TEMA 12
(Oposiciones de Matemáticas)

ESPACIOS VECTORIALES.

1. Espacios Vectoriales.
2. Subespacios Vectoriales.
    2.1. Intersección de Subespacios.
    2.2. Unión de Subespacios.
    2.3. Suma de Subespacios.
    2.4. Suma Directa de Subespacios.
3. Aplicaciones Lineales. Espacio Cociente.
4. Teoremas de Isomorfía.
5. Bases de un Espacio Vectorial.
    5.1. Combinaciones Lineales.
    5.2. Dependencia e Independencia Lineal.
    5.3. Bases y Dimensión.
    5.4. Bases y Aplicaciones lineales.
    5.5. Dimensión de Subespacios y Espacios Cociente.
6. Subespacios Vectoriales Complementarios.

TEMA 12

ESPACIOS VECTORIALES.

A lo largo de este tema 12 denotaremos mediante la letra K un cuerpo conmutativo, (K, +, ·).

1. ESPACIOS VECTORIALES.

DEF Llamamos K-espacio vectorial a la terna formada por un conjunto V, una ley de composición interna +, y una ley de composición externa · : KxE $\rightarrow$ E, verificando las propiedades:

1) (V, +) es un grupo conmutativo.
2) La ley de composición externa satisface las propiedades

a) Pseudoasociativa: $\lambda\cdot(\mu\cdot\vec{v}) = (\lambda\cdot\mu)\cdot\vec{v}$

b) Distributiva: $\lambda\cdot(\vec{v}+\vec{w}) = \lambda\vec{v} + \boldsymbol{l}\vec{w}$
$(\lambda + \mu)\vec{v} = \boldsymbol{l}\vec{v} + \boldsymbol{m}\vec{v}$

c) Elemento Unidad: $1\cdot\vec{u} = \vec{u}$

$\forall\lambda, \mu\in K$ y $\forall\vec{v},\vec{w}\in V$

Lo denotaremos por (V, +, $\cdot_K$).

Los elementos de V reciben el nombre de vectores y se suelen denotar con las letras $\vec{u},\vec{v},\vec{w}$. Los elementos de K reciben el nombre de escalares y se representan mediante letras griegas. La operación externa se llama producto por escalares.

Denotaremos el neutro de (V, +) por $\vec{O}$ y el neutro de (K, +) por O.

PROP Si V es un K-espacio vectorial se satisfacen las siguientes propiedades; $\forall\lambda$, $\mu\in K$ y $\forall\vec{u},\vec{v}\in V$.

1) $O\cdot\vec{u} = \boldsymbol{l}\cdot\vec{O} = \vec{O}$

2) $(-\boldsymbol{l})\cdot\vec{u} = \boldsymbol{l}\cdot(-\vec{u}) = -\boldsymbol{l}\vec{u}$

3) $\boldsymbol{l}(\vec{u}-\vec{v}) = \boldsymbol{l}\vec{u} - \boldsymbol{l}\vec{v}$

4) $(\boldsymbol{l} - \boldsymbol{m})\vec{u} = \boldsymbol{l}\vec{u} - \boldsymbol{m}\vec{u}$

5) $\boldsymbol{l}\vec{u} = \vec{O} \Rightarrow \boldsymbol{l} = O \quad ó \quad \vec{u} = \vec{O}$

<u>Dem.</u>

1) $O \cdot \vec{u} = (O + O)\vec{u} = O\vec{u} + O\vec{u} \Rightarrow O\vec{u} = \vec{O}$

$l \cdot O = l(O + O) = lO + lO \Rightarrow lO = \vec{O}$

2) $(-l)\vec{u} + l\vec{u} = (-l + l)\vec{u} = O\vec{u} = \vec{O} \Rightarrow (-l)\vec{u} = -l\vec{u}$

$l(-\vec{u}) + l\vec{u} = l(-\vec{u} + \vec{u}) = l \cdot \vec{O} = \vec{O} \Rightarrow l(-\vec{u}) = -lu$

3) $l(\vec{u} - \vec{v}) = l(\vec{u} + (-\vec{v})) = l\vec{u} + l(-\vec{v}) = l\vec{u} - l\vec{v}$

4) $(l - m)\vec{u} = (l + (-m))\vec{u} = l\vec{u} + (-m)\vec{u} = l\vec{u} - m\vec{u}$

5) Si $l\vec{u} = \vec{O}$ y $l \neq O \Rightarrow \exists\, l^{-1} \in K$ por ser K un cuerpo

$l^{-1} \cdot (l\vec{u}) = l^{-1} \cdot \vec{O} \Rightarrow (l^{-1} \cdot l)\vec{u} = \vec{O} \Rightarrow 1 \cdot \vec{u} = \vec{O} \Rightarrow \vec{u} = O$

Ejemplos:

1) Sea el conjunto K^n = Kx …… xK. Definimos una operación interna y otra externa con cuerpo de operadores K, como sigue:

$+: K^n \times K^n \to K^n \quad (u_1, u_2, \ldots, u_n) + (v_1, v_2, \ldots, v_n) = (u_1 + v_1, u_2 + v_2, \ldots, u_n + v_n)$

$\cdot: K \times K^n \to K^n \quad \lambda\cdot(u_1, u_2, \ldots u_n) = (\lambda u_1, \lambda u_2, \ldots \lambda u_n)$

Es inmediato comprobar que $(K^n, +, \cdot)$ es un K-espacio vectorial.

2) Sea V un K-espacio vectorial y A un conjunto. Definimos

$$V^A = \{f: A \to E/f \text{ es aplicación}\}$$

Si definimos la operación interna

$$+: V^A \times V^A \to V^A \quad (f + g)(x) = f(x) + g(x) \quad \forall x \in A$$

y la operación externa

$$\cdot: K \times V^A \to V^A \quad (\lambda f)(x) = \lambda\cdot f(x) \quad \forall x \in A$$

entonces $(V^A, +, \cdot)$ es un K-espacio vectorial.

3) $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ puede ser un $\mathbb{R}$-espacio vectorial y también un $\mathbb{Q}$-espacio vectorial, col las operaciones suma y producto habituales.

PROP Sea V un K-espacio vectorial. Entonces verifica las leyes de simplificación, que son:

1) $\forall \vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in V \quad \vec{u}+\vec{v}=\vec{u}+\vec{w} \Rightarrow \vec{v}=\vec{w}$

2) $\forall \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in K$ y $\forall \vec{u} \in V$ *no nulo* $\quad \boldsymbol{a}\vec{u}=\boldsymbol{b}\vec{u} \Rightarrow \boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$

3) $\forall \boldsymbol{a} \in K$ *no nulo* $\quad \forall \vec{u}, \vec{v} \in K \quad \boldsymbol{a}\vec{u}=\boldsymbol{a}\vec{v} \Rightarrow \vec{u}=\vec{v}$

Dem.

1) $\vec{u}+\vec{v}=\vec{u}+\vec{w} \Rightarrow$ Como (V, +) es grupo Conmutativo $\exists(-\vec{u}) \in V$

$$(-\vec{u})+(\vec{u}+\vec{v})=(-\vec{u})+(\vec{u}+\vec{w}) \Rightarrow (-\vec{u}+\vec{u})+\vec{v}=(-\vec{u}+\vec{u})+\vec{w} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \vec{O}+\vec{v}=\vec{O}+\vec{w} \Rightarrow \vec{v}=\vec{w}$$

2) $\boldsymbol{a}\vec{u}=\boldsymbol{b}\vec{u} \Rightarrow \boldsymbol{a}\vec{u}+(-\boldsymbol{b}\vec{u})=\boldsymbol{b}\vec{u}+(-\boldsymbol{b}\vec{u}) \Rightarrow \boldsymbol{a}\vec{u}-\boldsymbol{b}\vec{u}=\boldsymbol{b}\vec{u}-\boldsymbol{b}\vec{u} \Rightarrow$

$\Rightarrow (\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})\vec{u}=\vec{O}$ y como $\vec{u}$ es un no nulo $\Rightarrow \alpha - \beta = O \Rightarrow \alpha = \beta$

3) $\boldsymbol{a}\vec{u}=\boldsymbol{a}\vec{v} \Rightarrow$ como K es cuerpo y α es no nulo $\exists \boldsymbol{a}^{-1} \in K$ tal que

$$\boldsymbol{a}^{-1}(\boldsymbol{a}\vec{u})=\boldsymbol{a}^{-1}(\boldsymbol{a}\vec{v}) \Rightarrow (\boldsymbol{a}^{-1}\boldsymbol{a})\vec{u}=(\boldsymbol{a}^{-1}\boldsymbol{a})\vec{v} \Rightarrow 1\vec{u}=1\vec{v} \Rightarrow \vec{u}=\vec{v}$$

2. SUBESPACIOS VECTORIALES.

DEF Sea V un K-espacio vectorial y WCV subconjunto no vacío. Diremos que W es un Subespacio Vectorial de V si satisface:

1) (W, +) es subgrupo de (V, +)

2) $\forall \boldsymbol{l} \in K$ y $\forall \vec{u} \in W \Rightarrow \boldsymbol{l}\vec{u} \in W$

Es claro que (W, +, ·) es un K-espacio vectorial con la suma de V y el producto porescalares restringidos a W.

Todo K-espacio vectorial V admite dos subespacios que llamaremos triviales, el $\{\vec{O}\}$ y el propio V.

Ejemplo.

(ℝ, +, ·) es un subespacio vectorial de (ℂ, +, ·), siendo el cuerpo de operadores, por ejemplo, ℚ ó ℝ.

PROP Sea V un K-espacio vectorial, W⊂V con W ≠ Ø. Son equivalentes:

1) W es un subespacio vectorial de V.

2) $\forall \vec{u}, \vec{v} \in W \quad y \quad \forall \boldsymbol{l} \in K \quad \vec{u}+\vec{v} \in W \quad y \quad \boldsymbol{l} \cdot \vec{u} \in W$

3) $\forall \vec{u}, \vec{v} \in W \quad y \quad \forall\, \boldsymbol{l}, m \in K \quad \boldsymbol{l}\vec{u} + m\vec{v} \in W$

Dem.

1) $\Rightarrow$ 2)

Como W es un subespacio, las operaciones de suma y producto por un escalar son cerradas. Luego trivialmente se verifica 2).

2) $\Rightarrow$ 3)

$\forall \vec{u}, \vec{v} \in W \ y\ \forall\, \boldsymbol{l}, m \in K,$ por hipótesis $\boldsymbol{l}\vec{u} \in W \ y\ m\vec{v} \in W$ y de nuevo aplicando 2) $\boldsymbol{l}\vec{u} + m\vec{v} \in W$

3) $\Rightarrow$ 4)

Para ver que W es un subespacio.

(w, +) es subgrupo

$\forall u, v \in W$ si tomamos $\lambda = 1$ y $\mu = -1 \Rightarrow \vec{u} - \vec{v} \in W$

Para comprobar que la operación externa es cerrada

$\forall u, v \in W$ tomamos $\mu = O \Rightarrow \boldsymbol{l}\vec{u} \in W \quad \forall\, \boldsymbol{l} \in K$

2.1. Intersección de Subespacios.

DEF Sea V un K-espacio vectorial y $\{W_i \neq i: 1,\ldots, n\}$ una familia de subespacios de V. Definimos la intersección de subespacios como:

$$W = \bigcap_{i=1}^{n} W_i = \{\vec{u} \in v / \vec{u} \in W_i \forall_i : 1, \ldots, n\}$$

PROP Sea V un K-espacio vectorial y $\{W_i \neq i: 1, \ldots, n\}$ una familia de subespacios de V. Entonces, la intersección, $W = \bigcap_{i=1}^{n} W_i$, de subespacios es un subespacio vectorial V.

Dem.

$W \neq \emptyset$ ya que $\vec{O} \in W_i \ \forall_i$ por ser un subespacio $\Rightarrow \vec{O} \in W$.

Sea $\vec{u}, \vec{v} \in W \Rightarrow \vec{u}, \vec{v} \in W_i \forall_i \Rightarrow \boldsymbol{l}\vec{u} + m\vec{v} \in W_i \quad \forall\, \boldsymbol{l}, m \in K\ \forall_i \Rightarrow \boldsymbol{l}\vec{u} + m\vec{v} \in W$

W es un subespacio.

DEF Sea V un K-espacio vectorial y $A \subset V$ un subconjunto no vacío. Llamamos Subespacio Engendrado por A al menor de los subespacios vectoriales que contienen a A. Se denota por [A].

Es claro que el conjunto [A] es un subespacio de V que contiene al conjunto A, y si existe otro subespacio W de V que también contiene a A, entonces $[A] \subset W$.

PROP Sea V un K-espacio vectorial y A un subconjunto no vacío de V. Sean $\{W_i / W_i$ es subespacio y $A \subset W_i \quad \forall_i \in I$. Entonces $[A] = \bigcap_{i \in I} W_i$

Dem.

Inmediata

DEF Sea W un subespacio vectorial de V, K-espacio vectorial, y $A \subset V$ tal que [A] = W. Diremos que el conjunto A engendra W o es un Sistema de Generadores de W.

2.2. Unión de Subespacios.

DEF Sea V un K-espacio vectorial y $\{W_i / i \in I\}$ una familia de subespacios de V. Definimos la unión de subespacios como:

$$\cup W_i = \{\vec{u} \in V / \exists i \in I, \vec{u} \in W_i\}$$

No podemos afirmar que la unión de subespacios sea un nuevo subespacio.

Ejemplo.

Sea $V = \mathbb{R}^2$ y U, W subespacios de V con $U = \mathbb{R} x \{o\}$ y $W = \{o\} x \mathbb{R}$.

Entonces $(u, o) \in U$ y $(o, w) \in W$. En cambio $(u, o) + (o, w) = (u, w) \notin U \cup W$.

2.3. Suma de Subespacios.

DEF Sea V un K-espacio vectorial y $\{W_i / i:1,\ldots, n\}$ una familia de subespacios de V. Definimos la suma de subespacios como:

$$\sum_{i=1}^{n} W_i = \{\vec{u} \in V / \vec{u} = \sum \vec{u}_i \; con \, u_i \in W_i \; \forall_i : 1,\ldots, n\}$$

PROP Sea V un K-espacio vectorial y $\{W_i / i:1,\ldots, n\}$ una familia de subespacios de V. Entonces la suma de subespacios $W = \sum_{i=1}^{n} W_i$ es un subespacio de V.

Dem.

Vamos a realizar la demostración por inducción en el número de subespacios, n.

Para n = 2 $W = W_1 + W_2$

1) Como $\vec{O} \in W_1 \; y \; \vec{O} \in W_2 \Rightarrow \vec{O} = \vec{O} + \vec{O} \in W \Rightarrow W \neq \varnothing$

2) $W_1 \subset V$ y $W_2 \subset V \Rightarrow W_1 + W_2 \subset V \Rightarrow W \subset V$

3) Sea $\vec{u}, \vec{v} \in W \Rightarrow \vec{u} = \vec{u}_1 + \vec{u}_2 \; y \; \vec{v} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2 \; con \, u_1, v_1 \in W_1 \; y \; \vec{u}_2, \vec{v}_2 \in W_2 \Rightarrow$

$$\Rightarrow u_1 + v_1 \in W_1 \ y \ u_2 + v_2 \in W_2 \Rightarrow u + v = (u_1 + u_2) + (v_1 + v_2) =$$

$$= (u_1 + v_1) + (u_2 + v_2) \in W_1 + W_2 \Rightarrow u + v \in W$$

4) Sea $\lambda \in K$ y $u \in W \Rightarrow u = u_1 + u_2$ con $u_1 \in W_1$ y $u_2 \in W_2 \Rightarrow$

$\Rightarrow \lambda u_1 \in W_1$ y $\lambda u_2 \in W_2 \Rightarrow \lambda u = \lambda(u_1 + u_2) = \lambda u_1 + \lambda u_2 \in W_1 + W_2 \Rightarrow$

$\Rightarrow \lambda u \in W$

Por tanto W es un subespacio.

Para n – 1, por hipótesis de Inducción, $W = \sum_{i=1}^{n-1} W_i$ es subespacio vectorial

Para n

$$W = \sum_{i=1}^{n} W_i = \sum_{i=1}^{n-1} W_i + W_n$$

Ambos sumandos son subespacios vectoriales, y como la suma de dos subespacios es otro subespacio (caso n = 2) entonces W es subespacio vectorial de V.

PROP Sea V un K-espacio vectorial y U, W subespacios vectoriales de V. Se verifica que $U + W = [U \cup W]$

Dem.

"$\subset$" Sea $\vec{v} \in U + W \Rightarrow \vec{v} = \vec{u} + \vec{w}$ con $\vec{u} \in U$ y $\vec{w} \in W \Rightarrow$

$$\Rightarrow \vec{u} \in U \cup W \ y \ \vec{w} \in U \cup W \Rightarrow \vec{u} + \vec{w} [U \cup W] \Rightarrow \vec{v} \in [U \cup W]$$

"$\supset$" Sea $\vec{v} = [U \cup W] \Rightarrow \exists \vec{u} \in U \ y \ \exists \vec{w} \in W / v = \boldsymbol{l}\vec{u} + \boldsymbol{m}\vec{v} \in [U \cup W] \Rightarrow$

$$\Rightarrow \boldsymbol{l}\vec{u} \in U \ y \ \boldsymbol{m}\vec{v} \in W \rightarrow \boldsymbol{l}\vec{u} + \boldsymbol{m}\vec{v} \in U + W \Rightarrow \vec{v} \in U + W$$

2.4. Suma Directa de Subespacios.

DEF Sea V un K-espacio vectorial y W_1, W_2 dos subespacios de V. Diremos que el subespacio W es suma directa de W_1 y W_2, y lo representaremos por $W = W_1 \oplus W_2$, si se verifica:

1) $W = W_1 + W_2$

2) $W_1 \cap W_2 = \{\vec{o}\}$

PROP Sea V un K-espacio vectorial y W, W_1, W_2 subespacios de V.
$W = W_1 \oplus W_2 \Leftrightarrow \forall \vec{w} \in W \quad \exists^{\bullet} \vec{w}_1 \in W_1 \ y \ \exists^{\bullet} \vec{w}_2 \in W_2 / \vec{w} = \vec{w}_1 + \vec{w}_2$

Dem.

“⇒” Como W = $W_1 \oplus W_2$, entonces en particular W = $W_1 + W_2$.

Sea $\vec{w} \in W \Rightarrow \vec{w} = \vec{w}_1 + \vec{w}_2 \ con\ \vec{w}_1 \in W_1 \ y\ \vec{w}_2 \in W$

Para ver que esa expresión es única, vamos a suponer que existe otra: Sea $w = \vec{w}_1' + \vec{w}_2' \quad con \quad \vec{w}_1' \in W_1 \quad y \quad \vec{w}_2' \in W_2$

Entonces $\vec{w}_1 + \vec{w}_2 = \vec{w}_1' + \vec{w}_2' \Rightarrow \vec{w}_1 - \vec{w}_1' = \vec{w}_2 - \vec{w}_2'$

Como $\vec{w}_1 - \vec{w}_1' \in W_1 \quad y \quad \vec{w}_2 - \vec{w}_2' \in W_2$ y ambos son iguales $\Rightarrow \vec{w}_1 - \vec{w}_1' \in W_1 \cap W_2$ y

$\vec{w}_2 - \vec{w}_2' \in W_1 \cap W_2$

Pero como la suma es directa se da que $W_1 \cap W_2 = \{\vec{o}\} \Rightarrow \vec{w}_1 - \vec{w}_1' = 0 \ y\ \vec{w}_2 - \vec{w}_2' = 0$

$\Rightarrow \vec{w}_1 = \vec{w}_1' \ y\ \vec{w}_2 = \vec{w}_2'$

Por tanto la expresión es única.

“⇐”

1) Como $\forall \vec{w} \in W \quad \vec{w} = \vec{w}_1 + \vec{w}_2 \ con\ \vec{w}_1 \in W \ y\ \vec{w}_2 \in W_2 \Rightarrow W = W_1 + W_2$

2) Sea $\vec{w} \in W_1 \cap W_2 \begin{cases} Como\ \vec{w} \in W_1 \Rightarrow \vec{w} = \vec{w}_1 + \vec{o} \\ Como\ \vec{w} \in W_2 \Rightarrow \vec{w} = \vec{o} + \vec{w}_2 \end{cases}$

Y al ser la expresión única $\vec{w}_1 = \vec{o}, \vec{w}_2 = o \Rightarrow \vec{w} = \vec{o} \quad \Rightarrow W_1 \cap W_2 = \{\vec{o}\}$

Lo visto de suma directa de dos subespacios se puede generalizar fácilmente a un conjunto de ∩ subespacios.

DEF Sea V un K-espacio vectorial y {W_i /i:1,….,n} una familia de subespacios de V. Diremos que el subespacio W es suma directa de los subespacios {W_i / i:1,…..,n}, y se representa por $W = \bigoplus_{i=1}^{n} W_i$ si se verifica

1) $W = \sum_{i=1}^{n} W_i$

2) $W_i \cap \left(\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} W_j \right) = \{\vec{o}\}$

PROP Sea V un K-espacio vectorial y W, {W_i /i:1,…., n} subespacios de V.

$$W=\bigoplus_{i=1}^{n}W_i \Leftrightarrow \forall\vec{w}\in W \quad \exists^{\bullet}\vec{w}_i\in W_i \quad \forall_i:1,...,n/\vec{w}=\sum_{i=1}^{n}\vec{w}_i$$

Dem.

Análoga a la anterior

COROLARIO Sea V un K-espacio vectorial y $\{W_i \ / \ i:1,\dots,n\}$, W subespacios de V. $W=\bigoplus_{i=1}^{n}W_i \Leftrightarrow Si \quad \sum_{i=1}^{n}\vec{w}_i=\vec{o}\ con\ \vec{w}_i\in W_i\ \forall_i \quad implica \quad \vec{w}_i=\vec{o} \quad \forall_i$

Dem.

Solo hemos de tener en cuenta que $\vec{o}=\vec{o}+\vec{o}+.......+\vec{o}$.

3. APLICACIONES LINEALES. ESPACIO COCIENTE.

DEF Sean V_1 y V_2 K-espacios vectoriales. Diremos que la aplicación f: $V_1 \to V_2$ es un homomorfismo de espacios vectoriales (o simplemente lineal) si:

1) $f(\vec{u}+\vec{v})=f(\vec{u})+f(\vec{v}) \quad \forall\vec{u},\vec{v}\in V_1$

2) $f(\lambda\vec{u})=\lambda f(\vec{u}) \qquad \forall\lambda\in K \quad \forall\vec{u}\in V_1$

OBS La condición 1) nos indica que f es un hormomorfismo de grupos entre $(V_1, +)$ y $(V_2, +)$.

PROP Sean V_1 y V_2 K-espacios vectoriales y f: $V_1 \to V_2$ una aplicación lineal. Si $\{\vec{v}_i / i:1,.....,n\}$ son vectores de V_1 y $\{\lambda_1 / i:1,.....,n\}$ escalares se verifica $f\left(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\vec{v}_i\right)=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i f(\vec{v}_i)$

Dem.

Inmediata.

PROP Sean V_1 y V_2 K-espacios vectoriales y f: $V_1 \to V_2$ una aplicación lineal. Se satisfacen las siguientes propiedades.

1) $f(\vec{o})=\vec{o}$

2) $f(-\vec{v})=-f(\vec{v}) \quad \forall\vec{v}\in V_1$

3) $f(\vec{v}-\vec{w})=f(\vec{v})-f(\vec{w}) \quad \forall\vec{v},\vec{w}\in V_1$

Dem.

1) $\forall \vec{v} \in V_1 \quad f(\vec{v}) = f(\vec{o} + \vec{v}) = f(\vec{o}) + f(\vec{v}) \Rightarrow f(\vec{o}) = \vec{o}$

2) $\forall \vec{v} \in V_1 \quad f(\vec{o}) = f(\vec{v} + (-v)) = f(\vec{v}) + f(-\vec{v}) \Rightarrow f(\vec{v}) + f(-\vec{v}) = \vec{o} \quad por \quad 1)$

$\Rightarrow f(-\vec{v}) = -f(\vec{v})$

3) $\forall v, \vec{w} \in V_1 \quad f(\vec{v} - \vec{w}) = f(\vec{v} + (-\vec{w})) = f(\vec{v}) + f(-\vec{w}) = f(\vec{v}) - f(\vec{w})$.

PROP Sean V_1 y V_2 K-espacios vectoriales.

F: $V_1 \to V_2$ es lineal $\Leftrightarrow \forall \vec{v}, \vec{w} \in V_1 \; y \; \forall \, l, m \in K \;\; f(l\vec{v} + m\vec{w}) = lf(\vec{v}) + mf(\vec{w})$

Dem.

"$\Rightarrow$" $f(l\vec{v} + m\vec{w}) = f(l\vec{v}) + f(m\vec{w}) = lf(\vec{v}) + mf(\vec{w})$

"$\Leftarrow$"

- Si $\lambda = \mu = 1 \Rightarrow f(1\vec{v} + 1\vec{w}) = 1f(\vec{v}) + 1 \cdot f(\vec{w}) = f(\vec{v}) + f(\vec{w})$
- Si $\mu = 0 \Rightarrow f(l\vec{v} + o\vec{w}) = lf(\vec{v}) + o \cdot f(\vec{w}) = lf(\vec{v})$

Luego f es lineal.

PROP Sean V_1 y V_2 K-espacios vectoriales y f: $V_1 \to V_2$ una aplicación lineal. Se satisfacen:

1) Si W_1 es un subespacio vectorial de $V_1 \Rightarrow f(W_1)$ es un subespacio vectorial de V_2.

2) Si W_2 es un subespacio vectorial de $V_2 \Rightarrow f^{-1}(W_2)$ es un subespacio vectorial de V_1.

Dem.

1) Como f, en particular, es un homomorfismo de grupos, se verifica que $f(W_1)$ es un subgrupo de V_2.

Sea $\lambda \in K$ y $f(\vec{v}) \in f(W_1)$ con $\vec{v} \in W_1$

Entonces $l \cdot f(\vec{v}) = f(l\vec{v}) \in f(W_1)$

Luego $f(W_1)$ es un subespacio vectorial de V_2.

2) Igualmente, $f^{2}(W_2)$ es un subgrupo de V_1.

Sea $\lambda \in K$ y $\vec{v} \in f^{-1}(W_2) \Rightarrow f(\vec{v}) \in f(f^{-1}(W_2)) = W_2 \Rightarrow$

$\Rightarrow l \cdot f(\vec{v}) = f(l\vec{v}) \in W_2 \Rightarrow l\vec{v} \in f^{-1}(W_2)$

DEF Si f: $V_1 \to V_2$ es una aplicación lineal entre K-espacios vectoriales, definimos el núcleo del f, y se denota por Kerf, al conjunto de los $\vec{v} \in V_1$ tales que $f(\vec{v}) = \vec{o}$. Y la Imagen de f, Imf, como el conjunto formado por las imágenes de f.

$$Kerf = \{\vec{v} \in V_1 / f(\vec{v}) = \vec{o}\} \qquad \mathrm{Im}\, f = \{\vec{w} \in V_2 / \exists \vec{v} V_1 \ con \ f(\vec{v}) = w\} = f(V_1)$$

COROLARIO Sea f: $V_1 \to V_2$ una aplicación lineal entre K-espacios vectoriales. Los conjuntos Kerf e Imf son subespacios vectoriales.

Dem.

Kerf = f^{1} $(\{\vec{o}\})$ y $\{\vec{o}\}$ es un subespacio de V_2

Imf = $f(V_1)$ y V_1 es un subespacio de V_1.

PROP Si V_1, V_2 y V_3 son K-espacios vectoriales y f: $V_1 \to V_2$, g: $V_2 \to V_3$ aplicaciones lineales, la aplicación compuesta $g \circ f$: $V_1 \to V_3$ es lineal.

Dem.

Inmediata.

PROP Si V_1 y V_2 son K-espacios vectoriales y f: $V_1 \to V_2$ es una aplicación lineal biyectiva, la aplicación inversa f^{1}: $V_2 \to V_1$ es lineal.

Dem.

Sabemos que f^{1}: $V_2 \to V_1$ es un homomorfismo de grupos, luego solo hemos de probar el producto por un escalar.

Si $\vec{w} \in V_2 \quad \exists \vec{v} \in V_1 \quad / f(\vec{v}) = \vec{w}$

Sea $\lambda \in K$ $\qquad f^{-1}(\lambda \vec{w}) = f^{-1}(\lambda \cdot f(\vec{v})) = f^{-1}(f(\lambda \cdot \vec{v})) = \lambda \cdot \vec{v} = \lambda \cdot f^{-1}(\vec{w})$

DEF Sean V_1 y V_2 K-espacios vectoriales y f: $V_1 \to V_2$ aplicación lineal.

1) f es monomorfismo si f es inyectiva.
2) F es epimorfismo si f es suprayectiva.
3) F es isomorfismo si f es biyectiva.
4) F es endomorfismo si $V_1 = V_2$
5) F es automorfismo si es simultáneamente isomorfismo y endomorfismo.

PROP Sea V un K-espacio vectorial y $N \subset V$ un subespacio vectorial. Existe entonces un K-espacio vectorial, W, y una aplicación lineal θ: $V \to W$ tal que Ker θ = N.

Dem.

Vamos a realizar la demostración en dos pasos; primero construiremos W y después θ.

1) Construcción de W.

Por ser N subespacio vectorial de V $\Rightarrow$ (N, +) es un subgrupo de (N, +) y como es conmutativa $\Rightarrow$ N es un divisor normal de V.

Vamos a considerar el conjunto cociente V/N, siendo sus elementos clases de equivalencias de V respecto de la relación R definida por

$$\forall \vec{v}, \vec{v} \in V \quad \vec{v} R \vec{v}' \Leftrightarrow \vec{v} - \vec{v}' \in N$$

La suma de clases estaría definida por

$$[\vec{v}] + [\vec{v}'] = [\vec{v} + \vec{v}']$$

siendo (V/N, +) grupo conmutativo

Definimos la operación externa

$$\forall \lambda \in K \quad \lambda \cdot [\vec{v}] = [\lambda \cdot \vec{v}]$$

y esta bien definida ya que si $[\vec{v}] = [\vec{v}'] \Rightarrow \vec{v} - \vec{v}' \in N \Rightarrow \lambda \cdot (\vec{v} - \vec{v}') \in N$ al ser subespacio $\Rightarrow \lambda\vec{v} - \lambda\vec{v}' \in N \Rightarrow [\lambda\vec{v}] = [\lambda\vec{v}']$.

La operación externa que acabamos de definir verifica las propiedades Pseudoasociativas, distributivas (de la suma respecto del producto por escalares y viceversa) y existencia de elemento unidad. Su demostración es inmediata y no la hacemos.

Por tanto, el conjunto (V/N, +, $\bullet_K$) es un K-espacio vectorial. Tomaremos W = V/N.

2) Construcción de θ.

Definimos θ: V $\to$ V/N como $\theta(\vec{v}) = [\vec{v}] \quad \forall \vec{v} \in V$. Así definida, θ es una aplicación lineal:

$$\theta(\vec{v} + \vec{v}') = [\vec{v} + \vec{v}'] = [\vec{v}] + [\vec{v}'] = \theta(\vec{v}) + \theta(\vec{v}') \quad \forall \vec{v}, \vec{v}' \in V$$

$$\theta(\lambda\vec{v}) = [\lambda\vec{v}] = \lambda[\vec{v}] = \lambda \cdot \theta(\vec{v}) \quad \forall \lambda \in K \quad \forall \vec{v} \in V$$

Es claro que Kerθ = N

$$\vec{v} \in Ker\theta \Leftrightarrow \theta(\vec{v}) = \vec{o} \Leftrightarrow [\vec{v}] = [\vec{o}] \Leftrightarrow \vec{v} - o \in N \Leftrightarrow \vec{v} \in N$$

DEF El espacio vectorial V/N recibe el nombre de Espacio Vectorial Cociente de V por N.

DEF La aplicación θ:V $\rightarrow$ V/N recibe el nombre de Proyección Natural del espacio vectorial V sobre V/N.

OBS Si N = $\{\vec{o}\} \Rightarrow \theta$ es inyectiva y $V/\{\vec{o}\} \cong V$

4. TEOREMAS DE ISOMORFÍA.

Teorema: 1er Teorema de Isomorfía.

Sean V y W K-espacios vectoriales y f: V $\rightarrow$ W aplicación lineal. Entonces existe un único isomorfismo de espacios vectoriales $\tilde{f}: V/Kerf \rightarrow \operatorname{Im}(f)$ tal que $f = \tilde{f} \circ q$, siendo θ:V $\rightarrow$ V/Kerf la proyección natural de V en V/Kerf. Brevemente escribimos $V/Kerf \cong \operatorname{Im}(f)$.

Dem.

Construyamos la aplicación $\tilde{f}$ y comprobemos que es isomorfismo y única.

Definimos $\tilde{f}: V/Kerf \rightarrow \operatorname{Im}(f)$ con $\tilde{f}([\vec{v}]) = f(v) \quad \forall [\vec{v}] \in V/Kerf$

- $\tilde{f}$ esta bien definida.

Si $[\vec{v}] = [\vec{v}'] \Rightarrow \vec{v} - \vec{v}' \in Kerf \Rightarrow f(\vec{v} - \vec{v}') = o \Rightarrow f(\vec{v}) - f(\vec{v}') = o \Rightarrow$

$\Rightarrow f(\vec{v}) = f(\vec{v}') \Rightarrow \tilde{f}([\vec{v}]) = \tilde{f}([\vec{v}'])$

- $\tilde{f}$ es lineal.

Sean λ, $\mu \in$ K y $[\vec{v}], [\vec{v}] \in V/Kerf$

$$\tilde{f}(l[\vec{v}] + m[\vec{v}']) = \tilde{f}([l\vec{v} + m\vec{v}']) = f(l\vec{v} + m\vec{v}') = lf(\vec{v}) + mf(\vec{v}') = l \cdot \tilde{f}([\vec{v}]) + m\tilde{f}([\vec{v}'])$$

- $\tilde{f}$ es suprayectiva.

Sea $\vec{w} \in \operatorname{Im}(f) \Rightarrow \exists \vec{v} \in V / \vec{w} = f(\vec{v}) \Rightarrow \exists [\vec{v}] \in V/Kerf$ tal que $\tilde{f}([\vec{v}]) = f(\vec{v}) = \vec{w}$

Luego $\tilde{f}: V/Kerf \rightarrow \operatorname{Im}(f)$ es un isomorfismo, que además hace conmutativo el diagrama

$$f = \tilde{f} \circ q$$

$$\left(\tilde{f}\circ \boldsymbol{q}\right)(\vec{v}) = \tilde{f}(\boldsymbol{q}(\vec{v})) = \tilde{f}([\vec{v}]) = f(\vec{v})$$

- $\tilde{f}$ es único.

Supongamos que $\exists \tilde{f}': V/_{Kerf} \to \mathrm{Im}\, f \,/\, f = \tilde{f}\circ \boldsymbol{q}$

Entonces $\left(\tilde{f}\circ \boldsymbol{q}\right)(\vec{v}) = \tilde{f}'([\vec{v}]) = f(\vec{v}) = \tilde{f}([\vec{v}]) = \left(\tilde{f}\circ \boldsymbol{q}\right)(\vec{v})$

Luego $\tilde{f}' = \tilde{f}$

OBS Sea V un K-espacio vectorial y U, W subespacios vectoriales de V con U⊂W. Podemos definir una aplicación φ: V/U → V/W de forma natural con $\boldsymbol{j}(\vec{v}+U) = \vec{v}+W, \vec{v}\in V$.

La definición es correcta pues si $\vec{v}+U = \vec{u}'+U \Rightarrow \vec{v}-\vec{v}'\in U \Rightarrow \vec{v}-\vec{v}'\in W \Rightarrow$

$\Rightarrow \vec{v}+W = \vec{v}'+W \Rightarrow \boldsymbol{j}(\vec{v}+U) = \boldsymbol{j}(\vec{v}'+U)$

Además, φ es lineal y suprayectiva (epimorfismo) y su núcleo es W/U ya que $Kerf\boldsymbol{j} = \{\vec{v}+U \,/\, \boldsymbol{j}(\vec{v}+U) = \vec{o}+W\} = \{\vec{v}+U \,/\, \vec{v}+W = \vec{o}+W\} = \{\vec{v}+U \,/\, \vec{v}\in W\} = W/U$

COROLARIO 2º Teorema de Isomorfía.

Sea V un K-espacio vectorial y U, W subespacios de V con U⊂W. Dada $\boldsymbol{j}: V/_U \to V/_W$ lineal, existe un único isomorfismo $\tilde{f}: \left(V/_U\right)/\left(W/_U\right) \to V/_W$ tal que $\boldsymbol{j} = \tilde{f}\circ \boldsymbol{q}$ donde θ es la proyección natural de V/W en $\left(V/_U\right)/\left(W/_V\right)$

Dem.

La demostración es inmediata aplicando el 1er teorema de isomorfia y teniendo en cuenta que Kerφ = W/U.

Teorema. 3er Teorema de Isomorfía.

Sea V un K-espacio vectorial y U, W subespacios de V. Entonces los espacios $U+V/_U$ y $W/_{U\cap W}$ son isomorfos.

Dem.

Consideremos la proyección θ: V → V/U con $\boldsymbol{q}(\vec{v}) = [\vec{v}], \boldsymbol{q}$ es lineal.

Si lo restringimos a W obtenemos la aplicación lineal

$$q/w : W \to {}^{V}\!\!/_{U} \quad q/w(\vec{v}) = [\vec{v}] \; \forall \vec{v} \in W$$

1) Comprobemos que $\mathrm{Im}(q/w) = {}^{U+W}\!\!/_{U}$

Si $[\vec{v}] \in \mathrm{Im}(q/w) \Leftrightarrow [\vec{v}] = q/w(\vec{w}) = [\vec{w}]\, con\ \vec{w} \in W \Leftrightarrow \vec{v} - \vec{w} = \vec{u} \in U \Rightarrow$

$\Rightarrow \vec{v} = \vec{u} + \vec{w}\ con\ \vec{u} \in U\ \ y\ \vec{w} \in W \Leftrightarrow \vec{v} \in U + W \Leftrightarrow [\vec{v}] \in {}^{U+W}\!\!/_{U}$

2) Comprobemos que $Ker(q/w) = U \cap W$

• Si $\vec{v} \in Ker(q/w) \Rightarrow \left\{ \begin{matrix} \vec{v} \in W \\ q/w(\vec{v}) = [\vec{o}] \Rightarrow [\vec{v}] = [\vec{o}] \Rightarrow \vec{v} - o \in U \end{matrix} \right\} \Rightarrow$

$\Rightarrow \vec{v} \in U \cap W \Rightarrow Ker(q/w) \subset U \cap W$

• Si $\vec{v} \in U \cap W \Rightarrow q/w(\vec{v}) = q(\vec{v}) = [\vec{v}]\ y\ como\ \vec{v} \in U \Rightarrow [\vec{v}] = [\vec{o}] \Rightarrow$

$\Rightarrow \vec{v} \in Ker(q/w) \Rightarrow U \cap W \subset Ker(q/w)$

Luego $Ker(q/w) = U \cap W$

Aplicando el 1^{er} teorema de isomorfia a la aplicación q/w obtenemos ${}^{W}\!\!/_{Ker(q/w)} \cong \mathrm{Im}(q/w)$ que resulta ser: ${}^{W}\!\!/_{U \cap W} \cong {}^{U+W}\!\!/_{U}$

5. BASES. DIMENSIÓN.

5.1. Combinaciones lineales.

DEF Sea V un K-espacio vectorial y $\{\vec{v}_i \,/\, i:1,\ldots.,n\}$ vectores de V. Diremos que $\vec{v} \in V$ Es combinación lineal de los vectores $\{v_i \,/\, i:1,\ldots,n\}$ si existen $\{l_i \,/\, i:1,\ldots,n\}$ escalares del cuerpo K, tales que $\vec{v} = \sum_{i=1}^{n} l_i \cdot \vec{v}_i$. Los λ_i reciben el nombre de coeficientes de la combinación Lineal.

PROP El vector nulo es Combinación lineal de cualquier conjunto de vectores.

Dem.

Sea $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ un conjunto del K-espacio vectorial V. Basta tomar los coeficientes todos cero para que $\vec{o} = \sum_{i=1}^{n} o \cdot \vec{v}_i$.

PROP 1) Un vector cualquiera es combinación lineal de si mismo. 2) Un vector pertenece a un conjunto es Combinación lineal de dicho conjunto.

<u>Dem.</u>

1) $\vec{v} = 1 \cdot \vec{v} \Rightarrow \vec{v}$ es combinación lineal de $\{\vec{v}\}$

2) Sea $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, ..., \vec{v}_n\}$ un conjunto.

$$\vec{v}_i = \sum_{j=1}^{i-1} o \cdot v_j + 1 \cdot v_i + \sum_{j=i+1}^{n} o \cdot \vec{v}_j \quad \forall i : 1, ..., n$$

Luego $\vec{v}_i$ es Combinación lineal de $\{\vec{v}_1, ..., \vec{v}_n\}$

PROP Si un vector $\vec{w}$ es Combinación Lineal del conjunto $\{\vec{v}_1, ..., \vec{v}_n\}$ y cada uno de los v_i es combinación lineal del conjunto $\{\vec{u}_1, ..., \vec{u}_m\}$, entonces $\vec{w}$ es combinación lineal de $\{\vec{u}_1, ..., \vec{u}_m\}$

<u>Dem.</u>

Sabemos que $\vec{w} = \sum_{i=1}^{n} l_i \vec{v}_i$ y cada $\vec{v}_i = \sum_{j=1}^{m} m_{ij} \vec{u}_j \quad \forall_i : 1, ..., n$

Entonces $\vec{w} = \sum_{i=1}^{n} l_i \vec{v}_i = \sum_{i=1}^{n} l_i \cdot \left(\sum_{j=1}^{m} m_{ij} \vec{u}_i \right) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} l_i \cdot m_{ij} \vec{u}_j = \sum_{j=1}^{m} \left(\sum_{i=1}^{n} l_i m_{ij} \right) \cdot \vec{u}_j$

PROP Sea V un K-espacio vectorial y A un subconjunto no vacío de V. El subespacio engendrado por A, [A], es el conjunto de todos los vectores V que se pueden escribir como combinación lineal de los vectores de A.

<u>Dem.</u>

Sea A = $\{\vec{v}_1, ..., \vec{v}_n\}$

Definimos $S = \left\{ \vec{v} \in V / \exists (l_i)_{i:1,..,n} \in K \; con \; \vec{v} = \sum_{i=1}^{n} l_i \vec{v}_i \right\}$

Hemos de comprobar que S = [A], para lo cual hay que verificar tres condiciones.

S es un subespacio de V.

Sean $\vec{u}, \vec{v} \in S \Rightarrow \vec{u} = \sum_{i=1}^{n} l_i \vec{v}_i \; y \; \vec{v} = \sum_{i=1}^{n} m_i \vec{v}_i$

$$u+v=\sum_{i=1}^{n} l_i\vec{v}_i+\sum_{i=1}^{n} m_i\vec{v}_i=\sum_{i=1}^{n}\left(l_i+m_i\right)\vec{v}_i\in S \quad ya\ que\ \left(l_i+m_i\right)\in K\ \forall_i$$

$$l\cdot u=l\cdot\sum_{i=1}^{n} l_i\vec{v}_i=\sum_{i=1}^{n}\left(l\cdot l_i\right)\vec{v}_i\in S \quad ya\ que\ l\cdot l_i\in K\ \forall_i$$

Entonces S es subespacio vectorial de V.

- A⊂S

Por una proposición anterior, todo vector de un conjunto, se puede escribir como combinación lineal de dicho conjunto.

- S es el más pequeño que lo verifica.

Sea S´ un subespacio vectorial de V tal que A⊂S´.

Si $\vec{v}\in A\ y\ l_i\in K\Rightarrow l_i\cdot\vec{v}_i\in S'\ \forall_i$

Entonces $\sum_{i=1}^{n} l_i\vec{v}_i\in S'\Rightarrow S\subset S'$

OBS El conjunto $A=\{\vec{v}_1,\ldots.,\vec{v}_n\}$ es un sistema de generadores de S.

5.2. Dependencia e Independencia Lineal.

DEF Sea V un K-espacio vectorial. El conjunto $\{\vec{u}_1,\ldots.,\vec{u}_n\}$ de vectores de V diremos que es Linealmente Independiente si la relación $\sum_{i=1}^{n} l_i\vec{u}_i=\vec{o}$ se verifica solamente para $l_i=o\ \forall_i$.

DEF El conjunto $\{\vec{u}_1,\ldots.\vec{u}_n\}$ es Linealmente Dependiente cuando no es Linealmente Independiente.

OBS Es lo mismo decir que $\{\vec{u}_1,\ldots.\vec{u}_n\}$ es un conjunto Linealmente independiente y que los vectores $\{\vec{u}_1,\ldots.,u_n\}$ son linealmente independientes.

OBS Si un conjunto de vectores es Linealmente independiente, el vector $\vec{o}$ se expresa de forma única como combinación lineal de los mismos. En caso de que el vector nulo no se exprese de forma única es cuando decimos que el conjunto es linealmente dependiente.

PROP Sea V un K-espacio vectorial. Se verifica:

1) $\{\vec{o}\}$ es un conjunto linealmente dependiente.

2) $\{\vec{u}\}$ con $\vec{u} \neq \vec{o}$ es un conjunto linealmente independiente.

Dem.

1) $1 \cdot \vec{o} = \vec{o}$ es una combinación lineal del $\vec{o}$ con escalar no nulo $\Rightarrow$ $\{\vec{o}\}$ es Linealmente Dependiente.

2) Una combinación lineal de $\{\vec{u}\}$ es $\lambda\vec{u}$ y $\lambda\vec{u} = o$ si $\lambda = 0$ ya que $\vec{u} \neq o \Rightarrow \{\vec{u}\}$ es Linealmente Independiente.

PROP Sea V un K-espacio vectorial. Se verifica

1) Todo subconjunto de un conjunto Linealmente independiente es linealmente independiente.

2) Un conjunto que contenga un subconjunto linealmente dependiente es linealmente dependiente.

Dem.

Inmediata.

COROLARIO Sea V un K-espacio vectorial. Se verifica:

1) Todo vector de un conjunto linealmente independiente es no nulo.

2) Si un conjunto contiene al vector $\vec{o}$ es linealmente dependiente.

Dem.

Inmediata.

PROP Sea V un K-espacio vectorial. El conjunto $\{\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_n\}$ es linealmente dependiente si y sólo si al menos uno de ellos es combinación lineal del resto.

Dem.

"$\Rightarrow$" Si $\{\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_n\}$ son L. D. $\Rightarrow \exists \lambda_1, \ldots, \lambda_n \in K$ no todos nulos tal que $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \vec{u}_i = \vec{o}$

Sea $\lambda j \neq o$ con $j \in \{1, \ldots, n\} \Rightarrow \exists\, \lambda_j^{-1} \in K$

$$\lambda_j^{-1} \cdot \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \vec{u}_i = \lambda_j^{-1} \cdot \vec{o} \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} \left(\lambda_j^{-1} \lambda_i\right) \vec{u}_i = \vec{o} \Rightarrow u_j + \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{n} \left(\lambda_j^{-1} \lambda_i\right) \vec{u}_i = \vec{o} \Rightarrow u_j = -\sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{n} \left(\lambda_j^{-1} \lambda_i\right) \vec{u}_i$$

"$\Leftarrow$" Supongamos que u_j es combinación lineal del resto.

Entonces $\exists(\lambda_i)\in K / u_j = \sum_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{n} \lambda_i \cdot \vec{u}_i \Rightarrow$ Si tomamos λj = -1 podemos escribir $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \vec{u}_i = \vec{o}$ y no todos los escalares son nulos $\Rightarrow$ $\{\vec{u}_1,\ldots,\vec{u}_n\}$ son L. D.

PROP Sea V un K-espacio vectorial. Si un vector es combinación lineal de un conjunto $\{\vec{u}_1,\ldots,\vec{u}_n\}$ de vectores linealmente independientes entonces dicha combinación lineal es única.

<u>Dem.</u>

Sea $\vec{u}\in V$ un vector tal que $\vec{u} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \vec{u}_i$ con $\lambda_i \in K\ \forall_i$.

Supongamos que $\exists \mu_1,\ldots,\mu_n \in K$ tal que $\vec{u} = \sum_{i=1}^{n} \mu_i \vec{u}_i$

$$\vec{o} = \vec{u} - \vec{u} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \vec{u}_i - \sum_{i=1}^{n} \mu_i u_i = \sum_{i=1}^{n} (\lambda_i - \mu_i)\vec{u}_i$$

Como $\{u_1,\ldots\ldots,u_n\}$ son L. I. $\Rightarrow$ $\lambda_i - \mu_i = o$ $\forall_i \Rightarrow \lambda_i = \mu_i$ $\forall_i$

Por tanto, la C. L. es única.

PROP Si el conjunto $\{u_1,\ldots\ldots,u_n\}$ es linealmente dependiente y es un sistema generador para el K-espacio vectorial V, entonces existe un vector $u_j \in \{u_1,\ldots,u_n\}$ tal que el conjunto $\{u_1,\ldots, u_{j-1}, u_{j+1},\ldots, u_n\}$ sigue siendo un sistema generador de V.

<u>Dem.</u>

Como $\{u_1,\ldots\ldots,u_n\}$ es L. D. $\exists u_j \in \{u_1,\ldots\ldots,u_n\} / u_j = \sum_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{n} \lambda_i \vec{u}_i$

Vamos a comprobar que $\{u_1,\ldots\ldots,u_{j-1},u_{j+1},\ldots,u_n\}$ es Sist. Generador de V.

$\forall \vec{u}\in V \quad \exists \mu_i \in K \quad \forall i:1,\ldots\ldots,n / \vec{u} = \sum_{i=1}^{n} \mu_i \vec{u}_i$ ya que $\{u_1,\ldots\ldots,u_n\}$ es S. G de V.

$$\vec{u} = \sum_{i=1}^{n} \mu_i \vec{u}_i = \sum_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{n} \mu_i \vec{u}_i + \mu_j \vec{u}_j = \sum_{\substack{i=j\\ i\neq j}}^{n} \mu_i \vec{u}_i + \mu_j \cdot \sum_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{n} \lambda_i \vec{u}_i = \sum_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{n} (\mu_i + \mu_j \lambda_i)\vec{u}_i$$

Entonces $\forall \vec{u}\in V$ $\vec{u}$ es C. L. de $\{u_1,\ldots,u_{j-1},u_{j+1},\ldots\ldots,u_n\}$ luego es un sistema de generadores de V.

PROP Sea V un K-espacio vectorial, $L = \{\vec{u}_1, ..., \vec{u}_n\}$ un conjunto linealmente independiente y $\vec{v} \in V$ tal que $\vec{v} \notin L$ siendo $L \cup \{\vec{v}\}$ un conjunto linealmente dependiente. Entonces $\vec{v} \in [L]$.

Dem.

Sea $\sum_{i=1}^{n} l_i \vec{u}_i + l_o \vec{v} = \vec{o}$ una combinación lineal del vector $\vec{o}$.

Como $L \cup \{\vec{v}\}$ es L. D. $\Rightarrow$ $\exists\, l_j \in K$ con j: 0,…., n no nulo.

- Si $\lambda_o = 0 \Rightarrow$ Es escalar no nulo tendría que ser λ_j con j 1,…., n pero eso entra en contradicción con que L es L. I.

- Luego $\lambda_o \neq 0 \Rightarrow \exists\, l_o^{-1} \in K$ y por tanto

$$\vec{v} = \sum_{i=1}^{n} \left(- l_o^{-1} \cdot l_i\right) \vec{u}_i \in [L]$$

5.3. Bases y Dimensiones.

DEF Sea un conjunto $B = \{\vec{u}_1, ..., \vec{u}_n\}$ de vectores del K-espacio vectorial V. Diremos que B es una Base de V si B es un conjunto Linealmente Independiente y Sistema Generador de V.

OBS Si $\vec{v} \in V$ *es* $\vec{v} = \sum_{i=1}^{n} l_i \vec{u}_i$ *con* $\{\vec{u}_1, ..., \vec{u}_n\}$ base de V, la expresión es única y λ_i recibe el nombre de componente i-ésima del vector $\vec{v}$ en la base $\{u_1, ..., u_n\}$.

DEF Diremos que el K-espacio vectorial V es finitamente generado si existe $\{\vec{u}_1, ..., \vec{u}_m\}$ un conjunto finito sistema generador de V.

PROP Sea V un K-espacio vectorial, S un conjunto finito sistema generador de V y L⊂S un subconjunto linealmente independiente. Entonces una base B tal que L⊂B⊂S.

Dem.

Vamos a considerar el conjunto de conjuntos $C(G) = \{G \,/\, L \subset G \subset S \text{ y } G \text{ es } L.I.\}$

Este conjunto es no vacío ya que, al menos, A pertenece a él.

Sea B∈C(G) un conjunto tal que Card (B) ≥ Card (G) ∀G∈C(G)

- B es L. I. ya que B∈C(G)

- Si Card (B) = Card (S) ⇒ B = S y B es S. G. de V.

Supongamos B ≠ S. Sea $\vec{v}\in$ S – B. ⇒ $B\cup\{\vec{v}\}$ es L. D. ⇒ Por una proposición anterior $\vec{v}\in[B]$.

$$\vec{u}\in V \Rightarrow \vec{u} = \sum_{\vec{u}_i\in S} l_i\vec{u}_i = \sum_{\vec{u}_i\in B} l_i\vec{u}_i + \sum_{\vec{u}_i\in S-B} l_i\vec{u}_i = \sum_{\vec{u}_i\in B} l_i u_i + \sum_{\vec{u}\in S-B} l_i \cdot \left(\sum_{u_j\in B} m_j\vec{u}_j\right) =$$

$$= \sum_{\vec{u}_i\in B} l_i u_i + \sum_{\vec{u}_i\in B}\left(\sum_{\vec{u}_i\in S-B} l_i m_j\right)\cdot\vec{u}_i = \sum_{\vec{u}_i\in B}\left(l_i + \sum_{\vec{u}_K\in S-B} l_K m_j\right)\cdot\vec{u}_i \in [B]$$

Entonces B es S. G. de V.

Si B es L. I. y S. G. de V ⇒ B es base de V.

COROLARIO Todo K-espacio vectorial V finitamente generado y no nulo (V $\neq\{\vec{o}\}$) posee una base.

Dem.

Como V es finitamente generado, sea S un conjunto finito de generadores de V. Como $V=\{\vec{o}\}\Rightarrow\exists\vec{u}\in V / \vec{u}\neq\vec{o}$. Sea $L=\{\vec{u}\}$ que es L. I.

Aplicando la proposición anterior, existe B base tal que L⊂B⊂S.

COROLARIO Sea V un K-espacio vectorial finitamente generado y N un subconjunto finito linealmente independiente de V. Entonces existe un subconjunto finito N´ de V tal que N∪N´ es base de E.

Dem.

Como V es finitamente generado, sea S un conjunto S. G. de V. Aplicando la proposición anterior tomando S = S∪N y L = N entonces ∃B base tal que N⊂B⊂S∪N

Basta tomar N´ = B – N para demostrar lo pretendido.

OBS Podemos deducir que este corolario que dado un conjunto de vectores linealmente independientes de un K-espacio vectorial V finitamente generado, siempre se puede extender ese conjunto a una base, añadiendole vectores adecuados.

Veamos ahora que relación existe entre dos conjuntos que sean base de un mismo K-espacio vectorial V.

TEOREMA Teorema de la Base.

Todas las bases de un mismo K-espacio vectorial finitamente generado tienen el mismo número de elementos.

Dem.

Sean B y B´ dos bases de V. Si Card (B) = n y Card (B´) = m hemos de comprobar que n = m.

Sea $B=\{\vec{u}_1,\dots\dots,u_n\}$ y $B'=\{\vec{v}_1,\dots\dots,\vec{v}_m\}$

$\forall \vec{v}_j \in B'$ $\vec{v}_j = \sum_{i=1}^{n} l_{ij}\vec{u}_j$ por ser $B=\{\vec{u}_1,\dots.,\vec{u}_n\}$ base de V.

Sea el conjunto $B\cup\{v_1\}$ que es S. G. ya que B es S. G. y L. D. ya que $\vec{v}_1$ es combinación lineal de B.

Podemos extraer una base $B_1=\{\vec{v}_1,\vec{u}_1,\dots\dots,\vec{u}_p\}$ con p < n y 1 + p ≤ n.

Repitiendo el proceso, el conjunto $B_1\cup\{\vec{v}_2\}$ es S. G. y L. I.

Podemos extraer una base $B_2=\{\vec{v}_1,\vec{v}_2,\vec{u}_1,\dots.,\vec{u}_s\}$ s < p y 2 + s ≤ n.

Reiterando el proceso m veces encontramos una base

$$B_m=\{\vec{v}_1,\vec{v}_2,\dots.,\vec{v}_m,\vec{u}_1,\dots\vec{u}_r\} \text{ con } m \le m + r \le n \Rightarrow m \le n.$$

Si realizamos el mismo razonamiento, pero invirtiendo los papeles de B y B´ llegamos, después de n pasos, a una base

$$B_n'=\{\vec{u}_1,\dots,\vec{u}_n,\vec{v}_1,\dots,\vec{v}_t\} \text{ con } n \le n + t \le \Rightarrow n \le m$$

Luego n = m.

DEF Llamamos dimensión de un K-espacio vectorial finitamente generado al número de vectores de una cualquiera de sus bases. Se representa por dim V.

COROLARIO Si V es un K-espacio vectorial de dimensión n y B es un conjunto de vectores linealmente independientes tal que Card (B) = n, entonces B es base de V.

Dem.

Por un corolario previo, existe B´ finito tal que B∪B´ es base de V.

Entonces Card (B∪B´) = n

Y como Card (B) = n $\Rightarrow$ B´ $\neq \emptyset$ y B es base de V.

COROLARIO Si V es un K-espacio vectorial de dimensión finita y K es un conjunto de vectores linealmente independientes, entonces Card (L) $\leq$ dim V.

Dem.

Supongamos que Card (L) > dim V $\Rightarrow \exists$L´$\subset$L formado por dim V vectores y L. I.

Por el corolario anterior L´ es base.

Sea v$\in$L – L´ $\Rightarrow$ v es C. L. de los vectores de L´ $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ L´$\cup${v} es L. D. y como L´$\cup${v}$\subset\Rightarrow$ L es L. D.

lo que es una contradicción con la hipótesis.

Luego la suposición es falsa y Card (L) $\leq$ dim V.

5.4. Bases y Aplicaciones Lineales.

PROP Sean V_1 y V_2 K-espacios vectoriales de dimensión finita, $B_1 = \{\vec{u}_1,....,\vec{u}_n\}$ una base de V_1 y $B_2 = \{\vec{v}_1,...,\vec{v}_n\}$ un conjunto de vectores que V_2. Entonces existe una única aplicación lineal f: $V_1 \rightarrow V_2$ tal que $f(\vec{u}_i) = \vec{v}_i \ \forall i = 1,...,n$ verificándose que f es un isomorfismo si y solo si B_2 es base de V_2.

Dem.

- Existencia de f.

Sabemos que $\forall \vec{u} \in V_1 \quad \vec{u} = \sum_{i=1}^{n} l_i \vec{u}_i \quad con \quad l_i \in K \quad \forall_i$

Definimos $f(\vec{u}) = \sum_{i=1}^{n} l_i \vec{v}_i$

- f es lineal

Sean $\vec{u} = \sum_{i=1}^{n} l_i \vec{u}_i \quad y \quad \vec{v} = \sum_{i=1}^{n} m_i \vec{u}_i$ vectores de V_1 y $\lambda \in$K.

$$f(u+v) = f\left(\sum_{i=1}^{n}(l_i + m_i)\vec{u}_i\right) = \sum_{i=1}^{n}(l_i + m_i)\vec{v}_i = \sum_{i=1}^{n} l_i\vec{v}_i + \sum_{i=1}^{n} m_i\vec{v}_i = f(\vec{u}) + f(\vec{v})$$

$$f(l \cdot \vec{u}) = f\left(\sum_{i=1}^{n}(l \cdot l_i)\vec{u}_i\right) = \sum_{i=1}^{n} l\, l_i\vec{v}_i = l \cdot \sum_{i=1}^{n} l_i\vec{v}_i = lf(\vec{u})$$

- Podemos afirmar que $f(\vec{u}_i) = \vec{v}_i \quad \forall_i$

• Unicidad de f.

Sea g: $V_1 \to V_2$ lineal tal que $g(\vec{u}_i) = \vec{v}_i \quad \forall_i$

Dado $\vec{u} = \sum_{i=1}^{n} l_i \vec{u}_i$

$$g(\vec{u}) = \sum_{i=1}^{n} l_i g(u_i) = \sum_{i=1}^{n} l_i \vec{v}_i = f(\vec{u})$$

Por tanto g = f.

Veamos ahora la segunda parte.

Es fácil comprobar que; * Si quieres compruébalo*

1) f inyectiva $\Leftrightarrow$ B_2 es L. I.

2) f suprayectiva $\Leftrightarrow$ B_2 es S. G.

Por tanto, se deduce que f es biyectiva $\Leftrightarrow$ B_2 es base de V_2.

COROLARIO Sean V_1 y V_2 K-espacios vectoriales de dimensión finita.

$$V_1 \cong V_2 \Leftrightarrow \dim V_1 = \dim V_2$$

<u>Dem.</u>

"$\Rightarrow$" Sea f: $V_1 \to V_2$ isomorfismo y $B_1 = \{\vec{u}_1, ..., \vec{u}_n\}$ base de V_1.

Por el teorema anterior $B_2 = \{f(\vec{u}_1), ..., f(\vec{u}_n)\}$ es base de V_2.

Es claro que Card (B_1) = Card (B_2) $\Rightarrow$ dim V_1 = dim V_2.

"$\Leftarrow$" Sea $B_1 = \{\vec{u}_1, ..., \vec{u}_n\}$ y $B_2 = \{\vec{v}_1, ..., \vec{v}_n\}$ bases de V_1 y V_2 respectivamente. El teorema anterior nos dice que la única aplicación lineal f: $V_1 \to V_2$ tal que $f(\vec{u}_i) = v_i \quad \forall_i : 1, ..., n$ tiene que ser isomorfismo. Entonces V_1 y V_2 son isomorfos.

<u>5.5. Dimensión de Subespacios y Espacios Cociente.</u>

PROP Sea V un K-espacio vectorial, B base de V, W el subespacio vectorial engendrado por un subconjunto B´ de B con B´ $\neq$ B. Entonces el conjunto B – B´ es base de V/W.

Dem.

Sea $B=\{\vec{u}_1,....,\vec{u}_n\}$ y, por ejemplo, $B'=\{\vec{u}_1,...,\vec{u}_s\}$ con s < n.

Por hipótesis $W=[B']$ y $B-B'=\{\vec{u}_{s+1},....,\vec{u}_n\}$

• Comprobemos que B – B´ es S. G. de V/W.

Sea $[\vec{v}]\in$ V/W. Como B es base de V $\Rightarrow$ $\vec{v}=\sum_{i=1}^{n} l_i\vec{u}_i$

Por tanto $[\vec{v}]=\sum_{i=1}^{n} l_i\cdot[\vec{u}_i]=\sum_{i=S+1}^{n} l_i[\vec{u}_i]$

ya que $[\vec{u}_i]=[\vec{o}]\,\forall_i:1,...,S$ porque $\vec{u}_i\in W \quad \forall_i:1,...,S$

• B – B´ es L. I.

Sea $\sum_{i=S+1}^{n} l_i[\vec{u}_i]=[\vec{o}]\Rightarrow\sum_{i=S+1}^{n} l_i\vec{u}_i\in W$

Como B´ es base de W $\sum_{i=S+1}^{n} l_i\vec{u}_i=\sum_{i=1}^{S} l_i\vec{u}_i\Rightarrow\sum_{i=1}^{S} l_i\vec{u}_i-\sum_{i=S+1}^{n} l_i\vec{u}_i=\vec{o}$

Por ser B base de V, en particular son L. I. $\Rightarrow$ $\lambda_i = 0$ $\forall$i: 1,…..,n

Entonces $\lambda_i = 0$ $\forall$i: S+1,….,n y B – B´ son L. I.

Por tanto B – B´ es base de V/W.

PROP Sea V un K-espacio vectorial de dimensión finita y W un subespacio vectorial de V. Se verifica la relación

$$\dim V = \dim W + \dim V/W$$

Dem.

$$Si \quad W=\{\vec{o}\}\Rightarrow V/\{\vec{o}\}\cong V \quad y \quad \dim W=0, \dim V/W=\dim V$$
$$Si \quad W=V\Rightarrow V/V\cong\{\vec{o}\} \quad y \quad \dim V/W=0, \dim V=\dim W$$

En caso contrario, sea $\{\vec{u}_1,...,\vec{u}_s\}$ base de W y se puede extender a $\{\vec{u}_1,...,\vec{u}_s,...,\vec{u}_n\}$ base de V.

Por la proposición anterior $\{u_{s+1},....,u_n\}$ es base de V/W y

$$\dim \cdot V = n, \dim W = S \quad \dim V/W = n - S$$

verificándose la igualdad

$$\dim V = \dim W + \dim V/W$$

COROLARIO Si U_1 y U_2 son subespacios de un K-espacio vectorial V, se satisface la igualdad

$$\dim (U_1 + U_2) + \dim (U_1 \cap U_2) = \dim U_1 + \dim U_2$$

<u>Dem.</u>

Por el 3er teorema de isomorfía:

$$U_1 + U_2 \big/ U_1 \cong U_2 \big/ U_1 \cap U_2$$

y podemos afirmar que $\dim U_1 + U_2 \big/ U_1 = \dim U_2 \big/ U_1 \cap U_2$

Aplicando la proposición anterior obtenemos

$$\dim (U_1 + U_2) - \dim U_1 = \dim U_2 - \dim (U_1 \cap U_2)$$

de lo cual se deduce la igualdad a comprobar.

OBS Si la suma es directa $\Rightarrow \dim (U_1 \oplus U_2) = \dim U_1 + \dim U_2$

6. ESPACIOS VECTORIALES COMPLEMENTARIOS.

DEF Sea V un K-espacio vectorial y W un subespacio vectorial de V. Diremos que U es un subespacio vectorial complementario de W si $V = W \oplus U$.

PROP Sea V un K-espacio vectorial de dimensión finita. Todo subespacio W de V admite complementario.

<u>Dem.</u>

Denotemos por U el complementario de W.

Si $W = \{\vec{o}\} \Rightarrow U = V$

Si $W = V \Rightarrow U = \{\vec{o}\}$

Supongamos que W es un subespacio no trivial.

Sea B una base de W (W es una dimensión finita al serlo V).

∃B´ subconjunto de $V/_{B \cup B'}$ es base de V.

Veamos que U = [B´]

- $\forall \vec{u} \in V \quad \vec{u} = \sum_{\vec{v}\in B} l_v \cdot \vec{v} + \sum_{\vec{v}\in B'} l_{v'} \cdot \vec{v}' \Rightarrow V = W + U$
- $\dim(W \cap U) = \dim W + \dim U - \dim(W + U) = 0 \Rightarrow W \cap U = \{\vec{o}\}$