TEMAS DE MATEMÁTICAS
(Oposiciones de Secundaria)

TEMA 30

PRIMITIVA DE UNA FUNCIÓN. CÁLCULO DE ALGUNAS PRIMITIVAS. APLICACIONES DE LA INTEGRAL AL CÁLCULO DE MAGNITUDES GEOMÉTRICAS.

1. INTRODUCCIÓN.

A lo largo del siglo XVIII se consideró a la integración como el proceso contrario a la diferenciación.

El significado geométrico de la integral indefinida es una familia de curvas, todas ellas obtenidas por desplazamiento vertical de una cualquiera.

En este tema vamos a tratar de obtener primitivas de funciones. Para ello estudiaremos diferentes métodos.

Hemos de tener en cuenta que la derivada de una función elemental es siempre una función elemental, en cambio la primitiva de una función elemental puede no expresarse mediante un número finito de funciones elementales.

2. CONCEPTO DE PRIMITIVA.

DEF Dada $f:[a,b]\to R$, una primitiva de f es una función $F:[a,b]\to R$, derivable $\forall x e[a,b]$ y tal que $F'(x)= f(x)\ \forall x\in (a,b)$

Como toda función derivable en un intervalo es continua en dicho intervalo, entonces toda función F primitiva de f es continua en el mismo intervalo.

NOTACION: Representaremos como primitiva (una cualquiera) de f

$$\int f(x)dx$$

y se lee "integral indefinida de f".

PROP Sea $f:[a,b]\to R$ y F_1, F_2 dos primitivas de f. Entonces $F_1-F_2=$ cte

dem

Definimos la función $F_0(x)= F_1(x)-F_2(x)\ \forall x\in[a,b]$.

Es claro que F_0 es una función continua y derivable, siendo

$$F'_0(x)=F'_1(x)-F'_2(x)= f(x)-f(x)= 0$$

Sea $x_0\in(a,b)$

Dado cualquier otro punto x interior a [a,b] se verifican las hipótesis del teorema del valor medio del cálculo diferencial para F_0 en $[x_0,x]$ (ó $[x,x_0]$) siendo

$\exists\ \xi\in(x_0,x)\ /\ F_0(x)-F(x_0)= F'_0(\xi)\ (x-x_0)$

Como $F'_0(\xi) = 0 \to F_0(x)=F_0(x_0)$

Por tanto $F_0=$cte y $F_1-F_2=$cte

Dadas dos primitivas de f, como se diferencian en una constante, para poder indicarlas todas, escribiremos

$$\int f(x)dx = F(x) + C$$

PROP Sea f:[a,b] $\rightarrow$ R una función continua. Entonces tiene primitiva en [a,b].

dem

La demostración es inmediata sin más que tener en cuenta que

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt$$

es una primitiva de f.

3. INTEGRALES INMEDIATAS.

3.1. Lista de Integrales Inmediatas.

Expresamos a continuación una lista de integrales inmediatas. Esta lista la obtenemos sin más que recordar las derivadas de las funciones de uso más generalizado. Si leemos las igualdades de derecha a izquierda, la lista nos puede servir como una lista de derivadas, teniendo en cuenta el concepto de integral indefinida.

a) Tipo Potencial.

$$\int x^n dx = \frac{1}{n+1} x^{n+1} + C \quad n \neq -1$$

$$\int \frac{dx}{(x-a)^p} = \frac{1}{-p+1}(x-a)^{-p+1} + C \quad p \neq 1$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{bx+c}} = \frac{2}{b}\sqrt{bx+c} + C$$

b) Tipo Exponencial.

$$\int f'(x)e^{f(x)}dx = e^{f(x)} + C$$

c) Tipo Logarítmico.

$$\int \frac{1}{x} dx = Lnx + C$$

$$\int \frac{dx}{x-a} = Ln(x-a) + C$$

$$\int \frac{dx}{ax+b} = \frac{1}{a} Ln(ax+b) + C$$

d) Tipo Trigonométricas circulares e hiperbólicas.

$$\int Cosdx = Senx + C$$
$$\int Sendx = -Cosx + C$$
$$\int \frac{dx}{Cos^2 x} = Tgx + C$$
$$\int \frac{dx}{Sen^2 x} = -Co\,\mathrm{tg}\, x + C$$
$$\int \mathrm{tg}\, xdx = -\ln\left|\cos x\right| + C$$
$$\int \cot gxdx = \ln\left|\mathrm{sen}\, x\right| + C$$
$$\int \frac{\cos x}{\mathrm{sen}^2 x}dx = -Co\sec x + C$$
$$\int \frac{\mathrm{sen}\, x}{\cos^2 x}dx = \sec x + C$$
$$\int \cosh xdx = \mathrm{senh}\ x + C$$
$$\int \mathrm{senh}\ xdx = \cosh xdx + C$$
$$\int \frac{1}{\cosh^2 x}dx = \mathrm{tgh}\ x + C$$
$$\int \frac{1}{\mathrm{senh}^2 x}dx = -\cot ghx + C$$
$$\int \mathrm{tgh}\ xdx = \ln\left|\cosh x\right| + C$$
$$\int \cot ghxdx = \ln\left|\mathrm{senh}\ x\right| + C$$

e) Tipo inversas de Trigonométricas circulares e hiperbólicas.

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \mathrm{arcsen}\ x + C$$
$$\int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} = \arg\mathrm{senh}\ x + C = \ln\left(x \pm \sqrt{x^2+1}\right) + C$$
$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}} = \arg\cosh x + C = \ln\left(x \pm \sqrt{x^2-1}\right) + C$$
$$\int \frac{1}{1+x^2}dx = \mathrm{arctg}\ x + C$$
$$\int \frac{1}{1-x^2}dx = \arg\mathrm{tgh}\ x + C = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) + C$$
$$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}} = \mathrm{arcsen}\ x + C$$

3.2. Desarrollo de las integrales inmediatas.

a) Integrales inmediatas de tipo potencial.

Siempre que bajo el signo integral aparezca una función elevada a una constante, si lo que la multiplica es al menos en su parte variable la derivada de la función, podremos ajustar con constantes y será una integral inmediata de tipo potencial.

b) Integrales inmediatas de tipo Exponencial.

Siempre que bajo el signo integral aparezca una constante elevada a una función, si lo que la multiplica es, al menos en su parte variable, la derivada de la función, podremos ajustar con constantes, y será una integral inmediata de tipo exponencial.

c) Integrales Inmediatas de tipo Logarítmico.

Siempre que bajo el signo integral aparezca un cociente, si el numerador es al menos en su parte variable la derivada del denominador, se podrá ajustar con constantes, y será una integral inmediata de tipo Logarítmico.

d) Integrales Inmediatas de tipo Arco o Argumento.

Siempre que bajo el signo integral aparezca una expresión de alguno de estos tres tipos

$$\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}} \qquad \int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx}} \qquad \int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+c}}$$

podremos resolver la integral aplicando un método que desarrollaremos en cuatro pasos.

PASO 1: Multiplicamos numerador y denominador por la raiz cuadrada de cuatro veces el valor absoluto del coeficiente numérico del término en x^2 ($\sqrt{4|a|}$)

PASO 2: Se expresa el término interior a la raiz obtenido en el paso anterior en la forma

$$\pm (mx \pm n)^2 \pm p$$

identificando coeficientes con esta expresión.

PASO 3: Se divide numerador y denominador por la raiz cuadrada de p.

PASO 4: Se ajusta mediante constantes el resultado obtenido a alguna de las integrales inmediatas del apartado e) del punto 3.1.

OBS Estas integrales no las podremos resolver dentro del cuerpo de los números reales cuando los tres (o los dos) coeficientes numéricos del polinomio sean negativos. O también porque después de aplicar el paso 2 obtengamos negativos los dos términos bajo el signo integral.

De forma muy similar a la anterior, si tenemos una integral que se asemeja a uno de estos tres tipos

$$\int \frac{dx}{ax^2+bx+c} \qquad \int \frac{dx}{ax^2+bx} \qquad \int \frac{dx}{ax^2+c}$$

su resolución es siguendo otro método de cuatro pasos, muy parecido al anterior.

PASO 1: Se multiplican numerador y denominador por cuatro veces el valor absoluto del coeficiente numérico del término en x^2 (4a).

PASO 2: Se expresa el término del denominador en la forma

$$\pm (mx \pm n)^2 \pm p$$

identificando coeficientes con esta expresión.

PASO 3: Se divide numerador y denominador por p.

PASO 4: Se ajusta por constantes el resultado obtenido a alguna de las integrales inmediatas del tipo e) del punto 3.1.

4. INTEGRACIÓN DE FUNCIONES RACIONALES.

Es la integración de la forma $\int \frac{P(x)}{Q(x)} dx$, siendo P(x) y Q(x) polinomios de coeficientes reales y exponentes naturales.

OBS Cuando nos encontremos con este tipo de integrales, antes de nada conviene realizar la comprobación de que no se trata de una integral inmediata de tipo Logarítmico.

4.1. CASO 1: grado (P(x)) > grado (Q(x)).

En esta situación, lo primero que hemos de realizar es la división de P(x) por Q(x) quedando

$$P(x)= Q(x)\cdot C(x)+R(x)$$

siendo C(x) el cociente de la división y R(x) el resto (grado (R(x)< grado (Q(x)).

Entonces la integral nos queda como

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)} dx = \int C(x)dx + \int \frac{R(x)}{Q(x)} dx$$

La integral $\int C(x)dx$ es de tipo potencial, y por tanto inmediata.

La integral $\int \frac{R(x)}{Q(x)} dx$ puede no existir si R(x) =0, siendo la división exacta. Si no es así, obtenemos una integral donde grado (R(x)< grado(Q(x)) que estudiaremos más adelante.

4.2. CASO 2: grado (P(x)) = grado(Q(x)).

El proceso para resolver este caso es el mismo que el anterior. La única diferencia es que C(x)=K constante. Entonces la primera integral es también es inmediata, siendo

$$\int K dx = Kx + C$$

Todo lo demás es análogo.

4.3. CASO 3: grado (P(x)) > grado (Q(x)).

En este caso ya no podemos realizar la divisilón de P(x) por Q(x).

El proceso que debemos seguir sería, en primer lugar, obtener las raices de Q(x), ya sean del tipo que sean. Hemos de recordar que cualquier polinomio con coeficientes reales y exponentes naturales puede tener

1) Raíces Reales Simples
2) Raíces Reales Múltiples
3) Raíces Complejas Simples
4) Raíces Complejas Múltiples

Estudiaremos cada uno de estas cuatro situaciones de forma independiente.

4.3.1. Raices Reales Simples.

En este apartado vamos a suponer que al igualar Q(x) a cero obtenemos sólo raices reales simples.

Vamos a suponer que $Q(x)= a_0(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)(x-\alpha_3)$, siendo a_0 el coefiente numérico del término de mayor grado de Q(x).

El motivo de elegir Q(x) de grado 3 y no de grado n es para no complicar la escritura con sumatorios y productos. El método de resolución para el caso de un polinomio de grado superior a 3 es el mismo, pero más tedioso.

Para explicar este método vamos a suponer que a_0 =1, ya que si no lo fuera, la constante $1/a_0$ se podría sacar fuera de la integral:

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)} dx = \int \frac{P(x)}{a_0(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)(x-\alpha_3)} dx = \frac{1}{a_0} \int \frac{P(x)}{(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)(x-\alpha_3)} dx$$

Los pasos a seguir son los siguientes:

Paso1*:* Descomponer $\frac{P(x)}{Q(x)}$ en fracciones simples. La descomposición es única, siendo las fracciones de la descomposición el numerador un coeficiente indeterminado y el denominador uno de los factores de Q(x).

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{P(x)}{(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)(x-\alpha_3)}=\frac{A}{(x-\alpha_1)}+\frac{B}{(x-\alpha_2)}+\frac{C}{(x-\alpha_3)}$$

con A,B y C constantes.

Paso2: Se expresan ambos términos con un común denominador, que siempre será Q(x).

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{A(x-\alpha_2)(x-\alpha_3)}{(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)(x-\alpha_3)}+\frac{B(x-\alpha_1)(x-\alpha_3)}{(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)(x-\alpha_3)}+\frac{C(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)}{(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)(x-\alpha_3)}$$

Paso3: Al tener ambos miembros el mismo denominador, igualamos los numeradores.

$$P(x)=A(x-\alpha_2)(x-\alpha_3) + B(x-\alpha_1)(x-\alpha_3) + C(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)$$

Paso4: Se calculan los coeficientes A, B y C

- hacemos $x = \alpha_1$, verificádose

$$P(\alpha_1) = A(\alpha_1-\alpha_2)(\alpha_1-\alpha_3) \rightarrow A=\frac{P(\alpha_1)}{(\alpha_1-\alpha_2)(\alpha_1-\alpha_3)}$$

- hacemos $x = \alpha_2$

$$P(\alpha_2) = B(\alpha_2-\alpha_1)(\alpha_2-\alpha_3) \rightarrow B=\frac{P(\alpha_2)}{(\alpha_2-\alpha_1)(\alpha_2-\alpha_3)}$$

- hacemos $x = \alpha_3$

$$P(\alpha_3) = C(\alpha_3-\alpha_1)(\alpha_3-\alpha_2) \rightarrow C=\frac{P(\alpha_3)}{(\alpha_3-\alpha_1)(\alpha_3-\alpha_2)}$$

Paso 5: Una vez obtenidos los coeficientes, procedemos a la integración.

$$\int\frac{P(x)}{Q(x)}dx=\int\frac{Adx}{(x-a_1)}+\int\frac{Bdx}{(x-a_2)}+\int\frac{Cdx}{(x-a_3)}=A\ln(x-a_1)+B\ln(x-a_2)+C\ln(x-a_3)+K$$

4.3.2. Raíces Reales Complejas.

Vamos a suponer que al igualar Q(x) a cero obtenemos raices reales múltiples. Para simplificar la descripción del método, pero considerándolo en toda su generalidad, tomaremos

$$Q(x)=a_0(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)^3$$

siendo α_1 una raíz simple, α_2 una raíz múltiple con índice de multiplicidad 3 y a0 el coeficiente numérico del término de mayor grado de Q(x).

Análogamente al caso anterior, vamos a suponer que $a_0=1$

Los pasos a seguir son los mismos que en el caso anterior:

Paso1: Descomponer $\frac{P(x)}{Q(x)}$ en fracciones simples. Las raíces reales simples se descomponen de la misma forma. Para las raíces reales múltiples, el numerador siempre es un coeficiente indeterminado y el denominador es el factor múltiple con exponente variando de 1 a su multiplicidad en cada fracción.

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(x)}{(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)^3} = \frac{A}{(x-\alpha_1)} + \frac{B}{(x-\alpha_2)} + \frac{C}{(x-\alpha_2)^2} + \frac{D}{(x-\alpha_2)^3}$$

con A, B,C y D constantes.

Paso2: Se expresan ambos términos con un común denominador, que siempre será Q(x).

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A(x-\alpha_2)^3}{(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)^3} + \frac{B(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)^2}{(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)^3} + \frac{C(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)}{(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)^3} + \frac{D(x-\alpha_1)}{(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)^3}$$

Paso3: Igualamos los numeradores:

$$P(x) = A(x-\alpha_2)^3 + B(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)^2 + C(x-\alpha_1)(x-\alpha_2) + D(x-\alpha_1)$$

Paso4: La identificación de coeficientes se puede realizar en este caso de las siguientes formas:

a) Sustituyendo x por los valores de las raíces obtendremos tantos coeficientes indeterminados como raíces distintas haya.

- $x=\alpha_1$

$$P(\alpha_1) = A(\alpha_1-\alpha_2)^3 \quad \Rightarrow \quad A = \frac{P(\alpha_1)}{(\alpha_1-\alpha_2)^3}$$

- $x=\alpha_2$

$$P(\alpha_2) = D(\alpha_2-\alpha_1) \quad \Rightarrow \quad D = \frac{P(\alpha_2)}{(\alpha_2-\alpha_1)}$$

El resto de coeficientes los podemos obtener dando a x valores pequeños distintos de las raíces α_1 y α_2. Tantos valores como coeficientes queden por calcular. En nuestro caso, dos.

- $x=x_0$

$$P(x_0) = A(x_0-\alpha_2)^3 + B(x_0-\alpha_1)(x_0-\alpha_2)^2 + C(x_0-\alpha_1)(x_0-\alpha_2) + D(x_0-\alpha_1)$$

- $x=x_1$

$$P(x_1) = A(x_1 - \alpha_2)^3 + B(x_1 - \alpha_1)(x_1 - \alpha_2)^2 + C(x_1 - \alpha_1)(x_1 - \alpha_2) + D(x_1 - \alpha_1)$$

Como A y D son conocidos, llegamos a un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas, que una vez resuelto nos dará B y C.

b) Si realizamos las operaciones que indica el segundo miembro e igualamos los coeficientes de ambos miembros del mismo grado, obtenemos un sistema de tantas ecuaciones como incógnitas.

Paso5: Una vez obtenidos los coeficientes procedemos a la integración:

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)}dx = \int \frac{Adx}{(x-\alpha_1)} + \int \frac{Bdx}{(x-\alpha_2)} + \int \frac{Cdx}{(x-\alpha_2)^2} + \int \frac{Ddx}{(x-\alpha_2)^3} =$$
$$= A\ln(x-\alpha_1) + B\ln(x-\alpha_2) - \frac{C}{(x-\alpha_2)} - \frac{D}{2(x-\alpha_2)^2} + K$$

Las dos primeras integrales son inmediatas de tipo logarítmico y las dos últimas son inmediatas de tipo potencial:

4.3.3. Raíces Complejas Simples.

Describiremos el método de resolución suponiendo que el polinomio Q(x) es de grado 5, con raíces $x=\alpha_1$ (real simple), $x=\alpha_2$ (real múltiple de orden 2) y x= a+bi, x=a-bi (raíces complejas simples). Escogemos así Q(x) por ser el supuesto más completo de los que constituyen este caso.

$$Q(x)=a_0(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)^2(x-(a+bi))(x-(a-bi))$$

Los dos últimos factores se pueden escribir como

$$(x-(a+bi))(x-(a-bi))=(x-a)^2+b^2$$

quedando entonces

$$Q(x)=a_0(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)^2((x-a)^2+b^2)$$

De forma análoga a los dos casos anteriores, supondremos que $a_0=1$.

Los pasos a seguir en este método son los mismos que hemos visto en los dos apartados anteriores.

En la descomposición de $\frac{P(x)}{Q(x)}$ en fracciones simples, las fracciones que corresponden a las raíces reales simples son de la misma forma que en punto 4.3.1.; las fracciones correspondientes a las raíces reales múltiples son de la forma que en el punto 4.3.2.; y las fracciones correspondientes a las raíces imaginarias simples son: el numerador un polinomio en x de primer grado completo de coeficientes indeterminados, y el denominador la expresión $(x-a)^2+b^2$.

Antes de proseguir con la explicación de este método, vanos a realizar un inciso, para explicar como se integran estas fracciones nuevas que hemos obtenido.

$$\int \frac{Mx+N}{(x-a)^2+b^2}\,dx = M\int \frac{x}{(x-a)^2+b^2}\,dx + N\int \frac{1}{(x-a)^2+b^2}\,dx = (1)+(2)$$

$$(1) = \frac{M}{2}\int \frac{2x}{(x-a)^2+b^2}\,dx = \frac{M}{2}\int \frac{2x-2a+2a}{(x-a)^2+b^2}\,dx =$$
$$= \frac{M}{2}\int \frac{2x-2a}{(x-a)^2+b^2}\,dx + \frac{M}{2}\int \frac{2a}{(x-a)^2+b^2}\,dx = (1')+(1'')$$

$$(1') = \frac{M}{2}\int \frac{2x-2a}{(x-a)^2+b^2}\,dx = \frac{M}{2}\ln\left|(x-a)^2+b^2\right|$$

$$(1'')+(2) = (Ma+N)\int \frac{1}{(x-a)^2+b^2}\,dx =$$

Es una integral del tipo arcotangente que se resuelve como sigue:

$$= (Ma+N)\int \frac{1/b^2}{\frac{(x-a)^2}{b^2}+1}\,dx = \frac{Ma+N}{b}\,\mathrm{arctg}\,\frac{x-a}{b}$$

con lo cual la integral a calcular queda como

$$\int \frac{Mx+N}{(x-a)^2+b^2}\,dx = \frac{Ma+N}{b}\,\mathrm{arctg}\,\frac{x-a}{b} + \frac{M}{2}\ln\left|(x-a)^2+b^2\right| + K$$

Con esto terminamos el inciso y proseguimos con el método.

Paso1: $\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(x)}{(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)^2((x-a)^2+b^2)} = \frac{A}{(x-\alpha_1)} + \frac{B}{(x-\alpha_2)} + \frac{C}{(x-\alpha_2)^2} + \frac{Mx+N}{(x-a)^2+b^2}$

con A, B, C, M y N constantes.

Paso2: Reducimos a común denominador. Omitimos la fórmula por no ser de interés.

Paso3: Igualamos los numeradores.

$$P(x) = A(x-\alpha_2)^2((x-a)^2+b^2) + B(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)((x-a)^2+b^2) + C(x-\alpha_1)((x-a)^2+b^2) + (Mx+N)(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)^2$$

Paso4: En este caso podemos realizar la identificación de coeficientes de la misma forma que en 4.3.2.

Paso5:

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)}dx = A\ln(x-\alpha_1)+B\ln(x-\alpha_2)-\frac{C}{(x-\alpha_2)}+\frac{M}{2}\ln((x-a)^2+b^2)+\frac{Ma+N}{b}\operatorname{arctg}\frac{x-a}{b}+K$$

4.3.4. Raíces Complejas Múltiples.

Veremos este caso en el supuesto particular de que le polinomio Q(x) sea de noveno grado, siendo sus raíces

$x=\alpha_1$ raíz real simple

$x=\alpha_2$ raíz real múltiple de orden 2.

x=a+bi y x=a-bi raíces complejas simples

x=c+di y x=c-di raíces complejas múltiples de orden 2.

Entonces

$Q(x)=a_0(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)^2((x-a)^2+b^2)\ ((x-c)^2+d^2)^2$

siendo a_0 el coeficiente principal de Q(x), que supondremos, sin pérdida de generalidad que es $a_0=1$.

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{A}{(x-\alpha_1)}+\frac{B}{(x-\alpha_2)}+\frac{C}{(x-\alpha_2)^2}+\frac{Mx+N}{(x-a)^2+b^2}+\frac{Sx+T}{(x-c)^2+d^2}+\frac{Ux+V}{((x-c)^2+d^2)^2}$$

Hasta el paso 4 se realiza de la misma forma que en 4.3.2 y 4.3.3.

Al llegar al paso 5, una vez obtenidos los coeficientes indeterminados, procedemos a la integración de cada una de las fracciones, siendo ya conocido el resultado menos de la última.(Remitimos al lector a la hoja de problemas para conocer su resolución).

No resolveremos en el tema la integral de la última fracción por no extendernos innecesariamente, ya que vamos a ver un método alternativo para resolver las integrales de cocientes de polinomios con denominador con raíces complejas múltiples, llamado Método de Hermite.

5. MÉTODO DE HERMITE.

Para explicar este método, partimos de un cociente de polinomios $\frac{P(x)}{Q(x)}$ donde las raíces de Q(x) pueden ser tanto reales como complejas y simples o múltiples. Por tanto, estamos en la misma situación que en el punto 4.3.4

De nuevo supondremos que Q(x) es un polinomio de noveno grado cuya descomposición es

$Q(x)=a_0(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)^2((x-a)^2+b^2)\ ((x-c)^2+d^2)^2$

siendo a_0 el coeficiente principal de Q(x), que supondremos, sin pérdida de generalidad que es $a_0=1$.

Paso1:

- Las raíces reales simples se descomponen como hemos visto en el punto 4, con un coeficiente indeterminado como numerador y el factor que contiene a la raíz como denominador.

- Las raíces reales múltiples se descomponen como si fueran simples, sin tener en cuenta su índice de multiplicidad.

- Las raíces complejas simples se descomponen como hemos visto en el punto 4.3.3.

- Las raíces complejas múltiples se descomponen como si fueran simples, sin tener en cuenta su índice de multiplicidad.

- Además, hay un término más que pasamos a describir:

La derivada de un cociente donde el denominador es el producto de los factores múltiples con exponentes igual a sus índices de multiplicidad respectivos menos uno. El numerador será un polinomio completo de grado inferior en una unidad del grado del polinomio del denominador.

OBS Se suelen utilizar letras minúsculas para expresar los coeficientes indeterminados del término característico de Hermite.

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{A}{(x-\alpha_1)}+\frac{B}{(x-\alpha_2)}+\frac{Mx+N}{(x-a)^2+b^2}+\frac{Sx+T}{(x-c)^2+d^2}+\frac{d}{dx}\left(\frac{mx^2+nx+p}{(x-\alpha_2)((x-c)^2+d^2)}\right)$$

siendo A, B, M, N, S, T, m, n y p constantes a determinar.

Paso2: Se deriva le último término con respecto a x.

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{A}{(x-\alpha_1)}+\frac{B}{(x-\alpha_2)}+\frac{Mx+N}{(x-a)^2+b^2}+\frac{Sx+T}{(x-c)^2+d^2}+$$
$$+\frac{(zmx+n)(x-\alpha_2)((x-c)^2+d^2)-(mx^2+nx+p)((x-c)^2+d^2+(x-\alpha_2)2(x-c))}{(x-\alpha_2)^2((x-c)^2+d^2)^2}$$

Paso3: Se expresan ambos miembros con un común denominador que será siempre Q(x).

Paso4: Se igualan los numeradores

$$
\begin{aligned}
&P(x)=A(x-\alpha_2)^2((x-a)^2+b^2)((x-c)^2+d^2)^2+B(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)^2((x-a)^2+b^2)((x-c)^2+d^2)^2+\\
&+(Mx+N)(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)^2((x-c)^2+d^2)^2+(Sx+T)(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)^2((x-a)^2+b^2)((x-c)^2+d^2)+\\
&+(2mx+n)(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)^2((x-a)^2+b^2)((x-c)^2+d^2)-\\
&-(mx^2+nx+p)(x-\alpha_1)((x-a)^2+b^2)((x-c)^2+d^2)-\\
&-(mx^2+nx+p)(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)^2 2(x-c)((x-a)^2+b^2)
\end{aligned}
$$

Paso5: Cálculo de los coeficientes indeterminados, que se hará de la misma forma que en 4.3.2, 4.3.3 ó 4.3.4.

Paso6: Integración de cada una de las fracciones obtenidas.

En nuestro ejemplo, las integrales primera y segunda son inmediatas de tipo Logarítmico. La tercera y cuarta las hemos resuelto en el punto 4.3.3. y la última es inmediata teniendo en cuenta las propiedades de la integral.

$$
\begin{aligned}
&\int \frac{P(x)}{Q(x)}dx = A\ln(x-\alpha_1)+B\ln(x-\alpha_2)+\frac{M}{2}\ln\left((x-a)^2+b^2\right)+\frac{Ma+N}{b}\operatorname{arctg}\frac{x-a}{b}+\\
&+\frac{S}{2}\ln\left((x-c)^2+d^2\right)+\frac{Sc+T}{d}\operatorname{arctg}\frac{x-c}{d}+\frac{mx^2+nx+p}{(x-\alpha_2)((x-c)^2+d^2)}+K
\end{aligned}
$$

OBS En el método de Hermite, si se realizó correctamente, no aparecen nunca integrales inmediatas de tipo potencial.

6. INTEGRACIÓN POR PARTES.

Si u ý v son funciones de x, por ejemplo u=f(x) y v=g(x), aplicando la fórmula de la diferencial de un producto de funciones

d(uv) = udv + vdu

y si de esta expresión despejamos udv

udv = d(uv) - vdu

Integrando ambos miembros de la igualdad

$$\int udv = \int d(uv) - \int vdu$$

que se puede escribir como

$$\int udv = uv - \int vdu$$

que es la llamada fórmula de integración por partes.

Si ahora tenemos en cuenta que

$u = f(x) \Rightarrow du = f'(x)dx$

$v = g(x) \Rightarrow dv = g'(x)dx$

y los sustituimos en la fórmula de integración por partes, obtenemos

$\int vdu$

$$\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int g(x)f'(x)dx$$

Esta nueva forma de expresar la fórmula de integración por partes nos expresa mejor éste método de integración, el cual consiste en convertir una integral en una parte ya integrada más una nueva integral.

Se trata de descomponer la integral original como producto de dos funciones, escogiendo éstas de tal manera que al aplicar la fórmula la nueva integral resulte más sencilla que la inicial.

Vamos a ver a continuación unas recomendaciones que nos pueden servir para descomponer la integral en dos partes. Partimos del supuesto de que cualquier función se puede expresar como producto de otras dos, aunque una de ellas sea una constante. Adjuntamos una tabla, en la que llamaremos P(x) y Q(x) a los dos factores en los que dividimos la función a integrar.

P(x)	**Q(x)**	**u**	**dv**
Función inversa de Trigonométrica circular o hiperbólica o función logarítmica	La unidad o cualquier constante	P(x)	Q(x)dx
Función inversa de Trigonométrica circular o hiperbólica o función logarítmica	Polinimio en x o función racional en x	P(x)	Q(x)dx
Polinomio en x o función racional en x	Función Trigonométrica circular o hiperbólica directa, o función exponencial (normalmente de integración inmediata)	P(x)	Q(x)dx
Función Exponencial (normalmente de integración inmediata)	Función Trigonométrica circular o hiperbólica directa.	P(x) o Q(x)	Q(x)dx o P(x)dx

6.1. Integración por Reducción.

La integración por reducción la aplicaremos a integrales con funciones de exponentes habitualmente enteros pero elevados. Se trata de obtener una parte integrada y otra sin integrar tal que, al aplicar la fórmula de integración por partes, se obtenga una nueva integral con la función con el exponente disminuido.

El método es muy similar en todos los casos. Primero aplicamos la integración por partes, obteniendo una parte ya integrada y una integral en la que se debe, u obtener la integral inicial reducida de exponente, o descomponerla en suma de integrales, siendo una de ellas la integral inicial reducida de exponente y la otra la propia integral inicial. En este segundo caso llegamos a una integral recurrente y trataremos como tal.

Un ejemplo de fórmula de reducción:

$$\int \operatorname{sen}^m x dx = \frac{1}{m}\operatorname{sen}^{m-1} x \cos x + \frac{m-1}{m}\int \operatorname{sen}^{m-2} x dx$$

7. CAMBIO DE VARIABLE.

Este método también se conoce como integración por sustitución. Ante integrales cuya resolución no podemos realizar como inmediata, ni racional, ni por partes (o de cualquier otra forma que veremos después) se recurre a este método.

Consiste en encontrar una función x=g(t) la cual, al sustituirla bajo el signo integral, convierte a la integral en otra más sencilla con la nueva variable t.

La sustitución x=g(t) debe cumplir

a) Ser derivable y con derivada no nula.

   dx = g'(t)dt

b) Admitir función inversa.

   x = g(t) $\Rightarrow$ t = h(x)

Entonces

$$\int f(x)dx = \int f(g(t))g'(t)dt = F(t) + C = F(h(x)) + C$$

Sólo nos queda por comprobar, para ver que es correcto, que la derivada de F(h(x)) es f(x):

$$\frac{dF(h(x))}{dx} = \frac{dF(t)}{dx} = \frac{dF(t)}{dt}\cdot\frac{dt}{dx} = F'(t)\cdot\frac{1}{g'(t)} = f(g(t))\cdot g'(t)\cdot\frac{1}{g'(t)} = f(g(t)) = f(x)$$

El método de sustitución es uno de los más amplios por la gran variedad de sustituciones que se pueden dar. Pero hemos de aplicar a cada caso el cambio adecuado, ya que si no, el cambio nos puede llevar a integrales de mayor dificultad.

El los subapartados siguientes indicaremos las sustituciones para tipos concretos. La expresión R indicará función racional de los elementos entre paréntesis (elementos relacionados entre sí por las operaciones racionales de suma, resta, producto y cociente).

7.1. Sustitución en funciones exponenciales, logarítmicas e inversas de trigonométricas circulares e hiperbólicas.

Tipo de Integral	Sustitución	Cálculo de elementos para la sustitución.
$\int R(a^x)dx$ $\int R(x,a^x)dx$	t=a^x	t=a^x $\quad x=\dfrac{\ln t}{\ln a}$ $\quad dx=\dfrac{dt}{t\ln a}$
$\int R(e^x)dx$ $\int R(x,e^x)dx$	t=e^x	t=e^x $\quad$ x=ln t $\quad dx=\dfrac{dt}{t}$
$\int R(x,\ln x)dx$	t=ln x	t=lnx $\quad$ x=e^t $\quad$ dx=e^tdt
$\int R(x,\mathrm{arctg}\,x)dx$	t=arctg x	x=tg t $\quad dx=\dfrac{1}{\cos^2 t}dt$
$\int R(x,\mathrm{arcsen}\,x)dx$	t=arcsen x	x=sen t $\quad$ dx=-sen t dt
$\int R(x,\arccos x)dx$	t=arccos x	x=cos t $\quad$ dx=-sen t dt
$\int R(x,\arg\mathrm{tgh}\,x)dx$	t=argtgh x	x=tgh x $\quad dx=\dfrac{dt}{\cosh^2 t}$
$\int R(x,\arg\mathrm{senh}\,x)dx$	t=argsenh x	x=senh x $\quad dx=\cosh t dt$
$\int R(x,\arg\cosh x)dx$	t=argcosh x	x=cosh x $\quad dx=\mathrm{senh}\,t dt$

7.2. Sustitución en integrales de funciones trigonométricas circulares.

Sustitución	Cálculo de elementos para la sustitoción
Si **R(sen x, cos x)** es impar en sen x, haremos: **t=cos x**	t=cos x $\quad dx=\dfrac{-dt}{\sqrt{1-t^2}}$ $\quad \mathrm{sen}\,x=\sqrt{1-t^2}$
Si **R(sen x, cos x)** es impar en cos x, haremos: **t=sen x**	t=sen x $\quad dx=\dfrac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$ $\quad \cos x=\sqrt{1-t^2}$
Si **R(sen x, cos x)** es par en sen x y cos x, haremos: **t=tg x**	t=tg x $\quad dx=\dfrac{dt}{1+t^2}$ $\quad \mathrm{sen}\,x=\dfrac{t}{\sqrt{1+t^2}}$ $\quad \cos x=\dfrac{t}{\sqrt{1+t^2}}$
Si **R(sen x, cos x)** no cumple con ninguna de las características anteriores, haremos: $t=\mathrm{tg}\,\dfrac{x}{2}$	$dx=\dfrac{2dt}{1+t^2}$ $\quad \mathrm{sen}\,x=\dfrac{2t}{1+t^2}$ $\quad \cos x=\dfrac{1-t^2}{1+t^2}$

7.3 Sustitucion en integrales de funciones hiperbolicas.

Sustitución	Cálculo de elementos para la sustitoción
Si **R(senh x, cosh x)** es impar en senh x, haremos: **t=cosh x**	$dx=\dfrac{dt}{\sqrt{t^2-1}}$ $\quad \mathrm{senh}\,x=\sqrt{t^2-1}$

Si **R(senh x, cosh x)** es impar en cosh x, haremos: **t=senh x**	$dx = \frac{dt}{\sqrt{t^2+1}}$ $\cosh x = \sqrt{t^2+1}$
Si **R(senh x, cosh x)** es par en senh x y cosh x, haremos: **t=tgh x**	$dx = \frac{dt}{1-t^2}$ $\text{senh } x = \frac{t}{\sqrt{1-t^2}}$ $\cosh x = \frac{t}{\sqrt{1-t^2}}$
Si **R(senh x, cosh x)** no cumple con ninguna de las características anteriores, haremos: $t = \text{tgh } \frac{x}{2}$	$dx = \frac{2dt}{1-t^2}$ $\text{senh } x = \frac{2t}{1-t^2}$ $\cosh x = \frac{1+t^2}{1-t^2}$

8. FÓRMULAS RECURRENTES.

Dada una integral a la cual no podemos aplicar el método de sustitución, y el método de integración por partes nos dé una integral similar integral partida, podemos aplicar la resolución por recurrencia.

1) $\int x^n e^{ax} dx$

Llamaremos a la integral a calcular

$$I_n = \int x^n e^{ax} dx =$$

$$u = x^n \qquad du = nx^{n-1}$$
$$dv = e^{ax} dx \quad v = \frac{e^{ax}}{a}$$

$$x^n \cdot \frac{1}{a} + \int \frac{1}{a} e^{ax} \cdot nx^{n-1} = \frac{1}{a} x^n e^{ax} - \frac{n}{a} I_{n-1}$$

La ecuación recurrente es:

$$I_n = \frac{1}{a} x^n e^{ax} - \frac{n}{a} I_{n-1}$$

2) Sea $I_{m,n} = \int \text{sen}^{m-1}(x) \cdot \cos^n(x) dx =$

$$u = sen^{m-1}(x)dx \qquad du = (m-1) \cdot sen^{m-2}(x) \cdot \cos(x) dx$$

$$dv = sen(x) \cdot \cos^n(x) dx \qquad v = -\frac{\cos^{n+1}(x)}{n+1}$$

$$-\frac{\operatorname{sen}^{m-1}(x)\cdot\cos^{n+1}(x)}{n+1}+\frac{m-1}{n+1}\int \operatorname{sen}^{m-2}(x)\cdot\cos^{n+2}(x)dx=-\frac{\operatorname{sen}^{m-1}(x)\cos^{n+1}(x)}{n+1}+\frac{m-1}{n+1}\cdot I_{m-2,n+2}$$

Luego la ecuación es:

$$I_{m,n}=-\frac{1}{n+1}\cdot sen^{m-1}(x)\cos^{n+1}(x)+\frac{m-1}{n+1}\cdot I_{m-2,n+2}$$

9. INTEGRACIÓN DE FUNCIONES IRRACIONALES.

9.1. Integración por sustitución en funciones irracionales.

En la tabla siguiente aparecen las sustituciones más importantes para la resolución de este tipo de integrales. Daremos el tipo de integral al que se aplica, la sustitución que se realiza y el cálculo de aquellos elementos necesarios para completar la sustitución.

Tipo de Integral	**Sustitución**
$\int R\left(x,\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{m/n},\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{p/q},\ldots,\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{t/s}\right)dx$	$t^M=\frac{ax+b}{cx+d}$ siendo M el m.c.m. de los denominadores
Cálculo de los elementos para la sustitución	
$x=\frac{t^M d-b}{a-t^M c}=f(t)$ función racional en t $\quad dx=f'(t)dt$	

Tipo de Integral	**Sustitución**
$\int R\left(x,(ax+b)^{m/n},(ax+b)^{p/q},\ldots,(ax+b)^{t/s}\right)dx$ (es similar al caso anterior, con c=0 y d=1	$t^M=ax+b$ siendo M el m.c.m. de los denominadores
Cálculo de los elementos para la sustitución	
$x=\frac{1}{a}\left(t^M-b\right)=f(t)$ función racional en t $\quad dx=f'(t)dt$	

Tipo de Integral	**Sustitución**
$\int R\left(x,x^{m/n},x^{p/q},\ldots,x^{t/s}\right)dx$ (es similar al caso anterior, con b=0 y a=1	$t^M=x$ siendo M el m.c.m. de los denominadores
Cálculo de los elementos para la sustitución	
$dx=M\cdot t^{M-1}dt$	

9.2. Métodos especiales de integración de funciones irracionales.

a) Integrales de la forma $\int\frac{P(x)}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx$ con grado (P(x)) ≥ 1

Vemos los pasos a seguir en la resolución:

Paso 1: Descomponemos la fracción como sigue: Un primer término que es la derivada indicada con respecto a x del producto de un polinomio que llamaremos Q(x), completo en x con coeficientes indeterminados y de grado menor en una unidad al grado de P(x), multiplicado por la raíz cuadrada del denominador. A esto sumaremos un segundo término que será una fracción formada por un coeficiente indeterminado, λ, como numerador, y la raíz como denominador. No demostraremos que la descomposición es única.

$$\frac{P(x)}{\sqrt{ax^2+bx+c}} = \frac{d}{dx}\left(Q(x)\cdot\sqrt{ax^2+bx+c}\right) + \frac{\lambda}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$$

Paso 2: Se deriva la expresión que hay indicada.

$$\frac{P(x)}{\sqrt{ax^2+bx+c}} = Q'(x)\sqrt{ax^2+bx+c} + \frac{Q(x)\left(ax+\frac{b}{2}\right)}{\sqrt{ax^2+bx+c}} + \frac{\lambda}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$$

Paso 3: Reducimos ambos miembros a común denominador.

$$\frac{P(x)}{\sqrt{ax^2+bx+c}} = \frac{Q'(x)\cdot(ax^2+bx+c)}{\sqrt{ax^2+bx+c}} + \frac{Q(x)(ax+\frac{b}{2})}{\sqrt{ax^2+bx+c}} + \frac{\lambda}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$$

Paso 4: Igualamos los numeradores de ambos miembros y procedemos a la identificación de coeficientes.

$$P(x) = Q'(x)\cdot(ax^2+bx+c) + Q(x)(ax+\frac{b}{2}) + \lambda$$

Paso 5: Integramos en ambos miembros de la expresión obtenida en el <u>*Paso 1º*</u>. El primer término queda integrado con sólo eliminar la indicación de derivada, y el segundo término es una integral que ya resolvimos en un apartado anterior.

$$\int \frac{P(x)}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx = Q(x)\cdot\sqrt{ax^2+bx+c} + \lambda\int\frac{1}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx$$

b) Integrales de la forma $\int \frac{dx}{(x-a)^p \sqrt{ax^2+bx+c}}$

Este tipo de integral es muy específico, y mediante la siguiente sustitución que recomendamos se reduce a integrales ya vistas.

Sustitución: $t = \frac{1}{x-a}$

Elementos necesarios para completar la sustitución:

$$\frac{1}{t} = x - a \qquad x = a + \frac{1}{t} \qquad dx = -\frac{1}{t^2}dt$$

c) Caso General. Sustitución en funciones irracionales.

A continuación exponemos una tabla con sustituciones estándar para resolver integrales del tipo

$$\int R(x, \sqrt{ax^2+bx+c})dx$$

Estas sustituciones se pueden aplicar a los dos casos anteriores, pero no es aconsejable.

<table>
<tr><th>Tipo de Integral</th><th>Sustitución</th></tr>
<tr><td>$\int R\left(x, \sqrt{ax^2+bx+c}\right)dx$</td><td>Si a>0 $\sqrt{ax^2+bx+c} = \pm\sqrt{a}\cdot x + t$</td></tr>
<tr><th colspan="2">Cálculo de los elementos para la sustitución</th></tr>
<tr><td colspan="2">$x = \frac{t^2 - c}{b \mp 2\sqrt{a}\cdot t} = f(t)$ función racional en t
$dx = f'(t)dt$ $\sqrt{ax^2+bx+c} = \pm\sqrt{a}f(t) + t$</td></tr>
</table>

<table>
<tr><th>Tipo de Integral</th><th>Sustitución</th></tr>
<tr><td>$\int R\left(x, \sqrt{ax^2+bx+c}\right)dx$</td><td>Si c>0 $\sqrt{ax^2+bx+c} = \pm\sqrt{c} + x\cdot t$</td></tr>
<tr><th colspan="2">Cálculo de los elementos para la sustitución</th></tr>
<tr><td colspan="2">$x = \frac{\pm 2\cdot\sqrt{c}\cdot t - b}{a - t^2} = f(t)$ función racional en t
$dx = f'(t)dt$ $\sqrt{ax^2+bx+c} = \pm\sqrt{c} + f(t)\cdot t$</td></tr>
</table>

<table>
<tr><th>Tipo de Integral</th><th>Sustitución</th></tr>
<tr><td>$\int R\left(x, \sqrt{ax^2+bx+c}\right)dx$</td><td>$\sqrt{ax^2+bx+c} = (x-\alpha)\cdot t$
Siendo α una de las dos raíces que se obtienen al resolver la ecuación y la otra β.</td></tr>
</table>

Cálculo de los elementos para la sustitución
$x = \dfrac{a\cdot \boldsymbol{b} - \boldsymbol{a}\cdot t^2}{a - t^2} = f(t)$ función racional en t $dx = f'(t)dt$ $\sqrt{ax^2 + bx + c} = (f(t) - \boldsymbol{a})\cdot t$

Si en la integral anterior tenemos que b = 0 podemos aplicar otras sustituciones más fáciles que las estándar, usando funciones trigonométricas circulares.

Tipo de Integral	Sustitución	Cálculo de elementos para la sustitución.
$\int R(x, \sqrt{-ax^2 + c})dx$	$x = \dfrac{\sqrt{c}}{\sqrt{a}} \operatorname{sen} t$	$\sqrt{c - ax^2} = \sqrt{c} \cos t$ $dx = \dfrac{\sqrt{c}}{\sqrt{a}} \cos t di$ $t = \operatorname{arcsen} \dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{c}} x$
$\int R(x, \sqrt{ax^2 - c})dx$	$x = \dfrac{\sqrt{c}}{\sqrt{a}} \sec t$	$\sqrt{ax^2 - c} = \sqrt{c} \operatorname{tg} t$ $dx = \dfrac{\sqrt{c} \operatorname{sen} t}{\sqrt{a} \cos^2 t} di$ $t = \operatorname{arcsen} \dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{c}} x$
$\int R(x, \sqrt{ax^2 + c})dx$	$x = \dfrac{\sqrt{c}}{\sqrt{a}} \operatorname{tg} t$	$\sqrt{ax^2 + c} = \sqrt{c} \sec t$ $dx = \dfrac{\sqrt{c}}{\sqrt{a} \cos^2 t} di$ $t = \operatorname{arctg} \dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{c}} x$

10. INTEGRALES BINÓMIAS.

Las integrales que llamaremos Binomias son de la forma:

$$\int x^m \cdot (a + bx^n)^p \, dx$$

y las sustituciones que hay que realizar son las que aparecen en la tabla siguiente:

Tipo de Integral	Sustitución
$\int x^m \cdot \left(a+bx^n\right)^p dx$	Si p es un número entero $x = t^{\frac{1}{n}}$
	Si $\frac{m+1}{n}$ es un número entero $t^s = a + b \cdot x^n$ siendo s el denominador de la fracción p
	Si $\frac{m+1}{n} + p$ es un número entero $t^s = a \cdot x^{-n} + b$ siendo s el denominador de la fracción p

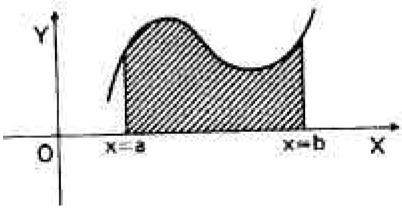
11. APLICACIONES.

11.1. Áreas de Figuras Planas.

a) Área de la figura limitada por la curva y = f(x) entre x = a, x = b y el eje OX (b > a).

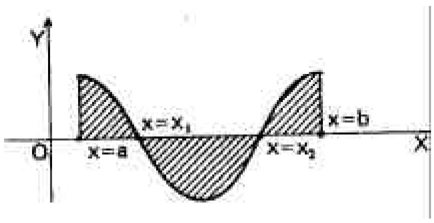
Podemos distinguir dos casos según la gráfica y = f(x) corte al eje OX en algún punto del intervalo [a, b] o no.

Si no corta al eje en [a,b]



$$S = \int_a^b f(x)dx$$

Supongamos ahora que f(x) corta a OX en x_1, $x_2 \in$ [a,b]

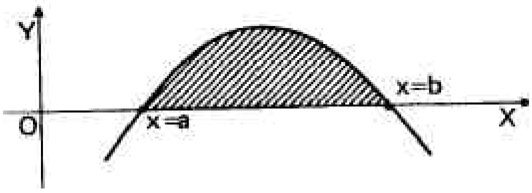


$$S = \left|\int_a^{x_1} f(x)dx\right| + \left|\int_{x_1}^{x_2} f(x)dx\right| + \left|\int_{x_2}^{x_b} f(x)dx\right|$$

b) Área de la figura limitada por la curva y = f(x) y el eje OX.

b.i) Existen dos puntos de corte.

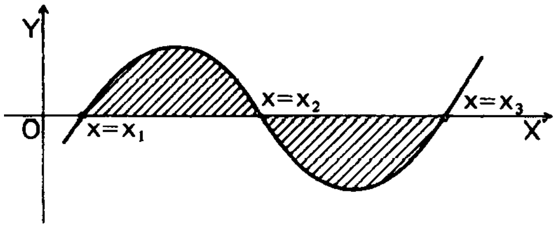
Supongamos que sean x = a y x = b



$$S = \int_a^b f(x)dx$$

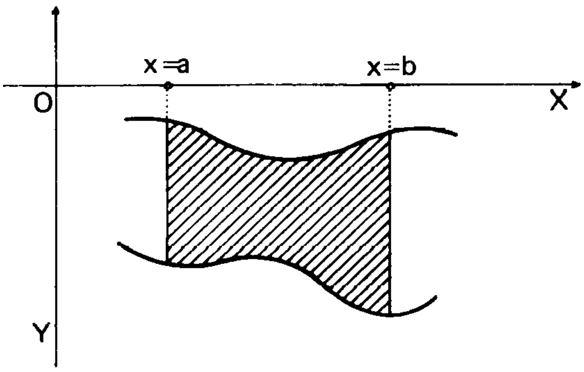
b.ii) Existen más de dos puntos de corte.

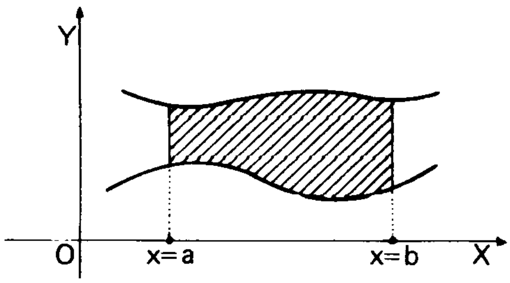
Supongamos que sean tres: x_1, x_2 y x_3



$$S = \left|\int_{x_1}^{x_2} f(x)dx\right| + \left|\int_{x_2}^{x_3} f(x)dx\right|$$

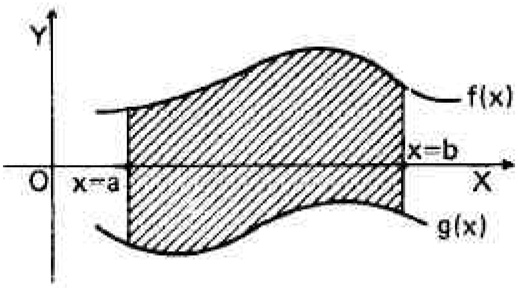
c) Área de la figura limitada entre las curvas y = f(x), y = g(x), x = a y x = b (con f(x) y g(x) positivas o negativas en [a,b]).





$$S = \left|\int_a^b (f(x) - g(x))dx\right|$$

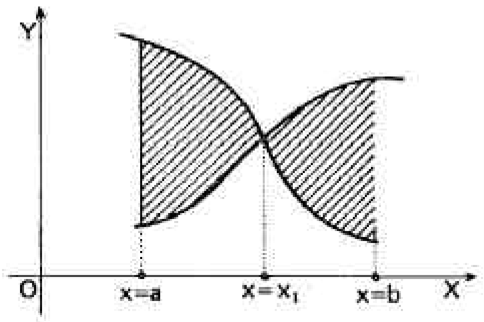
d) Área de la figura limitada entre las curvas y = f(x), y = g(x), x = a y x = b (f(x) > 0 y g(x) < 0 en [a,b]).



$$S = \int_a^b (f(x) - g(x))dx$$

e) Área de la figura limitada entre las curvas y = f(x), y = g(x), x = a y x = b (f(x) y g(x) positivas o negativas ambas) con un punto de corte.3

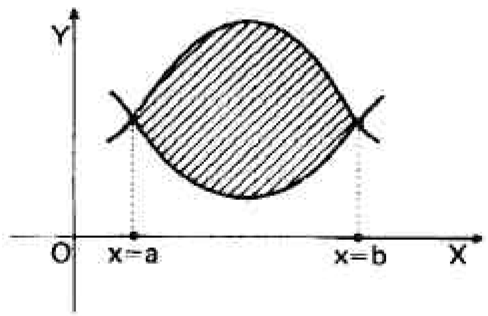
Sea x_1 solución a f(x) = g(x)



$$S = \left| \int_a^{x_1} (f(x) - g(x))dx \right| + \left| \int_{x_1}^{b} (f(x) - g(x))dx \right|$$

f) Área limitada entre las curvas y = f(x) e y = g(x)

Se resuelve la ecuación para f(x) = g(x) para hallar los puntos de corte. Supongamos que sólo salen dos, a y b que f(x) > g(x) $\forall$ x $\in$ [a,b].

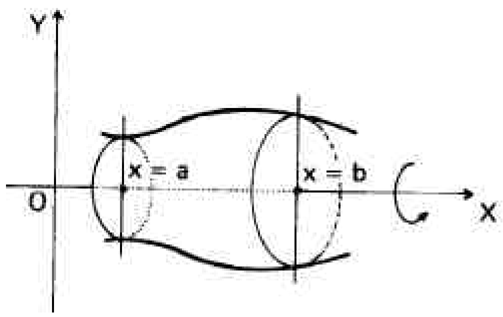


$$S = \int_a^b (f(x) - g(x))dx$$

Si existiesen más de dos puntos de corte, aplicaremos la fórmula para cada dos puntos consecutivos.

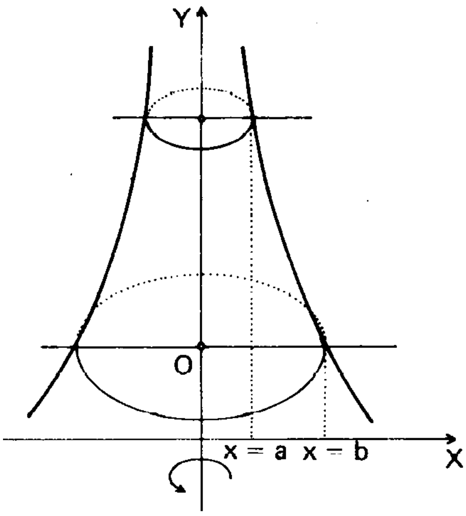
11.2. Volúmenes de cuerpos de Revolución.

a) Volumen del cuerpo engendrado por la revolución de la curva y = f(x) alrededor del eje OX entre x = a y x = b.



$$V = p\int_a^b f^2(x)dx$$

b) Volumen del cuerpo engendrado por la revolución de la curva y = f(x) alrededor del eje OY entre x = a y x = b.



$$V = 2\pi \int_a^b x f(x) dx$$

c) Volumen del cuerpo engendrado por la revolución de una figura limitada por las curvas y = f(x) e y = g(x) (f(x) > g(x)) entre x = a y x = b al girar alrededor del eje OX

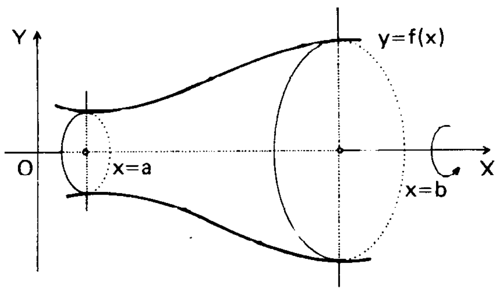
$$V = \pi \int_a^b (f^2(x) - g^2(x)) dx$$

d) Volumen del cuerpo engendrado por la revolución de una figura limitada por las curvas y = f(x) e y = g(x) (f(x) > g(x)) entre x = a y x = b al girar alrededor del eje OY.

$$V = 2\pi \int_a^b (f(x) - g(x)) dx$$

<u>11.3. Area de una superficie de revolución.</u>

a) Area de la superficie generada por el giro alrededor del eje OX de l arco de la curva y = f(x) entre x = a y x = b.



$$V = 2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx$$

Bibliografía Recomendada.

Análisis Matemático I. Aut. J.A. Fernández Viña. Ed. Tecnos

Lecciones de Cálculo Infinitesimal I. Aut. R. Molina Legaz, M. Franco. Ed. Universidad de Murcia.

Principios de Análisis Matemático. Aut. W. Rudin. Ed. McGraw-Hill

Curso de Análisis Matemático I. Aut. E.L. Luna. Ed. Edunsa, 1991.

Calculus. Aut. M. Spivak. Ed. Reverté.

Análisis Matemático. Aut. M. de Guzmán, B. Rubio. Ed. Pirámide.

Calculus. Aut. Apostol. Ed. Reverté