j^2}$$

$$\lim_{n\to+\infty}\sum_{j=1}^{n}\frac{n}{n^2+j^2} = \lim_{n\to+\infty}\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{n}\frac{n^2}{n^2+j^2} = \lim_{n\to+\infty}\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{n}\frac{1}{\frac{n^2}{n^2}+\frac{j^2}{n^2}} =$$

$= \lim_{n\to+\infty}\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{n}\frac{1}{1+\left(\frac{j}{n}\right)^2}$ entonces tomando como $b_n=1/n$ la base de los rectángulos y como $f\left(\frac{j}{n}\right)=\frac{1}{1+\left(\frac{j}{n}\right)^2}$ la altura de los rectángulos, tenemos que como j/n está entre 0 y 1:

$$\lim_{n\to+\infty}\sum_{j=1}^{n}\frac{n}{n^2+j^2} = \int_0^1\frac{1}{1+x^2}dx = [arctg]_0^1 = arctg1 - arctg0 = \pi/4.$$

Por lo tanto:

$$\lim_{n\to+\infty}\sum_{j=1}^{n}\frac{n}{n^2+j^2} = \frac{\pi}{4}$$

7. INTEGRALES IMPROPIAS.

No podemos terminar el problema del cálculo del área sin antes plantearnos la siguiente pregunta: ¿qué pasaría si el conjunto que encierra el área que queremos calcular no es acotado?

La respuesta a esta pregunta viene dada por la definición de un tipo especial de integrales que son las integrales impropias, y de las cuales hay dos tipos que ahora veremos. Con estas integrales lo que pretendemos ver es si el área encerrada es finita o infinita y en caso de que sea finita la calcularemos. Si el área es finita se diría que la integral es convergente y si es infinita que la integral es divergente.

Tipos de integrales impropias:

1) **Integral impropia de primera especie:** se produce una integral impropia de primera especie cuando queremos calcular la integral a lo largo de un rayo, es decir, cuando alguno de los límites de integración es +∞ ó -∞.

   Ejemplo:

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}\,dx = \lim_{t\to+\infty} \int_1^{t} \frac{1}{x^2}\,dt = \lim_{t\to+\infty} \left[-\frac{1}{x}\right]_1^t = \lim_{t\to+\infty} \left(\frac{-1}{t}+1\right) = 1$$

2) **Integral impropia de segunda especie:** se produce cuando la función presenta una asíntota vertical en alguno de los puntos del intervalo de integración.

   Ejemplo:

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = \lim_{t\to 0^+} \left[2\sqrt{x}\right]_t^1 = \lim_{t\to o^+} (2-2\sqrt{t}) = 2.$$

Bibliografía Recomendada.

Análisis Matemático I. Aut. J.A. Fernández Viña. Ed. Tecnos

Lecciones de Cálculo Infinitesimal I. Aut. R. Molina Legaz, M. Franco. Ed. Universidad de Murcia.

Principios de Análisis Matemático. Aut. W. Rudin. Ed. McGraw-Hill

Curso de Análisis Matemático I. Aut. E.L. Luna. Ed. Edunsa, 1991.

Calculus. Aut. M. Spivak. Ed. Reverté.

Análisis Matemático. Aut. M. de Guzmán, B. Rubio. Ed. Pirámide.

Calculus. Aut. Apostol. Ed. Reverté