TEMAS DE MATEMÁTICAS
(Oposiciones de Secundaria)

TEMA 18

MATRICES. ALGEBRA DE MATRICES. APLICACIONES AL CAMPO DE LAS CIENCIAS SOCIALES Y DE LA NATURALEZA.

TEMA 18

MATRICES. ALGEBRA DE MATRICES. APLICACIONES AL CAMPO DE LAS CIENCIAS SOCIALES Y DE LA NATURALEZA.

1. INTRODUCCIÓN.

En este tema vamos a definir el concepto de matriz y operaciones básicas entre ellas. Los coeficientes de las matrices consideraremos que pertenecen a un cuerpo que denotaremos por K. Muchas de las propiedades y definiciones que aparecerán en el tema son válidas si en lugar de trabajar con un cuerpo, lo hacemos con un anillo.

Definiremos la noción de una matriz en relación con la existencia de matrices inversas. También estableceremos una correspondencia entre las matrices y los homomorfismos entre espacios vectoriales.

2. CONCEPTOS BÁSICOS.

DEF Una matriz con coeficientes en K es una familia de elementos de K, $(aij)_{(i,j)\in IxJ}$, siendo I y J conjuntos finitos. El elemento a_{ij} de K corresponde con el elemento $(i, j)\in IxJ$.

Si $I = \{1,....,m\}$ y $J = (1,....,n)$ se suele denotar una matriz por

$$(a_{ij})_{\substack{1\le i\le m\\ 1\le j\le n}}$$

Si m = n

$$(a_{ij})_{1\le i,j\le n}$$

También se usa la notación

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \Lambda & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \Lambda & a_{2n} \\ \Lambda & \Lambda & \Lambda & \Lambda \\ a_{m1} & a_{m2} & \Lambda & a_{mn} \end{pmatrix}$$

La familia $(a_{ij})_{1\le j\le n}$ con i fijo se llama fila i-ésima de la matriz, y la familia $(a_{ij})_{1\le i\le m}$ con j fijo se llama columna j-ésima de la matriz.

Los elementos de cualquier fila i-ésima se corresponden con un vector de K^n**.** Análogamente, los elementos de cualquier columna j-ésima se corresponden con un vector de K^m. Los primeros se conocen como vectores fila y los segundos como vectores columna.

DEF Llamaremos matriz de orden m x n a toda matriz de forma $\left(a_{ij}\right)_{\substack{1\le i\le m\\1\le j\le n}}$.

DEF Llamaremos $M_{mxn}(K)$ al conjunto de todas las matrices de orden mxn con coeficientes en K. Se suelen denotar por letras mayúsculas, $A=\left(a_{ij}\right)_{\substack{1\le i\le m\\1\le j\le n}}$.

2.1. Tipos de Matrices.

DEF Llamaremos matriz columna a toda matriz de orden mx1.

DEF Llamaremos matriz Fila a toda matriz de orden 1xn.

DEF Llamaremos matriz Nula a aquella que tiene todos sus elementos nulos.

DEF Llamaremos matriz Cuadrada a la matriz con igual número de filas que de columnas (Card(I) = Card(J).

DEF Llamaremos matriz Simétrica a toda matriz cuadrada que verifica $a_{ij}=a_{ji} \quad \forall(i,j)\in IxJ.$

DEF Llamaremos diagonal principal a los elementos a_{ij} $1\le i\le n$ de una matriz cuadrada. La diagonal secundaria está formada por los a_{ij} con i + j = n + 1.

DEF Llamaremos traza de una matriz cuadrada a la suma de los elementos situados a lo largo de la diagonal principal.

$$Traza(A)=\sum_{i=1}^{n}a_{ii}$$

DEF Llamaremos matriz diagonal a toda matriz simétrica cuyos elementos situados fuera de la diagonal principal son todos nulos.

DEF Llamaremos matriz escalar a toda matriz diagonal cuyos elementos diagonales son todos iguales entre si.

DEF Llamaremos matriz identidad a toda matriz escalar cuyos elementos diagonales son todos iguales a la unidad.

DEF Llamaremos matriz triangular a toda matriz cuadrada que tiene nulos todos los elementos situados por debajo (o por encima) de la diagonal principal.

3. $M_{mxn}(K)$ ES ISOMORFO A $L(K^m, K^n)$.

$L(K^m, K^n)$ es el conjunto formado por todas las aplicaciones lineales $f: K^m \to K^n$.

Podemos definir

$$\varphi: M_{mxn}(K) \to L(K^m, K^n)$$

donde $\forall A \in M_{mxn}(K)$, con $A = (a_{ij})$, $\varphi(A) \in L(K^m, K^n)$ y

$$\varphi(A): K^m \to K^n$$

viene dada por

$$\varphi(A)(e_i) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} e'_j$$

con $B = \{e_1, \ldots, e_m\}$ base de K^m, $B' = \{e'_1, \ldots, e'_n\}$ base de K^n y los $(a_{ij})_{1 \le j \le n}$ los elementos de la fila i-ésima de la matriz A.

PROP La aplicación φ definida anteriormente es biyectiva.

Dem.

- φ es homomorfismo.

  Trivial

- φ es inyectiva.

  Sea $\varphi(A)(e_i) = \varphi(A)(e_k)$ $\Rightarrow \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot e'_j = \sum_{j=1}^{n} a_{kj} \cdot e'_j \Rightarrow \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot e'_j - \sum_{j=1}^{n} a_{kj} \cdot e'_j = 0$

  $\Rightarrow \sum_{j=1}^{n} (a_{ij} - a_{kj}) \cdot e'_j = 0$ y como B' es una base de K^n $\Rightarrow$

  $a_{ij} - a_{kj} = 0 \quad \forall j \in \{1, .., n\} \quad \Rightarrow a_{ij} = a_{kj} \quad \forall j \in \{1, .., n\}$

  Entonces $e_i = e_k$ porque sino B no sería base de K^m

- φ es suprayectiva.

  Sea $f \in L(K^m, K^n) \Rightarrow f(e_i) \in K^n$ y $f(e_i) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} e'_j \quad \forall i \in \{1, \ldots, m\}$ ya que $\{e'_1, \ldots, e'_n\}$ es base de K^n.

  Podemos entonces considerar la matriz $A = (a_{ij})_{\substack{1 \le i \le m \\ 1 \le j \le n}}$ y es inmediato comprobar que $\varphi(A) = f$ pues $\varphi(A)(e_i) = f(e_i) \quad 1 \le i \le m$.

COROLARIO $M_{mxn}(K) \cong L(K^m, K^n)$

Dem.

Es una consecuencia inmediata de la proposición anterior.

Debido a que la aplicación φ sea un isomorfismo, toda aplicación lineal $f \in K(K^m, K^n)$ se puede escribir como la matriz asociada, fijadas las bases.

Igualmente, todo lo visto es válido si en lugar de tener K^m y K^n tenemos dos espacios vectoriales cualesquiera V y W de dimensiones m y n respectivamente.

DEF Diremos que las matrices A y B son iguales si las aplicaciones lineales f y g asociadas a dichas matrices ($\varphi(A) = f$ y $\varphi(B) = g$) respecto de las mismas bases son iguales.

Veamos ahora que la estructura de espacio vectorial de $L(K^m, K^n)$ y de anillo si n = m las podemos trasladar de forma natural al conjunto $M_{mxn}(K)$.

4. EL ESPACIO VECTORIAL $M_{mxn}(K)$.

OBS Todo el desarrollo para $L(K^m, K^n)$ sería igual si tomamos L(V, W) con V, W K-espacios vectoriales con dim V = m y dim W = n.

4.1. Suma de Matrices.

DEF Sean A y B dos matrices de $M_{mxn}(K)$ y f y g aplicaciones lineales asociadas respectivamente. Definimos la matriz suma, A + B, como aquella que tiene por aplicación asociada la suma de las aplicaciones asociadas, f + g. Es decir:

$$A + B = \varphi^{-1}(\varphi(A) + \varphi(B)) \qquad \text{(recordemos que } \varphi(A) = f \text{ y } \varphi(B) = g)$$

Si $A = (a_{ij})_{\substack{1\le i\le m \\ 1\le j\le n}}$ y $B = (b_{ij})_{\substack{1\le i\le m \\ 1\le j\le n}}$ con $B = \{e_1, \ldots, e_m\}$ base de K^m y $B' = \{e'_1, \ldots, e'_n\}$ en base de K^n.

$$\varphi(A+B)(e_i) = \varphi(A)(e_i) + \varphi(B)(e_i) = f(e_i) + g(e_i) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}e'_j + \sum_{j=1}^{n} b_{ij}e'_j =$$

$$= \sum_{j=1}^{n} (a_{ij} + b_{ij})e'_j \qquad \forall i /_{1\le i\le m}$$

Entonces $A + B = (a_{ij} + b_{ij})_{\substack{1\le i\le m \\ 1\le j\le n}}$

PROP La operación de suma así definida verifica las propiedades:

1) Asociativa.
2) Conmutativa.
3) Elemento Neutro.
4) Elemento Opuesto.

Dem.

Las propiedades 1 y 2 son inmediatas sin más que tener en cuenta que K es un cuerpo.

3) Definimos la matriz neutra para la suma como $O \in M_{mxn}(K)$ siendo aquella que todos sus elementos son nulos. Es claro que su aplicación asociada es aplicación nula.

$$A + O = (a_{ij}) + (O) = (a_{ij} + O) = (a_{ij}) = A$$

4) Definimos la matriz opuesta de otra dada como aquella que tiene los mismos elementos en los mismos sitios pero cambiados de signo. Es claro que si A tiene por aplicación asociada a f, entonces - A tendrá a - f.

$$A + (-A) = (a_{ij}) + (-a_{ij}) = (a_{ij} - a_{ij}) = (O) = O$$

Conclusión (M_{mxn}, +) es un grupo abeliano.

4.2. Producto de una matriz por un escalar.

DEF Sea A una matriz que tiene por aplicación asociada f. Sea $\lambda \in K$ un escalar. Definimos el producto de una matriz por un escalar, λA, como la matriz que tiene por aplicación asociada λf. Es decir

$$\mathbf{l}A = \mathbf{j}^{-1}(\mathbf{l} \cdot \mathbf{j}(A))$$

Si $A = (a_{ij})_{\substack{1 \le i \le m \\ 1 \le j \le n}}$ y $\lambda \in K$

$$\mathbf{j}(\mathbf{l}A)(e_i) = \mathbf{l}\,\mathbf{j}(a)(e_i) = \mathbf{l} \cdot \sum_{j=1}^{n} a_{ij} e'_j = \sum_{j=1}^{n} (\mathbf{l} a_{ij}) e'_j$$

Entonces $\mathbf{l}A = (\mathbf{l} a_{ij})_{\substack{1 \le i \le m \\ 1 \le j \le n}}$

PROP La operación de producto por un escalar definida en $M_{mxn}(K)$ verifica las propiedades:

1) Conmutativa.
2) PseudoAsociativa.
3) Elemento Unidad.

Dem.

Las propiedades son inmediatas.

Conclusión ($M_{mxn}(K)$, $\bullet_K$) es un ………

4.3. El espacio vectorial M_{mxn}(K).

PROP En $M_{mxn}(K)$ se verifica la propiedad distributiva del producto con respecto a la suma.

Dem.

La comprobación de $\lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B$ es inmediata.

Conclusión $(M_{mxn}(K), +, \bullet_K)$ es un K-espacio vectorial.

Por tanto φ: $M_{mxn}(K) \rightarrow L(K^m, K^n)$ es un isomorfismo de espacios vectoriales.

5. EL ANILLO M_n(K).

Ya sabemos que $(M_n(K), +)$ es un grupo abeliano. Definamos una segunda operación interna.

5.1. Producto de Matrices.

DEF Sean A y B dos matrices de $M_n(K)$ con f y g como aplicaciones asociadas. Definimos la matriz producto A · B como aquella que tiene por aplicación asociada a $g \circ f$. Es decir

$$A \cdot B = \varphi^{-1}(\varphi(A) \cdot \varphi(B)) = \varphi^{-1}(\varphi(B) \circ \varphi(A))$$

Si $A = (a_{ij})_{1 \le i, j \le n}$ y $B = (b_{ij})_{1 \le i, j \le n}$ con $B = \{e_1, \ldots\ldots, e_n\}$ base de K^n, tenemos que

$$\varphi(AB)(e_i) = (\varphi(A) \cdot \varphi(B))(e_i) = (\varphi(B) \circ \varphi(A))(e_i) = \varphi(B)(\varphi(A)(e_i)) =$$

$$= \varphi(B)\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} e_j\right) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \varphi(B)(e_j) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot \sum_{K=1}^{n} b_{jK} e_K = \sum_{j=1}^{n} \sum_{K=1}^{n} a_{ij} b_{jK} e_K$$

Luego $AB = \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_{jK}\right)_{1 \le i, K \le n}$

Tengamos en cuenta que el elemento de AB que ocupa la fila i columna K se obtiene realizando la suma de productos de los elementos de la fila i de A por la columna K de B.

PROP La operación producto de Matrices definida en $M_n(K)$ verifica las propiedades

1) Asociativa
2) Elemento Neutro.

Dem.

1) Inmediata.

2) Definimos como neutro a la matriz identidad $I \in M_n(K)$.

Es fácil comprobar que $I \cdot A = A \cdot I = A \quad \forall A \in M_n(K)$.

Conclusión $(M_n(K), \bullet)$ es un semigrupo con unidad.

5.2. El Anillo $M_m(K)$.

PROP El producto de matrices verifica la propiedad distributiva respecto de la suma.

Dem.

$\forall A, B, C \in M_n(K)$ con f, g, h aplicaciones lineales asociadas, hemos de comprobar que $A \cdot (B + C) = AB + AC$ y $(A + B)C = AC + BC$.

Y es cierto ya que sabemos que se verifica

$$(g+h) \circ f = g \circ f + h \circ f \qquad \text{y} \qquad h \circ (f+g) = h \circ f + h \circ g$$

Conclusión $(M_n(K), +, \cdot)$ es un anillo y $M_n(K) \cong End(K^n)$

6. PRODUCTO DE MATRICES GENERALIZADO.

En el punto anterior hemos definido el producto de matrices cuadradas del mismo orden. Podemos obtener una generalización de dicho producto como sigue.

Sea $A \in M_{mxn}(K)$ y $B \in M_{mxn}(K)$ y consideremos K^m, K^n y K^p K-espacios vectoriales.

Sean $f \in K(K^m, K^n)$ y $g \in L(K^n, K^p)$ las aplicaciones lineales asociadas a A y B respectivamente.

$B = \{e_1, ..., e_m\}$ $\quad B' = \{e'_1, ..., e'_n\}$ y $B'' = \{e''_1, ..., e''_p\}$ las bases respectivas de K^m, K^n y K^p.

Si $A = (a_{ij})_{\substack{1 \le i \le m \\ 1 \le j \le n}}$ y $B = (b_{jK})_{\substack{1 \le j \le n \\ 1 \le K \le p}}$ entonces

$$j(AB) = j(B) \circ j(A)$$

$$j(AB)(e_i) = (j(B) \circ j(A))(e_i) = j(B)(j(A)(e_i)) = j(B)\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} e'_j\right) =$$

$$= \sum_{j=1}^{n} a_{ij} j(B)(e'_j) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot \sum_{K=1}^{p} b_{jK} e''_K = \sum_{j=1}^{n} \sum_{K=1}^{p} a_{ij} b_{jK} e''_K =$$

$$= \sum_{K=1}^{p}\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}b_{jK}\right)e''_{K}$$

Luego $\quad A \cdot B = \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}b_{jK}\right)_{\substack{1\le i\le m\\ 1\le K\le p}} \Rightarrow A\cdot B \in M_{mxp}(K)$

Y su aplicación asociada $\quad g \circ f \in L(K^m, K^p)$.

PROP La operación producto de matrices generalizado verifica las propiedades

1) Asociativa.

2) Elemento Neutro.

Dem.

1) Fácil.

2) Hay que tener en cuenta que hemos de elegir la matriz identidad convenientemente para poder realizar el producto.

Si $A \in M_{mxn}(K) \Rightarrow I_m \cdot A = A \cdot I_n = A$

OBS Dadas dos matrices A y B, para poder realizar el producto A · B debe ocurrir que el número de columnas de A coincida con el de filas de B. La matriz resultante tendrá las mismas filas que A y columnas que B.

$A \in M_{mxn}(K)$, $B \in (M_{pxq}(K) \Rightarrow \{A \cdot B \in M_{mxq}(K) \Leftrightarrow n = p\}$

7. MATRICES REGULARES.

DEF Diremos que $A \in M_n(K)$ es una matriz regular, invertible o no singular si existe $B \in M_n(K)$ tal que

$$A \cdot B = I_n = B \cdot A$$

PROP Si $A \in M_n(K)$ es una matriz regular entonces existe una única matriz $B \in M_n(K)$ tal que

$$A \cdot B = I_n = B \cdot A$$

Dem.

Sean B y B´ dos matrices que verifican

$$A \cdot B = I_n = B \cdot A$$

$$A \cdot B' = I_n = B' \cdot A$$

Entonces

$$B = B \cdot I_n = B \cdot (A \cdot B') = (B \cdot A) \cdot B' = I_n \cdot B' = B'$$

Esta única matriz se denomina inversa de A, y la representaremos por A^{-1}.

Sea $B = \{e_1, \ldots\ldots, e_n\}$ en la base canónica de K^n. Sabemos que $M_n(K) \cong L(K^n, K^n)$.

Veamos ahora que las matrices regulares se corresponden con los automorfismos de K^n.

PROP $A \in M_n(K_n)$ es regular $\Leftrightarrow$ su aplicación asociada es un automorfismo en K^n.

<u>Dem.</u>

"$\Rightarrow$"

Dada $A \in M_n(K^n)$ matriz regular $\varphi(A)$ es la aplicación asociada de A. Como A es regular, existe $A^{-1} \in M_n(K^n)$ siendo $\varphi(A^{-1})$ su aplicación asociada.

Para simplificar la escritura, llamaremos $f = \varphi(A)$ y $g = \varphi(A^{-1})$

$$\boldsymbol{j}^{-1}(g \circ f) = \boldsymbol{j}^{-1}(f) \cdot \boldsymbol{j}^{-1}(g) = A^{-1} \cdot A = I_n$$

$$\boldsymbol{j}^{-1}(f \circ g) = \boldsymbol{j}^{-1}(g) \cdot \boldsymbol{j}^{-1}(f) = A \cdot A^{-1} = I_n$$

Y como i_{K^n} es la única aplicación lineal de $L(K^n, K^n)$ tal que $\boldsymbol{j}(I_n) = i_{K^n}$, resulta que

$$g \circ f = i_{K^n} = f \circ g$$

Entonces f es biyectiva y al ser lineal es un automorfismo en K^n**.**

"$\Leftarrow$"

Sea $f \in l(K^n, K^n)$ un automorfismo $\Rightarrow$ $\exists g \in L(K^n, K^n)$ tal que

$$f \circ g = i_{K^n} = g \circ f$$

Sea $A, B \in M_n(K^n)$ tal que $\varphi(A) = f$ y $\varphi(B) = g$

$$A \cdot B = \boldsymbol{j}^{-1}(f) \cdot \boldsymbol{j}^{-1}(g) = \boldsymbol{j}^{-1}(g \circ f) = \boldsymbol{j}^{-1}(i_{K^n}) = I_n$$

$$B \cdot A = \boldsymbol{j}^{-1}(g) \cdot \boldsymbol{j}^{-1}(f) = \boldsymbol{j}^{-1}(f \circ g) = \boldsymbol{j}^{-1}(i_{K^n}) = I_n$$

Entonces $B = A^{-1}$ y A es regular.

OBS La elección de la base canónica no influye en el desarrollo. Si se hubiese tomado otra base cualquiera, el resultado seria el mismo.

DEF Sea GL_n el conjunto formado por

$$GL_n = \{A \in M_n(K^n) / A \text{ es regular}\}$$

Es fácil ver que el producto de matrices es una operación interna en GL_n.

PROP Dadas A, $B \in GL_n$.

$$(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$$

<u>Dem.</u>

$$(A \cdot B) \cdot (B^{-1} \cdot A^{-1}) = A \cdot (B \cdot B^{-1}) \cdot A^{-1} = A\, I_n\ A^{-1} = A \cdot A^{-1} = I_n$$

$$(B^{-1} \cdot A^{-1}) \cdot (A \cdot B) = B^{-1} \cdot (A^{-1} A) \cdot B = B^{-1} \cdot I_n \cdot B = B^{-1} \cdot B = I_n$$

Luego $(AB)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$

PROP $(GL_n, \bullet)$ es un grupo.

<u>Dem.</u>

Por la proposición anterior, la operación es interna.

- Existencia de Elemento Neutro.

  $I_n \in GL_n$ ya que $I_n^{-1} = I_n$

- Existencia de Elemento Inverso.

  $\forall A \in GL_n$ $\exists A^{-1} / A \cdot A^{-1} = I_n$

Entonces $(A^{-1})^{-1} \cdot A^{-1} = I_n = A^{-1}(A^{-1})^{-1}$ luego $(A^{-1})^{-1} = A \in GL_n$

Por tanto $a^{-1} \in GL_n$

OBS Sabemos que $GL_n \cong Ant(K^n)$, por tanto podemos afirmar que $(GL_n, \bullet) \cong (Ant(K^n), \circ)$.

<u>8. TRASPOSICIÓN DE MATRICES.</u>

DEF Sea $A \in M_{mxn}(K)$. Llamamos matriz traspuesta de A, y se denota por A^t, a una matriz que pertenece a $M_{mxn}(K)$ tal que si $A = (a_{ij})$ y $A^t = (b_{ij})$, entonces $b_{ij} = a_{ij}$.

OBS La matriz traspuesta de una dada se obtiene escribiendo por columnas las filas de la matriz inicial.

La trasposición de matrices no es una operación interna, pero verifica las siguientes propiedades; de inmediata comprobación:

1) $(A+B)^t = A^t + B^t$

2) $(\alpha \cdot A)^t = \alpha \cdot A^t \quad \forall \alpha \in K^*$

3) $(A^t)^t = A$

4) $(A \cdot B)^t = B^t \cdot A^t$

Si definimos Ø: $M_{mxn}(K) \to M_{mxn}(K)$ como Ø(A) = A^t podemos afirmar que

1) Ø es Lineal.

- $Ø(A+B) = (A+B)^t = A^t + B^t = Ø(A) + Ø(B)$
- $Ø(\alpha A) = (\alpha A)^t = \alpha\, Ø(A)$

2) Ø es una involución ($Ø^2 = I_d$) si está definida en matrices cuadradas.

Si Ø: $M_n(K) \to M_n(K)$

$Ø^2(A) = Ø\,(Ø(A)) = Ø(A^t) = (A^t)^t = A = 1_{id}(A) \Rightarrow Ø^2 = 1_{id}$

9. MATRICES SIMÉTRICAS Y HEMISIMÉTRICAS.

DEF Diremos que una matriz A es simétrica si $A = A^t$.

OBS Una matriz simétrica necesariamente debe ser cuadrada.

DEF Diremos que una matriz A es hemisimétrica o antisimétrica si $A^t = -A$.

OBS Una matriz antisimétrica debe ser cuadrada y $a_{ij} = -a_{ji} \quad \forall i, j$ luego $a_{ii} = 0 \quad \forall i$.

PROP Toda matriz $a \in M_{\mathbf{n}}(K)$ se puede descomponer de forma única como suma de una matriz simétrica y otro hemisimétrica.

Dem.

Sean las matrices $S = \frac{1}{2}(A + A^t)$ y $H = \frac{1}{2}(A - A^t)$

Calculemos S^t y H^t

$$S^t = \left(\frac{1}{2}\left(A + A^t\right)\right)^t = \frac{1}{2}\left(A + A^t\right)^t = \frac{1}{2}\left(A^t + \left(A^t\right)^t\right) = \frac{1}{2}\left(A^t + A\right) = S$$

Entonces H es antisimétrica.

$$S + H = \frac{1}{2}\left(A + A^t\right) + \frac{1}{2}\left(A - A^t\right) = A$$

$$S - H = \frac{1}{2}\left(A + A^t\right) - \frac{1}{2}\left(A - A^t\right) = A^t$$

Sumando y restando

$$\left.\begin{array}{r} A + A^t = 2S \\ A - A^t = 2H \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} S = \dfrac{A + A^t}{2} \\ H = \dfrac{A - A^t}{2} \end{array}$$

Y S y H son únicas, ya que la descomposición es única.

10. RANGO DE UNA MATRIZ.

DEF Dada una matriz $A \in M_{mxn}(K)$, si consideramos las n columnas como n vectores de K^m, definimos el rango por columnas de la matriz A como el rango del conjunto formado por los n vectores columna.

$$\text{rang}_c(A) = \text{rang}(C_1, C_2, \ldots, C_n)$$

Siendo $C_j = (a_{ij}, a_{2j}, \ldots, a_{nj})$ $1 \le i \le n$

DEF Dada una matriz $A \in M_{mxn}(K)$, si consideramos las m filas como m vectores de K^n, definimos el rango por filas de la matriz A como el rango del conjunto formado por los m vectores fila.

$$\text{rang}_F(A) = \text{rang}(F_1, F_2, \ldots, F_n)$$

Siendo $F_i = (a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{in})$

PROP Para cualquier $A \in M_{mxn}(K)$ se verifica

$$\text{rang}_c(A) = \text{rang}_F(A)$$

Dem.

Cualquier relación de dependencia entre las columnas de la matriz A equivale a resolver el sistema.

$$\sum_{j=1}^{n} x_j \vec{c}_j = \vec{o} \Leftrightarrow \left. \begin{array}{r} a_{11}x_1 + \ldots\ldots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{m1}x_1 + \ldots\ldots + a_{mn}x_n = 0 \end{array} \right\}$$

Si realizamos alguna modificación en el orden de las filas seguimos obteniendo el mismo sistema, y no alteramos el rango por columnas, ni por filas.

Supongamos que $\text{rang}_F(A) = r$. Entonces $m - r$ ecuaciones dependen de r de ellas (supondremos que son las r primeras).

El sistema

$$\left. \begin{array}{r} a_{11}x_1 + \ldots\ldots + a_{1n}x_n = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{r1}x_1 + \ldots\ldots + a_{rn}x_n = 0 \end{array} \right\}$$

tiene las mismas soluciones que el sistema inicial.

Entonces $\text{rang}_c(A) = r' = \text{rang}_c \begin{pmatrix} a_{11} \ldots\ldots\ldots a_{1n} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{r1} \ldots\ldots\ldots a_{rn} \end{pmatrix}$

Podemos considerar las columnas de esta última matriz vectores de K^r y como $\dim K^r = r$ se deduce que:

$$\text{Rang}_c(A) = \text{rang}_F(A) \Rightarrow c \leq r$$

Realizando el mismo razonamiento con la matriz traspuesta como

$$\text{rang}_c(A) = \text{rang}_F(A^t)$$

$$\text{rang}_F(A) = \text{rang}_c(A^t)$$

obtenemos

$$\text{rang}_c(A^t) \leq c = \text{rang}_F(A^t) \Rightarrow r \leq c$$

Por tanto $r = c \Rightarrow \text{rang}_c(A) = \text{rang}_F(A)$

Al hablar de rango de una matriz no se distingue entre rango por columnas, al ser el mismo.

OBS Si $f: K^m \rightarrow K^n$ es la aplicación asociada a la matriz $A \in M_{mxn}(K)$ se verifica $\text{rang}_F(A) = \dim \text{Im} f$.

PROP Sea f: $K^m \to K^n$ una aplicación lineal entre espacios vectoriales, y sea $A \in M_{mxn}(K)$ la matriz asociada a f respecto de bases B y B´ de K^m y K^n respectivamente. Entonces

$$\text{rang}(A) = \text{rang}(f)$$

<u>Dem.</u>

Sea A la matriz asociada a f respecto de las bases $B = \{e_1,\ldots.., e_m\}$ de K^m y $B' = \{e'_1,\ldots., e'_n\}$ de K^n.

Como las filas F_1, F_2,…., F_m de A son las coordenadas de los vectores $f(e_1)$, $f(e_2)$,….., $f(e_m)$ en la base B´, y el rango de un sistema de vectores coincide con el rango del sistema de sus vectores coordenadas, tenemos que

$$\text{rang}(f) = \text{rang}(f(e_1), f(e_2),\ldots.., f(e_m)) = \text{rang}(F_1, F_2,\ldots., F_m) = \text{rang}(A)$$

PROP Sea f: $K^m \to K^n$ una aplicación lineal entre espacios vectoriales de dimensión finita y A su matriz asociada. Entonces:

1) f es inyectiva $\Leftrightarrow$ rang (A) = dim (K^m)

2) f es suprayectiva $\Leftrightarrow$ rang (A) = dim (K^n)

<u>Dem.</u>

Inmediata

COROLARIO Una matriz $A \in M_n(K)$ es invertible si y solo si rang (A) = n.

<u>Dem.</u>

Basta recordar que A es invertible si f es biyectiva.

11. APLICACIONES DE LAS MATRICES.

Las matrices son en la actualidad una herramienta imprescindible en múltiples ramas de la matemática pura y aplicada (álgebra lineal, geometría, estadística, etc) y en otras muchas ciencias (mecánica, economía, física, etc). Veamos ahora diferentes aplicaciones de las matrices.

11.1. Uso de las matrices en las ciencias Psico-Sociales.

Una posible utilización de las matrices en Psicología y otras Ciencias Sociales es la presentación de las puntuaciones obtenidas por m personas, animales, etc, en n características.

La fila i estaría constituida por las n puntuaciones

$$\left(a_{i1}, a_{i2}, ..., a_{in}\right)$$

en las n características.

La columna j estará constituida por las m puntuaciones

$$\left(a_{1j}, a_{2j}, ..., a_{mj}\right)$$

en la característica j.

La puntuación a_{ij} es la obtenida por la persona, animal, etc, i en la característica j.

11.2. Aplicaciones de las Matrices al campo de las Ciencias.

Actualmente podemos encontrarnos con matrices en diversidad de campos tales como la física, informática, economía y, en general, siempre que trabajamos con un gran número de datos. Estos datos se organizan y disponen en matrices para su posterior manipulación.

a) La principal utilidad del álgebra matricial está en al posibilidad de poder representar, estudiar y resolver sistemas de ecuaciones con ayuda de nociones como rango de una matriz, matriz inversa y determinante.

Un sistema de ecuaciones se puede escribir en forma matricial como

$$AX = B$$

Si la matriz A es inversible, la solución al sistema es

$$X = A^{-1} \cdot B$$

b) Dentro del análisis, y por tanto, en una amplia gama de problemas físicos, de ingeniería, etc aparecen las matrices para estudiar las funciones de varias variables y determinar sus máximo y mínimos.

Si tenemos una función f: $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, se define su derivada por medio de una matriz de $M_{mxn}(\mathbb{R})$ llamada Jacobiana y cuyos elementos son $a_{ij} = \dfrac{\partial f_i}{\partial x_j}$ (derivada de la componente i-ésima respecto de la variable j-ésima).

La matriz de las segundas derivadas se llama Hessiana.

También se trabaja con matrices a la hora de aplicar la regla de la cadena en funciones de varias variables. Veamos un ejemplo:

Sean las funciones g: $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ y f $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ definidas como:

$G(x, y) = (xy, y^2 - 2)$ $\qquad$ $f(u, v) = (u, u^2, u - v)$

Calculemos $\left(f \circ g\right)'$ (1, -2) con la regla de la cadena

$$g'(x,y)=\begin{pmatrix} y & x \\ 0 & 2y \end{pmatrix} \Rightarrow g'(1,-2)=\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}$$

$$f'(u,v)=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2u & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow como \quad g(1,-2)=(-2,2) \quad f'(-2,2)=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -4 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

y $\left(f \circ g\right)'(1,-2)= f'(-2,2)\cdot g'(1,-2)=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -4 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & -4 \\ 8 & -4 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$

con lo que hemos calculado la derivada de la composición utilizando el producto de matrices.

La herramienta principal para el estudio de ecuaciones diferenciales lineales es el análisis matricial, donde adquiere especial relevancia la llamada matriz de Jordan.

c) En la geometría, las matrices sirven para representar los movimientos y semejanzas en el espacio, que son de vital importancia en la dinámica, cristalografía e incluso en la teoría de la relatividad. Veamos algunos ejemplos:

- Ecuación de traslación de vector t = (a, b, c)

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

- Ecuación del giro de ángulo α y eje z:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\operatorname{sen}\alpha & 0 \\ \operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

También podemos estudiar mediante matrices las simetrías axiales, centrales, con deslizamientos, etc.

d) En la Estadística también empleamos las matrices: matriz de datos para presentar información, matriz de desviaciones, matriz de varianza-covarianza, matriz de correlaciones,……

e) En el campo de la economía, gran cantidad de situaciones competitivas que se presentan muchas veces, pueden estudiarse con ayuda de las matrices de pago, que informan de las ganancias o pérdidas que pueden darse en determinadas situaciones.

11.3. Aplicaciones de las matrices al campo de las Ciencias Sociales y de la Naturaleza.

a) Cadenas de Markov.

Las cadenas de Markov se pueden ver como una aplicación de las matrices tanto a las ciencias sociales como de la naturaleza. Se puede aplicar al estudio de la genética Mendeliana, por ejemplo, cuando intentamos cruzar individuos de la misma especia pero con diferentes caracteres. Los resultados posibles a obtener los podemos representar mediante una cadena de Markov.

DEF Definimos el espacio de estados, S, como el conjunto donde toman valores las variables de una familia.

DEF Una sucesión de variables aleatorias $\{x_n\}$ se denomina Cadena de Markov (en tiempo discreto con espacio de estados discretos) si

$$\forall n \quad P\left[x_{n+1} = i_{n+1} / x_o = i_o, ..., x_n = i_n\right] == P\left[x_{n+1} = i_{n+1} / x_n = i_n\right]$$

$i_K \in S$ n = presente, n + 1 = futuro, {0,…., n – 1} = pasado

es decir, el futuro es independiente del pasado conociendo el futuro.

- Cadenas de Markov con Probabilidad de Transición Estacionaria. Matriz de Transición.

A cada $i \in S$ se le asocia un conjunto $E_i \Rightarrow$ Hablamos de estado i $\Rightarrow$ S = Conjunto de estados.

DEF Se denomina probabilidad de Transición en n pasos a la probabilidad de pasar al estado E_j en un tiempo n + m sabiendo que en n estaba en el estado E_i.

$$P\left[x_{n+m} = j / x_n = i\right]$$

Esta probabilidad de transición se denomina estacionaria si no dependen del instante del que parte, n, si no sólo del número de pasos, m.

En particular si n = 0

$$P\left[x_m = j / x_o = i\right]$$

en este caso se denominan a las probabilidades de transición.

$p_{ij}^{(m)}$ = probabilidad de pasar del estado i al j en m pasos.

Las cadenas de Markov son las probabilidades de transición en un paso.

La matriz de transición en m pasos es $P^{(m)} = \left(p_{ij}^{(m)}\right) \quad i, j \in S$

Por convenio $P^{(0)} = I$

11.4. Aplicaciones a la Teoría de Grafos.

Dado un grafo es posible asociar a él matrices.

a) Matriz de Adyacencia.

Es la matriz $A = (a_{ij})$ definida por

$$a_{ij} = \begin{cases} K & si\ v_i\ es\ adyacente\ a\ v_j \\ 0 & en\ caso\ contrario \end{cases}$$

siendo K el número de aristas que unen el vértice v_i con el v_j. $A \in M_m(\mathbb{R})$.

La matriz de adyacencia es muy útil para decidir cuestiones de conexión, pues si A es matriz de Adyacencia de un grafo con m vértices donde $m > 1$, entonces el término a_{ij} de la matriz $A^{\mathbf{n}}$ nos da el número de caminos de longitud n que van del vértice v_i al v_j.

b) Matriz de Incidencia.

Es la matriz $M = (m_{ij})$ con $M \in M_m(\mathbb{R})$ tal que

$$m_{ij} = \begin{cases} 1 & si\ el\ vértice\ v_i\ es\ incidente\ con\ la\ arista\ e_j \\ 0 & en\ caso\ contrario \end{cases}$$

Bibliografía Recomendada.

Curso de algebra y geometría. Juan de Burgos. Ed: Alhambra

Algebra lineal y geometria. Ed: Univ. de Barcelona

Algebra linea. Juan de Burgos. Ed: McGraw-Hill

Algebra lineal. F. Puerta. Ed: Univ. de Barcelona.1975

Linear Algebra. W. Greub. Ed: Springer-Verlag