TEMAS DE MATEMÁTICAS
(Oposiciones de Secundaria)

TEMA 28

ESTUDIO GLOBAL DE FUNCIONES. APLICACIONES A LA REPRESENTACIÓN GRÁFICA DE FUNCIONES.

TEMA 28

ESTUDIO GLOBAL DE FUNCIONES. APLICACIONES A LA REPRESENTACIÓN GRÁFICA DE FUNCIONES.

1. INTRODUCCIÓN.

En los dos temas anteriores hemos estudiado propiedades de las funciones como la continuidad, derivabilidad, crecimiento, decrecimiento, curvatura, etc, todas ellas a nivel local. En este tema tratamos esas mismas propiedades pero a nivel global de la función.

El desarrollo que vamos a realizar del tema será similar al que sigue cuando queremos realizar el estudio y representación de una función.

2. DOMINIO

DEF Sea f: A $\to$ ℝ una función real de variable real. Llamemos grafo de f, y se denota por G(f), al conjunto de pares de la forma (x, f(x)). Es decir:

$$G(f) = \{ (x, f(x)) \}$$

La definición anterior nos obliga a tener en cuenta para que valores $x \in A$ existe su imagen mediante f. Ello es debido a que no se verifica que para todo elemento x de A existe f(x). Por tanto nos vemos obligados a definir un conjunto formado por aquellos elementos de A para los cuales exista f(x).

DEF Sea f: A $\to$ ℝ una función real de variable real y $A \subset \mathbb{R}$. Llamamos dominio de f, y lo representamos por Dom(f) al conjunto formado por los elementos de A para los cuales existe f(x).Es decir:

$$Dom(f) = \{ x \in A \ / \ \exists f(x)\}$$

Teniendo en cuenta esta definición podemos redefinir el conjunto grafo de f como:

$$G(f) = \{ (x, f(x)) \ / \ x \in Dom(f)\}$$

PROP Sean f,g: A $\to$ ℝ dos funciones reales de variables real y $A \subset \mathbb{R}$. Se verifican las siguientes propiedades:

1) $Dom(f \pm g) = Dom(f) \cap Dom(g)$
2) $Dom(f \cdot g) = Dom(f) \cap Dom(g)$
3) $Dom(f / g) = Dom(f) \cap (Dom(g) - \{x \in Dom(g) / g(x) = 0\})$
4) $Dom(g \circ f) = \{x \in Dom(f) / f(x) \in Dom(g)\}$

<u>Dem.</u>

Inmediata.

3. CONTINUIDAD

DEF Una función f: A $\to \mathbb{R}$ real de variable real es continua en $x_0 \in A$ si se verifica:

1) $x_0 \in Dom(f)$
2) $\exists \lim_{x \to x_0} f(x)$ ($\Leftrightarrow$ los limites laterales existen y son iguales)
3) $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$

DEF Diremos que la función f: A $\to \mathbb{R}$ real de variable real es continua en todo su dominio si es continua en x, $\forall x \in Dom(f)$.

A la vista de las dos definiciones anteriores nos podemos plantear la siguiente pregunta: ¿Cuándo una función no es continua en un punto? La respuesta sería cuando no se verifique alguna de las tres condiciones de la primera definición.

Sea f: A $\to \mathbb{R}$ una función real de variable real y $x_0 \in A$.

DEF Diremos que f presenta una discontinuidad evitable en $x=x_0$ si existe $\lim_{x \to x_0} f(x)$ pero no existe $f(x_0)$.

OBS Recibe el nombre de discontinuidad evitable ya que se podría evitar si definimos $f(x_0)$ como

$$f(x_0) = \lim_{x \to x_0} f(x)$$

DEF Diremos que f presenta una discontinuidad inevitable de salto finito en $x=x_0$ si existen $\lim_{x \to x_0^-} f(x)$ y $\lim_{x \to x_0^+} f(x)$ y son finitos pero distintos.

DEF Diremos que f presenta una discontinuidad inevitable de salto infinito en $x=x_0$ si alguno de los limites laterales no existe o es infinito.

4. PUNTOS DE CORTE CON LOS EJES.

Sea f: A $\to \mathbb{R}$ una función real de variable real. Sabemos que el eje de abcisas tiene por ecuación y=0, por tanto, los puntos de la función que cortan al dicho eje son aquellos que verifican la ecuación:

$$f(x)=0.$$

Si $0 \in Dom(f)$ entonces la función f también intersectará con el eje de ordenadas, siendo (0, f(0)) el punto de corte.

5. SIMETRIAS

DEF Sea f: A ℝ una función real de variable real. Diremos que f es una función simétrica respecto de un cierto eje vertical x=a si se verifica:

$$f(a+x) = f(a-x) \quad \forall x \in dom(f).$$

Si a=0 entonces f es simétrica respecto del eje de ordenadas y recibe el nombre de función simétrica par, verificándose:

$$f(x) = f(-x) \quad \forall x \in dom(f).$$

Ser simétrica respecto de un eje vertical x=a, geométricamente significa que si doblamos el plano respecto de dicho eje ambos trozos de la gráfica se superponen (coinciden).

DEF Sea f: A ℝ una función real de variable real. Diremos que f tiene simetría impar si se verifica:

$$f(-x) = -f(x) \quad \forall x \in dom(f).$$

Geométricamente, que la función tenga simetría impar significa que si doblamos el plano respecto del eje de ordenadas y a continuación respecto del eje de abcisas, las gráficas se superponen. También se conoce como ser simétrica respecto del origen de coordenadas.

En general, para que una función f: A IR sea simétrica, par o impar, debe cumplirse como condición necesaria que el conjunto Dom(f) sea simétrico respecto del punto x=0.

OBS Nunca vamos a encontrar una función que tenga una gráfica que sea simétrica respecto de un eje horizontal, ya que en ese caso existirían valores de x pertenecientes al dominio de f que tendrían mas de una imagen, lo que entra en conflicto con la propia definición de función. Este es el caso que nos encontramos con las gráficas de la circunferencia, la elipse, la hipérbole, etc, que no se pueden expresar como funciones.

6. PERIOCIDAD

DEF Sea f: A ℝ una función real de variable real. Diremos que f es una función periódica si existe una constante T>0 tal que f(x + T) = f(x) $\forall x \in dom(f)$. Llamaremos periodo de la función f a la menor de dichas constantes.

Si una función es periódica de periodo T, para representarla gráficamente sólo es necesario hacerlo en un intervalo de la forma [x, x + T], ya que el resto de la gráfica consiste en repetir la representación anterior a lo largo del dominio.

Ejemplo

Las funciones f(x)=Sen x, f(x)=Cos x y f(x)=Tg x son periódicas de periodo 2ð, 2ð, ð respectivamente.

La función f(x)=Sen 2x es periódica de periodo ð ya que:

f(x + ð) = Sen (2(x + ð)) = Sen (2x + 2ð) = Sen 2ð = f(x)

7. ASÍNTOTAS

DEF Diremos que un punto se aleja infinitamente sobre una curva cuando su abcisa o su ordenada o ambas coordenadas crecen infinitamente. Podemos afirmar que el punto recorre una rama infinita.

DEF Si al recorrer un punto P una rama infinita la recta OP tiende a una posición límite, entonces esa recta límite y sus paralelas definen una dirección asíntota.

DEF Llamaremos a la recta r asíntota de la curva y = f(x) si su dirección es una dirección asíntota de la curva y la distancia de un punto P a la recta r tiende a cero cuando P se aleja infinitamente.

7.1. Asíntotas Horizontales.

DEF Llamaremos Asíntota Horizontal de f(x) a la recta y = K = cte. que verifica una de las dos condiciones siguientes:

1) $\lim_{x \to +\infty} f(x) = K$

2) $\lim_{x \to -\infty} f(x) = K$

El estudio de las asíntotas horizontales cuando $x \to +\infty$ es independiente de cuando $x \to -\infty$, por tanto no tiene porque existir asíntota por ambos lados simultáneamente ni tiene porque ser la misma en los dos lados.

PROP Sea f: $\mathbb{R}$ $\mathbb{R}$ una función real de variable real. Cuando x tiende a $+\infty$ la asíntota horizontal, en caso de existir, es única.

Dem.

Supongamos que f(x) presenta dos asíntotas horizontales en y = K e y = K’, con K $\neq$ K’, cuando x tiende a $+\infty$. Entonces, por definición

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = K$ y $\lim_{x \to +\infty} f(x) = K'$

Pero obtenemos una contradicción ya que el límite, al existir, es único. Por tanto, K = K’ y la asíntota horizontal es única.

PROP Sea f: $\mathbb{R}$ $\mathbb{R}$ una función real de variable real. Cuando x tiende a $-\infty$ la asíntota horizontal, en caso de existir, es única.

Dem.

Análoga a la anterior.

Ejemplos

1) f(x) = arctg x

$$\lim_{x \to +\infty} arctgx = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \text{ Presenta A.H. en y=} \frac{\pi}{2}$$

$$\lim_{x \to -\infty} arctgx = \frac{-\pi}{2} \Rightarrow \text{ Presenta A.H. en y=} -\frac{\pi}{2}$$

2) f(x) = $\frac{\ln x}{x}$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{1/x}{1} = 0 \Rightarrow \text{ Presenta A.H. en y = 0}$$

$$\neg\exists \lim_{x \to -\infty} \frac{\ln x}{x} \Rightarrow \text{ No tiene A.H.}$$

3) f(x) = e^{-x^3}

$$\lim_{x \to +\infty} e^{-x^3} = 0 \Rightarrow \text{ Presenta A.H. en y=0}$$

$$\lim_{x \to -\infty} e^{-x^3} = +\infty \Rightarrow \text{ No presenta A.H.}$$

7.2. Asíntotas Verticales.

DEF Sea f: $\mathbb{R}$ $\mathbb{R}$ una función real de variable real. Llamamos Asíntota Vertical de f(x) a la recta x=a si se verifica alguna de las condiciones siguientes:

1) $\lim_{x \to a^-} f(x) = -\infty$ 2) $\lim_{x \to a^-} f(x) = +\infty$

3) $\lim_{x \to a^+} f(x) = -\infty$ 4) $\lim_{x \to a^+} f(x) = +\infty$

También podríamos haber dado como definición de asíntota vertical la siguiente:

"Una función f(x) tiene como asíntota vertical la recta x=a si presenta en el punto x=a una discontinuidad inevitable de salto infinito."

Es probable, aunque no obligatorio, encontrar asíntotas verticales en los puntos de adherencia del conjunto dom(f) que no pertenecen al interior de dom(f).

Igualmente, si la función está definida a trozos, también hemos de buscar posibles asíntotas verticales en los puntos de cambio de trozo.

Ejemplos

1) $f(x) = \begin{cases} x & si\ x \leq 0 \\ \ln x & si\ x > 0 \end{cases}$

$\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^-} x = 0 \Rightarrow$ No presenta A.V.
$\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} \ln x = -\infty \Rightarrow$ Presenta A.V. en x=0

2) f(x) = $\dfrac{\ln x}{x}$

Dom(f) = (0, $+\infty$)

Sólo podemos estudiar la existencia de asíntota vertical a la derecha de x= 0

$\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{\ln x}{x} = -\infty \Rightarrow$ Presenta A.V. a la derecha de x=0

3) f(x) = $e^{-\frac{1}{(x-1)^2}}$

Dom(f) = $\mathbb{R} - \{1\}$

$\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^-} e^{-\frac{1}{(x-1)^2}} = e^{-\infty} = 0$

$\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^+} e^{-\frac{1}{(x-1)^2}} = e^{-\infty} = 0$

Por tanto no existe asíntota vertical por ninguno de los lados.

7.3 Asíntotas Oblicuas.

DEF Sea f: $\mathbb{R}$ $\mathbb{R}$ una función real de variable real. Diremos que f presenta una Asíntota de ecuación y = mx+n con m,n$\in \mathbb{R}$ m$\neq$ 0, llamada asíntota oblicua, si verifica una de las dos condiciones siguientes:

1) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = m$ y $\lim\limits_{x \to +\infty} (f(x) - mx) = n$

2) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{f(x)}{x} = m$ y $\lim\limits_{x \to -\infty} (f(x) - mx) = n$

El estudio de la existencia de asíntota oblicua cuando x tiende a $+\infty$ es independiente del que se realiza cuando x tiende a $-\infty$, y no tienen por qué existir asíntotas por ambos lados ni ser iguales.

PROP Sea f: $\mathbb{R}$ $\mathbb{R}$ una función real de variable real. La asíntota oblicua de f(x) cuando x tiende a $+\infty$, en caso de existir, es única.

<u>Dem.</u>

La demostración se realiza de forma análoga a la que vimos con asíntotas horizontales, basándonos en la unicidad del límite.

PROP Sea f: $\mathbb{R}$ $\mathbb{R}$ una función real de variable real. La asíntota oblicua de f(x) cuando x tiende a $-\infty$, en caso de existir, es única.

<u>Dem.</u>

Igual que la anterior.

Otra consecuencia que podemos deducir de la unicidad del límite es que las asíntotas horizontales y oblicuas de f(x) por el mismo lado ($x \to +\infty$ ó $x \to -\infty$) son mutuamente excluyentes. La existencia de una de ellas impide la existencia de la otra.

<u>Ejemplo.</u>

$$f(x) = \frac{x^3+1}{x^2}$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{x^3+1}{x^2}}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^3+1}{x^3} = 1 \Rightarrow m = 1$$

$$\lim_{x\to+\infty} (f(x)-x) = \lim_{x\to+\infty} (\frac{x^3+1}{x^2} - x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^3+1-x^3}{x^2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x^2} = 0 \Rightarrow n = 0$$

Existe asíntota oblicua cuando $x \to -\infty$ en y = x

<u>8. REGIONAMIENTO</u>

Utilizando todos los datos obtenidos hasta este momento, en este paso se trata de localizar las regiones del plano en las que se va a situar la gráfica de la función, de manera que podamos aclarar aún más su forma. Por tanto, estudiando el regionamiento podemos saber, por ejemplo si nos ajustamos por arriba o por abajo a una asíntota horizontal.

Para aclarar más el estudio del regionamiento, utilizaremos la información que nos puede ofrecer la primera derivada de f(x).

9. CRECIMIENTO Y DECRECIMIENTO. EXTREMOS

El estudio de máximos y mínimos de una función f(x) consiste en encontrar puntos que verifiquen alguna de las siguientes propiedades:

1) Algún punto x = a$\in$ Dom f tal que existe un entorno centrado en dicho punto, E(a,r), de manera que f(a) $\geq$ f(x) $\forall$ x$\in$ E(a,r). El punto x = a recibe el nombre de máximo relativo de f(x).
2) Algún punto x = a$\in$ Dom f tal que existe un entorno centrado en dicho punto, E(a,r), de manera que f(a) $\leq$ f(x) $\forall$ x$\in$ E(a,r). El punto x= a recibe el nombre de mínimo relativo de f(x).
3) Un punto x = a tal que f(a) $\geq$ f(x) $\forall$ x$\in$ Dom f. Este punto recibe el nombre de máximo absoluto de f(x) y no tiene por que ser único.
4) Un punto x = a tal que f(a) $\leq$ f(x) $\forall$ x$\in$ Dom f. Este punto recibe el nombre de mínimo absoluto de f(x) y no tiene por que ser único.

Los puntos del dominio de f(x) que hay que considerar a la hora de buscar máximos y mínimos, ya sean relativos o absolutos, deben cumplir alguna de las siguientes condiciones:

1) Sean puntos críticos de f, es decir, sean solución de la ecuación f'(x) = 0.
2) Si Dom f = [a,b], entonces los puntos x = a y x = b.
3) Los puntos del Dom f en los que l función f(x) no sea derivable.

9.1. Teorema Del Valor Medio.

TEOREMA. TEOREMA DE ROLLE.

Sea f:[a,b]$\rightarrow \mathbb{R}$ una función continua en [a,b] derivable en (a,b) y f(a)=f(b). Entonces existe al menos un punto c$\in$ (a,b) tal que f´(c)=0.

Dem

Sabemos por el teorema de Weierstrass que toda función continua definida en un cerrado alcanza un valor máximo y mínimo en el intervalo.

Según donde podamos localizar ese máximo y ese mínimo vamos a distinguir dos casos:

1) Tanto el máximo como el mínimo está en los extremos. Como f(a)=f(b) $\Rightarrow$maxf=minf $\Rightarrow$f es cte. Si el máximo y el mínimo de f son iguales, necesariamente f tiene que ser constante.

Si f es constante su derivada es cero y entonces c es cualquier punto de (a,b). Recordemos que a y b no pueden ser ya que f no es derivable en ellos.

2) Al menos uno de ellos se alcanza en el interior. En un teorema anterior vimos que "si f alcanza un extremo relativo en a y existe f´(a) entonces f´(a)=0". Al localizarse el extremo absoluto en el interior también es relativo y como en ese punto (al ser interior) es derivable, su derivada es cero.

Llamaremos a ese punto x=c y se verifica que:

c$\in$ (a,b) y f´(c)=0.

OBS La interpretación geométrica del teorema de Rolle es que una función continua es derivable e igual en sus extremos debe tener un punto cuya recta tangente sea horizontal.

El siguiente teorema a ver es el del Valor medio o Lagrange.

Supone una generalización del anterior, pues en éste eliminamos la hipótesis de que f(x) coincida en los extremos del intervalo. Lo que vamos a conseguir ahora es un punto x=c que va a tener tangente paralela a la recta que une los puntos (a,f(a)) y (b,f(b)).

TEOREMA. TEOREMA DE LAGRANGE.

Sea $f:[a,b]\rightarrow \mathbb{R}$ continua en [a,b] y derivable en (a,b). Entonces $c\in(a,b)$ tal que

$$f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

Dem.

Definimos $\varphi:[a,b]\rightarrow \mathbb{R}$

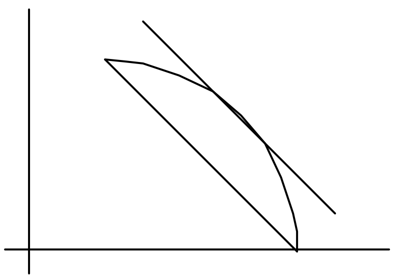
$x\rightarrow\varphi(x)=f(x)+mx$, donde $m=-\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}\in$

para que $\varphi(a) = \varphi(b)$

$$\left.\begin{array}{l} \varphi \text{ es continua en } [a,b] \\ \varphi \text{ es derivable en } (a,b) \\ \varphi(a)=\varphi(b) \end{array}\right\} \Rightarrow \exists c\in(a,b) \;/\; \varphi'(c)=0$$

$$\varphi'(x) = f'(x)+m \Rightarrow \varphi'(c) = f'(c)+m = 0 \Rightarrow f'(c) = \frac{f(b)\cdot f(a)}{b-a} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f'(c)(b-a) = f(b)-f(a).$$



Geométricamente existe al menos un punto de la gráfica de f, distinto de sus extremos A y B en el que la tangente de la gráfica es paralela a la cuerda AB.

PROP Si $f'(x) = 0 \quad \forall x\in(a,b) \Rightarrow f=cte.$

Dem

$\forall x_1,x_2\in(a,b)$ con x_1,x_2 consideremos $[x_1,x_2]\subset(a,b)$. Como $f'(x) = 0 \Rightarrow$ f es derivable en (a,b) $\Rightarrow$ es continua en (a,b) $\Rightarrow$ f es continua en $[x_1,x_2]$ y derivable

en (x_1,x_2).

Aplicando el teorema del valor medio:

$\exists c\in(x_1,x_2)$ / f´(c) $$\left.\begin{array}{l} \dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} \\ f´(c)=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}=0 \Rightarrow f(x_2)-f(x_1)=0$$

Entonces $f(x_1)=f(x_2)\ \forall x_1, x_2\in(a,b)$

Por tanto f es una función constante.

PROP Si f y g son dos funciones que tienen la misma derivada entonces se diferencian en una constante.

Dem

Sean las funciones $f,g:A\rightarrow R$ con $f´(x)=g´(x)\ \forall x\in A$ siendo A un intervalo abierto. Consideremos la función f-g. Su derivada:

$(f\text{-}g)´=f´\text{-}g´= 0 \Rightarrow (f\text{-}g)=cte.$

9.2. Crecimiento y Decrecimiento de una función.

DEF Diremos que una función f: $\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ real de variable real creciente en un intervalo $[a,b]\subset$ Dom f. Si $\forall x_1,x_2\in[a,b]$ con $x_1<x_2$ se verifica que $f(x_1)\leq f(x_2)$.

DEF Diremos que una función f: $R\longrightarrow R$ real de variable real decreciente en un intervalo $[a,b]\subset$Dom f. Si $\forall x_1,x_2\in[a,b]$ con $x_1<x_2$ se verifica que $f(x_1)\geq f(x_2)$.

TEOREMA. Si $f'(x)>0\ \forall x\in I \Rightarrow f(x)$ es estrictamente creciente en I.

Dem

Tomemos un punto cualquiera $x_0\in I$. Sabemos que la función es derivable y que

la derivada es positiva, luego $f´(x_0)>0$.

Como $f´(x_0)= \lim_{x\rightarrow x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}>0 \Rightarrow \begin{cases} si\ \ x>x_0 \Rightarrow f(x)>f(x_0) \\ si\ \ x<x_0 \Rightarrow f(x)<f(x_0) \end{cases}$

Por tanto f(x) es creciente cerca de x_0, tanto antes como después. Y como eso ocurre

para cualquier punto $x_0\in I$, entonces la función es creciente en I.

TEOREMA. Si $f'(x)<0\ \forall x\in I \Rightarrow f(x)$ es estrictamente decreciente en I.

<u>Dem</u>

La demostración es igual que la anterior.

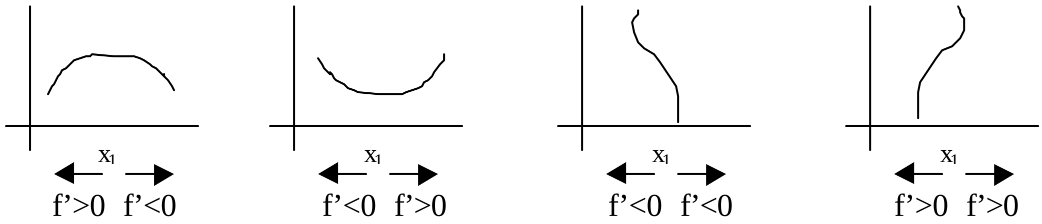
Sea $x_0\in I$ un punto cualquiera. Sabemos que $f'(x_0)>0$.

$$\text{Como } f'(x_0)= \lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}<0 \Rightarrow \begin{cases} si\ \ x>x_0 \Rightarrow f(x)<f(x_0) \\ si\ \ x<x_0 \Rightarrow f(x)>f(x_0) \end{cases}$$

Vemos que la función es decreciente en $x_0 \Rightarrow$ lo es en todo I.

El recíproco de las dos proposiciones anteriores es falso. Por ejemplo, si f es creciente es fácil comprobar que $f'(x)= 0$ (por ejemplo para $f(x)= x^3 + 1$).

Vamos ahora a dar un método general para poder afirmar si un punto singular es un máximo o mínimo local, o ninguna de ambas cosas. Para ello tengamos en cuenta las siguientes gráficas:



Si $f'> 0$ en algún intervalo a la izquierda de x_0 y $f'< 0$ en algún intervalo a la derecha de x_0 entonces x_0 es un máximo relativo.

Si $f'< 0$ en algún intervalo a la izquierda de x_0 y $f'> 0$ en algún intervalo a la derecha de x_0 entonces x_0 es un mínimo relativo.

Si f' tiene el mismo signo en algún intervalo tanto a la derecha como a la izquierda de x_0 entonces x_0 no es un extremo relativo.

<u>9.3. Caracterización de los Máximos y Mínimos locales.</u>

PROP Sea una función $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ real de variable real, y $a\in Dom(f)$, un punto en el que existe $f'(a)$ y $f''(a)$. Sea $f'(a)= 0$, se verifica

1) Si $f''(a) > 0$ entonces f tiene un mínimo relativo en $x = a$.
2) Si $f''(a) < 0$ entonces f tiene un máximo relativo en $x = a$

<u>Dem.</u>

1) Por definición tenemos que

$$f''(a)=\lim_{h\to 0}\frac{f'(a+h)-f'(a)}{h}$$

y como f'(a)= 0

$$f''(a)=\lim_{h\to 0}\frac{f'(a+h)}{h}$$

Por hipótesis $f''(a)>0 \Rightarrow \frac{f'(a+h)}{h}>0$ para h suficientemente pequeño.

Si $h\to 0^{+} \Rightarrow f'(a+h)>0 \Rightarrow f$ crece a la derecha de a.

Si $h\to 0^{-} \Rightarrow f'(a+h)<0 \Rightarrow f$ crece a la izquierda de a.

Luego f(x) presenta en x= a un mínimo relativo

2) Análoga.

PROP Sea una función f: $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ real de variable real. Sea $a\in Dom(f)$ tal que existe f'(a) y f''(a).

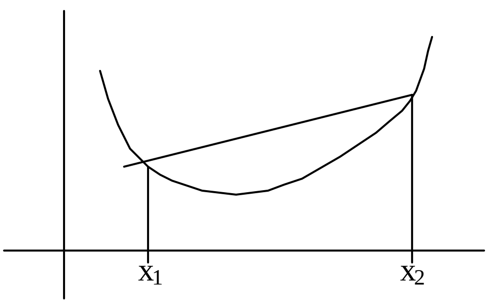
1) Si f tiene un mínimo relativo en x = a entonces f''(a)≥ 0.
2) Si f tiene un máximo relativo en x = a entonces f''(a)≤ 0.

<u>Dem.</u>

1) Supongamos que f tiene un mínimo relativo en x = a si f''(a) < 0 entonces, aplicando el teorema anterior, f tendría un máximo local en x = a.
   Pero si f presenta en x = a un máximo y un mínimo entonces sería constante y, por tanto, f''(a) = 0 lo cual es una contradicción.
   Por tanto f''(a) ≥ 0.
2) Análoga a la anterior.

10.CURVATURA. PUNTOS DE INFLEXIÓN.

DEF Diremos que una función f es convexa en un intervalo si para todo par de puntos x_1, x_2 de ese intervalo, el segmento rectilíneo que une (x_1, f(x_1)) con (x_2, f(x_2)) queda por encima de la gráfica de f.



La condición geométrica en la que basamos la definición podemos expresarla analíticamente.

La recta que une (x_1, f(x_1)) con (x_2, f(x_2)) es

$$g(x)=\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}(x-x_1)+f(x_1)$$

La recta g(x) quedará por encima de f(x) siempre que se verifique g(x)>f(x), y es:

$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}>\frac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1}\forall x\in(x_1-x_2)$$

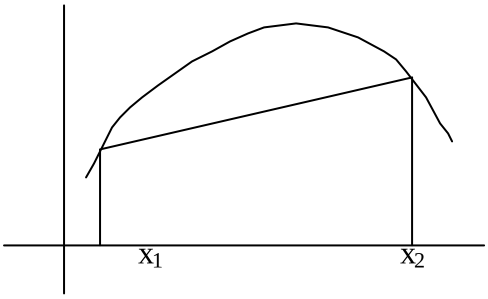
obteniendo una definición equivalente. Por tanto:

DEF Una función f: $\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ real de variable real es convexa en un intervalo si para x_1, x_2 y x con $x_1 < x < x_2$ se verifica

$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}>\frac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1}$$

Análogamente vamos a definir función cóncava.

DEF Diremos que una función f es cóncava en un intervalo si para todo par de puntos x_1, x_2 de ese intervalo, el segmento rectilíneo que une (x_1, f(x_1)) con (x_2, f(x_2)) queda por debajo de la gráfica de f.



DEF Una función f: $\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ real de variable real es cóncava en un intervalo si para x_1, x_2 y x con $x_1 < x < x_2$ se verifica

$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}<\frac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1}$$

PROP Sea f: $\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ una función real de variable real y convexa. Sea $a\in dom(f)$.

1) Si f es derivable en x = a entonces la gráfica de f queda por encima de la tangente a f en (a, f(a)) excepto en (a, f(a))
2) Si a < b y f es derivable en a y en b, entonces f'(a) < f'(b)

<u>Dem.</u>

Sea $0<h_1<h_2$ y consideremos los puntos $a<a+h_1<a+h_2$.
Como f es convexa se verifica

$$\frac{f(a+h_1)-f(a)}{h_1}<\frac{f(a+h_2)-f(a)}{h_2}$$

Si tomamos límites cuando $h_1 \to 0^+$

$$\lim_{h_1 \to 0^+} \frac{f(a+h_1)-f(a)}{h_1} < \lim_{h_1 \to 0^+} \frac{f(a+h_2)-f(a)}{h_2}$$

$$f'(a) < \frac{f(a+h_2)-f(a)}{h_2}$$

llegamos a que la pendiente de la recta tangente es menor que la pendiente de la secante que pasa por (a, f(a)) y (a + h_2, f(a + h_2)) lo cual implica que el punto (a + h_2, f(a + h_2)) queda por encima de la recta tangente.

De forma análoga, si $h_2 < h_1 < 0$ y consideramos $a+h_2 < a+h_1 < a$ como f es convexa se verifica:

$$\frac{f(a+h_1)-f(a)}{h_1} < \frac{f(a+h_2)-f(a)}{h_2}$$

Si tomamos límites cuando $h_1 \to 0^-$

$$\lim_{h_1 \to 0^-} \frac{f(a+h_1)-f(a)}{h_1} > \lim_{h_1 \to 0^-} \frac{f(a+h_2)-f(a)}{h_2}$$

$$f'(a) > \frac{f(a+h_2)-f(a)}{h_2}$$

y esto nos indica que la pendiente de la recta tangente es mayor que la pendiente de la secante que pasa por (a, f(a)) y (a + h_2, f(a + h_2)) lo cual implica que el punto (a + h_2, f(a + h_2)) queda por encima de la recta tangente en x = a.

3) Sea a < b. Entonces b = a + (b-a)

$$f'(a) < \frac{f(a+(b-a)-f(a)}{b-a} \text{ por ser } b-a>0 \Rightarrow f'(a) < \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

$$f'(b) > \frac{f(b+(a-b)-f(b)}{a-b} \text{ por ser } a-b<0 \Rightarrow f'(b) > \frac{f(a)-f(b)}{a-b}$$

luego, $f'(a) < \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a} < f'(b)$

LEMA Supongamos que f: $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ una función real de variable real es derivable y f' creciente. Si a < b y f(a) = f(b) entonces f(x) < f(a) = f(b) para a < x < b.

Dem.

Supongamos que f(x) > f(a) = f(b) para algún $x \in (a,b)$

Entonces el máximo de f sobre [a,b] se presenta en algún punto $x_0 \in (a,b)$ con f(x_0) > f(a) y por supuesto f'(x_0) = 0. Por otra parte, aplicando el teorema del valor medio al intervalo [a,x_0] encontramos que existe un punto x_1 cib a < x_1 < x_0 y

$$f'(x_1) = \frac{f(x_0)-f(a)}{x_0-a} > 0$$

y eso está en contradicción con que f' sea creciente ya que $f'(x_1) > f'(x_0) = 0$ y $x_1 > x_0$.

Luego hemos demostrado que f(x) $\leq$ f(a) = f(b) para a < x < b y solo nos queda por ver que f(x) = f(a) para algún $x \in (a,b)$.

Sabemos que f no es constante sobre [a,x] ya que si lo fuese f' no sería creciente, de modo que existe algún x_1 con a < x_1 < x y f(x_1) < f(a).

Aplicando el teorema del valor medio a [x_1,x] deducimos que existe un punto x_2 con $x_1 < x_2 < x$ y

$$f'(x_2) = \frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} > 0$$

Por otra parte, f'(x) = 0, puesto que hay un máximo relativo en x. De nuevo llegamos a una contradicción por ser f' creciente.

TEOREMA

Sea f: $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ una función real de variable real. Si f es derivable y f' creciente, entonces f es convexa.

Dem.

Sea a<b. Definimos una función g como

$$g(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)$$

Es fácil ver que g'(x) es una función creciente, y como g(a)=g(b)=f(a), aplicamos el Lema anterior a g(x) y

g(x)<f(a) si a<x<b

Que g(x)<f(a) significa que

$$f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) < f(a)$$

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} < \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Por lo tanto f es convexa.

DEF Llamaremos punto de inflexión de f a x = a si la tangente a la grafica de f en (a, f(a)) cruza la gráfica.

PROP Sea f: $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ una función real de variable real. Si f es derivable de orden dos en x_0 y f''(x_0) > 0, entonces f es convexa en x_0.

Dem.

Inmadiata

PROP Sea f: $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ una función real de variable real. Si f es derivable de orden dos en x_0 y $f''(x_0) < 0$, entonces f es cóncava en x_0.

Dem.

Inmediata

PROP Sea f: $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ una función real de variable real. Si f es derivable de orden dos en x_0 y x_0 es un punto de inflexión entonces $f''(x_0) = 0$.

Dem.

Inmediata

11. REPRESENTACIÓN GRÁFICA.

1) $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$

1. Dominio: $Dom(f) = (0,+\ \ )$
2. Puntos de corte con los ejes:
   OY: x = 0; no existe
   OX: $y = 0 \rightarrow f(x) = 0 \Rightarrow \dfrac{\ln x}{x} = 0 \rightarrow \ln x = 0 \rightarrow x = 1 \rightarrow P(1,0)$
3. Simetrías: No hay
4. Periodicidad: No hay
5. Asíntotas
   a) Horizontal:
   $$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \{L'Hopital\} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1/x}{x} = 0 \rightarrow y = 0$$
   b) Vertical:
   $$\lim_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{x} = \frac{-\infty}{0^+} = -\infty \rightarrow x = 0$$
   c) Oblicua: No hay porque hay horizontal

6. Crecimiento y decrecimiento. Extremos.
   $$f'(x) = \frac{1-\ln x}{x^2}$$
   $$f'(x) = 0 \rightarrow 1 - \ln x = 0 \Rightarrow \ln x = 1 \rightarrow x = e \Rightarrow P(e, 1/e) Máximo$$

   Se cumple que $\begin{cases} f'(x) > 0 \forall x \in (0,e) \\ f'(x) < 0 \forall x \in (e,+\infty) \end{cases}$

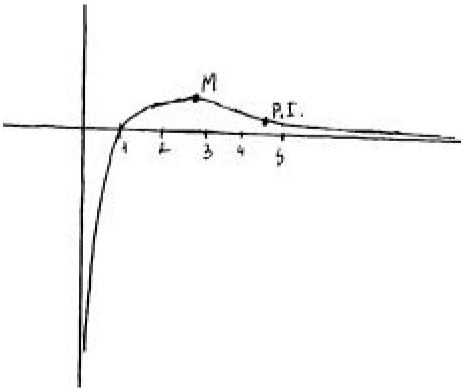
7. Curvatura. Puntos de inflexión.

$$f''(x)=\frac{-3+2\ln x}{x^3}$$

$$f''(x)=0\rightarrow -3+2\ln x=0\rightarrow x=e^{3/2}\ \Rightarrow P\left(e^{3/2},\frac{3}{2e^{3/2}}\right)$$

Se cumple que $\begin{cases} f''(x)<0 \Leftrightarrow x\in(0,e^{3/2}) \\ f''(x)>0 \Leftrightarrow x\in(e^{3/2},+\infty) \end{cases}$

8. <u>Gráfica</u>:



Bibliografía Recomendada.

Análisis Matemático I. Aut. J.A. Fernández Viña. Ed. Tecnos

Lecciones de Cálculo Infinitesimal I. Aut. R. Molina Legaz, M. Franco. Ed. Universidad de Murcia.

Principios de Análisis Matemático. Aut. W. Rudin. Ed. McGraw-Hill

Curso de Análisis Matemático I. Aut. E.L. Luna. Ed. Edunsa, 1991.

Calculus. Aut. M. Spivak. Ed. Reverté.

Análisis Matemático. Aut. M. de Guzmán, B. Rubio. Ed. Pirámide.

Análisis Matemático 2ª Edición. Aut. T. M. Apostol. Ed. Reverté

Introducción al Análisis Matemático. Aut. J.M. Ortega. Ed. Labor