TEMA 25
(Oposiciones de Matemáticas)

LÍMITES DE FUNCIONES. CONTINUIDAD Y DISCONTINUIDAD. TEOREMA DE BOLZANO.

TEMA 25

<u>LÍMITES DE FUNCIONES. CONTINUIDAD Y DISCONTINUIDAD. TEOREMA DE BOLZANO.</u>

1. INTRODUCCIÓN.

Entre todos los conceptos con los que nos podemos encontrar en el cálculo infinitesimal, el más importante es el de límite. A partir de él podemos definir otros conceptos como son el de continuidad, derivabilidad, integrabilidad, etc.

Informalmente, podemos decir que la función f tiende hacia el límite l cerca de a, si se puede conseguir que f(x) esté tan cerca como queramos de l tomando x suficientemente cerca de a, pero siendo distinto en a.

Esta primera aproximación al concepto de límite nonos resulta útil debido a su falta de precisión. Por eso, daremos más adelante otra que nos permita utilizarla en las demostraciones de los teoremas.

Otro concepto importante es el de continuidad, si bien, tardó en aparecer debido a que cuando comenzó a desarrollarse el cálculo, casi todas las funciones eran continuas. Por tanto, no era necesario definir la continuidad.

Poco a poco comenzaron a surgir en Física, Química y otras ramas del saber funciones discontinuas.

Una definición de continuidad, expresada solamente a partir de las propiedades de los números reales, fue formulada por primera vez en 1821 por Cauchy.

2. LÍMITES DE FUNCIONES.

2.1. Límite de una función en un punto.

Para formalizar la definición de límite vista en la introducción, tenemos que concretar las expresiones “tan cerca como queramos” o “suficientemente cerca”. El concepto de distancia entre números reales nos lo da el valor absoluto. El valor absoluto de la diferencia entre dos números reales nos indica el grado de aproximación entre los mismos.

Así pues, podemos definir el límite de una función en un punto como sigue.

DEF Sea $A\subset\mathbb{R}$ un intervalo, $a\in A$ y $f: A \to \mathbb{R}$. Diremos que el límite de f(x) cuando x tiende a a es L, y se representa por $\lim_{x\to a} f(x) = L$, si

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \,/\, 0 < |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$$

OBS Que x tiende a a se traduce en que x se puede hacer tan próximo al nº a como queramos, pero nunca igual.

OBS Que $\left|f(x)-L\right|<\varepsilon$ es lo mismo que $f(x)\in(L-\varepsilon, L+\varepsilon)$ y que $0<|x-a|<\delta$ es equivalente a que $x\in(a-\delta, a+\delta)$ y x ≠ a.

Ejemplos.

1) Dada la función f(x) = 3x + 5, comprobemos que

$$\lim_{x\to 1} f(x)=8$$

$$\forall\varepsilon>0 \quad \exists\delta>0 / \; |3x+5-8|<\varepsilon \quad \text{si} \quad |x-1|<\delta$$

$$|3x+5-8|=|3x-3|=3|x-1|<3\delta=\varepsilon \quad \Rightarrow \quad \boxed{\delta=\frac{\varepsilon}{3}} \quad \Rightarrow \quad \lim_{x\to 1} f(x)=8$$

2) Dada la función f(x) = E(x) (parte entera de x) comprobemos que en x=2 no tiene límite.

Demostración análoga

En la definición de límite hemos supuesto que *A* era un intervalo y que *x* podía llegar a tomar el valor de *a*. Podemos dar una definición más general suponiendo que *A* es un subconjunto, no necesariamente un intervalo, y que a es un punto de acumulación de dicho subconjunto.

DEF Sea $A\subset\mathbb{R}$ un subconjunto, a un punto de acumulación de A y f: A $\to\mathbb{R}$ una función. Diremos que el límite de f(x) cuando x tiende a *a* es L, y se representa por $\lim_{x\to a} f(x)=L$, si

$$\forall\varepsilon>0 \quad \exists\delta>0 \,/\, 0<|x-a|<\delta \Rightarrow \left|f(x)-L\right|<\varepsilon$$

OBS Si f(x) está definida en todos los puntos del subconjunto $A\subset\mathbb{R}$ menos en un número finito de ellos, y a es uno de esos puntos, significa que f(a) no existe. Pero eso no implica que $\lim_{x\to a} f(x)$ no vaya a existir.

2.2. Límites Laterales.

Vamos a suponer que f: A $\to\mathbb{R}$ es una función, con $A\subset\mathbb{R}$ un subconjunto y $a\in\mathbb{R}$ un punto de acumulación de A.

DEF Diremos que el límite de f(x) cuando x tiende a *a* por al izquierda es L, y se representa por $\lim_{x\to a^-} f(x)=L$, si

$$\forall\varepsilon>0 \quad \exists\delta>0 \,/\, a<x<a+\delta \Rightarrow \left|f(x)-L\right|<\varepsilon$$

PROP $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to a^-} f(x) = \lim\limits_{x\to a^-} f(x) = L$

Dem.

$\boxed{\Rightarrow}$ $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 / \ |3x-a|<\delta \quad \Rightarrow \quad |f(x)-L|<\varepsilon$

$$\Rightarrow \begin{cases} \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 / a < x < a+\delta \ \Rightarrow \ |f(x)-L| < \varepsilon \ \Rightarrow \ \lim\limits_{x\to a^+} f(x) = L \\ \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 / a-\delta < x < a \ \Rightarrow \ |f(x)-L| < \varepsilon \ \Rightarrow \ \lim\limits_{x\to a^-} f(x) = L \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad \lim_{x\to a^+} f(x) = \lim_{x\to a^-} f(x) = L$$

$\boxed{\Leftarrow}$

Si $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = L \quad \Rightarrow \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta' > 0 / a < x < a+\delta' \ \Rightarrow \ |f(x)-L| < \varepsilon$

Si $\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = L \quad \Rightarrow \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta'' > 0 / a-\delta'' < x < a \ \Rightarrow \ |f(x)-L| < \varepsilon$

$\Rightarrow$ Si tomamos $\delta = min\{\delta', \delta''\} \quad \Rightarrow$

$\Rightarrow \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 / |x-a| < \delta \ \Rightarrow \ |f(x)-L| < \varepsilon \quad \Rightarrow \quad \lim\limits_{x\to a} f(x) = L$

Ejemplo.

Dada la función f(x) = E(x) calcular los límites laterales para z = z.

Demostración análoga

2.3. Límites Infinitos y Límites en el Infinito.

De nuevo, sea $A\subset\mathbb{R}$ un subconjunto y $a\in\mathbb{R}$ un punto de acumulación de A. Veamos lo límites infinitos.

DEF Diremos que el límite de f(x) cuando x tiende a a es $+\infty$, y se representa por $\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty$, si

$$\forall K > 0 \quad \exists \delta > 0 / 0 < |x-a| < \delta \Rightarrow f(x) > K$$

A partir de estas dos definiciones y teniendo en cuenta las vistas para límites laterales, podemos mezclarlas obteniendo cuatro nuevas, que serían desglosar cada una de las dos anteriores en sus laterales. Por ejemplo.

DEF Diremos que el límite de f(x) cuando x tiende a a por al izquierda es $+\infty$, y se representa por $\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = +\infty$, si

$$\forall K > 0 \quad \exists \boldsymbol{d} > 0 \; / \; a - \boldsymbol{d} < x < a \Rightarrow f(x) > K$$

Análogamente para $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = -\infty$ y $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = -\infty$.

<u>Ejemplo.</u>

1) Comprobar que $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{1}{(x-1)^2} = +\infty$

$$\forall K > 0 \quad \exists \boldsymbol{d} > 0 \; / \; 0 < |x-1| < \boldsymbol{d} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{(\mathrm{x} - 1)^2} > K$$

$$\frac{1}{(\mathrm{x} - 1)^2} > K \quad \Rightarrow \quad (x-1)^2 < \frac{1}{K} \quad \Rightarrow \quad (x-1) < +\sqrt{\frac{1}{K}} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad 0 < |x-1| < +\sqrt{\frac{1}{K}} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\boldsymbol{d} = +\sqrt{\frac{1}{K}}} \quad \Rightarrow \quad \lim_{x \to 1} \frac{1}{(x-1)^2} = +\infty$$

2) Comprobar que $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1}{x}$ no existe

$$\left. \begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{1}{x} = -\infty \\ \lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{1}{x} = +\infty \end{array} \right\} \quad \Rightarrow \quad \nexists \lim_{x \to 0} \frac{1}{x}$$

Para definir los límites en el infinito, es necesario que el subconjunto A⊂ℝ cumpla alguna condición, como es el no estar acotado superiormente o inferiormente, según corresponda.

DEF Sea f: A $\to$ ℝ una función con A⊂ℝ subconjunto no acotado superiormente. Diremos que el límite de f(x) cuando x tiende a $+\infty$ es L, si se representa por $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = L$

$$\forall \boldsymbol{e} > 0 \quad \exists H > 0 \; / \; \forall x > H \Rightarrow |f(x) - L| < \boldsymbol{e}$$

OBS En los límites en el infinito no tiene sentido hablar de límites laterales.

<u>Ejemplo.</u>

1) Comprobar que $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x+1}{x} = 1$

$$\forall \boldsymbol{e} > 0 \quad \exists H > 0 \;/\; \forall x > H \quad \Rightarrow \quad \left| \frac{x+1}{x} - 1 \right| < \boldsymbol{e} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left| \frac{x+1}{x} - 1 \right| = \left| \frac{x+1-x}{x} \right| = \left| \frac{1}{x} \right| < \boldsymbol{e} \quad \Rightarrow \quad x > \frac{1}{\boldsymbol{e}} \quad \Rightarrow \quad \boxed{H = \frac{1}{\boldsymbol{e}}} \quad \Rightarrow \quad \lim_{x \to +\infty} \frac{x+1}{x} = 1$$

Una vez vistos los límites infinitos y los límites en el infinito, podemos juntarlos obteniendo límites infinitos en el infinito. Su representación sería:

1) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

2) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$

3) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$

4) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$

Sus definiciones se obtienen a partir de las definiciones de cada uno de ellos.

2.4. Definición de Límite mediante entornos.

Vamos a caracterizar los límites mediante entornos. Recordemos las definiciones de entornos

1) $E(a,\boldsymbol{d}) = \{x \in \mathbb{R} / a - \boldsymbol{d} < x < a + \boldsymbol{d}\}$

2) $E^*(a,\boldsymbol{d}) = E(a,\boldsymbol{d}) - \{a\}$

El primero es el entorno de centro a y radio δ y es equivalente al intervalo $(a-\boldsymbol{d}, a+\boldsymbol{d})$, que también se escribe como $|x-a| < \boldsymbol{d}$ -

El segundo es el mismo, pero sin incluir el punto central a. Recibe el nombre de entorno reducido de centro a y radio r.

Con estas consideraciones, podemos dar la siguiente definición.

DEF Sea $A \subset \mathbb{R}$ un subconjunto, $a \in \mathbb{R}$ un punto de acumulación de A y f: A $\to \mathbb{R}$ una función. Diremos que el límite de f(x) cuando x tiende a a es L, y se representa por $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L$, si

$$\forall \boldsymbol{e} > 0 \quad \exists \boldsymbol{d} > 0 \;/\; \forall x \in E^*(a,\boldsymbol{d}) \cap A \Rightarrow f(x) \in E(L,\boldsymbol{e})$$

Si además, denotamos como

$$E(+\infty, r) = \{x \in \mathbb{R} \;/\; x > r\}$$

$$E(-\infty, r) = \{x \in \mathbb{R} \;/\; x < -r\}$$

a las semirectas $(r,+\infty)$ y $(-\infty,-r)$ respectivamente, la definición nos sirve también para los límites infinitos, límites en el infinito o ambos.

2.5. Propiedades de los límites.

2.5.1. Acotación.

PROP Si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L$, con L finito, la función f(x) está acotada cuando x tiende a a.

Dem.

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \;/\; |x-a| < \delta \quad \Rightarrow \quad |f(x) - L| < \varepsilon \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \text{ si } \quad x \in (a-\delta, a+\delta) \quad \Rightarrow \quad f(x) \in (L-\varepsilon, L+\varepsilon) \quad \Rightarrow \quad f(x) \text{ está acotada.}$$

La siguiente proposición se conoce comúnmente como Regla del Sándwich.

PROP Si tres funciones f(x), g(x) y h(x) están relacionadas entre si por la desigualdad doble

$$f(x) \le g(x) \le h(x)$$

y si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \lim\limits_{x \to a} h(x) = L$, entonces $\lim\limits_{x \to a} g(x) = L.$

Dem.

$$\lim_{x \to a} f(x) = L \quad \Rightarrow \quad \forall \varepsilon > 0 \;\exists \delta' > 0 \;/\; x \in (a-\delta', a+\delta') \quad \Rightarrow \quad f(x) \in (L-\varepsilon, L+\varepsilon)$$

como

$$\lim_{x \to a} h(x) = L \quad \Rightarrow \quad \forall \varepsilon > 0 \;\exists \delta'' > 0 \;/\; x \in (a-\delta'', a+\delta'') \quad \Rightarrow \quad h(x) \in (L-\varepsilon, L+\varepsilon)$$

si tomamos $\delta = min\{\delta', \delta''\}$ y como $f(x) \le g(x) \le h(x) \quad \Rightarrow$

$$\Rightarrow \text{ si } \quad x \in (a-\delta, a+\delta) \quad \Rightarrow \quad g(x) \in (L-\varepsilon, L+\varepsilon) \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \;/\; |x-a| < \delta \quad \Rightarrow \quad |g(x) - L| < \varepsilon \quad \Rightarrow \quad \lim_{x \to a} g(x) = L$$

PROP Si f(x) no toma valores negativos cuando x tiende a a y existe $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L$ entonces L ≥ 0.

Dem.

Supongamos que $L<0 \quad \Rightarrow$ Si tomamos $\varepsilon = \dfrac{|L|}{2}$ se tiene que:

$$\forall \boldsymbol{e} > 0 \quad \exists \boldsymbol{d} > 0 \,/\, |x-a| < \boldsymbol{d} \quad \text{si} \quad f(x) \in (L-\boldsymbol{e}, L+\boldsymbol{e}) \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad f(x) < 0 \quad \forall x \in (a-\boldsymbol{d}, a+\boldsymbol{d}) \quad \Rightarrow \quad \text{Contradicción} \quad \Rightarrow \quad L \geq 0$$

PROP Si dos funciones f y g verifican la desigualdad f(x) ≤ g(x) para valores de x que tienden a a y existen $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ y $\lim\limits_{x\to a} g(x)$ entonces $\lim\limits_{x\to a} f(x) \leq \lim\limits_{x\to a} g(x)$.

<u>Dem.</u>

Análoga

<u>2.6. Definición de límite mediante sucesiones.</u>

PROP Sea A⊂ℝ un subconjunto, a∈ ℝ un punto de acumulación de A y f: A → ℝ una función.

$$\lim_{x\to a} f(x) = L \Leftrightarrow \left\{ \forall (x_n)_{n\in N} \subset A \; con \quad \lim_n x_n = a \Rightarrow \lim_n f(x_n) = L \right\}$$

<u>Dem.</u>

$\boxed{\Rightarrow}$ Dada x_n con $x_n \in A$ y $\lim\limits_{x\to+\infty} x_n = a$, se trata de probar que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x_n) = L$, es decir, que dado $\boldsymbol{e} > 0 \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \,/\, |f(x_n) - L| < \boldsymbol{e}$ si $n \geq n_0$

Para ese $\boldsymbol{e} > 0 \quad \exists \boldsymbol{d} > 0 \,/\, f(B(a,\boldsymbol{d})) \subset B(L,\boldsymbol{e})$ pero $\Rightarrow \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \,/\, x_n \in B(a,\boldsymbol{d})$ si $n \geq n_0$ en cuyo caso $f(x_n) \in B(L,\boldsymbol{e})$ si $n \geq n_0$

$\boxed{\Leftarrow}$ Dado $\boldsymbol{e} > 0$ se trata de demostrar que $\exists \boldsymbol{d} > 0$ tal que $f(B(a,\boldsymbol{d})) \subset B(L,\boldsymbol{e})$

Supongamos que $\nexists \boldsymbol{d}$ que buscamos que buscamos

Para cada $\boldsymbol{d} = \dfrac{1}{n}$ no vale, luego $\exists x_n \,/\, x_n \in (a, 1/n)$ pero $f(x_n) \notin B(L,\boldsymbol{e})$.

Pero entonces $\quad \lim\limits_{n\to+\infty} f(x_n) = a \quad$ y $\quad f(x_n) \notin B(L,\boldsymbol{e}) \quad \Rightarrow$

$$\Rightarrow \quad \lim_{n\to+\infty} f(x_n) \neq L \quad \text{contradicción}$$

(ya que estamos admitiendo que si $x_n \to a \;\Rightarrow\; f(x_n) \to L$) $\Rightarrow \;\exists \boldsymbol{d} > 0$ buscado.

<u>2.7. Criterio de Cauchy.</u>

PROP Sea A⊂ℝ un subconjunto a∈ ℝ un punto de acumulación de A y f: A → ℝ una función.

Existe $\lim\limits_{x\to a} f(x) \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \ / \ x_1, x_2 \in E^*(a,\delta) \Rightarrow |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$

<u>Dem.</u>

Realizar como ejercicio

2.8. Operaciones Aritméticas con Límites.

En este punto, y salvo que se diga lo contrario A⊂ℝ es un subconjunto y a∈ℝ es un punto de acumulación de A.

2.8.1. Límite de una suma.

PROP Sean f: A → ℝ y g: A → ℝ dos funciones.

Si existen $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L_1$ y $\lim\limits_{x\to a} g(x) = L_2$ y son finitos entonces existe:

$\lim\limits_{x\to a}(f(x) + g(x)) = L_1 + L_2$

<u>Dem.</u>

Como $\forall \varepsilon' > 0 \quad \exists \delta' > 0 \ / \ |x - a| < \delta' \quad \Rightarrow \quad |f(x) - L_1| < \varepsilon'$

y $\forall \varepsilon' > 0 \quad \exists \delta'' > 0 \ / \ |x - a| < \delta'' \quad \Rightarrow \quad |g(x) - L_2| < \varepsilon'$

$\Rightarrow$ si tomamos $\delta = min\{\delta', \delta''\}$ entonces:

$$|f(x) + g(x) - L_1 - L_2| = |f(x) - L_1 + g(x) - L_2| \leq |f(x) - L_1| + |g(x) - L_2| < \varepsilon' + \varepsilon' = 2\varepsilon' = \varepsilon$$

$$\Rightarrow \quad \forall \varepsilon > 0 \ \ \exists \delta > 0 \ / \ |(f(x) + g(x)) - (L_1 + L_2)| < \varepsilon \quad \text{si} \quad |x - a| < \delta \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \lim_{x\to a}(f(x) + g(x)) = L_1 + L_2$$

PROP Sean f, g: A → ℝ dos funciones. Si existen $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L_1$ y $\lim\limits_{x\to a} g(x) = L_2$. Y son finitos, entonces existe $\lim\limits_{x\to a}(f(x) - g(x)) = L_1 - L_2$.

<u>Dem.</u>

Análoga a la anterior.

Si alguno de los dos límites fuese infinito tenemos

PROP Sean f, g: A $\rightarrow$ ℝ dos funciones. Si existen $\lim_{x\to a} f(x) = L_1$ y $\lim_{x\to a} g(x) = +\infty$ con L_1 finito, entonces existe $\lim_{x\to a}\left(f(x)+g(x)\right) = +\infty$.

<u>Dem.</u>

Realizar como ejercicio

De forma análoga se podría demostrar que:

1) $L_1 = +\infty$ y L_2 finito $\Rightarrow L_1 + L_2 = +\infty$
2) L_1 finito y $L_2 = -\infty \Rightarrow L_1 + L_2 = -\infty$
3) $L_1 = -\infty$ y L_2 finito $\Rightarrow L_1 + L_2 = +\infty$
4) $L_1 = +\infty$ y $L_2 = +\infty \Rightarrow L_1 + L_2 = +\infty$
5) $L_1 = -\infty$ y $L_2 = -\infty \Rightarrow L_1 + L_2 = -\infty$

En el caso de que ambos límites sean infinitos y de signo contrario no podemos garantizar la existencia de la suma.

Igualmente se haría para la resta.

2.8.2. Límite de un producto.

PROP Sean f, g: A $\rightarrow$ ℝ dos funciones. Si existen $\lim_{x\to a} f(x) = L_1$ y $\lim_{x\to a} g(x) = L_2$ y son finitos. Entonces existe $\lim_{x\to a}\left(f(x)\cdot g(x)\right) = L_1 \cdot L_2$

<u>Dem.</u>

Como $\forall \boldsymbol{e}' > 0 \quad \exists \boldsymbol{d}' > 0 \,/\, |x-a| < \boldsymbol{d}' \quad \Rightarrow \quad f(x) \in (L_1 - \boldsymbol{e}', L_1 + \boldsymbol{e}')$

y $\forall \boldsymbol{e}' > 0 \quad \exists \boldsymbol{d}'' > 0 \,/\, |x-a| < \boldsymbol{d}'' \quad \Rightarrow \quad g(x) \in (L_2 - \boldsymbol{e}', L_2 + \boldsymbol{e}')$

$$|f(x)g(x) - L_1L_2| = |f(x)g(x) - L_1g(x) + L_1g(x) - L_1L_2| = \ldots$$

$$\ldots = |(f(x)-L_1)g(x) + L_1(g(x)-L_2)| \leq |f(x)-L_1||g(x)| + |L_1||g(x)-L_2| \leq \ldots$$

$$\ldots \leq \boldsymbol{e}' \cdot (L_1 + \boldsymbol{e}') + |L_1|\boldsymbol{e}' = \boldsymbol{e} \qquad \text{si tomamos } \boldsymbol{d} = min\{\boldsymbol{d}', \boldsymbol{d}''\}$$

$$\Rightarrow \quad \forall \boldsymbol{e} > 0 \quad \exists \boldsymbol{d} > 0 \,/\, |f(x).g(x) - L_1L_2| < \boldsymbol{e} \quad \text{si} \quad |x-a| < \boldsymbol{d}\ .$$

PROP Sean f, g: A $\rightarrow \mathbb{R}$ dos funciones. Si existen $\lim_{x \to a} f(x) = L_1 \neq 0$ y $\lim_{x \to a} g(x) = +\infty$ y L_1 finito, entonces existe $\lim_{x \to a} \left(f(x) \cdot g(x) \right) = +\infty$ si $L_1 > 0$ ó $\lim_{x \to a} \left(f(x) \cdot g(x) \right) = -\infty$ si $L_1 > 0$

Dem.

Análoga.

Análogamente se podría demostrar el resto de combinaciones para L_1 y L_2 menos las siguientes; que son indeterminadas:

1) $L_1 = 0$ y $L_2 = +\infty$

2) $L_1 = 0$ y $L_1 = -\infty$

3) $L_1 = +\infty$ y $L_2 = 0$

4) $L_1 = -\infty$ y $L_2 = 0$

OBS Si $a = 0$ hay que usar límites laterales.

2.8.3. Límite de un cociente.

PROP Sea g: A $\rightarrow \mathbb{R}$ una función. Si existe $\lim_{x \to a} g(x) = L$ y es no nulo, entonces existe $\lim_{x \to a} \frac{1}{g(x)} = \frac{1}{L}$

Dem.

Realizar como ejercicio.

PROP Sean f, g: A $\rightarrow \mathbb{R}$ dos funciones. Si existe $\lim_{x \to a} f(x) = L_1$ y $\lim_{x \to a} g(x) = L_2$ con $L_2 \neq 0$ entonces existe $\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{L_1}{L_2}$

Dem.

Realizar como ejercicio.

Las únicas indeterminaciones que nos encontramos es que ambos límites sean nulos o ambos sean infinitos (independientemente del signo).

OBS Si $a = 0$ hay que usar límites laterales.

2.9. Infinitésimos.

DEF Llamaremos a la función f(x) infinitésimo cuando x tiende a a si $\lim_{x \to a} f(x) = 0$.

PROP la suma algebraica de un número de infinitésimos es un infinitésimo. Cuando x tiende a a.

Dem.

Utilizando las propiedades anteriores

PROP El producto de un infinitésimo por una función acotada es un infinitésimo cuando x tiende a a.

Dem.

Utilizando las propiedades anteriores

COROLARIO El producto de dos infinitésimos es otro infinitésimo cuando x tiende a a.

PROP Si I(x) es un infinitésimo cuando x tiende a a, entonces $\lim_{x\to a}\frac{1}{I(x)}=\infty$

Dem.

Inmediata.

PROP Si I(x) es un infinitésimo cuando x tiende a a y f: A $\to \mathbb{R}$ es otra función con $\lim_{x\to a} f(x)=L$ con L finito y no nulo, entonces $\frac{I(x)}{f(x)}$ es un infinitésimo cuando x tiende a a.

Dem.

Inmediata

3. CONTINUIDAD Y DISCONTINUIDAD.

3.1. Continuidad de una función en un punto.

De forma intuitiva, podemos definir el concepto de continuidad de una función en un punto si al representarse la gráfica, en un entorno del punto no se levanta el bolígrafo de la hoja. Es decir, diremos que f(x) es continua en x 0 a si para todo punto próximo a x = a, el valor de la función es próximo a f(a).

Veamos ahora una definición más forma.

DEF Sea A$\subset\mathbb{R}$ un subconjunto y a$\in\mathbb{R}$ un punto de acumulación de A. Sea f: A $\to \mathbb{R}$ una función. Diremos que f(x) es continua en x = a si

1) $\exists f(a)$

2) $\exists \lim\limits_{x \to a} f(x)$

3) $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$

También es posible dar la definición basándose en la de límite.

DEF Sea A⊂ℝ un subconjunto y a∈ ℝ un punto de acumulación de A. Sea f: A → ℝ una función. Diremos que f(x) es continua en x = a si

$$\forall \boldsymbol{e} > 0 \quad \exists \boldsymbol{d} > 0 \ / \ |x - a| < \boldsymbol{d} \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \boldsymbol{e}$$

Y al igual que hicimos con la definición de límite, podemos dar la definición continuidad en términos de entornos. Esta definición sirve cuando la función no solo es real de variable real.

DEF Sea A⊂ℝ un subconjunto y a∈ ℝ un punto de acumulación de A. Sea f: A → ℝ una función. Diremos que f(x) es continua si x = a si

$$\forall \boldsymbol{e} > 0 \quad \exists \boldsymbol{d} > 0 \ / \ \forall x \in A \cap E(a, \boldsymbol{d}) \Rightarrow f(x) \in E(f(a), \boldsymbol{e})$$

3.2. Continuidad Lateral.

Supondremos A⊂ℝ un subconjunto, a∈ ℝ un punto de acumulación de A y f: A →ℝ una función.

DEF Diremos que f(x) es continua por la derecha en x = a si

$$\forall \boldsymbol{e} > 0 \quad \exists \boldsymbol{d} > 0 \ / \ a \le x < a + \boldsymbol{d} \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \boldsymbol{e}$$

DEF Diremos que f(x) es continua por la izquierda en x = a si

$$\forall \boldsymbol{e} > 0 \quad \exists \boldsymbol{d} > 0 \ / \ a - \boldsymbol{d} < x \le a \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \boldsymbol{e}$$

OBS Podemos observar que la definición de continuidad lateral se basa en la de límite lateral.

3.3. Continuidad en un Intervalo.

DEF Diremos que f: (a, b) → ℝ es continua en (a, b) ⊂ℝ si es continua en todo punto del intervalo.

DEF Diremos que f: [a, b] → ℝ es continua en [a, b] ⊂ ℝ si es continua en todo punto x∈ (a, b) y además es continua por la derecha en x = a y continua por la izquierda en x = b.

3.4. Algebra de funciones Continuas.

PROP Sean f y g dos funciones continuas en x = a$\in \mathbb{R}$. Entonces:

1) $(f \pm g)$ es continua en x = a.

2) f · g es continua en x = a.

3) Si g(a) $\neq$ 0 $\Rightarrow$ $\dfrac{f}{g}$ es continua en x = a.

Dem.

La demostración es inmediata teniendo en cuenta que el límite de una suma, diferencia, producto o cociente es la suma, diferencia, producto o cociente de los límites. Sólo hay que especificar que el cociente de dos funciones continuas será otra función continua, exceptuando los puntos en los que el denominador sea nulo.

OBS Sabiendo que las funciones constantes son continuas y que f(x) = x también es continua, podemos demostrar que todo polinomio es una función continua.

Es más, si llamamos función racional a r(x) obtenida como cociente de dos polinomios p(x) y q(x), estará definida en todo x$\in \mathbb{R}$ tal que q(x) $\neq$ 0. Entonces r(x) será continua en todo su dominio de definición.

Sea A$\subset\mathbb{R}$ un subconjunto. Sabemos que f sería continua en A si lo es en todos sus puntos. Llamamos $\mathcal{C}$ (A) al conjunto formado por todas las funciones continuas en A.

($\mathcal{C}$ (A), +, ·) tiene estructura de Anillo conmutativo con unidad, con la suma y producto de funciones visto.

Su demostración es inmediata.

También podemos indicar que ($\mathcal{C}$ (A), +, $\cdot_{\mathbb{R}}$) es un $\mathbb{R}$-espacio vectorial, siendo $\cdot_{\mathbb{R}}$ el producto de un número real por una función.

Como conclusión $\mathcal{C}$ (A) es un álgebra.

3.5. Composición de funciones continuas.

PROP Sean A, B, C$\subset\mathbb{R}$ subconjuntos, f: A $\rightarrow$ B y g: B $\rightarrow$ C funciones a$\in$A un punto que verifica que f es continua en x = a y que g es continua en x = f(a)$\in$B. Entonces la función $f \circ g$: A $\rightarrow$ C es continua en x = a.

Dem.

Inmediata.

3.6. Propiedades y Teoremas Fundamentales.

Sea f(x) una función continua en x = a y f(a) $\neq$ 0. Entonces existe $\boldsymbol{d}$ >0 tal que $|x-a| < \boldsymbol{d} \Rightarrow f(x)\cdot f(a) > 0$.

Dem.

Supongamos $f(a) > 0$ (análogo si $f(a) < 0$) $\Rightarrow$ sea $\boldsymbol{e} = \dfrac{f(a)}{2}$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ Como *f(x)* es continua en *x=a* para $\boldsymbol{e} = \dfrac{f(a)}{2} > 0$ $\exists \boldsymbol{d} > 0 \,/\, |x-a| < \boldsymbol{d}$

$$\Rightarrow f(x) \in \left(f(a)-\boldsymbol{e}, f(a)+\boldsymbol{e}\right) \Rightarrow f(x) > f(a) - \boldsymbol{e} = \frac{f(a)}{2} \Rightarrow f(x)f(a) > 0$$

COROLARIO Si f es continua en x = a y toma valores de signo contrario en todo entorno de a, entonces f(a) = 0.

Dem.

Análoga

TEOREMA. Teorema de Acotación.

1) Sea f(x) una función continua en x = a. Entonces f(x) está acotada en un entorno de a.

2) Toda función f(x) continua en un intervalo cerrado [a, b] es acotada.

Dem.

1) Como *f* es continua en *x=a* $\Rightarrow$ $\forall \boldsymbol{e} > 0$ $\exists \boldsymbol{d} > 0 \,/\, |x-a| < \boldsymbol{d}$ $\Rightarrow$

$$\Rightarrow |f(x) - f(a)| < \boldsymbol{e} \Rightarrow f(x) \in \left(f(a)-\boldsymbol{e}, f(a)+\boldsymbol{e}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(x) \text{ está acotado } \quad \forall x \in (a-\boldsymbol{d}, a+\boldsymbol{d})$$

2) Análoga.

TEOREMA. Teorema de Bolzano.

Si f(x) es continua en [a, b] y f(a) · f(b) < 0 entonces existe al menos un punto $\alpha \in$ (a, b) tal que f(α) = 0.

Dem.

Denotemos el intervalo [a,b] por I_0 y lo dividimos en dos intervalos de igual longitud. Si en el punto medio de I_0 (a+b)/2=α_0 la función vale cero $\Rightarrow$ FIN

Si $f(\alpha_0)\neq 0$ $\Rightarrow$ designamos por I_1 al intervalo en el que la función toma en sus extremos valores de signos opuestos. Hacemos lo mismo que con I_0; si en el punto medio de I_1 $(3a+b)/4=\alpha_1$ la función vale cero $\Rightarrow$ FIN

Si $f(\alpha_1)\neq 0$ $\Rightarrow$ construimos I_2 …….

Repitiendo el procedimiento en el supuesto de que *f* no se anule en el punto central tenemos dos posibilidades:

a) O bien en un número finito de pasos habremos encontrado un punto donde *f* se anula y entonces hemos acabado.

b) O bien, tendremos una sucesión de intervalos cerradosde la forma $I_0>I_1>I_2>$…… y *f* toma valores de signo opuesto en los extremos de cada I_n.

Si tomamos un punto x_n de cada I_n obtendremos una sucesión de Cauchy que tendrá un límite: llamémosle *L* tal que $L\in I_n \quad \forall n\in \mathbb{N}$ $\left(L=\bigcap_{n\in N} I_n\right.$ por el teorema de encaje de Cantor)

Veamos si $f(L)=0$

- Supongamos $f(L)>0$ $\Rightarrow$ en todo entorno $(L-\varepsilon, L+\varepsilon)$ la función tomaría valores positivos, contradicción (porque para *n* suficientemente grande $I_n\subset(L-\varepsilon, L+\varepsilon)$ y *f* toma valores de signo opuesto en los extremos de I_n).

- Supongamos $f(L)<0$ $\Rightarrow$ en todo entorno $(L-\varepsilon, L+\varepsilon)$ la función tomaría valores negativos, contradicción (porque para *n'* suficientemente grande $I_{n'}\subset(L-\varepsilon, L+\varepsilon)$ y *f* toma valores de signo opuesto en los extremos de $I_{n'}$).

$\Rightarrow$ $f(L)=0$

TEOREMA. Teorema de Weierstrass.

Si f(x) es continua en [a, b], entonces existe α_1, $\alpha_2\in[a, b]$ tales que $f(\alpha_1)$ = Sup f(x) y $f(\alpha_2)$ = Inf f(x). Es decir, el conjunto $\{f(x) / x\in [a, b]\}$ tiene máximo y mínimo.

<u>Dem.</u>

i) La función *f* es acotada, lo que significa que *f*([a,b])=*Im f* es un conjunto de $\mathbb{R}$.

Supongamos que *f*([a,b]) no fuera acotado $\Rightarrow$

$$\left.\begin{array}{l} \exists x_1 \ \text{ con } \ |f(x_1)| > 1 \\ \exists x_2 \ \text{ con } \ |f(x_2)| > 2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \exists x_n \ \text{ con } \ |f(x_n)| > n \end{array}\right\} \quad \exists (x_n)_n \subset [a,b] \quad \text{con} \quad |f(x_n)| > n \quad \text{para cada} \quad n \in \mathbb{N}$$

Como $(x_n)_n$ es acotada posee una subsucesión convergente $\Rightarrow$ $(x_{nk})_k \to \alpha$

f continua $\Rightarrow$ $f(x_{nk})_k \to f(\alpha)$ pero entonces $f(x_{nk})_k$ es acotada.

Tenemos que $\exists M \,/\, |f(x_{nk})| \le M$ pero $n_k < |f(x_{nk})| \le M$ Contradicción

ii) $f([a,b]) \subseteq \mathbb{R}$ acotada $\Rightarrow$ $\exists \sup\{f(x);\, x \in [a,b]\} =: \boldsymbol{b}$

$$\exists x_n \in [a,b] \quad \text{con} \quad \boldsymbol{b} - 1/n < f(x_n) \le \boldsymbol{b} \quad \Rightarrow \quad \lim_{n \to +\infty} f(x_n) = \boldsymbol{b}$$

$(x_n)_n$ es acotada $\Rightarrow$ existe una subsucesión convergente a un punto $\boldsymbol{a}_1 \in [a,b]$

$(x_{nk}) \to \boldsymbol{a}_1 \in [a,b]$ como f es continua $\Rightarrow$ $f(x_{nk}) \to f(\boldsymbol{a}_1)$

como el límite es único $\quad f(\boldsymbol{a}_1) = \boldsymbol{b}$

$\boldsymbol{a}_1$

$f(x) \le \boldsymbol{b} = f(\boldsymbol{a}_1)$ $\Rightarrow$ f alcanza un máximo absoluto en $\boldsymbol{a}_1$.

Razonando análogamente con el ínfimo de *f*[a,b], se prueba que:

$\exists \boldsymbol{a}_1 \in [a,b]$ tal que $f(\boldsymbol{a}_1) = \inf\{f(x) \,/\, x \in [a,b]\}$

TEOREMA. Teorema de los valores Intermedios.

Si f(x) es una función continua en [a, b] y K∈ℝ un número comprendido entre f(a) y f(b). Entonces existe al menos un número z∈[a, b] tal que f(z) = K.

<u>Dem.</u>

Definimos $g(x) = f(x) - K$ que es continua.

$$\left.\begin{array}{l} g(a) = f(a) - K < 0 \\ g(b) = f(b) - K > 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \text{ la función se anula en algún punto (Bolzano)}$$

$$\exists z \in [a,b] / g(z) = 0$$

$$g(z) = f(z) - K = 0 \quad \Rightarrow \quad f(z) = K$$

3.7. Discontinuidades.

Sea f: A $\rightarrow \mathbb{R}$ una función y $a \in$ A.

DEF Diremos que f presenta una discontinuidad evitable en x = a si existe $\lim_{x \to a} f(x)$ y no existe f(a).

OBS Recibe el nombre de discontinuidad evitable ya que se podría evitar si definimos $f(a) = \lim_{x \to a} f(x)$.

DEF Diremos que f presenta una discontinuidad de salto finito en x = a si existen $\lim_{x \to a^-} f(x)$ y $\lim_{x \to a^+} f(x)$ y son finitos pero distintos.

DEF Diremos que f presenta una discontinuidad evitable en x = a si existen f(a) y $\lim_{x \to a} f(x)$ y son distintos.

DEF Diremos que f presenta una discontinuidad inevitable de salto finito si $\lim_{x \to a^-} f(x) \neq \lim_{x \to a^+} f(x)$ y su diferencia es finita.

DEF Diremos que f presenta una discontinuidad inevitable de salto infinito en x = a si alguno de los límites laterales no existe o es infinito.

3.8. Continuidad de la Función Inversa.

Recordatorio Sea *f(x)* una función continua y estrictamente creciente en el intervalo [a,b]. Sabemos que si $x \in [a,b]$ entonces f(x) toma cada valor "y" del intervalo [f(a),f(b)] por lo menos una vez (teorema de los valores intermedios] y solo una vez (por ser estrictamente creciente). Si f es biyectiva entre [a,b] y [f(a),f(b)], entonces f^1 también lo es. A f^1 se le llama función inversa.

PROP Si f: [a, b] $\rightarrow \mathbb{R}$ es continua y estrictamente creciente, entonces f es biyectiva entre [a, b] y [f(a), f(b)].

<u>Dem.</u>

f es continua en [a, b], aplicando el teorema de Weierstrass, f alcanza un máximo M, un mínimo m y todos los valores comprendidos entre ambos $\Rightarrow$ f([a, b]) = [m, M].

Por ser f estrictamente creciente tenemos que

$$f(a) = m \qquad y \qquad f(b) = M$$

Entonces $\forall x \in [a, b] \;\; \exists^{\bullet} y \in [f(a), f(b)] \,/\, f(x) = y$

PROP Si una función *y = f(x)* es estrictamente creciente (decreciente) y continua en [a, b], entonces $f^1(y)$ también es estrictamente creciente y continua en [f(a), f(b)].

Dem.

• f^{-1} es estrictamente creciente.

Supongamos que f es estrictamente creciente.

Entonces $y' < y''$ con $y', y'' \in$ Dom f^{-1}.

Entonces $\exists x', x'' \in$ Dom f tal que $f(x') = y'$ y $f(x'') = y''$

Como $y' < y''$ y f es estrictamente creciente tenemos que $x' < x''$, ya que lo contrario sería una contradicción.

Entonces f^{-1} es estrictamente creciente.

• f^{-1} es continua.

Sea $y_o \in (f(a), f(b)$ y $\varepsilon > 0$.

Sea $f^{-1}(y_o) = x_o$

$f(x_o - \varepsilon) = y'$

$f(x_o + \varepsilon) = y''$

Entonces $f^{-1}(y') < x_o < f^{-1}(y'') \Rightarrow x_o - \varepsilon < f^{-1}(y) < x_o + \varepsilon \Rightarrow$

$\Rightarrow f^{-1}(y_o) - \varepsilon < f^{-1}(y) < f^{-1}(y_o) + \varepsilon$

Sea $\delta = \min\{y_o - y', y'' - y_o\}$

Entonces, siempre que $|y - y_o| < \delta \Rightarrow |f^{-1}(y) - f^{-1}(y_o)| < \varepsilon$

3.9. Continuidad Uniforme.

DEF Sea $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función real de variable real.

Se dice que *f(x)* es uniformemente continua si:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \, / \, |x - y| < \delta \quad \Rightarrow \quad |f(x) - f(y)| < \varepsilon$$

NOTA Toda función uniformemente continua es continua. Pero el recíproco no es cierto.

Teorema. Sea $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ una función continua en el compacto $[a,b] \Rightarrow$ *f(x)* es uniformemente continua en [a,b].

3.10. Asíntotas. Ramas Infinitas.

El conjunto *{(x, f(x) / x* **Î***Dom f}* recibe el nombre de gráfica de *f* y se denota por *Graf (f)*.

DEF Diremos que un punto se aleja infinitamente sobre una curva cuando su abscisa o su ordenada o ambas coordenadas crecen infinitamente. Podemos afirmar que el punto recorre una rama infinita.

DEF Si al recorrer un punto P una rama infinita, la recta OP tiende a una posición límite, entonces esa recta límite y sus paralelas definen una dirección asíntota.

DEF Llamaremos a la recta *r* asíntota de la curva *Graf (f)* si su dirección es una dirección asíntota de la curva y la distancia de un punto P a r tiende a Cero cuando P se aleja infinitamente.

DEF Llamaremos asíntota horizontal de *f(x)* a la recta *y=K* que verifica una de las dos condiciones siguientes:

1) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = K$

2) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = K$

DEF Llamamos asíntota vertical de *f(x)* a la recta *x=a* si se verifica alguna de las condiciones siguientes:

1) $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = -\infty$ 2) $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = -\infty$

3) $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = +\infty$ 4) $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = +\infty$

DEF Dada una función *f(x)* tal que en el infinito tiene límite infinito, diremos que presenta una asíntota de ecuación *y=mx+n* si verifica una de las dos condiciones siguientes.

1) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = m \neq 0$ y $\lim\limits_{x \to +\infty} (f(x) - mx) = n$

2) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{f(x)}{x} = m \neq 0$ y $\lim\limits_{x \to -\infty} (f(x) - mx) = n$

Bibliografía Recomendada.

Análisis Matemático I. Aut. J.A. Fernández Viña. Ed. Tecnos

Lecciones de Cálculo Infinitesimal I. Aut. R. Molina Legaz, M. Franco. Ed. Universidad de Murcia.

Principios de Análisis Matemático. Aut. W. Rudin. Ed. McGraw-Hill

Curso de Análisis Matemático I. Aut. E.L. Luna. Ed. Edunsa, 1991.

Calculus. Aut. M. Spivak. Ed. Reverté.

Análisis Matemático. Aut. M. de Guzmán, B. Rubio. Ed. Pirámide.

Calculus. Aut. Apostol. Ed. Reverté