TEMAS DE MATEMÁTICAS (OPOSICIONES DE SECUNDARIA)

TEMA 6

EL NÚMERO REAL. TOPOLOGÍA DE LA RECTA REAL.

TEMA 6

EL NÚMERO REAL. TOPOLOGÍA DE LA RECTA REAL.

1. INTRODUCCIÓN.

Dibujemos una recta de puntos. Situemos en algún lugar de ella el número cero como un punto cualquiera de la recta real. A partir de la longitud del segmento limitado por los puntos 0 y 1 podemos situar los demás números naturales. El número 2 estará situado a la derecha del 1 y el segmento limitado por 1 y 2 coincide en longitud con el segmento limitado por el 0 y 1. Por tanto, el segmento de n $\sigma(n)$, verificará que está situado a la derecha de n y el segmento entre n y $\sigma(n)$ coincide con el que hay entre 0 y 1.

De forma similar, podemos situar los números enteros en la recta. Para identificar puntos de la recta con números racionales podemos utilizar el teorema de Thales, que se basa en el uso de rectas paralelas. Como entre cada dos números racionales, al menos hay otro (Q es denso) se pensó que todos los puntos de la recta se podían identificar con números racionales. Hasta que llegó Pitágoras.

Pitágoras indicó que en la recta debía haber un punto que se identificase con un número, tal que el cuadrado de dicho número fuese 2. Al comprobar que ese número (que representaremos como $\sqrt{2}$) no era racional, demostró que en la recta había más puntos que números racionales (no existía por tanto una biyección).

La necesidad de construir un conjunto más grande que Q también se puede motivar planteando el siguiente problema.

Dada la ecuación $x^2=2$, el número x no es racional.

Sea $A\subset Q$ tal que $A=\{p\in Q \ / \ p^2<2\}$ y sea $B\subset Q$ tal que $B=\{q\in Q \ / \ q^2>2\}$

El conjunto A está acotado superiormente, por ejemplo $2\in B$, $2>p \ \ \forall p\in A$, y análogamente B está acotado inferiormente ya que $1\in A$ y $1<q \ \ \forall q\in B$. Pero el sup A y el inf B no existen en Q.

Es por ello que necesitamos construir un conjunto mayor que Q que llamaremos conjunto de los números reales y denotaremos por $\Re$. Vamos a seguir la misma idea que utilizó Cantor para ampliar de Q a $\Re$.

2. EL CUERPO DE LOS NÚMEROS REALES.

2.1. Construcción de R.

2.1.1. Sucesiones fundamentales o de Cauchy en Q.

DEF Una sucesión de números racionales es una aplicación de N en Q.

Notación Dada $\varphi: N\rightarrow Q$, denotaremos a $\varphi(n)$ por a_n. La sucesión será (a_n), aunque también se puede representar por $a_0, a_1, a_2, \dots$

PROP Sea S= {(a_n) / (a_n) es una sucesión de números racionales}. Si definimos en S la suma como $(a_n)+(b_n) = (a_n+b_n)$ y el producto como $(a_n)\cdot(b_n)=(an\cdot bn)$, entonces S tiene estructura de anillo conmutativo con elementos unidad.

Dem.

A Realizar por el Lector.

DEF Diremos que una sucesión $(a_n)\in S$ es acotada si existe $r\in Q^+$ tal que $\forall n\in N$ se verifica $|a_n|<r$.

PROP El conjunto A de sucesiones acotadas de números racionales es un subanillo de S.

Dem.

1) $A\subset S$.
   Dada $(a_n)\in A$ sucesión acotada de números racionales$\Rightarrow(a_n)$ es una sucesión de

   números racionales $\Rightarrow(a_n)\in S$.

2) La suma es interna.

   Sean $\left.\begin{cases}(a_n)\in A\Rightarrow\exists r_1\in Q^+/|a_n|<r_1\\(b_n)\in A\Rightarrow\exists r_2\in Q^+/|b_n|<r_2\end{cases}\right\}\Rightarrow(a_n)+(b_n)=(a_n+b_n)con$ (1)

   $|a_n+b_n|\leq|a_n|+|b_n|<r_1+r_2$

   Tengamos en cuenta que $a_n, b_n\in Q\forall n\Rightarrow(a_n+b_n)\in A$

3) El producto es interno.

   $(a_n)\cdot(b_n)= (a_n\cdot b_n)$ y $|a_n\cdot b_n|=|a_n|\cdot|b_n|< r_1\cdot r_2$ y $r_1\cdot r_2\in Q$.

   Luego A es un subanillo de S.

OBS A no es un ideal de S ya que si $(a_n)\in S$ y $(b_n)\in A\Rightarrow(a_n\cdot bn)\notin A$. Por ejemplo:

Sea $a_n=n^2$ $\forall n\in N$ y $b_n=1/n$ y $\forall n\in N$. Entonces $a_n\cdot b_n=n$ $\forall n\in N$ y no es acotada.

DEF Diremos que $L\in Q$ es límite de la sucesión $(a_n)\in S$ si $\forall\varepsilon>0$ (con $\varepsilon\in Q$) $\exists n_0\in N$ / si $n>n_0\Rightarrow|a_n-L|<\varepsilon$.

Notación Diremos $\text{Lim}a_n=L$ o $(a_n)\rightarrow L$.

DEF Diremos que (a_n) es convergente si tiene límite.

PROP El límite de una sucesión convergente es único.

Dem.

Sea (a_n) una sucesión convergente . Lim $a_n=L$. Supongamos que Lim $a_n=L´$, con $L\neq L´ \Rightarrow |L-L´|=d$.

Lim $a_n=L \Rightarrow \forall\varepsilon>0\ (\varepsilon\in Q)\ \exists n_0\in N\ /\ \forall n>n_0 \Rightarrow |a_n-L|<\varepsilon$ (1)

Lim $a_n=L´ \Rightarrow \forall\varepsilon´>0\ (\varepsilon´\in Q)\ \exists n_0´\in N\ /\ \forall n>n_0´ \Rightarrow |a_n-L´|<\varepsilon´$ (2)

Tomemos $\varepsilon, \varepsilon´ < d/2 \Rightarrow |a_n - L| < d/2$ y $|a_n - L´| < d/2$.

Es claro que $(L-d/2, L+d/2)$ y $(L´-d/2, L+d/2)$ no tienen puntos en común.

$$\left.\begin{array}{l}\text{Según (1) } \forall n>n_0\ \ a_n\in(L-d/2, L+d/2) \\ \\ \text{y según (2) } \forall n>n_0´\ \ a_n\in(L´-d/2, L´+d/2)\end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l}\text{Sea } N=\max\{n_0, n_0´\}\Rightarrow \text{si } n\geq N \\ \Rightarrow a_n\in(L-d/2, L+d/2)\cap \\ \cap(L´-d/2, L´+d/2)=\varnothing, \\ \text{lo cual es imposible.}\end{array}$$

Al llegar a una contradicción, la suposición es falsa y $L=L´$.

PROP Toda sucesión convergente es acotada.

Dem

Sea (a_n) convergente. Entonces Lim $a_n=L$.

Lim $a_n=L \Leftrightarrow \forall\varepsilon>0\ (\varepsilon\in Q)\ \exists n_0\in N\ /\ \forall n>n_0 \Rightarrow |a_n-L|<\varepsilon \Rightarrow \forall n>n_0\ a_n\in(L-\varepsilon, L\varepsilon)$.

Sea $m=\min\{a_1,..,a_{no},L-\varepsilon\}$y $n=\max\{a_1,..,a_{no},L+\varepsilon\}$, entonces $\forall n\in N\ m\leq a_n\leq n$

PROP El conjunto C de sucesiones convergentes es subanillo de S.

Dem

i) Sea $a_n\in C$ una sucesión convergente $\Rightarrow a_n$ es una sucesión de números racionales $\Rightarrow a_n\in S$.

ii) Sean $a_n\in C$ y $b_n\in C$ dos sucesiones de números racionales convergentes, es decir:

$$\forall\varepsilon>0\ \exists n_0´\in N\ /\ \text{si } n\geq n_0´ \Rightarrow |a_n-L|<\varepsilon$$
y
$$\forall\varepsilon>0\ \exists n_0´´\in N\ /\ \text{si } n\geq n_0´´ \Rightarrow |b_n-L´|<\varepsilon$$

entonces si tomamos $n_0=\max\{n_0´, n_0´´\}$ se tiene que:

$$\forall\varepsilon>0\ \exists n_0\in N\ /\ \text{si } n\geq n_0$$
$$|a_n+b_n-(L+L´)| = |(a_n-L)+(b_n-L´)|\leq|a_n-L|+|b_n-L´|<\varepsilon+\varepsilon= 2\varepsilon$$

Por lo tanto si definimos $\varepsilon'=2\varepsilon$ se tiene que:

$$\forall\varepsilon'>0\ \exists n_0\in N \ / \text{ si } n\geq n_0 \Rightarrow |(a_n+b_n)-(L+L')|<\varepsilon' \Rightarrow (a_n+b_n)\in C$$

iii) Sean $a_n\in C$ y $b_n\in C$ dos sucesiones de números racionales convergentes, es decir:

$$\forall\varepsilon>0\ \exists n_0'\in N \ / \text{ si } n\geq n_0' \Rightarrow |a_n-L|<\varepsilon$$
$$\text{y}\qquad \forall\varepsilon>0\ \exists n_0''\in N \ / \text{ si } n\geq n_0'' \Rightarrow |b_n-L'|<\varepsilon$$

entonces si tomamos $n_0=\max\{n_0', n_0''\}$ y como b_n es acotada por ser convergente ($\exists K\in Q^+ \ / \ |b_n|<k$) se tiene que:

$$|a_nb_n-LL'| = |a_nb_n-b_nL+b_nL-LL'| = |b_n(a_n-L)+L(b_n-L')|\leq$$

$$\leq|b_n(a_n-L)|+|L(b_n-L')| = |b_n|\ |a_n-L|+|L|\ |b_n-L'| < k\varepsilon + |L|\varepsilon= \varepsilon(k+|L|).$$

Por lo tanto si definimos $\varepsilon'= \varepsilon(k+|L|)$ se tiene que:

$\forall\varepsilon'>0\ \exists n_0\in N \ / \text{ si } n\geq n_o \Rightarrow |a_nb_n-LL'|<\varepsilon \Rightarrow (a_nb_n)\in C \Rightarrow C$ es un subanillo de S.

DEF Diremos que una sucesión (a_n) de números racionales es de Cauchy si $\forall\varepsilon>0$ $(\varepsilon\in Q)$ $\exists n_0\in N \ / \ \forall n, m \geq n_0 \Rightarrow |a_n-a_m|<\varepsilon$.

PROP Toda sucesión de Cauchy es acotada.

Dem

Sea a_n una sucesión de Cauchy.

$\forall\varepsilon>0\ (\exists\varepsilon\in Q)\ \exists n_0\in N \ / \ \forall n, m \geq n_0 \Rightarrow |a_n-a_m|<\varepsilon$.

Una vez localizado n_0, fijemos ε y m. Entonces $a_m-\varepsilon < a_n < a_m+\varepsilon\ \ \forall n\geq n_0$.

Sea $K=\max\{|a_1|, |a_2|,\ldots,|a_{no-1}|, |a_m+\varepsilon|, |a_m-\varepsilon|\}$. Se verifica $|a_n|<k\ \ \forall n\in N$ luego (a_n) está acotada.

PROP Toda sucesión convergente es de Cauchy.

Dem

Sea (a_n) una sucesión convergente$\Rightarrow \text{Lim } a_n=L$.

Entonces$\forall\varepsilon>0\ \exists n_0\in N \ / \ \forall n\geq n_0 \Rightarrow |a_n-L|<\varepsilon/2$.

Luego $|a_n-a_m| = |a_n-L+L-a_m| < |a_n-L|+|a_m-L| < \varepsilon/2 +\varepsilon/2= \varepsilon\ \ \forall n,m\geq n_0$.

Por tanto (a_n) es de Cauchy.

OBS El recíproco no es cierto, ya que la sucesión 1, 1´4, 1´41, 1´414 se aproxima a $\sqrt{2}$, es de Cauchy pero no es convergente al no ser $\sqrt{2}$ un número racional.

PROP El conjunto S_c de sucesiones de Cauchy racionales es un subanillo de S.

Dem

i) Sea $a_n \in Sc$ una sucesión de Cauchy de números racionales$\Rightarrow$

$\Rightarrow a_n$ es una sucesión de números racionales$\Rightarrow$ $a_n \in S$.

ii) Sean $a_n \in S_c$ y $b_n \in Sc$ dos sucesiones de Cauchy de números racionales $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ $\forall \varepsilon>0\ \exists n_0´ \in N$ / si $n,m \geq n_0´ \Rightarrow |a_n-a_m|<\varepsilon$
y $\forall \varepsilon>0\ \exists n_0´´ \in N$ / si $n,m \geq n_0´´ \Rightarrow |b_n-a_m|<\varepsilon$

si tomamos $n_o=\max\{n_0´, n_0´´\}$ entonces

$\forall \varepsilon>0\ \exists n_0 \in N$ / si $n,m \geq n_0$

$|(a_n+b_n)-(a_m+b_m)|=|(a_n+a_m)+(b_m+b_n)| \leq |a_n-a_m|+|b_n-b_m| \leq \varepsilon+\varepsilon=2\varepsilon$

Tomando entonces $\varepsilon´=2\varepsilon$ tendremos:

$\forall \varepsilon´>0\ \exists n_0 \in N$ / si $n,m \geq n_0 \Rightarrow |(a_n+b_n)-(a_m+b_m)|<\varepsilon´ \Rightarrow$

$\Rightarrow (a_n+b_n)$ es de Cauchy$\Rightarrow (a_n+b_n) \in S_c$.

iii)Sean $a_n \in S_c$ y $b_n \in S_c$ dos sucesiones de Cauchy de números racionales$\Rightarrow$

$\Rightarrow \forall \varepsilon>0\ \exists n_0´ \in N$ / si $n,m \geq n_0´ \Rightarrow |(a_n-a_m|<\varepsilon$
y $\forall \varepsilon>0\ \exists n_0´´ \in N$ / si $n,m \geq n_0´´ \Rightarrow |(b_n-b_m|<\varepsilon$

Si tomamos $n_o=\max\{n_0´, n_0´´\}$ y como a_n y b_n están acotadas al ser de Cauchy ($\exists K,K´ \in Q^+$ / $|a_n|<K$ y $|b_n|<K´$) entonces:

$\forall \varepsilon>0\ \exists n_0 \in N$ / si $n,m \geq n_0$

$|a_nb_n-a_mb_m|=|a_nb_n-a_nb_m+a_nb_m-a_mb_m|=|a_n(b_n-b_m)+b_m(a_n-a_m)| \leq$

$\leq |a_n(b_n-b_m)|+|b_m(a_n-a_m)| \leq |a_n|\,|b_n-b_m|+|b_m|\,|a_n-a_m| < k\varepsilon+k´\varepsilon´=\varepsilon(k+k´)$

Si tomamos $\varepsilon´=\varepsilon(k+k´)$ entonces:

$\forall \varepsilon´>0\ \exists n_0 \in N$ / si $n,m \geq n_0 \Rightarrow |(a_nb_n-a_mb_m|<\varepsilon´$

$\Rightarrow (a_nb_n)$ es de Cauchy $\Rightarrow$ $(a_nb_n) \in S_c$

$\Rightarrow S_c$ es un subanillo de S.

DEF Llamamos sucesión nula a una sucesión que tiene por límite 0. El conjunto de las sucesiones nulas lo denotaremos por S_0.

PROP La suma de sucesiones nulas es una sucesión nula.

Dem

Sean $a_n \in S_0$ y $b_n \in S_0$ entonces:

$\forall \varepsilon>0\ \exists n_0´ \in N$ / si $n \geq n_0´ \Rightarrow |a_n|<\varepsilon$ y

$\forall \varepsilon>0\ \exists n_0´´ \in N$ / si $n \geq n_0´´ \Rightarrow |b_n|<\varepsilon$

Si tomamos $n_o=\max\{n_0´, n_0´´\}$ entonces:

$\forall \varepsilon>0\ \exists n_0 \in N$ / si $n \geq n_0$

$|a_n+b_n| \leq |a_n|+|b_n|<\varepsilon+\varepsilon=2\varepsilon$

Por lo tanto si llamamos $\varepsilon´=2\varepsilon$ se tiene que:

$\forall \varepsilon´>0\ \exists n_0 \in N\ /|a_n+b_n|<\varepsilon´$

$\Rightarrow (a_n+b_n) \in S_0$

OBS En concreto podemos decir que S_0 es un subanillo de S.

PROP El producto de una sucesión nula por otra de Cauchy es una sucesión nula.

Dem

Sea (a_n) una sucesión de Cauchy y (b_n) una sucesión nula.

(a_n) es de Cauchy$\Rightarrow (a_n)$ es acotada$\Rightarrow \exists M>0$ / $|a_n|<M\ \forall n \in N$

(b_n) es nula$\Rightarrow \forall \varepsilon>0\ \exists n_0 \in N$ / $\forall n \geq n_0 \Rightarrow |b_n|<\varepsilon$

Entonces $(a_n \cdot b_n)=|a_n| \cdot |b_n| < M \cdot \varepsilon$

Si tomamos $\varepsilon=\varepsilon´/M \Rightarrow \forall \varepsilon´>0\ \exists n_0 \in N$ / $\forall n \geq n_0 \Rightarrow |a_n \cdot b_n|<\varepsilon´$

$\Rightarrow (a_n b_n)$ es nula

COROLARIO S_o es un ideal de S_c.

OBS Se verifica que $S_0 \subset S_c \subset S$.

2.1.2. Relación de equivalencia en S_c

DEF Definimos la siguiente relación en S_c

$\forall(a_n b_n)\in S_c \quad (a_n)R(b_n)\Leftrightarrow(a_n-b_n)\in S_0$

PROP La relación R definida en S_c es una relación de equivalencia.

Dem

i) Reflexiva: $\forall(a_n)\in S_c\Rightarrow(a_n-a_n)=0\in S_0\Rightarrow a_nRa_n$

ii) Simétrica: $\forall(a_n)\in S_c$ y $(b_n)\in S_c$, si $a_nRb_n\Rightarrow(a_n-b_n)\in S_0$

$\Rightarrow(b_n-a_n)\in S_0\Rightarrow b_nRa_n$

iii)Transitiva: $\forall(a_n)$, (b_n) y $(c_n)\in S_c$ con

$$\left.\begin{matrix} a_nRb_n \Rightarrow (a_n-b_n)\in S_0 \\ b_nRc_n \Rightarrow (b_n-c_n)\in S_0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow (a_n-b_n)+(b_n-c_n)=(a_n-c_n)\in S_0$$

$\Rightarrow a_nRc_n$

$\Rightarrow$R es una relación de equivalencia

DEF Llamaremos a cada clase de equivalencia número real y S_c/R es el conjunto de los números reales, y se representa por $\Re$.

Notación: de aquí en adelante, notaremos los números reales por letras como x, y ó z en lugar de $[a_n]$, $[b_n]$ y $[c_n]$.

2.2. El grupo aditivo de los Números Reales.

DEF Definimos la suma en $\Re$ como: Dados $x=[a_n]$ e $y=[b_n]$ $\quad x+y=[a_n+b_n]$

PROP La definición de suma no depende del representante elegido.

Dem.

Sean (a_n), $(a_n')\in[a_n]$ y (b_n), $(b_n')\in[b_n]$. Entonces se verifica que $(a_n)-(a_n')\in S_0$ y $(b_n)-(b_n')\in S_0$. Como S_0 es un ideal, la suma es interna$\Rightarrow((a_n)-(a_n'))+((b_n)-(b_n'))$ y es lo mismo que $((a_n)+(b_n))-((a_n')+(b_n'))\in S_0$ y aplicando la suma $(a_n+b_n)-(a_n'+b_n')\in S_0$, siendo equivalente a $(a_n+b_n)R(a_n'+b_n')\Leftrightarrow$ $[a_n+b_n]=[a_n'+b_n']$, luego no depende del representante elegido.

PROP La suma en $\Re$ verifica las siguientes propiedades:

i) Conmutativa.

ii) Asociativa.

iii) Elemento neutro.

iv) Elemento simétrico.

Dem

1) Conmutativa:

Sean $x,y\in\Re$ entonces $x=[a_n]$ e $y=[b_n]$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow x+y=[a_n+b_n]=[b_n+a_n]=y+x\Rightarrow x+y=y+x$

2)Asociativa:

Sean $x,y,z\in\Re$ entonces $x=[a_n]$, $y=[b_n]$, $z=[c_n]$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow x+(y+z)=x+[b_n+c_n]=[a_n+(b_n+c_n)]= [(a_n+b_n)+c_n]= [a_n+b_n]+z=(x+y)+z=$
$=x+(y+z)$

3)Elemento neutro:

Sea $x\in\Re$ definido por $x=[a_n]$. Si definimos $0=[0]$ entonces

$x+0=[a_n+0]= [a_n]=x\Rightarrow 0$ es el elemento neutro de la suma.

4)Elemento simétrico:

Sea $x\in\Re$ definido por $x=[a_n]$, si denotamos por $(-x)== [-a_n]$: $x+(-x)=$

$=[a_n+(-a_n)]=[0]=0\Rightarrow(-x)$ es el elemento simétrico de la suma.

OBS Por tanto $(\Re,+)$ es un grupo abeliano.

PROP El grupo abeliano $(\Re,+)$ contiene al grupo aditivo $(Q,+)$.

Dem

Sea $\varphi: Q\rightarrow\Re$
$q\rightarrow[q]$

La definición tiene sentido ya que si por ejemplo $a_n\in[q]\Rightarrow a_n=q\forall n\in N$ que trivialmente es de Cauchy.
φ es homomorfismo:

$\varphi(p+q)=[p+q]=[p]+[q]=\varphi(p)+\varphi(q)$

φ es inyectiva:

Si $\varphi(p)=\varphi(q) \Rightarrow [p]=[q] \Rightarrow (p)-(q)\in S_0 \Rightarrow (p-q)\in S_0 \Rightarrow p-q=0$ ya que el límite de (p-q) es el número racional p-q $\Rightarrow p=q$

DEF Definimos el valor absoluto de un número real x, que denotaremos por |x|, como

$$|x|=\begin{cases} x & x\geq 0 \\ -x & x<0 \end{cases}$$

<u>**2.3 El grupo multiplicativo de los números reales.**</u>

DEF Definimos el producto en $\Re$ como : dados $x=[a_n]$ e $y=[b_n]$ $x\cdot y=[a_n\cdot b_n]$

PROP La definición del producto no depende del representante elegido.

<u>Dem.</u>

Sean (a_n), $(a_n')\in[a_n]$ y (b_n), $(b_n')\in[b_n]$. se verifica que $(a_n-a_n')\in S_0$ y $(b_n-b_n')\in S_0$. Para ver que $[a_n\cdot b_n]=[a_n'\cdot b_n']$ hemos de comprobar que su diferencia es una sucesión nula.

$|a_n b_n - a_n'b_n'|=|a_n b_n- a_n'b_n+ a_n'b_n- a_n'b_n'|= |(a_n-a_n')b_n +(b_n-b_n')\leq|a_n-a_n'|\ |b_n| +$

$+ |b_n-b_n'|\ |a_n'|.$

Como a_n', $b_n\in S_c\Rightarrow a_n'$, b_n son acotadas$\Rightarrow\exists MM'$ / $|a_n'|<M$ y $|b_n|<M'$ $\forall n\in N$.

Por hipótesis $(a_n-a_n')\in S_0\Rightarrow\forall\varepsilon_1>0$ $(\varepsilon\in Q)$ $\exists n_1\in N$ / $\forall n\geq n_1\Rightarrow|a_n-a_n'|\leq\varepsilon_1$

y $(b_n-b_n')\in S_0\Rightarrow\forall\varepsilon_2>0$ $(\varepsilon\in Q)$ $\exists n_2\in N$ / $\forall n\geq n_2\Rightarrow|b_n-b_n'|\leq\varepsilon_2$

$\leq\varepsilon_1 M+\varepsilon_2 M=\varepsilon$

Entonces $(a_n b_n-a_n'b_n')\in S_0 \Rightarrow [a_n\cdot b_n]= [a_n'\cdot b_n']$

Luego el producto no depende del representante elegido.

PROP El producto en R verifica las siguientes propiedades:

1) Conmutativa.
2) Asociativa.
3) Elemento neutro.
4) Elemento simétrico (sólo para R-{0}).

<u>Dem</u>

Se deja como ejercicio al lector.

OBS (R-{0}, ·) es un grupo multiplicativo abeliano.

PROP Dados a, b∈ R con a≠0, la ecuación ax=b admite soluciones en R.

Dem

Como a≠0 y (R-{0,·}) es grupo abeliano ⇒ $\exists a^{-1}$ inverso de a.

$a^{-1}(ax)=a^{-1}b$

$(a^{-1}a)x = a^{-1} b$

$x=b\,a^{-1}$

DEF El número ba^{-1} recibe el nombre de cociente del número real b por el número real a y se representa por b÷a o b:a.

PROP El grupo abeliano (R-{0},·) contiene al grupo abeliano (Q-{0},·).

Dem

Sea φ: Q→R
q→[q]

$\varphi(p\cdot q)=[pq]= [p]\cdot[q]=\varphi(p)\cdot\varphi(q)$

Luego es homomorfismo.

φ es inyectiva (ya visto).

2.4 El Cuerpo de los Números Reales.

Una vez visto que (R,+) y (R*,·) tienen estructura de grupo abeliano respecto de sus operaciones, veamos como podemos relacionar la suma y el producto de números reales.

PROP En R se verifica la propiedad distributiva del producto respecto de la suma.

Dem

Sean x,y,z∈R con $x=[a_n]$, $y=[b_n]$ y $z=[c_n]$

$x(y+z)= [a_n]([b_n]+[c_n])= [a_n]\cdot [b_n+c_n] = [a_n(b_n+c_n)] = [a_n\cdot b_n+a_n\cdot c_n] =$

$=[a_nb_n]+ [a_nc_n]= [a_n] [b_n]+ [a_n] [c_n]= xy + xz$

Podemos afirmar que $(R,+,\cdot)$ tiene estructura de cuerpo conmutativo con elemento de unidad.

PROP El cuerpo $(R,+,\cdot)$ contiene a $(Q,+,\cdot)$.

Dem

Sea $\varphi: Q \rightarrow R$
$q \rightarrow [q]$

Ya sabemos que φ es homomorfismo inyectivo.

3. ORDEN EN R.

Vamos a definir en el conjunto R una relación de orden total que sea compatible con su estructura.

Antes de poder definir un orden en R, necesitamos conocer cuál es el conjunto de números reales positivos. Para ello, nos vamos a apoyar en Q.

PROP Sea (a_n) una sucesión de Cauchy no nula. Entonces existe un elemento en la sucesión tal que a partir de él son todos del mismo signo.

Dem

Sea $(a_n)\in S_c$ y $(a_n)\notin S_0$.Como $(a_n)\in S_c \Rightarrow \forall\varepsilon>0\ (\varepsilon\in Q)\ \exists n_0\in N\ /\ \forall n,m\geq n_0 \Rightarrow |a_n-a_m|<\varepsilon$.

Supongamos que la tesis es falsa: siempre podemos encontrar $m\in N$ con $a_m>0$ y un

$n\in N$ con $a_n<0$. Entonces $\varepsilon>|a_n-a_m|=|a_n|+|a_m| \Rightarrow (a_n)\in S_0$ y eso es una contradicción.

Luego $\exists n_0\in N\ /\ \forall\geq n_0 \Rightarrow a_n>0$ (ó $a_n<0$).

Por tanto, en S_c podemos distinguir:

- Sucesiones de Cauchy positivas $\Leftrightarrow \exists n_0\in N\ /\ n\geq n_0 \Rightarrow a_n>0$.
- Sucesiones de Cauchy negativas $\Leftrightarrow \exists n_0\in N\ /\ n\geq n_0 \Rightarrow a_n<0$.
- Sucesiones de Cauchy ni positivas ni negativas.

PROP Dos sucesiones de Cauchy equivalentes y no nulas son ambas positivas o ambas negativas.

Dem

Sean $(a_n), (b_n)\in S_c$

Como $(a_n)\notin S_0 \Rightarrow \exists n_0\in N\ /\ \forall n\geq n_0 \Rightarrow |a_n|>k$
$(b_n)\notin S_0 \Rightarrow \exists n_0'\in N\ /\ \forall n\geq n_0' \Rightarrow |b_n|>k'$

Supongamos que (a_n) es positiva y (b_n) es negativa.

Entonces $\forall n \geq \max\{n_0, n_0'\} \Rightarrow |a_n - b_n| = |a_n| + |b_n| > k+k'$

Lo cual no puede ser ya que (a_n) y (b_n) son equivalentes ($\Leftrightarrow (a_n - b_n) \in S_0$).

La suposición es falsa y por tanto (a_n) y (b_n) son del mismo signo.

DEF Definimos el conjunto de los números reales positivos y lo denotamos por R^+, a $R^+ = \{x \in R \ / \ x = [a_n] \text{ y } (a_n) \text{ es positiva}\}$.

Análogamente

DEF Definimos el conjunto de los números reales negativos y lo denotamos por R^-, a $R^- = \{y \in R \ / \ y = [b_n] \text{ y } (b_n) \text{ es negativa}\}$. También como $R^- = \{y \in R \ / \ -y \in R^+\}$.

Con estas definiciones tenemos que $R = R^- \cup \{0\} \cup R^+$.

PROP La suma y el producto en R^+ son operaciones internas.

Con todas estas consideraciones, ya podemos definir una relación en R y comprobar que es de orden.

DEF Definimos en R la relación $\leq$ como: $\forall a,b \in R \ \ a \leq b \Leftrightarrow b-a \in R^+ \cup \{0\}$.

PROP La relación $\leq$ definida en R es de orden.

Dem:

Para comprobarlo hemos de demostrar que verifica las propiedades reflexiva, antisimétrica y transitiva:

1)Reflexiva: $0 \in R^+ \cup \{0\} \Rightarrow a-a \in R^+ \cup \{0\} \Rightarrow a \leq a$

2)Antisimétrica: si $a \leq b \Rightarrow b-a \in R^+ \cup \{0\}$

si $b-a=0 \Rightarrow b=a$

si $b-a \in R^+ \Rightarrow a-b \in R^-$ luego no se verifica que $b \leq a$ con $b \neq a$.

3) Transitiva: si $a \leq b \Rightarrow b-a \in R^+ \cup \{0\}$

si $b \leq c \Rightarrow c-b \in R^+ \cup \{0\}$

$\Rightarrow (c-b)+(b-a) \in R^+ \cup \{0\} \Rightarrow c-a \in R^+ \cup \{0\} \Rightarrow c-a \in R^+ \cup \{0\} \Rightarrow a \leq c$

PROP La relación $\leq$ es de orden total.

Dem

$$\forall a,b\in R,\ b-a \in \begin{cases} \{0\} \Rightarrow a=b \\ R^{+} \Rightarrow a\leq b \\ R^{-} \Rightarrow b\leq a \end{cases}$$

PROP El orden definido en R es compatible en las operaciones de suma y producto.

Dem

i) $\forall a,b\in R$ con $a\leq b \Rightarrow b-a \in R^{+} \Rightarrow (b+c-c-a)\in R^{+} \Rightarrow (b+c)-(c+a)\in R^{+} \Rightarrow$

$\Rightarrow a+c \leq b+c \ \ \forall c\in R.$

ii) $\forall a,b\in R$ con $a\leq b$ y con $c\in R^{+}\cup\{0\} \Rightarrow b-a\in R^{+} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \left.\begin{cases} c(b-a)\in R^{+} \Rightarrow cb-ca\in R^{+} \Rightarrow ac\leq bc \\ c(b-a)\in\{0\} \Rightarrow cb-ca=0 \Rightarrow ac=bc \end{cases}\right\} \Rightarrow ac\leq bc$$

Conclusión: $(R, \leq)$ es un cuerpo ordenado.

PROP $(R,\leq)$ amplia a $(Q,\leq)$.

Dem

Sea $\varphi: Q\rightarrow R$
$\quad q\rightarrow [q]$

Ya sabemos que φ es homomorfismo inyectivo.

Sean $p,q\in Q$ con $p\leq q \Rightarrow q-p\in Q^{+}\cup\{0\}$

$\Rightarrow \varphi(q-p)\in R^{+}\cup\{0\} \Rightarrow \varphi(q)-\varphi(p) \in R^{+}\cup\{0\} \Rightarrow \varphi(q)\leq\varphi(p)$

El conjunto $\varphi(Q)\subset R$ es un subcuerpo ordenado de R, y es isomorfo a Q. Como $Q\cong\varphi(Q)$ por convenio se toma $\varphi(Q)\equiv Q$ y por tanto los números reales son una ampliación de los números racionales.

4. PROPIEDADES DE R.

4.1 Q es denso en R.

PROP Dados $x,y\in R$ con $x\leq y$ y $x\neq y$, $\exists q\in Q$ / $x<q<y$.

Dem

Sean (a_n) y $(b_n)\in S_c$ tales que $x=[a_n]$ e $y=[b_n]$ verificando que $[b_n-a_n]\in R^+$ (ya que $x<y$)

Si $[b_n-a_n]\in R^+ \Rightarrow (b_n-a_n)$ es no nula $\Rightarrow \exists\varepsilon>0\ \exists n_0\in N$ / $\forall n\geq n_0 \Rightarrow b_n-a_n>\varepsilon$

Además como (a_n), $(b_n)\in S_c \Rightarrow$

$\forall\varepsilon_1>0\ \exists n_1\in N$ / $\forall n,m\geq n_1 \Rightarrow |a_n-a_m|<\varepsilon_1$

$\forall\varepsilon_2>0\ \exists n_2\in N$ / $\forall n,m\geq n_2 \Rightarrow |b_n-b_m|<\varepsilon_2$

Tomemos $\varepsilon_1=\varepsilon_2=\varepsilon/2$ y sea $n_3=\max\{n_0,n_1,n_2\}$. Definiendo $q\in Q$ como $q=\dfrac{a_{n3}+b_{n3}}{2}$ tenemos que $\forall n\geq n_3$ $q-a_n=\dfrac{a_{n3}+b_{n3}}{2}-a_n=\dfrac{a_{n3}+b_{n3}}{2}+\dfrac{b_{n3}-a_n}{2}$

$>\dfrac{-e/2}{2}+\dfrac{e}{2}=\dfrac{e}{4} \Rightarrow q-a_n>\varepsilon/4 \Rightarrow x<q$

(tengamos en cuenta que $|a_{n3}-a_n|<\varepsilon/2 \Rightarrow |a_{n3}-a_n|>-\varepsilon/2$).

Análogamente

$$\forall n\geq n_3\quad b_n-q=b_n-\frac{a_{n3}+b_{n3}}{2}=\frac{b_n-a_{n3}}{2}+\frac{b_n-b_{n3}}{2}>\frac{e}{2}-\frac{e/2}{2}=\frac{e}{4}$$

$\Rightarrow b_n-q>\varepsilon/4 \Rightarrow q<y$

Uniendo ambas partes obtenemos $x<q<y$, cqd.

4.2 R es arquimediano.

PROP Sean x, $y\in R$ con $y\in R^+ \Rightarrow \exists n\in N$ / $n\cdot y>x$

Dem

Vamos a distinguir varios casos:

- Si $x\leq 0 \Rightarrow$ basta tomar $n=1$ y $y<x$.

- Si $x>0 \Rightarrow$ como Q es denso $\begin{cases} \exists q \in Q / 0 < p < y \\ \exists q \in Q / x < q \end{cases}$. Como $p,q \in Q^+$ y Q es arquimediano $\Rightarrow \exists n \in N$ / $n \cdot p > q$ $\quad 0<p<y \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 0 < np < ny \\ x < q \end{array}\right\} \Rightarrow ny>np>q>x \Rightarrow ny>x$.

4.3 Valor absoluto en R.

Para definir el valor absoluto en R nos vamos a apoyar en Q donde ya lo tenemos definido.

PROP El valor absoluto en R verifica las siguientes propiedades:

1) $|x|=0 \Leftrightarrow x=0 \quad \forall x \in R$.

2) $|x| \geq 0 \quad \forall x \in R$

3) $|x+y| \leq |x|+|y| \quad \forall x,y \in R$

4) $|\,|x|-|y|\,| \leq |x-y| \quad \forall x,y \in R$

5) $|xy| = |x|\,|y|$

Dem

1) Trivial, por definición.

2) Idem.

3) $\forall x,y \in R$ se tiene que $-|x| \leq x \leq |x|$ y $-|y| \leq y \leq |y|$ entonces tenemos que:

$$\begin{array}{ll} & -|x| \leq x \leq |x| \\ + & \underline{-|y| \leq y \leq |y|} \end{array}$$

$-|x|-|y| \leq x+y \leq |x|+|y|$ entonces $-(|x|+|y|) \leq x+y \leq (|x|+|y|) \Rightarrow |x+y| \leq |x|+|y|$.

Esta desigualdad es la llamada desigualdad triangular.

4) $|\,|x|-|y|\,| \leq |x-y| \Leftrightarrow |\,|x|-|y|\,|^2 \leq |x-y|^2 \Leftrightarrow (|x|-|y|)^2 \leq (x-y)^2 \Leftrightarrow |x|^2+|y|^2-2|x|\,|y| \leq x^2+y^2-$

$-2xy \Leftrightarrow -2|x|\,|y| \leq -2xy \Leftrightarrow 2xy \leq 2|x|\,|y| \Leftrightarrow xy \leq |x|\,|y|$ y esto es cierto obviamente $\forall x,y \in R$.

5) - Si $x>0$ e $y>0 \Rightarrow xy=|x|\,|y| \Rightarrow |xy|=|x|\,|y|$

-Si $x>0$ e $y>0 \Rightarrow xy=|x|(-|y|) \Rightarrow |xy|=|x|\,|y|$

-Si $x<0$ e $y<0 \Rightarrow xy=(-|x|)(-|y|) \Rightarrow |xy|=|x|\,|y|$

-Si $x<0$ e $y>0 \Rightarrow xy=(-|x|)|y| \Rightarrow |xy|=|x|\,|y|$

Luego $|xy|=|x|\,|y|\ \forall x,y\in R$

4.4 R es completo.

DEF Sea (x_n) una sucesión de números reales. Diremos que (x_n) converge hacia a y se denota por $\lim x_n=a$, si

$\forall\varepsilon>0\ (\varepsilon\in R)\ \exists n_0\in N\ /\ \forall n\geq n_0 \Rightarrow |x_n-a|<\varepsilon$

PROP Todo número $x\in R$ es límite de alguna sucesión de Cauchy de racionales.

Dem

Sea $x=[a_n]$ y (a_n) una sucesión racional de Cauchy ($(a_n)\in S_c$). Vamos a comprobar que $\lim a_n=x$.

$(a_n)\in S_c \Rightarrow \forall\varepsilon>0\ \exists n_0\in N\ /\ \forall\ m,n\geq n_0 \Rightarrow |a_m-a_n|\varepsilon$

Si fijamos $n\geq n_0 \Rightarrow$ el número real $|x-a_n|$ viene determinado por la sucesión $(|a_m-a_n|)$ que es de Cauchy.

Supongamos que $\lim a_n\neq x \Leftrightarrow \exists\varepsilon>0\ \ \exists n_1\in N\ /\ \forall n\geq n_1 \Rightarrow |a_n-x|>\varepsilon$

Como Q es denso en R, $\exists q\in Q\ /\ \varepsilon<q<|a_n-x|$.

Entonces $|a_n-x|-q\in R^+ \Rightarrow$ la sucesión de Cauchy que determina este número real positivo es positiva.

Luego $\exists k>0\ /\ \forall m\geq n_2 \Rightarrow |a_n-a_m|-q>k \Rightarrow |a_n-a_m|>q+k$

Si elegimos $n_3=\max\{n_1,n_2\} \Rightarrow (a_n)$ no es de Cauchy. CONTRADICCIÓN.

La suposición es falsa y por tanto $\lim a_n=x$, cqd.

PROP Toda sucesión de Cauchy de números reales es convergente.

Dem

Sea (x_n) una sucesión de Cauchy de números reales. $\forall\varepsilon>0\ \exists n_0\ /\ \forall n,m\geq n_0 \Rightarrow |x_n-x_m|<\varepsilon$

$\forall n\in N\ \ \exists q_n\in Q\ /\ x_n-1/n<q_n<x_n+1/n$ ya que Q es denso en R.

Conseguimos una sucesión (q_n) de números racionales que verifican:

$\forall m,n \geq n_0 \quad |q_m-q_n| = |q_m-x_m+ x_m+ x_n- x_n+- q_n| \leq$

$\leq |q_m-x_m| + |x_m-x_n| + |x_n-q_n| < 1/m + \varepsilon + 1/n < \varepsilon'$

Entonces (q_m) es de Cauchy.

Sea $x=[(q_n)]$

$|x_n-x| \leq |x_n-q_n| + |q_n-x| < 1/n + \varepsilon < \varepsilon''$

$\Rightarrow(x_n)$ es convergente y su límite es x $\Rightarrow$ lim x_n=x.

PRINCIPIO DE LOS INTERVALOS ENCAJADOS

Sea (I_n) una sucesión de intervalos encajados ($I_n=[a_n,b_n]$ con $I_{n+1}\subset I_n$ $\forall n$) cerrados y acotados. Entonces $\prod_n I_n\neq\varnothing$. Si además $|I_n| =b_n-a_n$ con lim $|I_n|$ = 0 entonces existe $x\in R$ / $\{\}\in\prod I_n$

Dem

Como $I_{n+1} \subset I_n$ $\forall n\in N$ y $I_n=[a_n,b_n] \Rightarrow (a_n)$ es una sucesión de números reales

creciente y acotada superiormente por $b_1 \Rightarrow \exists$lim (a_n) = a.

Fijamos $m\in N$ / $\forall n\geq m \Rightarrow a_n\leq b_n\leq b_m \Rightarrow a\leq b_m\ \forall m\in N$.

(b_n) es una sucesión de números reales decreciente y acotada inferiormente por a_1

$\Rightarrow \exists$ lim b_n = b.

Como $b_m \geq a \quad \forall m\in N \Rightarrow b\leq a$

Sea I=[a,b]. Como $b\geq a \Rightarrow I\neq\varnothing$

Es más, podemos afirmar que $I\subset I_n$ $\forall n\in N$ ya que $a_n\leq a\leq b\leq b_n \quad \forall n,m$.

Entonces $I \subset\prod I_n$ y como $I\neq\varnothing$ entonces $\prod I_n\neq\varnothing$.

Como caso particular, si a=b $\Rightarrow$ I={a} y si $x,y\in \prod I_n \Rightarrow \begin{cases} a_n \leq x \leq b_n \Rightarrow x = a = b \\ a_n \leq y \leq b_n \Rightarrow y = a = b \end{cases}$

La intersección por tanto está construida por un sólo punto.

TEOREMA DEL EXTREMO

Todo subconjunto no vacío de R acotado superiormente tiene supremo.

Dem

Sea $C \subset R$ con $C \neq \varnothing$. Como C está acotado superiormente, $\exists b_1 \in R$ / b_1 es cota

superior de C. Podemos encontrar un nº $a_1 \in R$ tal que el intervalo $[a_1,b_1]$ verifica:

a) Contiene puntos de C.

b) b_1 es cota superior de C.

Dividimos $[a_1,b_1]$ en dos nuevos intervalos por su punto medio. A aquella mitad

que verifique a) y b) la llamamos $[a_2,b_2]$.

(Es claro que si $\frac{a_1+b_1}{2}$ es cota superior de C $\Rightarrow a_2=a_1 \Rightarrow$ y $b_2=\frac{a_1+b_1}{2}$ y si no es

cota superior $\Rightarrow a_2=\frac{a_1+b_1}{2}$ y $b_2=b_1$).

Se verifica que $b_2-a_2=\frac{1}{2}(b_1-a_1)$ y $a_2-a_1 \leq \frac{1}{2}(b_1-a_1)$.

Repitiendo el proceso, obtenemos una sucesión de números reales (a_n) que verifica

$|a_m-a_n| \leq \frac{1}{2^{n-1}}(b_1-a_1) \Rightarrow (a_n)$ es una sucesión de Cauchy.

Como toda sucesión de números reales de Cauchy es convergente tenemos que

$\exists \in R$ / $\lim a_n= x$. Supongamos que $x \neq$ Sup C.

Como también $\lim b_n= x \Rightarrow \exists y \in C$ / $x< b_n<y$ para algún $n \in N$.

Contradicción, ya que b_n $\forall n \in N$ son cota superior de C. Por tanto, x=Sup C.

5. TOPOLOGÍA DE LA RECTA REAL.

DEF Una topología sobre un conjunto X es una colección τ de subconjuntos de X que verifican tres propiedades:

1)$\varnothing$,X están en τ.

2)La unión de los elementos de cualquier subcolección de τ está en τ.

3) La intersección de elementos de cualquier colección finita de τ está en τ.

DEF Un espacio topológico es un par ordenado (X,τ) formado por un conjunto y una topología sobre él.

5.1. Subconjuntos Cerrados de Â.

DEF Dado $A\subset R$ subconjunto con $A\neq\emptyset$, diremos que A es cerrado si para cada sucesión (x_n) convergente contenida en A también contiene su límite.

OBS El conjunto [a, b) definido como $[a,b)=\{x\in R \ / \ a\leq x<b\}$ no es cerrado ya que si $x_n=b-\dfrac{b-a}{n}$, se verifica que $\begin{cases} x_n \in [a,b) \ \forall n\in N \\ x_n \ \textit{es convergente y} \lim x_n = b \end{cases}$, y en cambio $b\notin [a,b)$.

Análogamente para $(a,b) = \{x\in R \ / \ a<x<b\}$

(x_n) convergente con $(x_n)\subset A$ y A cerrado $\Rightarrow \lim x_n= x\in A$

PROP El conjunto $[a,b]=\{x\in R \ / \ a\leq x\leq b\}$ es cerrado.

Dem

Supongamos que [a,b] no es cerrado. Entonces existe una sucesión $\{x_n\}\subset[a,b]$

convergente tal que su límite $x\notin [a,b]$. Sea x>b (Análogamente si x<a) entonces sea

d= x-b, como x_n es convergente se tiene que:

$\forall\varepsilon>0 \ \ \exists n_0\in N \ / \ |x_n-x|<\varepsilon$ si $n\geq n_0$, entonces si tomamos $\varepsilon= d/2 \Rightarrow$

$\exists n_0\in N \ / \ x_n\in (x-\varepsilon, x+\varepsilon)$ si $n\geq n_0 \Rightarrow x_n>b$ si $n\geq n_0 \Rightarrow x_n\notin [a,b]$ si $n\geq n_0$!!

(contradicción) $\Rightarrow$[a,b] es cerrado.

PROP La unión de dos subconjuntos cerrados es un subconjunto cerrado.

Dem

Sean A_1 y A_2 subconjuntos de R cerrados, y sea $A=A_1\cup A_2$. Sea $(x_n)\subset A$ una sucesión convergente, y sea x= lim x_n.

-Si $(x_n)\subset A_1\Rightarrow x\in A_1\subset A$

-Si $(x_n)\subset A_2\Rightarrow x\in A_2\subset A$

En caso contrario, sea (x_{nk}) una subsucesión de(x_n) contenida en A_1. Sabemos que $x = \lim_k x_{nk}$. Como $(x_{nk})\subset A_1$ convergente y A_1 es cerrado $\Rightarrow x\in A_1 \Rightarrow x\in A$, y al ser $\lim x_{nk} = x = \lim x_n \Rightarrow (x_n)\subset A$ verifica que $x\in A$. Por tanto A es cerrado.

Nota: hemos usado que si $x_n \to x$ entonces $x_{nk} \to x$ la demostración se deja como ejercicio al lector.

COROLARIO La unión de una familia finita de subconjuntos cerrados es también cerrado.

Dem

Sean $A_1, A_2 \to A_n$ subconjuntos de R cerrados y sea $A=\bigcup_{i=1}^{n} A_i$.

Sea $(x_n) \subset A$ una sucesión convergente y sea $x= \lim_{n\to\infty} x_n$:

-Si $(x_n) \subset A$, para algún $i \Rightarrow x \in A_i$ por ser cerrado $\Rightarrow x \in A \Rightarrow A$ es cerrado.

-En caso contrario, sea x_{nk} una sucesión de x_n tal que $x_{nk} \subset A_i$ para algún i

$\Rightarrow$ como $\lim_{n\to\infty} x_{nk}=x$ y A_i es cerrado $\Rightarrow x \in A_i \Rightarrow x \in A \Rightarrow A$ es cerrado.

OBS La unión infinita de cerrados no es cerrada.

Por ejemplo, sean $A_n=[2+1/n, 4- 1/n]$ $\forall n \in N$. Entonces $A_i=[3,3] \subset A_2=[2´5,3´5] \subset \ldots$

Como $\lim(2+1/n)=2$ y $\lim (4- 1/n)=4 \Rightarrow \cup A_n=(2,4)$.

Como (2,4) es un intervalo abierto, el conjunto unión no es cerrado.

PROP Sea $\{A_i \ / \ i \in I\}$ una familia (finita o infinita) de conjuntos cerrados en R. Entonces $A=\prod A_i$ es cerrado.

Dem

Sea $(x_n) \subset A$ una sucesión convergente con $x=\lim x_n$. Entonces $(x_n) \subset A_i$ $\forall i \in N \Rightarrow$

$x \in A_i$ $\forall i \in N$ ya que los A_i son todos cerrados $\Rightarrow x \in A \Rightarrow A$ es cerrado.

5.2 Subconjuntos abiertos de R.

DEF Un subconjunto V de la recta real $V \subset R$ diremos que es abierto si su complementario, R-V, es cerrado.

PROP $(a,b)=\{x \in R \ / \ a<x<b\}$ es abierto.

Dem

$R-(a,b) = (\leftarrow,a] \cup [b,\rightarrow)$ es cerrado.

PROP La intersección de una familia finita $\{v_1,..,v_n\}$ de conjuntos abiertos es otro conjunto abierto.

Dem

Sea V= $\bigcap_{k=1}^{n} V_k$. Como R-V= R- $\bigcap_{k=1}^{n} V_k$ siendo R-V= $\bigcup_{k=1}^{n} (R-V_k)$ unión de conjuntos cerrados $\Rightarrow$ R-V es cerrado $\Rightarrow$ V es abierto

PROP La unión de una familia de conjuntos abiertos (finita o infinita) es un conjunto abierto.

Dem

Sea V= $\cup V_i \Rightarrow$ R-V = R-$\cup V_i$= $\cap$(R-V_i). Como la intersección de cerrados es cerrada $\Rightarrow$ R-V es cerrado $\Rightarrow$V es abierto.

OBS El conjunto R y el vacío son abiertos y cerrados, y son los únicos que son de los dos tipos. R es abierto porque $\varnothing$ es cerrado y $\varnothing$ es abierto porque R es cerrado. Esto no es contradictorio ya que existen conjuntos que no son ni abiertos ni cerrados.

COROLARIO Dado τ={A$\subset$R / a es abierto} es una topología para R.

TEOREMA A es abierto $\Leftrightarrow \forall x \in A\ \exists \varepsilon>0$ / $(x-\varepsilon,x+\varepsilon)\subset A$.

Dem

"$\Rightarrow$"

Supongamos que la tesis no es cierta $\exists\varepsilon>0$ / $(x-\varepsilon,x+\varepsilon)\not\subset A$. .

Tomemos ε=1 $\exists x_1\in(x-1,x+1)$ tal que $x_1\notin A$. Reiterando el proceso para ε= 1/n

$\exists x_n\in(x-1/n, x+1/n)$ con $x_n\notin A$.

La sucesión $(x_n)\subset$R-A.

El conjunto R-A es cerrado.

(x_n) es convergente ya que $|x_n-x|< 1/n\ \ \forall n\in N$

Entonces $x\in$ R-A lo cual es una contradicción y por tanto nuestra suposición es falsa.

"$\Leftarrow$"

Supongamos que a no es abierto.

Entonces R-A no es cerrado $\Rightarrow\exists(x_n)\subset$R-A convergente hacia $x\notin$ R-A$\Rightarrow x\in$ A.

Por hipótesis $\exists\varepsilon>0$ / $(x-\varepsilon, x+\varepsilon)\subset A$. Por ser (x_n) convergente, dado ese $\varepsilon>0$

$\exists n_0 \in N$ / $\forall n \geq n_0$ $|x_n - x| < \varepsilon$, pero $|x_n - x| < \varepsilon$ es lo mismo que $-\varepsilon < x_n - x < \varepsilon$, y eso es igual que $(x_n) \subset R-A$.

La suposición es falsa y por tanto A es abierto.

5.3 Entornos.

DEF Se dice que $U \subset R$ es entorno del punto $x \in R$ si $\exists \varepsilon > 0$ / $(x-\varepsilon, x+\varepsilon) \subset U$.

PROP Dado $x \in R$, sea U_x una familia formada por los entornos U del punto x. Se verifica:

1) $(x-\varepsilon, x+\varepsilon) \in U_x$

2) $[x-\varepsilon, x+\varepsilon] \in U_x$

3) $(x-\varepsilon, x+\varepsilon] \in U_x$

4) $[x-\varepsilon, x+\varepsilon) \in U_x$

Dem

Sabemos que $U_x = \{U$ / U es entorno de $x \in R\}$

1) Si en la definición tomamos $U = (x-\varepsilon, x+\varepsilon)$ se verifica, luego $(x-\varepsilon, x+\varepsilon) \in U_x$

2) Sea $U[x-\varepsilon, x+\varepsilon] \Rightarrow U \subset R$ y $(x-\varepsilon, x+\varepsilon) \subset U_x \Rightarrow (x-\varepsilon, x+\varepsilon) \in U_x$

3) Análogo a 2).

4) Análogo a 2).

PROP Si U_1 y U_2 son dos entornos $x \in R$, entonces $U_1 \cap U_2$ es otro entorno de $x \in R$.

Dem

Como U_1 y U_2 son dos enteros de $x \in R \Rightarrow \begin{cases} \exists e_1 > 0 \ / \ (x - e_1, x + e_1) \subset U_1 \\ \exists e_2 > 0 \ / \ (x - e_2, x + e_2) \subset U_2 \end{cases}$

Si tomamos $\varepsilon = \min\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}$ se tiene que $\begin{cases} (x - e, x + e) \subset (x - e_1, x + e_1) \subset U_1 \\ (x - e, x + e) \subset (x - e_2, x + e_2) \subset U_2 \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow (x-\varepsilon, x+\varepsilon) \subset U_1 \cap U_2 \Rightarrow \exists \varepsilon > 0$ / $(x-\varepsilon, x+\varepsilon) \subset U_1 \cap U_2 \Rightarrow U_1 \cap U_2$ es un entorno de $x \in R$.

La definición de límite de una sucesión convergente se puede escribir en función de entornos.

TEOREMA $(\forall U\in U_x\ \exists n_0\in N\ /\ \forall n\geq n_0 \Rightarrow x_n\in U) \Leftrightarrow (x_n)$ converge hacia x.

Dem

"$\Rightarrow$"

$\forall\varepsilon>0\ (x-\varepsilon, x+\varepsilon)=U\in U_x\ \ \exists n_0\in N\ /\ \forall n\geq n_0 \Rightarrow x_n\in U = (x-\varepsilon, x+\varepsilon)$ y que

$x_n\in(x-\varepsilon,x+\varepsilon)$ es lo mismo que $|x_n-x|<\varepsilon$. Luego (x_n) es convergente y tiene por límite

x.

"$\Leftarrow$"

$(\forall U\in U_x\ \ \exists\varepsilon>0\ \ (x-\varepsilon,x+\varepsilon)\subset U$ y $\exists n_0\in N\ /\ \forall n\geq n_0\ |x_n-x|<\varepsilon$ y $|x_n-x|<\varepsilon$ es

$x_n\in(x_n-\varepsilon,x+\varepsilon)\subset U$.

DEF Llamamos entorno de centro a y radio r>0 al conjunto $E(a,r)=\{x\in R\ /\ a-r<x<a+r\}$

OBS La definición es consistente con la anterior, ya que

$E(a,r)= (a-r,a+r)\subset U_a$ tomando $\varepsilon=r$.

PROP Si $b\in E(a,r) \Rightarrow E(b,s)\ /\ E(b,s)\subset E(a,r)$

Dem

Si $b\in E(a,r) \Rightarrow |b-a|<r \Rightarrow r-|b-a| > 0$.

Sea $s<r-|b-a|$ con $s>0$.

Para ver la inclusión:

$\forall x\in E(b,s) \Rightarrow |x-a|= |x-b+b-a| \leq |x-b| + |b-a| < s + |b-a| < r \Rightarrow x\in E(a,r)$

Luego $E(b,s)\subset E(a,r)$.

5.4 Puntos Especiales.

DEF Sea $A \subset R$ un subconjunto y $x\in A$. Diremos que x es un punto interior a A si existe un entorno de x, $U\in U_x$, contenido en A, $U\subset A$.

El conjunto de los puntos interiores de a se denota por A o Int(A).

DEF Sea $A\subset R$ y $y\in R$. Diremos que y es un punto exterior A si y es interior a R-A.

DEF Sea $A\subset R$ y $y\in R$. Diremos que z es un punto frontera de A si $\forall U\in Uz$, U contiene puntos de A y de R-A.

PROP El conjunto $V \subset R$ es abierto $\Leftrightarrow$ $V = Int(V)$.

Dem

"$\Rightarrow$"

Por la propia definición de Int(V) se cumple que $\forall x \in Int(V) \Rightarrow x \in V \Rightarrow$

$\Rightarrow Int(V) \subseteq V$

Como V es abierto $\Rightarrow$ R-V es cerrado, esto quiere decir que cualquier sucesión $\{x_n\} \subset R-V$ que sea convergente cumple que su límite está contenido en R-V. Por lo tanto si $x \in V$ se cumple que $\exists \varepsilon > 0 / (x-\varepsilon, x+\varepsilon) \subset V$, porque de no ser así podríamos establecer una sucesión $\{x_n\} \subset R-V$ convergente cuyo límite fuese $x \notin R-V$, pero esto es contradictorio con lo anteriormente expuesto, por lo tanto x es un punto interior de V $\Rightarrow x \in Int(V) \Rightarrow V \subseteq Int(V) \Rightarrow Int(V) = V$.

"$\Leftarrow$"

Sea $\{x_n\} \subset R-V$ una sucesión convergente a x. Supongamos que $x \in V = Int(V)$

$\Rightarrow \exists U_x$ entorno de x tal que $U_x \subset V \Rightarrow x_n \notin U_x$ $\forall n \in N$!! (porque el límite de x_n es x)

$\Rightarrow x \in R-V \Rightarrow$ R-V es cerrado $\Rightarrow$ V es abierto.

DEF Sea $A \subset R$. Diremos que $x \in R$ es adherente al conjunto A si x es límite de alguna sucesión contenida en A.

DEF Llamaremos $\overline{A}$ al conjunto formado por todos los puntos adherentes de a.
$\overline{A} = \{x \in R$ / x es adherente a A$\}$

PROP Dado $A \subset R$ se verifica que $A \subset \overline{A}$.

Dem

Dado $x \in A$ sea (x_n) con $x_n = x$ $\forall n \in N$.

Trivialmente (x_n) es convergente, $\lim x_n = x$ y $(x_n) \subset A$. Entonces $x \in \overline{A}$ $\forall x \in A$.

PROP A es cerrado $\Leftrightarrow$ $A = \overline{A}$.

Dem

"$\Rightarrow$"

Como ya sabemos, por la proposición anterior, que A$\subset \overline{A}$. Veamos el recíproco:

Sea x$\in$ $\overline{A}$ $\Rightarrow\exists\{x_n\}\subset$A sucesión convergente a x, pero como A es cerrado $\Rightarrow$x$\in$ A

$\Rightarrow$A$\subset \overline{A}$, entonces A= $\overline{A}$

"$\Leftarrow$"

Sea $\{x_n\}\subset$A una sucesión convergente a x. Como x es el límite de una sucesión

de términos de A $\Rightarrow$ x$\in$ $\overline{A}$=A $\Rightarrow$ x$\in$A $\Rightarrow$ A es cerrado.

PROP Dados A,B,$\subset$ R, se verifica

1) $\overline{A\cup B}=\overline{A}\cup\overline{B}$

2) $\overline{A\cap B}=\overline{A}\cap\overline{B}$

<u>Dem</u>

1) "$\subseteq$"

Sea x$\in$ $\overline{A\cup B}$ $\Rightarrow\exists\{x_n\}\subset$A$\cup$B que converge a x.

a) Si $\{x_n\}\subset$A $\forall$n$\in$N $\Rightarrow$x$\in$ $\overline{A}$

b) Si $\{x_n\}\subset$B $\forall$n$\in$N $\Rightarrow$x$\in$ $\overline{B}$

c) Si $\{x_n\}\subset$A$\cup$B $\Rightarrow$ $\exists\{x_{nk}\}\subset$A (por ejemplo) tal que el límite de $\{x_{nk}\}$ es x

$\Rightarrow$x$\in$ $\overline{A}$ $\Rightarrow\overline{A\cup B}\subset\overline{A}\cup\overline{B}$

"$\supseteq$"

Sea x$\in$ $\overline{A}\cup\overline{B}$ entonces

a) Si x$\in$ $\overline{A}$ Þ $\exists\{x_n\}\subset$A que converge a x $\Rightarrow$ $\{x_n\}\subset$ A$\cup$B $\Rightarrow$x$\in$ $\overline{A\cup B}$

b) Si x$\in$ $\overline{B}$ Þ $\exists\{x_n\}\subset$B que converge a x $\Rightarrow$ $\{x_n\}\subset$ A$\cup$B $\Rightarrow$x$\in$ $\overline{A\cup B}$

$\Rightarrow\overline{A}\cup\overline{B}\subset\overline{A\cup B}\Rightarrow\overline{A}\cup\overline{B}=\overline{A\cup B}$

2) Sea x$\in$ entonces $\overline{A\cap B}$ $\Rightarrow$ $\exists\{x_n\}\subset$ A$\cap$B que converge a x, entonces:

$$\begin{cases}\{x_n\}\subset A\Rightarrow x\in\overline{A}\\ \{x_n\}\subset B\Rightarrow x\in\overline{B}\end{cases}\Rightarrow x\in\overline{A}\cap\overline{B}\Rightarrow\overline{A\cap B}\subset\overline{A}\cap\overline{B}$$

OBS La inclusión $\overline{A\cap B} \subset \overline{A}\cap\overline{B}$ no se verifica. Veámoslo con un ejemplo.

Sea A=(1,2) y B=(2,3) $\Rightarrow$ $\overline{A}$=[1,2] y $\overline{B}$=[2,3]

$\overline{A}\cap\overline{B}$={2}, pero A∩B=∅ luego $\overline{A\cap B}$ =∅. Por tanto, no se puede hablar de igualdad.

OBS Los puntos adherentes también reciben el nombre de puntos de aglomeración.

DEF Sea A⊂R y x∈R. Diremos que x es un punto de acumulación de A si ∀ε>0 el conjunto {a∈A / |x-a|<ε} es infinito.

Comentario: el conjunto {a∈A / |x-a|<ε} es finito si y sólo si ∀ε>0 ∃a∈A / x≠a y |x-a|<ε

PROP Todo punto de acumulación es adherente.

Dem

Sea x∈A un punto de acumulación de A ⇒ ∀ε>0 {a∈A / |x-a| < ε con x≠a} es infinito. Sea ε= 1/n y sea x_n∈A un elemento distinto de x y tal que |x-x_n|<ε ∀n∈N ⇒{x_n}⊂A y converge a x⇒ x es un punto adherente a A.

El recíproco no es cierto. Sea A={1}. Si x_n=1 ∀∈N⇒ (x_n)⊂A y lim x_n =1 ⇒ 1∈ $\overline{A}$. Pero 1 no es punto de acumulación ya que el conjunto {a∈A / |1-a|<ε}={1} y no es infinito.

DEF Llamaremos puntos aislados a los números reales que son adherentes a un conjunto A⊂R y no son de acumulación en A.

DEF Llamaremos conjunto derivado de A⊂R y lo denotaremos por A´, al conjunto A⊂R de los puntos de acumulación de A.

PROP El supremo de un conjunto es adherente al conjunto.

Dem

Sea A⊂R acotado superiormente y x=SupA.

-Si x∈A ⇒ x∈ $\overline{A}$

-Si x∉A

Como x=Sup A por definición de supremo, podemos encontrar elementos en A tan próximos a x como queramos.

Sea x_n∈A / |x_n-x|< 1/n y se verifica que x_n<x ∀n. Entonces (x_n) es convergente y lim x_n = x ⇒x∈ $\overline{A}$.

TEOREMA DE BOLZANO – WEIERSTRASS

Todo subconjunto $A \subset R$, infinito y acotado posee al menos un punto de acumulación.

<u>Dem</u>

A es acotado $\Rightarrow A \subset [a,b]$
A partir de [a,b] y dividiendo por la mitad, de forma reiterada formamos una sucesión $I_n=[a_n,b_n]$ de intervalos encajados que tienen como característica que todos ellos contienen infinitos puntos.

($[a_1,b_1]$ es aquella mitad de [a,b] que contiene infinitos puntos).

La sucesión (a_n) es de Cauchy y lim $a_n=a \Rightarrow$ a es un punto de acumulación de a, $a \in A'$, ya que dado $\varepsilon>0$ $\exists n_0 \in N$ / $\forall n \geq n_0$ se verifica $\{a_n \in A \ / \ |a_n-a|<\varepsilon\}$ es infinito (están todos a partir de n_0).

5.5 Conjuntos compactos.

DEF Sea $K \subset R$ un subconjunto. Diremos que K es compacto si toda sucesión $(x_n) \subset K$ posee una subsucesión convergente hacia un $x \in K$.

TEOREMA FUNDAMENTAL

Sea $K \subset R$. K es compacto $\Leftrightarrow$ K es cerrado y acotado.

<u>Dem</u>

"$\Rightarrow$"

Probemos que K compacto $\Rightarrow$ K acotado.

Supongamos que K no es acotado.

Entonces $\forall n \in N$ se verifica que $K \not\subset [-n,n]$.

Entonces $\exists x_n \in K$ / $x_n \notin [-n,+n] \Rightarrow |x_n| \geq n$ $\forall n \in N$. Tenemos por tanto una sucesión (x_n) de K.

Por definición de compacto $\exists (x_{nk}) \subset (x_n)$ con (x_{nk}) convergente siendo $x \in K$ su límite. Pero eso es falso ya que como $|x_{nk}| \geq n_k$ resulta que (x_{nk}) no es acotada.

CONTRADICCIÓN.

Por tanto, la supresión es falsa y K es acotado.

Probemos ahora que K compacto $\Rightarrow$ K cerrado.

Supongamos que K no es cerrado.

Entonces $\exists(x_n)\subset K$ convergente con lim x_n = x y $x\notin K$. Como K es compacto $(x_{nk})\subset(x_n)$ convergente, lim x_n = y, y $\in K$. Sabemos que y=x porque cualquier

subsucesión de una sucesión convergente es convergente y con el mismo límite.

Luego x = y, $x\notin K$, $y\in K$. CONTRADICCIÓN.

Por tanto la suposición es falsa y K es cerrado.

"$\Leftarrow$"

Sea $(x_n)\subset K$ una sucesión cualquiera.

Como K es acotado $\Rightarrow$ (x_n) es una sucesión acotada. Sea el conjunto $A=\{x_n \ / \ n\in N\}$.

Sabemos que $A\subset K$. $(A=\{(x_n)\})$. Como A tiene infinitos elementos y es acotado, por

el teorema de Bolzano-Weierstrass, A posee al menos un punto de acumulación.

Sea $x\in A'$. Por definición de punto de acumulación $\exists(x_{nk})\subset A$ convergente hacia x.

Como $(x_{nk})\subset(x_n) = A\cup K$ y K es cerrado $\Rightarrow$ $x\in K$. Luego de una sucesión cualquiera

hemos podido extraer una subsucesión convergente a un punto del conjunto $\Rightarrow$ K es

compacto.

DEF Sea $A\subset R$. Llamamos a $\{V_i: i\in I\}$, familia de subconjuntos de R, recubrimiento de A si $a\subset U\{ V_i: i\in I \}$. Es decir $\forall a\in A\ \exists i\in I \ / \ a\in V_i$. Si cada V_i es un conjunto abierto, diremos que el recubrimiento es abierto.

DEF Llamaremos subrecubrimiento de A, extraído del recubrimiento $\{V_i: i\in I\}$, al recubrimiento de A $\{V_j: j\in H\}$ y $H\subset I$.

Ejemplo: $\{(-n,n): n\in N\}$ es un recubrimiento de R.

TEOREMA DEL RECUBRIMIENTO

Sea $K\subset R$. K es compacto $\Leftrightarrow$. De todo recubrimiento abierto de K es posible extraer un subrecubrimiento finito.

Dem

"⇒"

Sea $\{V_i: i\in I\}$recubrimiento abierto de K.

Como K es compacto ⇒ K es acotado ⇒ $K\subset[a,b]$.

Supongamos que no es posible extraer un subrecubrimiento finito de K (demostración por reducción al absurdo).

Como $K \subset[a,b]\Rightarrow[a,b]$ tampoco se puede recubrir con un recubrimiento finito de $\{V_i: i\in I\}$. Al dividir [a,b] en dos mitades iguales, al menos una de las dos no se puede recubrir con un recubrimiento finito. (Si ambas mitades tuvieran un recubrimiento finito, la unión de ambos nos daría un recubrimiento finito para [a,b], lo que no puede ser).

Llamemos $[a_1,b_1]$ a la mitad que no dispone de recubrimiento finito, tal que $[a_1,b_1]\cap K=\varnothing$.

Repitiendo el proceso obtenemos una sucesión (I_n) con $I_n=[a_n,b_n]$, $b_n-a_n=$ $\frac{1}{2}(b_{n-1}-a_{n-1})$, $I_n\cap K\neq\varnothing$ $\forall n\in N$ y ningún I_n tiene un recubrimiento finito. Por el principio de los intervalos encajados $\exists x\in R$ / $x=\cap I_n$. Como $I_n\cap K\neq\varnothing$ $\forall n\in N$, sea $x_n\in I_n\cap K$. Como $x_n,x\in I_n$ $\forall n$ ⇒ $|x_n-x| \leq (b_n-a_n)$ 0 $\frac{1}{2^n}(b-a)$ ⇒ $x = \lim x_n$.

Pero $(x_n)\subset K$ que es compacto ⇒ $(x_n)\subset K$ cerrado ⇒ $x\in K$.

Si $x\in K$ ⇒ $\exists i_0\in I$ / $x\in V_{io}$

$$\left.\begin{array}{l} V_{i0}\ \textit{es abierto} \Rightarrow \exists e>0\ /\ (x-e,x+e)\subset V_{io} \\ \textit{Dado ese}\ e>0\ \exists n_0\in N\ /\ I_{no}\subset(x-e,x+e) \end{array}\right\} \Rightarrow I_{no}\subset V_{io}$$, lo cual es una

contradicción ya que hemos demostrado que I_{no} está recubierto por un abierto (y por tanto un finito) y por hipótesis no podrá ser.

Luego la suposición es falsa y existe un subrecubrimiento abierto y finito K.

"$\Leftarrow$"

-K es acotado.

Supongamos que K no es acotado.

$\{V_n=(-n,n) \ / \ n\in N\}$ es un recubrimiento de R y por tanto de K.

Si existiera un recubrimiento finito de K, sea $\{V_{no}, V_{n1},..., V_{nk}\}$ dicho recubrimiento. Tomamos $m=\max\{ n_0, n_1,...,n_k\}\Rightarrow k\subset V_m = (-m,m) \Rightarrow$ K es acotado. Contradicción con nuestra suposición. Entonces es falsa y K es acotado.

-K es cerrado.

Supongamos que K no es cerrado.

$\exists(x_n)\subset K$ convergente y $x = \lim x_n$ tal que $x\notin K$.

Tomamos $F_n=[x-\frac{1}{n}, x+\frac{1}{n}]$ y definimos $V_n=R- F_n$.

Los F_n son cerrados $\Rightarrow V_n$ son abiertos con $\cup V_n= R-\{x\} \Rightarrow$ para cada $x_i\neq x$ $\exists n \ / \ x_i\in V_n$. Como $x\notin K \Rightarrow K\subset R-\{x\} \Rightarrow \{V_n : n\in N\}$ es un recubrimiento abierto de K.

Por hipótesis $\exists \ V_{n1},V_{n2},..., V_{nk} \ / \ K\subset\bigcup_{j=1}^{k}V_{nj} = V_m$ con $m=\max\{n_1,...,n_k\}$.

Como $x = \lim x_n \Rightarrow\exists n_0\in N \ / \ \forall n\geq n_0 \Rightarrow |x_n-x| < 1/n \Rightarrow x_n\in (x-1/n,x+1/n)\subset F_n$.

Tomando $n'=\max\{n_0,m\}$ tenemos que dado $n>n'$ $x_n\notin V_n \Rightarrow x_n\notin V_m \Rightarrow x_n\notin K$.

Contradicción, ya que $(x_n)\subset K$. La suposición es falsa y K cerrado.

Por ser K cerrado y acotado $\Rightarrow$ K es compacto

Teniendo en cuenta este teorema podríamos haber dado como definición de conjunto compacto la siguiente:

DEF Un conjunto $K\subset R$ es compacto si dado un recubrimiento abierto de K puede obtenerse un recubrimiento finito.

BIBLIOGRAFIA RECOMENDADA.

Análisis Matemático I. Aut. J.A. Fernández Viña. Ed. Tecnos.

Análisis Matemático. Aut. M. de Guzmán – B. Rubio. Ed. Pirámide.

Principios de Análisis Matemático. Aut. W. Rudin. Ed. McGraw-Hill.

Introducción al Análisis Matemático. Aut. J. M. Ortega. Ed. Labor.

Curso de Análisis Matemático I. Aut. E.L. Lima. Ed. Edunsa.

Calculus. Aut. M. Spivak. Ed. Reverté.