

TEMAS DE MATEMÁTICAS

(Oposiciones de Secundaria)

TEMA 32

APLICACIÓN DEL ESTUDIO DE FUNCIONES A LA INTERPRETACIÓN Y RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS DE LA ECONOMÍA, LAS CIENCIAS SOCIALES Y LA NATURALEZA.

1. Introducción.
 2. Las Funciones en las Ciencias Naturales.
 - 2.1. Aplicaciones a la Física.
 - 2.1.1. Sistemas de Referencia.
 - 2.1.2. Vector de Posición de un móvil
 - 2.1.3. Vector Velocidad.
 - 2.1.4. Vector Aceleración.
 - 2.1.5. 2ª Ley de Newton.
 - 2.1.6. Momento Angular.
 - 2.1.7. Trabajo.
 - 2.1.8. Energía.
 - 2.1.9. Potencia.
 - 2.1.10. Momento de una Fuerza y Momento de un Par.
 - 2.1.11. Campos Eléctricos y Magnéticos.
 - 2.1.12. Flujo Electrostático y Magnético.
 - 2.1.13. La Ecuación de Ondas.
 - 2.1.14. Ecuaciones de Maxwell.
 - 2.1.15. Ondas Electromagnéticas.
 - 2.2. Aplicaciones a la Química.
 - 2.2.1. Cinética de Reacciones.
 - 2.2.2. Termoquímica. Cálculos de Calores de Reacción.
 - 2.3. Aplicaciones a la Biología.
 - 2.3.1. Leyes de la Desintegración Radiactiva.
 3. Las Funciones en las Ciencias Sociales.
 4. Las Funciones en la Economía.
 - 4.1. Funciones en Economía.
 - 4.2. Derivadas en Economía.
 - 4.3. Integrales en Economía.
- Bibliografía Recomendada.

APLICACIÓN DEL ESTUDIO DE FUNCIONES A LA INTERPRETACIÓN Y RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS DE LA ECONOMÍA, LAS CIENCIAS SOCIALES Y LA NATURALEZA.

1. INTRODUCCIÓN.

Las materias que vamos a ver en este tema podríamos situarlas en lo que llamamos matemáticas aplicadas. Aparecen en otras ciencias y han sido las verdaderas impulsoras, a lo largo de la historia, de las matemáticas. Si recordamos, la matemática ha evolucionado a velocidad de vértigo en estos últimos 500 años. Y entre los que más han contribuido nos encontramos con físicos, astrónomos, economistas, etc. Estudiando comportamientos que se producían en la naturaleza se daban cuenta que era necesario inventar o desarrollar herramientas matemáticas que, o no existían o estaban poco evolucionadas.

Durante la segunda mitad del siglo XX, nuevas técnicas han sido introducidas a fin de tratar problemas sociales, industriales, científicos y militares. No se ha desarrollado una nueva teoría, simplemente se han combinado diferentes técnicas particulares.

El concepto de función es una de las ideas básicas de las matemáticas. Casi cualquier estudio que se refiera a la aplicación de las matemáticas a problemas de la vida real emplea las funciones.

Podemos decir que el análisis matemático es la parte de las matemáticas que se dedica al estudio de las funciones. Proporciona métodos para la investigación cuantitativa de los distintos procesos de cambio, movimiento y dependencia, de una magnitud (variable) respecto de otra u otras.

Por tanto, el análisis proporciona a materias tan dispares como la Física, la Tecnología, la Economía, la Biología, la Sociología y muchas más, métodos para la resolución de problemas e incluso la posibilidad de formular sus leyes.

En este tema vamos a ver la aplicación de las funciones matemáticas a tres campos del saber: las Ciencias Naturales, las Ciencias Sociales y la Economía.

2. LAS FUNCIONES EN LAS CIENCIAS NATURALES.

La historia del análisis ha estado muy ligada con los avances y necesidades de las ciencias naturales. Grandes personajes como Newton, Leibniz, Kepler, y otros hicieron avanzar la matemática para resolver problemas físicos. Por tanto, vamos a realizar un recorrido por las principales aplicaciones a la Física y luego veremos aplicaciones a la Química y a la Biología.

Debido a la gran cantidad de aplicaciones que hay, recomendamos al opositor que seleccione aquellas que prefiera de entre todas.

2.1. Aplicaciones a la Física.

2.1.1. Sistemas de Referencia.

Para un estudio correcto del movimiento hemos de elegir en primer lugar un sistema de referencia (generalmente establecido por un sistema de coordenadas) al cual referir la posición de un punto material mediante unas coordenadas numéricas. El punto estará en reposo cuando las coordenadas respecto al sistema de referencia, no varían con el tiempo y estará en movimiento cuando al menos una coordenada varía con el tiempo.

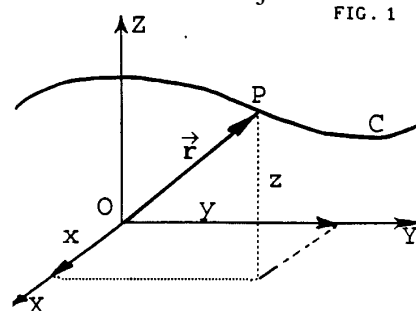
2.1.2. Vector de posición de un Móvil.

La Posición de un punto móvil en el espacio queda fijada por el **vector de posición**, \vec{r} trazado desde el origen O de coordenadas hasta la posición del móvil P. Las componentes del vector \vec{r} (x, y, z) serán las coordenadas del punto móvil en ese instante. El móvil, en su movimiento describe una curva C llamada **trayectoria** del punto P,

El movimiento de P queda totalmente especificado y determinado si se conocen las tres coordenadas del vector como funciones del tiempo:

$$x = x(t) \quad y = y(t) \quad z = z(t)$$

llamadas *ecuaciones paramétricas* del movimiento. En cada instante t , los valores de x , y , z corresponden a las coordenadas del punto ocupado por el móvil en dicho instante. Físicamente equivale a decir que todo movimiento puede considerarse descompuesto en tres movimientos rectilíneos sobre los tres ejes coordenados.



De las ecuaciones paramétricas $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$ se deduce la ecuación de la trayectoria del punto móvil con sólo eliminar entre ellas la variable independiente t .

El vector de posición vendrá dado por la expresión vectorial:

$$\vec{r} = \vec{r}(t) = x(t) \cdot \vec{i} + y(t) \cdot \vec{j} + z(t) \cdot \vec{k}$$

expresión que determina \vec{r} para cualquier instante t y se puede escribir de modo genérico como: $\vec{r} = \vec{r}(t)$ que es la *ecuación vectorial del movimiento*.

La distancia recorrida por el móvil es la suma de todas las longitudes recorridas en los sucesivos intervalos de tiempo desde el instante inicial (t_0) al instante final (t). Esta distancia constituye la trayectoria definida anteriormente y sobre ella, el problema cinemático consiste en determinar el camino recorrido en función del tiempo, es decir:

$$s = s(t)$$

2.1.3. Vector velocidad.

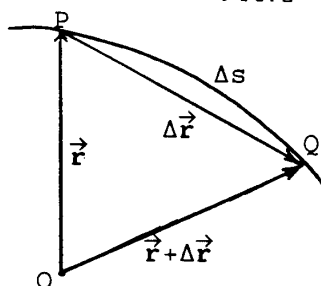
Para el estudio del movimiento es necesario conocer la posición del móvil en cada instante, que vendrá dada por el vector de posición y la variación de esta posición con el tiempo, que vendrá dada por el vector velocidad.

Si un móvil se encuentra en un instante dado, en la posición P (dada por el vector de posición \vec{r}) y un intervalo Δt después se encuentra en Q (dada por el vector de posición $\vec{r} + \Delta\vec{r}$) el móvil ha sufrido un desplazamiento vectorial $\Delta\vec{r}$ y ha recorrido un intervalo de trayectoria Δs son, por definición, diferentes y no coincidentes. Sólo en el caso límite de que el intervalo de tiempo sea infinitesimal, ambos conceptos serán coincidentes en el gráfico y el módulo de $\Delta\vec{r}$ coincidirá con Δs .

Se define el *Vector Velocidad Media* \vec{v}_m como el cociente:
$$\vec{v}_m = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}$$

que es un vector de dirección y sentido idéntico al vector desplazamiento $\Delta\vec{r}$, pues el escalar Δt será siempre positivo. La dirección del vector desplazamiento y por ello la del vector velocidad media es la dirección de la cuerda del arco PQ.

FIG. 2



Análogamente se define la *Velocidad Media en la Trayectoria* v_m (magnitud escalar) al cociente de la trayectoria recorrida en el tiempo empleado:

$$v_m = \frac{\Delta s}{\Delta t}$$

Ambas velocidades medias, una vectorial y otra escalar, no son generalmente, de igual módulo pues $|\Delta\vec{r}| \neq \Delta s$ como puede apreciarse en la Fig.2.

Si reducimos el intervalo de tiempo Δt hasta valores muy pequeños que tiendan a cero, el vector velocidad quedará referido a un intervalo infinitamente pequeño, y se llamará *Vector velocidad instantánea* o simplemente *Vector Velocidad*:

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt}$$

Análogamente se definirá la *Velocidad Instantánea sobre la Trayectoria* como:

$$v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{ds}{dt}$$

Teniendo en cuenta la expresión de:

$$\vec{r} = x(t)\cdot\vec{i} + y(t)\cdot\vec{j} + z(t)\cdot\vec{k}$$

el vector velocidad también puede expresarse en un sistema cartesiano mediante la derivada del vector de posición:

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{dx(t)}{dt} \vec{i} + \frac{dy(t)}{dt} \vec{j} + \frac{dz(t)}{dt} \vec{k}$$

y la celeridad, o módulo de la velocidad, será:

$$v = |\vec{v}| = \left[\left(\frac{dx}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dy}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dz}{dt} \right)^2 \right]^{1/2}$$

que será una función del tiempo, como lo son las componentes dx/dt , dy/dt y dz/dt .

2.1.4. Vector Aceleración.

El movimiento de un punto material, en su forma más general, tiene en cada punto de la trayectoria un vector de posición y un vector velocidad diferentes, lo que significa una variación de la velocidad tanto en módulo como en dirección y sentido.

En el instante t la velocidad del punto móvil situado en P es \vec{v} y después de transcurrido un intervalo de tiempo Δt , es decir en el instante $t + \Delta t$, la velocidad del móvil, situado en Q es $\vec{v} + \Delta \vec{v}$. Definimos el *Vector Aceleración Media* al cociente entre la variación del vector velocidad y el intervalo de tiempo transcurrido. Es un vector que tiene la misma dirección y sentido que $\Delta \vec{v}$:

$$\vec{a}_m = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t}$$

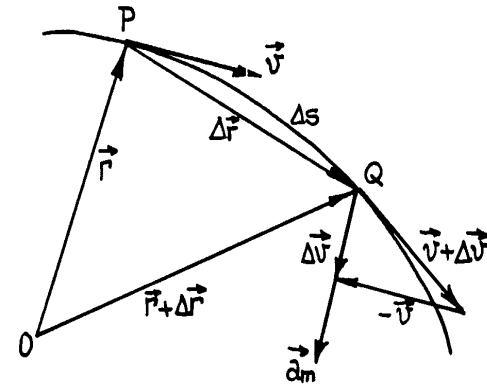


FIG. 3

Considerando un intervalo de tiempo infinitamente pequeño, que tienda a cero, podemos definir el *Vector Aceleración Instantánea* o simplemente el *Vector Aceleración* como el valor en el límite, de la relación $\Delta \vec{v} / \Delta t$ cuando Δt tiende a cero, es decir:

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{d\vec{r}}{dt} \right) = \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2}$$

El vector aceleración tendrá por componentes:

$$\vec{a} = \frac{dv_x}{dt} \vec{i} + \frac{dv_y}{dt} \vec{j} + \frac{dv_z}{dt} \vec{k} = \frac{d^2 x}{dt^2} \vec{i} + \frac{d^2 y}{dt^2} \vec{j} + \frac{d^2 z}{dt^2} \vec{k}$$

y su módulo será:

$$a = |\vec{a}| = \sqrt{\left(\frac{d^2 x}{dt^2} \right)^2 + \left(\frac{d^2 y}{dt^2} \right)^2 + \left(\frac{d^2 z}{dt^2} \right)^2}$$

2.1.5. 2ª Ley de Newton.

La segunda ley de Newton se puede enunciar así: "Una fuerza externa actuando sobre una partícula le produce una variación de su cantidad de movimiento o *Momento Lineal*" y matemáticamente será:

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d}{dt}(m \cdot \vec{v})$$

Si realizamos la derivada de la expresión anterior, tendremos:

$$\vec{F} = \frac{dm}{dt} \cdot \vec{v} + m \cdot \frac{d\vec{v}}{dt} = 0 + m \cdot \frac{d\vec{v}}{dt} = m \cdot \vec{a}$$

El primer término dm/dt es nulo pues la masa de la partícula es constante, lo que es válido en el campo de la Mecánica Clásica. Por tanto, la Segunda Ley de Newton, $\vec{F} = m \cdot \vec{a}$ se puede expresar matemáticamente como:

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$$

que viene a expresar que cuanto mayor sea la fuerza aplicada, mayor será la variación del estado dinámico del sistema caracterizado por el *momento lineal*.

El *Momento Lineal* (o Cantidad de Movimiento) de un sistema de partículas es la suma vectorial de los momentos lineales de cada una de las partículas que constituyen el sistema:

$$\text{siendo: } \vec{p}_i = m_i \vec{v}_i \quad \text{resultará} \quad \vec{p} = \sum \vec{p}_i = \sum m_i \vec{v}_i$$

y si consideramos que $\vec{v}_i = d\vec{r}_i / dt$ sustituyendo y desarrollando:

$$\vec{p} = \sum m_i \cdot \frac{d\vec{r}_i}{dt} = \frac{d}{dt} \sum m_i \vec{r}_i = \frac{d}{dt} M \cdot \vec{r}_{CM} = M \cdot \frac{d\vec{r}_{CM}}{dt} = M \cdot \vec{v}_{CM}$$

lo que se expresa diciendo que: *El Momento Lineal de un sistema de partículas es igual al producto de la masa total del sistema por la velocidad de su centro de masa, lo que llamaremos Momento Lineal del Centro de Masa.*

2.1.6. Momento Angular

El *Momento Angular* (o Momento Cinético) para una partícula se define como *el Momento de su Momento Lineal*, o sea:

$$\vec{L} = \vec{r} \wedge \vec{p} = \vec{r} \wedge m\vec{v}$$

Para un sistema de partículas, el Momento Angular será la suma vectorial de los momentos angulares de sus partículas componentes:

$$\vec{L} = \sum \vec{L}_i = \sum \vec{r}_i \wedge \vec{p}_i = \sum \vec{r}_i \wedge m_i \vec{v}_i \quad (15)$$

La variación del Momento Angular del sistema se obtiene derivando la expresión anterior:

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{L}}{dt} &= \frac{d}{dt} \left(\sum \vec{r}_i \wedge m_i \vec{v}_i \right) = \sum \left(\frac{d\vec{r}_i}{dt} \wedge m_i \vec{v}_i \right) + \sum \left(\vec{r}_i \wedge \frac{d(m_i \vec{v}_i)}{dt} \right) = \dots \\ &= \sum [\vec{v}_i \wedge m_i \vec{v}_i] + \sum \left(\vec{r}_i \wedge m_i \frac{d\vec{v}_i}{dt} \right) = 0 + \sum (\vec{r}_i \wedge m_i \vec{a}_i) = \sum (\vec{r}_i \wedge \vec{F}_i) = \sum \vec{M}_i = \vec{M} \end{aligned}$$

Resultando finalmente que: $\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}$

El primer término de la derivada es cero porque se trata de dos vectores paralelos, con producto vectorial nulo. El segundo término es la suma de los momentos que actúan sobre cada partícula, es decir, el Momento de Fuerza resultante.

En este Momento de Fuerza, se incluyen las fuerzas internas y externas, es decir:

$$\vec{M} = \sum \vec{M}_i = \sum (\vec{r}_i \wedge \vec{F}_i) = \sum (\vec{r}_i \wedge (\vec{F}_{Ei} + \vec{F}_{Ii})) = \sum (\vec{r}_i \wedge \vec{F}_{Ei}) + \sum (\vec{r}_i \wedge \vec{F}_{Ii})$$

pero el término correspondiente a las fuerzas internas es nulo, de forma que podemos decir que *son las fuerzas externas las únicas que producen variación del Momento Angular del sistema.*

2.1.7. Trabajo.

Considerando el caso en que una fuerza no constante actúa durante un determinado trayecto sobre un cuerpo produciéndole un desplazamiento se define el trabajo realizado por dicha fuerza sobre el cuerpo como la circulación de la fuerza a lo largo del desplazamiento. La circulación es la integral lineal del producto escalar del vector Fuerza por el vector desplazamiento diferencial entre el punto inicial y el punto final, siguiendo una determinada trayectoria:

$$W = \int_{r_1}^{r_2} \vec{F} \bullet \vec{r}$$

2.1.8. Energía.

Podemos definir la energía como la capacidad de un sistema para realizar un trabajo. Entonces:

$$\Delta E = E_2 - E_1 = W$$

es decir, el trabajo exterior realizado por el sistema es igual a la variación de la energía de dicho sistema.

La energía cinética de un sistema de partículas es la suma de las energías cinéticas de las partículas que componen el sistema:

$$EC = \sum EC_i = \sum \frac{1}{2} m_i v_i^2 = \frac{1}{2} \sum m_i v_i^2$$

En el caso de un cuerpo extenso que se mueve en una trayectoria lineal (movimiento de traslación) en la que todo el cuerpo posee la misma velocidad, la energía cinética puede definirse:

$$EC = \frac{1}{2} \int v^2 dm = \frac{1}{2} v^2 \int dm = \frac{1}{2} M_{cm} v^2$$

En un campo de fuerzas conservativas, se define la Energía Potencial como una función del punto del campo tal que el trabajo realizado para trasladar el cuerpo desde un punto a otro del campo es igual a la variación de la energía potencial entre esos dos puntos, o sea:

$$W = \int_{r_1}^{r_2} \vec{F} \bullet \vec{r} = EP_A - EP_B$$

de tal forma que la Energía potencial absoluta de un punto del campo conservativo, ee:

$$EP(\vec{r}) = - \int_{\infty}^r \vec{F} \bullet \vec{r}$$

O sea, es el trabajo realizado sobre un cuerpo para desplazarlo desde el infinito (donde la fuerza del campo es nula) hasta el punto determinado. Dicho trabajo se acumula en el cuerpo como energía potencial.

2.1.9. Potencia.

Para medir la eficacia de un sistema introducimos el concepto de potencia, que se define como el trabajo que un sistema puede hacer en la unidad de tiempo.

$$P = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta W}{\Delta t} = \frac{dW}{dt} = \frac{\vec{F} \bullet d\vec{r}}{dt} = \vec{F} \bullet \vec{v}$$

La potencia es una magnitud física de carácter técnico pues mide la eficacia de una máquina ya que el trabajo es una función que no depende del tiempo

2.1.10. Momento de una fuerza y Momento de un Par.

Cuando una fuerza actuando sobre un cuerpo produce un efecto de rotación definimos Momento de una fuerza con respecto a un punto, como el producto vectorial del vector distancia del punto a la fuerza por el propio vector fuerza:

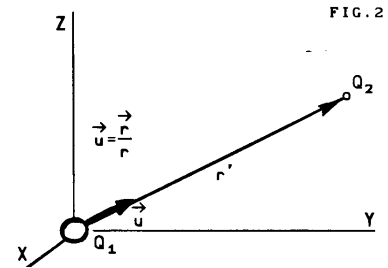
$$\vec{M} = \vec{r} \wedge \vec{F}$$

Si se trata de un par de fuerza, definido como dos fuerzas iguales, paralelas y contrarias que actúan sobre un cuerpo produciéndole un giro, se caracteriza por su

Momento, definiendo el Momento del Par de fuerza como el producto vectorial de una de una de las fuerzas por el vector que une el origen de ambas:

2.1.11. Campos Eléctricos y Magnéticos.

La fuerza eléctrica que mueve a una carga de prueba dentro del campo eléctrico se determina aplicando la Ley de Coulomb. Así, consideremos una carga Q_1 creadora de un campo y situada en el origen de coordenadas. Otra carga Q_2 positiva, de prueba, situada en un punto dado por el vector \vec{r} sufrirá una fuerza \vec{F} , por la acción del campo, dada por:



$$\vec{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{Q_1 Q_2}{r^2} \vec{u} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{Q_1 Q_2}{r^3} \vec{r}$$

donde $F > 0$ (positiva), la fuerza F es de repulsión si las cargas son del mismo signo y $F < 0$ (negativa), la fuerza F es de atracción si las cargas son de signo distinto. El vector:

$$\vec{u} = \frac{\vec{r}}{r}$$

es un vector unitario en la misma dirección y sentido que el vector r que une ambas cargas.

Definimos Intensidad del Campo Eléctrico \vec{E} en un punto o simplemente *Campo Eléctrico*, como la fuerza del campo por unidad de carga de prueba colocada en el punto.

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{Q'}$$

El Campo Eléctrico \vec{E} creado en un punto a una distancia r de una carga puntual creadora del campo, vendrá dado por la expresión vectorial:

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{Q'} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^3} \vec{r}$$

La introducción de este concepto de Campo permite interpretar la interacción de dos cargas eléctricas Q y Q' , como la acción del campo de una de ellas sobre la otra carga situada en su proximidad:

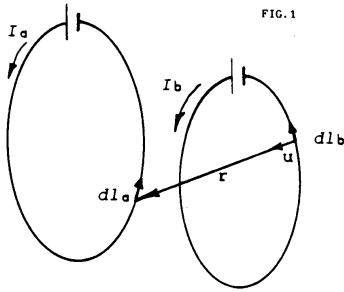
El campo eléctrico creado por cargas en reposo, o campo electrostático, como campo newtoniano de fuerza central, es conservativo o sea, la circulación del campo a lo largo de una trayectoria cerrada es nula, ecuación (1) y puede definirse, por tanto, una función escalar del punto llamada "*potencial eléctrico o electrostático*".

$$V = - \int_{\infty}^r \vec{E} \cdot d\vec{r}$$

Físicamente se interpreta el potencial en un punto r como "el trabajo realizado por una fuerza exterior opuesta a la del campo, para trasladar la unidad de carga positiva desde el infinito hasta el punto".

Se debe cumplir la condición $\vec{E} = -\vec{\nabla}V$ (el vector campo es igual al gradiente de potencial cambiado de signo), donde el signo negativo significa que el Campo Eléctrico tiene el mismo sentido que el de la disminución del potencial.

El Campo Magnético se manifiesta por las fuerzas magnéticas que se ejercen dos conductores arbitrarios, por los que circulan corrientes eléctricas estacionarias I_a e I_b , a semejanza de las fuerzas que se ejercen entre cargas eléctricas. Las fuerzas magnéticas entre conductores es un hecho experimental que estudió Ampère en el que la fuerza entre dos hilos rectos paralelos con corrientes I_a e I_b es proporcional a $I_a I_b / r$ siendo r la distancia entre ambos hilos.



En el caso más general que se describe en la Fig.1, la fuerza elemental que un elemento de corriente $I_a dl_a$ ejerce sobre otro elemento de corriente $I_b dl_b$ viene dado por:

$$d^2 \vec{F} = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{I_a d\vec{l}_a \wedge (I_b d\vec{l}_b \wedge \vec{u})}{r^2}$$

e integrando doblemente a lo largo de ambos circuitos, para determinar la fuerza total de interacción magnética entre los dos circuitos, resulta:

$$\vec{F}_{ab} = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot I_a I_b \iint \frac{d\vec{l}_a \wedge (d\vec{l}_b \wedge \vec{u})}{r^2}$$

siendo \vec{u} un vector unitario $\vec{u} = \vec{r}/r$ y el vector trazado desde el elemento $I_a d\vec{l}_a$ al elemento $I_b d\vec{l}_b$ y \vec{F}_{ab} la fuerza ejercida por A sobre B. La constante μ_0 es la "permeabilidad magnética" del vacío, depende de las unidades empleadas.

Esta fuerza magnética puede expresarse como la interacción entre la corriente I_a en el campo magnético creado por la corriente I_b en el punto de a . Este campo magnético se mide mediante la magnitud vectorial \vec{B} llamada "Vector Inducción Magnética" o "Densidad de Flujo Magnético". La ecuación anterior puede escribirse así:

$$\vec{F}_{ab} = I_a \int_a d\vec{l}_a \wedge \left[\frac{\mu_0}{4\pi} \cdot I_b \int_b \frac{d\vec{l}_b \wedge \vec{r}}{r^3} \right] = I_a \int_a d\vec{l}_a \wedge \vec{B}$$

siendo:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot I_b \int_b \frac{d\vec{l}_b \wedge \vec{r}}{r^3} \quad (*)$$

el vector Inducción Magnética \vec{B} debido al circuito b en la posición ocupada por el elemento de corriente $I_a d\vec{l}_a$ del circuito a , posición determinada por el vector \vec{r} . Dicho vector se dirige siempre desde la fuente al punto.

La ecuación (*) se conoce como "Ley de Biot y Savart" y su integración sólo puede realizarse analíticamente en aquellos circuitos que tengan formas geométricas sencillas.

2.1.12. Flujo Electrostático y Magnético.

Se define el flujo de un campo eléctrico en un punto, como el conjunto de líneas de campo que atraviesan la unidad de superficie colocada en el punto. El flujo de \vec{E} a través de la superficie elemental $d\vec{A}$ viene dado por:

$$d\Phi = \vec{E} \cdot d\vec{A} \quad \text{luego} \quad \Phi = \int_A \vec{E} \cdot d\vec{A} = \int_A E \cdot dA \cdot \cos \theta$$

En algunos casos, esta magnitud ayuda a calcular la expresión del campo electrostático (en todos los puntos del espacio) creado por algunas distribuciones de carga.

Al igual que en Electrostática, donde se utilizan las líneas de fuerza para describir el Campo Eléctrico, para un Campo Magnético, se definirán las líneas de fuerza magnética, líneas de flujo magnético o líneas de inducción, como líneas tangentes en cada punto a la dirección de vector \vec{B} en dicho punto. El "Flujo Magnético" Φ está relacionado con el Vector Inducción Magnética mediante la expresión integral:

$$\Phi = \int_s \vec{B} \cdot d\vec{A}$$

es decir: $\vec{B} = d\Phi / d\vec{A}$ el vector Inducción Magnética en un punto del campo magnético tiene la dirección y el sentido de la línea de fuerza que pasa por dicho punto y tiene por módulo, el flujo magnético que atraviesa la unidad de superficie colocada en el punto.

2.1.13. La Ecuación de las Ondas.

Para establecer la ecuación del movimiento ondulatorio, consideraremos un foco O origen de una perturbación armónica dada por la expresión:

$$y_0 = A \cdot \cos \omega t$$

donde la elongación y_0 representa el desplazamiento de la partícula origen desde la posición de equilibrio.

A una distancia x del punto origen, la onda llegará un cierto tiempo después, tiempo que vendrá dado por: $t' = x/v$ y la partícula P allí situada sufrirá una oscilación armónica idéntica a la de la partícula origen, si no hay pérdidas de energía, con un retraso de $t' = x/v$ respecto de la partícula origen. La perturbación ψ de dicha partícula vendrá dada por una ecuación de M.A.S. idéntica a la anterior, o sea:

$$y = A \cos w(t - t')$$

siendo t el tiempo contado desde el inicio de la perturbación en el origen y t' el tiempo transcurrido hasta iniciarse la perturbación de la partícula P.

$$y = A \cos w \left(t - \frac{x}{v} \right) = A \cos \frac{2p}{T} \left(t - \frac{x}{v} \right) = A \cos 2p \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{Tv} \right)$$

resultando:

$$\boxed{y = A \cos 2p \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{l} \right)}$$

que es la ecuación del Movimiento Ondulatorio que expresa la magnitud ψ de la perturbación de la partícula P, de coordenada x , en el instante t .

La ecuación de onda puede escribirse también así:

$$y = A \cos 2p(n - kx)$$

donde $v = l/T$ es la frecuencia y $\kappa = 1/\lambda$ es el número de ondas u ondas contenidas en una distancia unidad. Algunos textos llaman **Numero de ondas** a la expresión $2\pi/\lambda$ o número de ondas contenidas en la distancia 2π , siendo entonces la ecuación:

$$y = A \cos(w - kx)$$

Ambas ecuaciones se refieren a la perturbación ondulatoria a lo largo del eje X, sin embargo en cualquier otra dirección arbitraria r del espacio será:

$$y = A \cos 2p(n - kr)$$

Si consideramos las derivadas parciales primera y segunda respecto a x y a t resultará:

$$\begin{aligned} \frac{\partial y}{\partial x} &= 2pkA \cdot \sin 2p(n - kx) & \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} &= -4p^2 k^2 A \cdot \cos 2p(n - kx) \\ \frac{\partial y}{\partial t} &= -2pnA \cdot \sin 2p(n - kx) & \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} &= -4p^2 n^2 A \cdot \cos 2p(n - kx) \end{aligned}$$

y dividiendo miembro a miembro las segundas derivadas parciales:

$$\frac{\partial^2 y / \partial t^2}{\partial^2 y / \partial x^2} = \frac{-4p^2 n^2 A \cos 2p(n - kx)}{-4p^2 k^2 A \cos 2p(n - kx)} = \frac{n^2}{k^2} = \frac{l^2}{T^2} = v^2$$

o bien:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$$

ecuación diferencial del Movimiento Ondulatorio o ecuación de d'Alembert que expresa que toda variación de la magnitud ψ (elongación, presión, campo eléctrico o magnético, etc.) que la cumpla resulta ser una perturbación ondulatoria.

2.1.14. Ecuaciones de Maxwell.

1ª Ley de Maxwell.

Expresa la ley de Gauss que nos dice que el flujo del campo eléctrico a través de una superficie cerrada es igual a las cargas encerradas dentro de la superficie dividida por la constante dieléctrica. Matemáticamente es:

$$\Phi = \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{1}{\epsilon_0} \int_V dq = \frac{1}{\epsilon_0} \int_V \rho \cdot dV \quad \text{Forma integral}$$

donde V representa el volumen del recinto encerrado por la superficie gaussiana S .

La ley de Gauss puede expresarse en forma diferencial empleando el teorema de la divergencia, que es: $\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \int_V \nabla \cdot \vec{E} \cdot dV$ y aplicándolo a la expresión anterior resulta:

$$\int_V \nabla \cdot \vec{E} \cdot dV = \frac{1}{\epsilon_0} \int_V \rho \cdot dV \quad \text{luego se verificará:} \quad \boxed{\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}}$$

2ª Ley de Maxwell

El campo magnético, dado por el vector \vec{B} , es un campo solenoidal, es decir, que viene dado por líneas de campo cerradas sobre sí mismas. Esta condición se expresa por la ecuación:

$$\boxed{\nabla \cdot \vec{B} = 0}$$

es decir, la divergencia del vector Inducción Magnética es nula y por tanto la densidad de flujo magnético por unidad de volumen es nula, lo que se interpreta diciendo que para cualquier volumen cerrado del Campo Magnético, el flujo entrante es igual al flujo saliente, y por lo tanto, el flujo neto es nulo.

Por esta expresión, en el Campo Magnético no pueden existir ni fuentes ni sumideros de líneas de inducción magnética, porque estas líneas de campo son líneas cerradas que no empieza ni acaban.

El flujo de Inducción Magnética a través de cualquier superficie cerrada es nulo, pues todo flujo que entra también sale, por ello:

$$\oint_S \vec{B} \cdot d\vec{A} = 0 \quad \text{Forma integral}$$

3ª Ley de Maxwell

Expresa la Ley de Faraday-Lenz, que indica que se produce en un circuito eléctrico una corriente inducida cuando en dicho circuito se origina una variación del flujo magnético que lo atraviesa. Matemáticamente se expresa:

$$\mathbf{e} = -\frac{d\Phi}{dt}$$

que se interpreta diciendo que *"se genera una FEM inducida en el circuito cerrado siempre que se produzca una variación del flujo magnético y esta FEM es igual a la rapidez con que varía el flujo, con signo opuesto"*.

Ya que por definición, la FEM es: $\mathbf{e} = \oint \vec{E} \cdot d\vec{r}$, la circulación en trayectoria cerrada del campo eléctrico inducido \vec{E} en el conductor móvil, siendo $d\vec{r}$ un elemento de dicho circuito y como este circuito es atravesado por un flujo dado por: $\Phi = \int_S \vec{B} \cdot d\vec{A}$, la ecuación de Faraday se escribe:

$$\mathbf{e} = \oint_C \vec{E} \cdot d\vec{r} = -\frac{d}{dt} \int_S \vec{B} \cdot d\vec{A}$$

siendo C cualquier curva cerrada (circuito o no-circuito) y S la superficie limitada por ella. Si no existen fuentes en el circuito que consideramos, la corriente que se genera es igual a la F.E.M. inducida dividida por la resistencia óhmica del circuito., igual que si existiera una batería del mismo voltaje y polaridad que la F.E.M. inducida.

Para poner la Ley de Faraday en forma diferencial, aplicaremos el Teorema de Stokes, para transformar una integral curvilínea en una integral de superficie, así el primer miembro se transformará en:

$$\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{r} = \int_S (\nabla \wedge \vec{E}) \cdot d\vec{A} \quad \text{Forma integral}$$

resultando para la ley de Faraday:

$$\int_S (\nabla \wedge \vec{E}) \cdot d\vec{A} = -\int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{A}$$

suponiendo que la trayectoria cerrada de integración C es estacionaria los integrandos de ambos miembros serán idénticos y resultará:

$$\boxed{\nabla \wedge \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}}$$

4ª Ecuación de Maxwell.

La cuarta ecuación de Maxwell corresponde a la Ley de Ampère de la circulación o *Teorema Circuital* y establece que la circulación del vector Inducción Magnética \vec{B} , creado por un conjunto de corrientes, a lo largo de una trayectoria cerrada C , es igual al producto de la permeabilidad magnética μ_0 por la suma algebraica de las intensidades de

corriente que atraviesan la superficie S arbitraria, limitada por la curva cerrada. Se expresa matemáticamente mediante la ecuación:

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \int_S \vec{J} \cdot d\vec{S} = \mu_0 \sum I_i = \mu_0 I$$

En consecuencia el Campo Magnético no es conservativo y no podemos definir en cada punto un potencial escalar que nos permita completar el estudio del campo.

Si el circuito incluye algún condensador, la variación del flujo eléctrico por unidad de tiempo que se produce en el condensador, es generada por una “corriente” (variación de carga por unidad de tiempo) a través del condensador que es la que Maxwell llamó *corriente de desplazamiento*.

En el condensador se produce una variación del flujo magnético $\epsilon_0 \cdot d\Phi_E/dt$, producida por la corriente de desplazamiento $I_d = \epsilon_0 \cdot d\Phi_E/dt$ que se incluye, por ello en la Ley Circuital de Ampère, tal como:

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 (I + I_d) = \mu_0 \left(I + \epsilon_0 \frac{d\Phi_E}{dt} \right) \quad (*)$$

con lo cual la ley se generaliza a todas las posibles situaciones. Esta ecuación representa una forma de la *Cuarta Ecuación de Maxwell del Campo Electromagnético*.

Consecuencia de esta generalización: se llega a la conclusión de que un campo magnético no sólo es creado por una corriente eléctrica I sino que también puede ser creado por un campo eléctrico que varíe con el tiempo.

Como la corriente real puede ponerse en función de la Densidad de Corriente:

$$I = \int_S \vec{J} \cdot d\vec{S}$$

y considerando igualmente el flujo eléctrico se puede expresar:

$$\Phi_E = \int_S \vec{E} \cdot d\vec{S}$$

su variación con el tiempo se expresará:

$$\frac{d\Phi_E}{dt} = \int_S \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \cdot d\vec{S}$$

por ello la corriente de desplazamiento, ideada por Maxwell, dada por la anterior expresión puede escribirse:

$$I_d = \epsilon_0 \frac{d\Phi_E}{dt} = \epsilon_0 \int_S \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \cdot d\vec{S}$$

y la ecuación (*) finalmente quedará de la forma siguiente:

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \left(\int_S \vec{J} \cdot d\vec{S} + \epsilon_0 \int_S \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \cdot d\vec{S} \right) = \mu_0 \int_S \left(\vec{J} + \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) \cdot d\vec{S}$$

que es la forma integral de la Cuarta Ecuación de Maxwell.

Si aplicamos el Teorema de Stokes:

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \int_S (\nabla \wedge \vec{B}) \cdot d\vec{S}$$

se obtiene la expresión integral siguiente:

$$\int_S (\nabla \wedge \vec{B}) \cdot d\vec{S} = \mu_0 \int_S \left(\vec{J} + \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) \cdot d\vec{S}$$

e igualando los integrandos:

$$\boxed{\nabla \wedge \vec{B} = \mu_0 \left(\vec{J} + \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right)}$$

forma diferencial de la Cuarta Ecuación de Maxwell del Campo Electromagnético.

2.1.15. Ondas electromagnéticas.

Se pueden deducir las propiedades de las ondas electromagnéticas, a partir de las ecuaciones de Maxwell, que recordaremos a continuación:

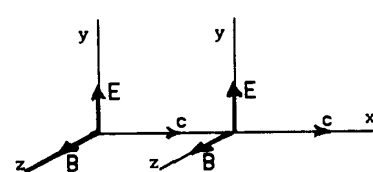
$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{Q}{\epsilon_0} \quad (1) \quad \oint \vec{B} \cdot d\vec{A} = 0 \quad (2)$$

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{s} = -\frac{d\Phi_m}{dt} \quad (3) \quad \oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = \mu_0 I + \epsilon_0 \mu_0 \frac{d\Phi_e}{dt} \quad (4)$$

Supongamos que la onda electromagnética es una onda plana, es decir, que sólo viaja en una dirección. Supongamos que viaja en la dirección del eje X, el campo eléctrico E está en la dirección Y y el campo magnético B en la dirección Z.

Además los campos E y B son funciones de x y t y no dependen de las otras coordenadas y , z . Utilizando la tercera y cuarta ecuación de Maxwell, considerando que en el espacio vacío, $Q=0$ e $I=0$, resultará:

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{s} = -\frac{d\Phi_m}{dt} \quad \text{y} \quad \oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = \epsilon_0 \mu_0 \frac{d\Phi_e}{dt}$$



y aplicando el teorema de Stokes y desarrollando las expresiones resultantes, como se demuestra a continuación, llegamos a:

A partir de la 3ª y 4ª ecuaciones de Maxwell:

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{s} = -\frac{d\Phi_m}{dt} \quad \text{y} \quad \oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = \mathbf{e}_0 \mathbf{m}_0 \frac{d\Phi_e}{dt}$$

que se escribirán así: $\oint \vec{E} \cdot d\vec{s} = -\frac{\partial}{\partial t} \int_s \vec{B} \cdot d\vec{A}$ y $\oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = \mathbf{e}_0 \mathbf{m}_0 \int_s \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \cdot d\vec{A}$

aplicamos el teorema de Stokes, que para el vector genérico \vec{T} se escribe:

$$\oint \vec{T} \cdot d\vec{l} = \int_s (\nabla \wedge \vec{T}) \cdot d\vec{A}$$

las ecuaciones anteriores quedarán escritas así:

$$\int_s (\nabla \wedge \vec{E}) \cdot d\vec{A} = -\frac{\partial}{\partial t} \int_s \vec{B} \cdot d\vec{A}$$

$$\int_s (\nabla \wedge \vec{B}) \cdot d\vec{A} = \mathbf{e}_0 \mathbf{m}_0 \int_s \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \cdot d\vec{A}$$

e igualando los integrandos, por ser integrales de superficie extendidas a la misma superficie, resultará:

$$\nabla \wedge \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad \text{y} \quad \nabla \wedge \vec{B} = \mathbf{e}_0 \mathbf{m}_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

y desarrollando los rotacionales para $\vec{E} = E_y \vec{j}$ y $\vec{B} = B_z \vec{k}$ resulta:

$$\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & E_y & 0 \end{vmatrix} = \vec{i} \left(-\frac{\partial E_y}{\partial z} \right) + \vec{k} \left(\frac{\partial E_y}{\partial x} \right) = -\left(\frac{\partial B_z}{\partial t} \right) \vec{k} \Rightarrow \frac{\partial E_y}{\partial x} = -\frac{\partial B_z}{\partial t}$$

$$\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & 0 & B_z \end{vmatrix} = \vec{i} \left(\frac{\partial B_z}{\partial y} \right) - \vec{j} \left(\frac{\partial B_z}{\partial x} \right) = \mathbf{e}_0 \mathbf{m}_0 \left(\frac{\partial E_y}{\partial t} \right) \vec{j} \Rightarrow \frac{\partial B_z}{\partial x} = -\mathbf{e}_0 \mathbf{m}_0 \frac{\partial E_y}{\partial t}$$

ya que \vec{E} y \vec{B} sólo son funciones de x y t .

Prescindiendo de los subíndices de E y B resultará finalmente:

$$\frac{\partial E}{\partial x} = -\frac{\partial B}{\partial t} \quad \text{y} \quad \frac{\partial B}{\partial x} = -\mathbf{e}_0 \mathbf{m}_0 \frac{\partial E}{\partial t}$$

si derivamos la primera con respecto a x y sustituimos la segunda resultará:

$$\frac{\partial^2 E}{\partial x^2} = -\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial B}{\partial t} \right) = -\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial B}{\partial x} \right) = -\frac{\partial}{\partial t} \left(-\mathbf{e}_0 \mathbf{m}_0 \frac{\partial E}{\partial t} \right)$$

o sea:

$$\frac{\partial^2 E}{\partial x^2} = \mathbf{e}_0 \mathbf{m}_0 \frac{\partial^2 E}{\partial t^2}$$

Análogamente, derivando la segunda ecuación de las (5) con respecto a x y sustituyendo la primera, resultará:

$$\frac{\partial^2 B}{\partial x^2} = -\mathbf{e}_0 \mathbf{m}_0 \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial E}{\partial t} \right) = -\mathbf{e}_0 \mathbf{m}_0 \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial E}{\partial x} \right) = -\mathbf{e}_0 \mathbf{m}_0 \frac{\partial}{\partial t} \left(-\frac{\partial B}{\partial t} \right)$$

o sea:

$$\frac{\partial^2 B}{\partial x^2} = \mathbf{e}_0 \mathbf{m}_0 \frac{\partial^2 B}{\partial t^2}$$

Las ecuaciones anteriores pueden escribirse así:

$$\frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = \frac{1}{\mathbf{e}_0 \mathbf{m}_0} \frac{\partial^2 E}{\partial x^2} \quad \text{y} \quad \frac{\partial^2 B}{\partial t^2} = \frac{1}{\mathbf{e}_0 \mathbf{m}_0} \frac{\partial^2 B}{\partial x^2}$$

Estas ecuaciones son análogas a la llamada "*ecuación general de la onda*", que tiene la forma:

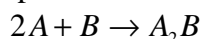
$$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$$

donde v es la velocidad de la onda y f es la amplitud de la perturbación de la onda.

2.2. Aplicaciones a la Química.

2.2.1. Cinética de reacciones.

La rapidez o velocidad de una reacción química se expresa en términos de la concentración de uno de los reactivos o de los productos involucrados en la reacción general. La rapidez se define como el índice de cambio con el tiempo, de la concentración de un reactivo o de un producto. Si tomamos la reacción general:



la rapidez o velocidad de desaparición del reactivo A con respecto al tiempo, puede expresarse por la derivada siguiente:

$$-\frac{d[A]}{dt}$$

donde el signo negativo ($-$), indica que la concentración de A , $[A]$, disminuye conforme transcurre el tiempo de la reacción.

De manera alternativa, la rapidez de la reacción puede expresarse en términos de desaparición del reactivo B , por la derivada siguiente:

$$-\frac{d[B]}{dt}$$

En términos de rapidez de formación del producto de la reacción A_2B , la rapidez la podemos expresar por la derivada siguiente:

$$+\frac{d[A_2B]}{dt}$$

donde, en este caso el signo positivo (+) indica que la concentración de A_2B aumenta al transcurrir el tiempo de la reacción.

Resulta evidente que las velocidades expresadas por las ecuaciones (1), (2) y (3) no son iguales, ya que A desaparecerá con el doble de rapidez con que disminuye B se forma A_2B , por consiguiente, podemos expresar la rapidez de esta reacción por medio de cualquiera de las derivadas siguientes:

$$V = -\frac{d[A]}{dt} = -2\frac{d[B]}{dt} = 2\frac{d[A_2B]}{dt}$$

La rapidez o velocidad de la reacción tiene, pues, unidades de concentración por unidad de tiempo.

La expresión matemática que relaciona la velocidad de una reacción con las concentraciones de los reactivos, recibe el nombre de ecuación de velocidad o *Ley diferencial de la Velocidad* que tiene casi siempre la forma general:

$$\text{Velocidad} = K(T) \cdot \text{Función de concentración de reactivos}$$

y para una reacción de carácter general será:

$$V = K \cdot [A]^a [B]^b [C]^c \dots$$

La constante K que interviene en ella, se denomina *coeficiente de velocidad*, *constante de velocidad* o *factor de las concentraciones de los reactivos* y depende considerablemente de la temperatura, siendo constante únicamente para cada valor concreto de la temperatura y para cada reacción determinada.

Si suponemos que la velocidad es proporcional a la primera potencia de la concentración de A e independiente de las concentraciones de otras sustancias, entonces la ley de velocidades puede escribirse de la siguiente manera:

$$-\frac{d[A]}{dt} = K \cdot [A]$$

Puesto que la concentración de A se eleva a la primera potencia en la ley de velocidades, se dice que la reacción es de *primer orden* en A . Alternativamente, puede descubrirse que la velocidad de reacción depende de la primera potencia de $[A]$ y del cuadrado de la $[B]$, en este caso la ley de velocidades se escribirá así:

$$-\frac{d[A]}{dt} = K' \cdot [A] \cdot [B]^2$$

en donde $K' \neq K$ y se dice que esta reacción es de primer orden en A y de segundo orden en B . También sería posible que se descubriera experimentalmente que la rapidez depende de la tercera potencia de la concentración de A y de la segunda potencia de la concentración de B y la ley de velocidades se escribirá así:

$$-\frac{d[A]}{dt} = K'' \cdot [A]^3 \cdot [B]^2$$

donde K'' es la constante de velocidad específica y se dice que la reacción es de tercer orden en A y de segundo orden en B . Si se encuentra que la velocidad de la reacción es independiente tanto de A como de B , la reacción se dice que es de orden cero en A y en B y la ley de velocidades es:

$$-\frac{d[A]}{dt} = K''' \cdot [A]^0 \cdot [B]^0$$

Si la reacción $A + B \rightarrow \text{productos}$

es de segundo orden la velocidad de desaparición de A viene dada por:

$$-\frac{d[A]}{dt} = K \cdot [A]^2 \quad [A] = [B] \quad \rightarrow \quad V = K \cdot [A] \cdot [B]$$

e integrando entre condiciones iniciales de $[A]_0$ para $t=0$ y las condiciones finales de $[A]$ para el tiempo t , resulta:

$$-\int_{[A]_0}^{[A]} \frac{d[A]}{[A]^2} = K \int_0^t dt \quad \rightarrow \quad \int_{[A]_0}^{[A]} [A]^{-2} d[A] = -K \int_0^t dt$$

$$[-[A]^{-1}]_{[A]_0}^{[A]} = \left[\frac{-1}{[A]} \right]_{[A]_0}^{[A]} = \frac{1}{[A]_0} - \frac{1}{[A]} = -K \cdot t$$

$$\frac{1}{[A]} = \frac{1}{[A]_0} + K \cdot t$$

Si tomamos a como concentración inicial de A y x como concentración que ha reaccionado durante el tiempo t , la expresión anterior se escribirá así:

$$-\frac{d(a-x)}{dt} = K(a-x)^2 = \frac{dx}{dt}$$

E integrando entre una situación inicial para $t=0$ donde $x=0$ y una situación final para tiempo t y concentración x , resulta:

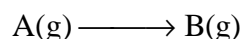
$$\int_0^x \frac{dx}{(a-x)^2} = \int_0^t K \cdot dt \quad \Rightarrow \quad \left[\frac{1}{a-x} \right]_0^x = K \cdot t \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{a-x} = \frac{1}{a} + K \cdot t$$

y despejando la constante K resulta:

$$K = \frac{1}{t} \left[\frac{x}{a(a-x)} \right]$$

2.2.2. Termoquímica. Cálculos de calores de reacción.

Las capacidades térmicas de reactivos y productos se pueden usar para calcular el cambio de entalpía para una reacción dada, a cierta temperatura T_2 , a partir del conocimiento del cambio de entalpía para la reacción a otra temperatura T_1 . Un cálculo de este tipo es muy útil, puesto que elimina la necesidad de determinar experimentalmente ΔH para la reacción a cada temperatura. Veamos como se lleva a cabo este cálculo. Para ello, utilicemos la reacción:



A T_1 , el cambio de entalpía medio es ΔH_1 . A continuación desearíamos conocer el cambio de entalpía a la temperatura T_2 , cuando $T_2 > T_1$. Este resultado se puede obtener tomando en consideración el proceso cíclico que se muestra en la fig.2.:

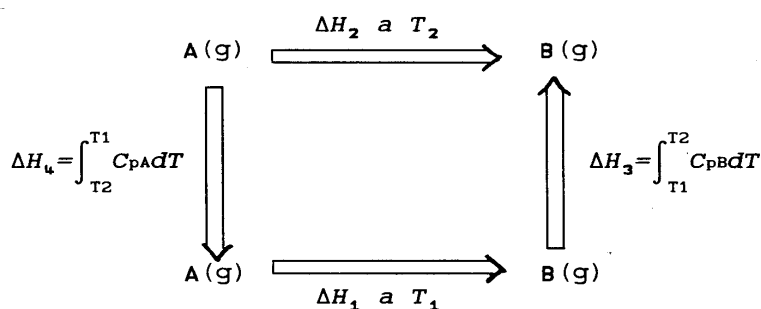
Las etapas de este proceso, recorrido en sentido contrario al de las agujas del reloj de A(g) a T_1 en torno a la trayectoria cerrada y de regreso a este punto, son:

1) La reacción $A(g) \longrightarrow B(g)$ a T_1 se lleva a cabo y cambio de entalpía es ΔH_1 .

2) A continuación, el compuesto B(g) se eleva de T_1 a T_2 y el cambio de entalpía para este proceso está dado por la ecuación:

$$\Delta H_3 = \int_{T_1}^{T_2} C_{P(B)} dT$$

en donde $C_{P(B)}$ es la capacidad térmica a P=cte del compuesto B.



3) A continuación, se lleva a cabo la inversa de la reacción $A(g) \longrightarrow B(g)$ a T_2 . Entonces el cambio de entalpía para esta etapa es el valor negativo de la reacción directa, ΔH_2 .

4) Finalmente, el compuesto A disminuye su temperatura de T_2 a T_1 , volviendo a nuestro punto de partida. El cambio de entalpía es:

$$\Delta H_4 = \int_{T_2}^{T_1} C_{P(A)} dT$$

A partir de la Primera Ley, $\sum \Delta H_i = 0$ para una trayectoria cerrada y, para el ejemplo anterior, se tiene:

$$\sum_{i=1}^4 \Delta H_i = \Delta H_1 + (-\Delta H_2) + \Delta H_3 + \Delta H_4 = 0$$

y al utilizar los valores de ΔH_3 y ΔH_4 de las etapas (2) y (3), se obtiene:

$$\Delta H_2 = \Delta H_1 + \int_{T_1}^{T_2} C_{P(B)} dT + \int_{T_2}^{T_1} C_{P(A)} dT$$

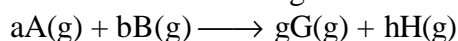
$$\Delta H_2 = \Delta H_1 + \int_{T_1}^{T_2} C_{P(B)} dT - \int_{T_1}^{T_2} C_{P(A)} dT$$

$$\Delta H_2 = \Delta H_1 + \int_{T_1}^{T_2} (C_{P(B)} - C_{P(A)}) dT$$

o bien:

$$\Delta H_2 = \Delta H_1 + \int_{T_1}^{T_2} \Delta C_P dT$$

donde $\Delta C_P = C_{P(B)} - C_{P(A)}$, o sea, que ΔC_P es la diferencia en las capacidades térmicas del producto y el reactivo. En el caso de la reacción general:



se calcula ΔH_2 a T_2 a partir del valor conocido de ΔH_1 a T_1 y las capacidades térmicas $C_{P(A)}$, $C_{P(B)}$, $C_{P(G)}$, $C_{P(H)}$ de las sustancias A, B, G, y H, respectivamente, a partir de la ecuación:

$$\Delta H_2 = \Delta H_1 + \int_{T_1}^{T_2} [(gC_{P(G)} + hC_{P(H)}) - (aC_{P(A)} + bC_{P(B)})] dt$$

2.3. Aplicaciones a la Biología.

2.3.1. Leyes de la Desintegración Radiactiva.

La radiactividad es un fenómeno espontáneo y aleatorio. El núclido que emite radiación en un instante determinado, puede ser cualquiera de los contenidos en la muestra. Ningún núclido presenta características especiales sobre otros, que determinen su desintegración anterior o posterior a otros núclidos. Todos los núclidos tienen la misma probabilidad de desintegrarse en un determinado instante, el proceso obedece leyes estadísticas.

A partir de las observaciones experimentales, Rutherford y Soddy sugirieron que los átomos de los elementos radiactivos sufren una desintegración espontánea con emisión de partículas α o β y formación de átomos de un nuevo elemento. La intensidad de la radiactividad que, en su momento, se llamó *actividad*, es proporcional al número de átomos que se desintegran por unidad de tiempo.

El número de desintegraciones, dN , que se producen en un intervalo infinitamente pequeño de tiempo, dt , para poder considerar el proceso como uniforme, depende de dicho intervalo de tiempo, dt , y del número de núclidos existente en la muestra sin desintegrar, N , en dicho instante, es decir:

$$dN \propto N \cdot dt$$

e introduciendo una constante de proporcionalidad λ , resulta:

$$dN = -\lambda \cdot N \cdot dt \quad (\#)$$

donde el signo negativo de la constante nos indica que ambas diferenciales son opuestas, o sea, que N decrece a medida que transcurre t .

La constante λ se llama *constante de desintegración* o simplemente constante radiactiva y representa las desintegraciones que se producen por núcleo y por segundo, o velocidad de desintegración por núcleo de sustancia:

$$\lambda = -\frac{dN}{dt} \cdot \frac{1}{N}$$

aunque, por tratarse de un proceso aleatorio, debe interpretarse como la probabilidad de que se desintegre un núclido en la unidad de tiempo. La ecuación (#) expresa la ley fundamental de la desintegración radiactiva.

Si integramos esta ecuación puesta en la forma:

$$\frac{dN}{N} = -\lambda \cdot dt$$

entre los límites $t=0$, origen de tiempos, en el cual la muestra no se ha desintegrado nada y por tanto $N=N_0$, hasta t en el cual el número de núclidos sin desintegrar es N , resulta:

$$\int_{N_0}^N \frac{dN}{N} = -\lambda \int_0^t dt \quad \longrightarrow \quad [\ln N]_{N_0}^N = -\lambda [t]_0^t$$

y desarrollando resulta: $\ln N - \ln N_0 = -\lambda t \quad \longrightarrow \quad \ln \frac{N}{N_0} = -\lambda t$

o sea:

$$\boxed{N = N_0 e^{-\lambda t}}$$

Cuando la variable t aumenta en progresión aritmética, el número de átomos del elemento original N disminuye en progresión geométrica.

El periodo de semidesintegración o semivida se define como el tiempo que ha de transcurrir para que el número inicial de núclidos de la muestra radiactiva se reduzca a la mitad, por desintegración de la otra mitad, convirtiéndose en otros núclidos que, estables o inestables, permanecerán presentes en la muestra.

Si aplicamos la ecuación anterior a esta definición, y llamamos T al periodo de semidesintegración, resulta:

$$\frac{N_0}{2} = N_0 e^{-\lambda T} \longrightarrow \frac{1}{2} = e^{-\lambda T}$$

y tomando logaritmos neperianos, tendremos:

$$-\ln 2 = -\lambda T \longrightarrow T = \frac{\ln 2}{\lambda} = \frac{0.693}{\lambda}$$

Por ser un fenómeno nuclear, ninguna acción física o química conocida puede alterar el periodo de semidesintegración y por tanto, puede utilizarse, mediante análisis cuantitativo de los productos de la reacción de desintegración, como reloj para determinar las edades de las muestras. Tal es el caso de la datación de fósiles por el método del Carbono-14.

La vida media de un elemento radiactivo se define como el valor medio de los tiempos de vida de todos los núclidos.

Cualquier núclido puede desintegrarse en cualquier momento, por ser un proceso al azar. Igual probabilidad tiene un determinado núclido de desintegrarse pronto o tarde, al principio o al final, y ningún núclido tiene prioridad alguna de desintegrarse sobre la que tenga otro. Un núclido puede tener una vida de $t=0$ (el primero que se desintegra una vez preparada la muestra) y otro núclido puede tener una vida media de $t=\infty$ (el último en desintegrarse), y en este intervalo están comprendidas las vidas de todos los demás núclidos. Para hallar la media de los tiempos de vida de todos los núclidos sumaremos las vidas de todos ellos y la dividiremos por el número total de núclidos:

$$\bar{t} = \frac{1}{N_0} \int_0^{\infty} t \cdot dN$$

donde dN representa el número de núclidos que tienen una vida de t y se desintegran en el intervalo comprendido entre t y $t+dt$.

Para resolver la ecuación anterior, diferenciamos la ecuación $N = N_0 e^{-\lambda t}$ resultando:

$$dN = N_0 e^{-\lambda t} (-\lambda) dt = -\lambda N_0 e^{-\lambda t} dt$$

y sustituyendo en \bar{t} tendremos:

$$\bar{t} = \frac{1}{N_0} \int_0^{\infty} t \cdot dN = \frac{1}{N_0} \int_0^{\infty} -\lambda t N_0 e^{-\lambda t} dt = -\lambda \int_0^{\infty} t \cdot e^{-\lambda t} dt$$

los límites de integración de la integral, lógicamente cambian al cambiar la variable en el integrando, pues: $t=0$ para $N=N_0$ (momento inicial) y $t=\infty$ para $N=0$ (momento final).

Si resolvemos la integral por partes: $\int u \cdot dv = u \cdot v - \int v \cdot du$

$$\text{haciendo:} \quad \left. \begin{array}{l} u = t \\ dv = e^{-\lambda t} dt \end{array} \right\} \longrightarrow \left. \begin{array}{l} du = dt \\ v = -\frac{1}{\lambda} e^{-\lambda t} \end{array} \right\} \text{ resulta}$$

$$t = -\lambda \int_{\infty}^0 t \cdot e^{-\lambda t} dt = -\lambda \left[-\frac{1}{\lambda} t e^{-\lambda t} + \int \frac{1}{\lambda} e^{-\lambda t} dt \right]_{\infty}^0 = -\lambda \left[-\frac{1}{\lambda} t e^{-\lambda t} + \frac{1}{\lambda} \int e^{-\lambda t} dt \right]_{\infty}^0 \quad (*)$$

La integral $\int e^{-\lambda t} dt$ se resuelve mediante el siguiente cambio de variable: $-\lambda t = u$ diferenciando, resulta $-\lambda dt = du$ y $dt = du / -\lambda$ y sustituyendo:

$$\int e^{-\lambda t} dt = \int e^u \frac{du}{-\lambda} = -\frac{1}{\lambda} \int e^u du = -\frac{1}{\lambda} e^u = -\frac{1}{\lambda} e^{-\lambda t}$$

y sustituyendo la integral ya resuelta en la expresión anterior (*)

$$\begin{aligned} t &= -\lambda \left[-\frac{1}{\lambda} t e^{-\lambda t} + \frac{1}{\lambda} \left(-\frac{1}{\lambda} e^{-\lambda t} \right) \right]_{\infty}^0 = -\lambda \left[-\frac{1}{\lambda} t e^{-\lambda t} - \frac{1}{\lambda^2} e^{-\lambda t} \right]_{\infty}^0 = \dots \\ &= -\lambda \left[-\frac{1}{\lambda} 0 \cdot e^{-\lambda \cdot 0} - \frac{1}{\lambda^2} e^{-\lambda \cdot 0} - \left(-\frac{1}{\lambda} \infty \cdot e^{-\lambda \cdot \infty} - \frac{1}{\lambda^2} e^{-\lambda \cdot \infty} \right) \right] = -\lambda \left[0 - \frac{1}{\lambda^2} - (0 - 0) \right] = \frac{1}{\lambda} \end{aligned}$$

resultando finalmente:

$$t = \frac{1}{\lambda}$$

Es decir, la vida media de un núclido es la inversa de la constante radiactiva, y puede expresarse de la siguiente forma:

$$t = \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{0.693/T} = \frac{T}{0.693} = 1.443 \cdot T$$

o bien:

$$T = 0.693 \cdot t$$

3. LAS FUNCIONES EN LAS CIENCIAS SOCIALES.

Las aplicaciones más habituales del Análisis a las ciencias sociales vienen del estudio de funciones de densidad de distribuciones, ya que es la Estadística y Cálculo de Probabilidades la parte de la Matemática que más aplicaciones tiene en las Ciencias Sociales. El estudio de dichas funciones supone continuidad, derivabilidad, integración, etc.

Veamos cuales son las funciones de densidad más comunes:

Normal:
$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\frac{(x-\mu)^2}{\sigma^2}} \quad \forall x \in \mathfrak{R}$$

Exponencial:
$$f(x) = \lambda e^{-\lambda x} \quad \forall x > 0$$

Gamma:
$$f(x) = \frac{a^p}{\Gamma(p)} e^{-ax} x^{p-1} \quad \forall x > 0$$

Beta:
$$f(x) = \frac{1}{B(p, q)} x^{p-1} (1-x)^{q-1} \quad 0 < x < 1$$

χ^2
$$f(x) = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} x^{\frac{n}{2}-1} e^{-\frac{x}{2}} \quad \forall x \in \mathfrak{R}$$

t de Student:
$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{n} B\left(\frac{1}{2}, \frac{n}{2}\right)} \left(1 + \frac{x^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}} \quad \forall x \in \mathfrak{R}$$

F de Snedecor
$$f(x) = \frac{\left(\frac{m}{n}\right)^{\frac{m}{2}}}{B\left(\frac{m}{2}, \frac{n}{2}\right)} x^{\frac{m}{2}-1} \left(\frac{mx}{n} + 1\right)^{-\frac{m+n}{2}} \quad \forall x > 0$$

Otras aplicaciones que nos podemos encontrar, aparte de las que se derivan de la Estadística y Probabilidad, es el estudio de gráficas de funciones. Dichas gráficas nos las podemos encontrar en Demografía, Geografía, Sociología, etc. Algunas de esas funciones reciben el nombre de Curvas de Crecimiento, siendo las más conocidas:

- Función de Crecimiento Ilimitado $f(x) = a \cdot e^{bx} \quad a, b > 0 \quad x > 0$
- Función de Decrecimiento Limitado $f(x) = a \cdot e^{-bx} \quad a, b > 0 \quad x > 0$
- Función de Crecimiento Limitado $f(x) = a(1 - e^{-bx}) \quad a, b, c > 0 \quad x > 0$
- Función de Crecimiento Logístico $f(x) = \frac{C}{1 + a \cdot e^{-bx}} \quad a, b, c > 0 \quad x > 0$

La función exponencial de crecimiento ilimitado se emplearía en el caso de crecimiento de poblaciones donde no hay límite para el crecimiento y tampoco hay restricciones del medio ambiente. Pero esa es una situación un tanto utópica. Cuando el hábitat impone limitaciones al crecimiento, esta claro que la población no tendrá un crecimiento ilimitado, por tanto, llegará un momento en el que el tamaño se estabilizará. La función más habitual para describir este proceso es la función logística.

La ecuación logística también tiene otras aplicaciones, aparte del crecimiento de poblaciones. Las características de la función logística son que para valores pequeños de la variable, la función se parece a la exponencial. En cambio, para valores muy grandes de la variable, la función se acerca a un cierto límite.

Un ejemplo de aplicación sería la difusión de información a través de una población. La información puede ser un rumor, trozo de noticia o cualquier otro. Si inicialmente la noticia la conoce un cierto porcentaje de la población, al principio el crecimiento será exponencial para luego irse aproximando al valor 1 sin superarlo.

4. LAS FUNCIONES EN LA ECONOMÍA.

4.1. Funciones en Economía.

Vamos a describir un modelo de equilibrio estático. El problema más sencillo es considerar un mercado con un único producto. El modelo tendrá tres variables:

Q_d = Cantidad demandada del Producto.

Q_s = Cantidad Ofertada del Producto.

P = Precio del Producto.

La condición de equilibrio será:

$$Q_d - Q_s = 0$$

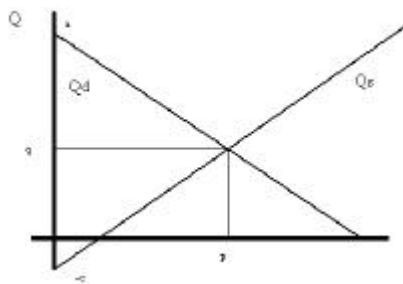
que significa que se alcanzará el equilibrio cuando la oferta y la demanda sean la misma.

Teniendo en cuenta que tanto la oferta como la demanda dependen del precio del producto, podemos suponer que Q_d es una función lineal de P y decreciente (evidentemente, a mayor precio menor demanda) y que Q_s es también lineal de P y creciente. Así pues, tenemos:

$$Q_d = Q_s \quad Q_d = a - bP \quad Q_s = -c + dP \quad \text{con } a, b, c \text{ y } d \text{ positivos.}$$

OBS Hemos supuesto que el término independiente de Q_s es negativo, $-c$, ya que habitualmente no habrá oferta a menos que el precio inicial sea adecuado.

Si representamos estas funciones tenemos:



El punto (p,q) nos da la solución que buscábamos, que es la solución a las tres ecuaciones planteadas, y lo llamaremos punto de equilibrio.

$$\text{Resolviendo tenemos que } p = \frac{a+b}{c+d} \text{ y que } q = \frac{ad-bc}{b+d}$$

Si al modelo que hemos descrito le añadimos un segundo producto, las ecuaciones a plantear cambian, siendo ahora:

$$\left. \begin{aligned} Q_{d_1} &= Q_{s_1} \\ Q_{d_1} &= a_0 + a_1 P_1 + a_2 P_2 \\ Q_{s_1} &= b_0 + b_1 P_1 + b_2 P_2 \end{aligned} \right\} \quad \left. \begin{aligned} Q_{d_2} &= Q_{s_2} \\ Q_{d_2} &= a'_0 + a'_1 P_1 + a'_2 P_2 \\ Q_{s_2} &= b'_0 + b'_1 P_1 + b'_2 P_2 \end{aligned} \right\}$$

Y su resolución nos da:

$$P_1 = \frac{(a_2 - b_2)(a'_0 - b'_0) - (a_0 - b_0)(a'_2 - b'_2)}{(a_1 - b_1)(a'_2 - b'_2) - (a_2 - b_2)(a'_1 - b'_1)} \quad P_2 = \frac{(a_0 - b_0)(a'_1 - b'_1) - (a_1 - b_1)(a'_0 - b'_0)}{(a_1 - b_1)(a'_2 - b'_2) - (a_2 - b_2)(a'_1 - b'_1)}$$

que sólo tendrá sentido si el denominador es no nulo.

Una vez visto el caso para un solo producto y para dos productos, podemos generalizar el proceso para n productos.

$$\left. \begin{aligned} Q_{d_i} &= Q_{s_i} \\ Q_{d_i} &= a_{i0} + a_{i1} P_1 + a_{i2} P_2 + \dots + a_{in} P_n \\ Q_{s_i} &= b_{i0} + b_{i1} P_1 + b_{i2} P_2 + \dots + b_{in} P_n \end{aligned} \right\} \quad i = 1, \dots, n$$

4.2. Derivadas en Economía.

Sea q la cantidad de un bien, y llamemos función de demanda a aquella función que relaciona la cantidad que se demanda de un bien con respecto al precio, $\pi(q)$.

a) Elasticidad.

La noción de elasticidad de la demanda con respecto al precio, que recibe el nombre de elasticidad-precio, mide la variación relativa de la cantidad demandada con respecto al precio. Si suponemos que la función de demanda, π , es continua y derivable, representamos la elasticidad como:

$$E = \lim_{\Delta p \rightarrow 0} \frac{\frac{\Delta q}{q}}{\frac{\Delta p}{p}}$$

Si tenemos en cuenta que la cantidad demandada se mueve en sentido inverso al precio, el límite anterior se ve afectado con el signo negativo para que la elasticidad resulte positiva. Entonces:

$$E = - \lim_{\Delta P \rightarrow 0} \frac{\frac{\Delta q}{q}}{\frac{\Delta P}{P}} = - \lim_{\Delta P \rightarrow 0} \frac{\Delta q \cdot P}{\Delta P \cdot q} = - \frac{dq}{dP} \cdot \frac{P}{q}$$

A partir de esta definición podemos clasificar los bienes según diferentes criterios:

- Son Bienes de Demanda Normal los que tienen Elasticidad positiva, $E > 0$.
- Son Bienes de Demanda Anormal si la elasticidad es negativa, $E < 0$. Eso significaría que la función de demanda es creciente y por tanto, el precio y la demanda varían de la misma forma.

Si en la primera definición de elasticidad comparamos el numerador y el denominador, en valor absoluto, entre sí, tenemos las siguientes situaciones:

- $\left| \frac{\Delta q}{q} \right| > \left| \frac{\Delta P}{P} \right| \Rightarrow E > 1$. Diremos que el bien es de demanda Elástica.
- $\left| \frac{\Delta q}{q} \right| = \left| \frac{\Delta P}{P} \right| \Rightarrow E = 1$. Diremos que el bien es de demanda Unitaria.
- $\left| \frac{\Delta q}{q} \right| < \left| \frac{\Delta P}{P} \right| \Rightarrow E < 1$. Diremos que el bien es de demanda Inelástica.

b) Formación de Precios

Denotemos por q la cantidad de producto, y llamemos $I(q)$ a la función de ingresos y $C(q)$ a la función de costes. Podemos definir la función Beneficio como:

$$B(q) = I(q) - C(q)$$

Suponiendo que la función beneficio es continua y derivable, para hallar su máximo tenemos una condición sobre la primera derivada y otra sobre la segunda derivada.

- $B'(q) = 0$. Lo que traduce en $I'(q) = C'(q)$, donde llamamos ingreso marginal a $I'(q)$ y coste marginal a $C'(q)$. Sea q_0 el punto donde se anula la primera derivada.
- $B''(q_0) < 0$. Entonces $I''(q_0) < C''(q_0)$, y significa que el crecimiento del ingreso marginal en el punto considerado es menor que el crecimiento del coste marginal en el mismo punto.

b.1) Mercados de Competencia Perfecta.

Tienen como característica que el precio del bien es constante, independientemente de la cantidad demandada del mismo:

$$\pi(q) = \pi$$

Entonces, la función de ingresos queda como $I(q) = \pi \cdot q$, siendo $I'(q) = \pi$.

Si la condición era $B'(q)=0$ entonces se deduce que $C'(q)=\pi$. Por tanto, el punto q_0 lo obtenemos de resolver esta última ecuación.

Aplicando la segunda condición, como $I''(q)=0$, deducimos que $C''(q)>0$, lo que significa que en el punto q_0 los costes marginales son crecientes.

b.2) Mercados Monopolísticos.

En esta situación, la función de ingresos es $I(q) = \pi(q) \cdot q$. y como $I'(q) = C'(q)$ tenemos que

$$C'(q) = \pi(q) + q \cdot \pi'(q) \Rightarrow q = \frac{C'(q) - \pi(q)}{\pi'(q)}$$

ecuación que nos permite obtener el valor de q_0 que verifica la primera condición.

La segunda condición sería:

$$I''(q) = \pi'(q) + q \cdot \pi''(q) + \pi'(q) = 2\pi'(q) + q \cdot \pi''(q)$$

Como se tiene que verificar que $I''(q) < C''(q)$ entonces

$$2\pi'(q) + q \cdot \pi''(q) < C''(q)$$

4.3. Integrales en Economía.

a) Costes.

Si el coste total de fabricar y vender q unidades de un determinado bien es

$$CT = CT(q)$$

entonces el coste medio por unidad vendida será:

$$CM(q) = \frac{CT(q)}{q}$$

y el coste marginal se obtendrá a partir de su derivada:

$$CT'(q) = \frac{dCT(q)}{dq}$$

Por tanto $dCT(q) = CT'(q) dq \Rightarrow CT(q) = \int CT'(q) dq$

b) Ingresos.

Dada la función de demanda $\pi = \pi(q)$, el ingreso total es

$$I(q) = \pi(q) \cdot q$$

El ingreso marginal sabemos que es $I'(q) = \frac{dI(q)}{dq}$, por lo tanto $I(q) = \int I'(q) dq$

c) Excedente del Consumidor.

Sabemos que la función de demanda nos da la cantidad que se vende de un determinado artículo en función del precio. Si el precio de equilibrio es π_0 para la cantidad demandada q_0 , entonces los consumidores que estuviesen dispuestos a pagar un precio mayor que el de mercado se beneficiarán por el hecho de que el precio es π_0 .

Según ciertas hipótesis económicas, la ganancia total del consumidor está representada por el área bajo la curva de demanda y sobre la recta $\pi = \pi_0$ y se conoce como Excedente del consumidor. Se obtendría como:

$$E = \int_0^{q_0} p(q) dq - p_0 q_0$$

o bien:

$$E = \int_{p_0}^{m_0} q(p) dp$$

siendo $q(\pi)$ la función inversa de $\pi(q)$.

d) Excedente del Productor.

Una función de oferta representa la cantidad de un producto que se ofrece en el mercado en función del precio. Si el precio de mercado es π_0 y la cantidad ofertada a ese precio es q_0 , entonces aquellos fabricantes que estuviesen dispuestos a vender dicho bien a un precio inferior al de mercado se beneficiarían de que el precio es π_0 . Al igual que en el caso anterior, según ciertas hipótesis económicas, la ganancia total del producto está representada por el área sobre la curva de oferta y bajo la recta $\pi = \pi_0$, recibiendo el nombre de Excedente del productor, y siendo su valor:

$$E = q_0 p_0 - \int_0^{q_0} S(q) dq$$

expresable también como:

$$E = \int_{m_0}^{p_0} S^{-1}(p) dp$$

Bibliografía Recomendada.

Temas de Oposiciones de Física y Química. Aut. Antonio Abrisqueta García, 1999

Cualquier Manual básico sobre Economía.