TEMAS DE MATEMÁTICAS
(Oposiciones de Secundaria)

TEMA 20

EL LENGUAJE ALGEBRAICO. SÍMBOLOS Y NÚMEROS. IMPORTANCIA DE SU DESARROLLO Y PROBLEMAS QUE RESUELVE. EVOLUCIÓN HISTÓRICA DEL ÁLGEBRA.

TEMA 20

EL LENGUAJE ALGEBRAICO. SÍMBOLOS Y NÚMEROS. IMPORTANCIA DE SU DESARROLLO Y PROBLEMAS QUE RESUELVE. EVOLUCIÓN HISTÓRICA DEL ÁLGEBRA.

1. EL LENGUAJE ALGEBRAICO.

La notación algebraica se ha desarrollado a lo largo de la historia, pasando por tres etapas sucesivas.

La primera etapa recibe el nombre de *álgebra terminológica*. Se caracteriza por una ausencia total de símbolos. Se utilizan palabras siguiendo su sentido algebraico. Así, cuando se dice que "la suma de dos números es independiente del orden de los mismos" se está refiriendo a que $a+b=b+a$ (siguiendo la notación actual).

En la etapa siguiente aparece el *álgebra sincopada*. Aquellas palabras de utilización más habitual se abrevian, apareciendo auténticos ideogramas algebraicos. Dicha abreviación fue cada vez a más, llegando a aparecer símbolos que ya no tenían ninguna relación con las palabras que representaban. Así fue como la palabra sincopada acabó adquiriendo el valor de un auténtico símbolo algebraico.

Por ejemplo, en Europa, la palabra latina *minus* representaba la sustracción entre dos cantidades. En un primer paso se abrevió por $\overline{m}$ y al final, se prescindió de la m quedando "-".

Los matemáticos indios se quedaron en esta etapa, ya que nunca tuvieron intención de utilizar otros símbolos que no fuesen las primeras sílabas de sus palabras para indicar las operaciones consideradas.

Fueron los árabes los que realizaron los avances más espectaculares hacia el álgebra actual. Gracias a su sentido práctico y capacidad de síntesis, fueron capaces de dirigir la aritmética hacia una técnica de operaciones algebraicas, para convertirla en una ciencia constructiva y positiva.

La última etapa recibe el nombre de *álgebra simbólica actual*. Esta etapa comienza a partir de los esfuerzos y contribuciones de los matemáticos europeos del Renacimiento y de la época clásica.

Fibonacci, Gerolamo Cardano, François Viète, René Descartes, etc., son algunos de los principales matemáticos que proporcionaron, gracias a sus contribuciones, el paso del raciocinio específico al raciocinio global. Afirmaba Condillac que "el álgebra es a los números árabes lo que éstos son a los romanos", lo cual es debido a que el álgebra es la única lengua bien hecha y a que las matemáticas actuales son una ciencia bien tratada.

Podemos encontrar una analogía impresionante entre la historia del álgebra y la de la aritmética. La humanidad ha chocado durante muchos siglos con numeraciones que no utilizaban la regla de posición ni el cero para representar cantidades nulas. En el álgebra, la falta de una notación general, ha reducido esta ciencia a una colección de reglas establecidas al azar para resolver las ecuaciones numéricas. Al igual que el descubrimiento del cero es el inicio de la aritmética moderna, la notación literal fue el comienzo de una nueva era en la historia del álgebra.

Las proposiciones matemáticas habían estado, bien encerradas en un lenguaje terminológico puro sometido al azar de las interpretaciones, bien bloqueadas en un pensamiento semiconcreto que sigue una regla general pero que opera sobre casos concretos. Antes de la notación general solo se había trabajado con expresiones específicas, que no podían ser tratadas más que por sus propiedades individuales.

Por el contrario, la propia idea de emplear sistemáticamente letras para designar variables, incógnitas o constantes indeterminadas ha liberado al álgebra del yugo ejercido desde siempre por el verbo. En oposición con los vocablos y las abreviaturas heterogéneas empleados hasta entonces para expresar ideas preconcebidas como los números, nuestra x actual es totalmente independiente de la naturaleza de los elementos particulares que representa.

Todo esto es equivalente a decir que la notación literal a permitido pasar de lo individual a lo general. Dicho de otra manera, al realizar la equivalencia entre las proposiciones matemáticas expresadas de manera verbal y literaria y las expresiones correspondientes formadas exclusivamente por letras y símbolos que representan números cualesquiera, se ha podido, a partir de entonces, pasar de un razonamiento individual, referido a propiedades específicas, a un razonamiento global sobre las propiedades comunes a todos los casos de una misma especie, elevando desde entonces la ciencia algebraica a un nivel muy superior al de una simple estenografía circunstanciada.

Y todo esto es lo que ha hecho posible elaborar la teoría general de funciones, la algebraización del análisis y el desarrollo de la geometría analítica.

2. SÍMBOLOS Y NÚMEROS.

Ya hemos visto que el álgebra utiliza letras y otros símbolos apropiados para representar expresiones y resultados generales. Muchos de esos símbolos han evolucionado a lo largo de la historia hasta alcanzar la forma con que los conocemos hoy en día. Al utilizar los símbolos hemos de tener en cuenta de forma clara qué representa cada uno de ellos.

En la representación de cantidades hacemos uso de letras. Para las letras utilizamos cualquiera de las que nos encontramos en el alfabeto. Si no tenemos suficiente podemos añadirles subíndices y superíndices u otros elementos del lenguaje como ‘ para denotar, por ejemplo, a’ y se lee *a prima*. También es común la utilización de las letras del alfabeto griego, tanto en minúsculas como en mayúsculas.

Para poder relacionar las cantidades anteriores utilizamos operadores como =, <, >, ≠, ≥, ≤, de los que no es preciso indicar su significado, por todos conocido.

Las operaciones que podemos realizar con las cantidades expresadas mediante letras son las mismas que si fuesen números. Tenemos la suma, +, la resta, -, producto, división, potencia, raíz, etc.

3. PROBLEMAS QUE RESUELVE.

3.1. Álgebra Lineal.

Estudio de los espacios vectoriales, que permite definir los espacios afines abstractos y en general toda la geometría.

Estudio y desarrollo de determinantes y matrices, que nos va a permitir realizar el estudio de sistemas de ecuaciones lineales, y también como medio para describir aplicaciones entre espacios vectoriales de dimensión finita y de aplicaciones afines entre espacios afines.

Estudio de formas bilineales y cuadráticas en espacios normados, que permiten sistematizar la geometría métrica.

Al trabajar con subespacios invariantes nos encontramos con el cálculo de los valores propios de una matriz así como el estudio de sus formas normales. También el estudio de valores propios aparece, por ejemplo, a la hora de clasificar las hipercuádricas.

3.2. Álgebra Elemental.

El uso de fórmulas sigue siendo uno de los métodos más empleados en aquellos problemas en los que haya dependencia de variables de cualquier tipo.

El método algebraico, aparece en otras áreas del conocimiento, no sólo en Matemáticas. Nos encontramos aplicaciones en Física, Ingeniería, etc. Aquellas partes del álgebra más desarrolladas también han encontrado aplicación en la Mecánica Cuántica.

3.3. Resolución de Ecuaciones.

La determinación de soluciones de una ecuación algebraica de grado n provocó la aparición de numerosas técnicas, muchas de las cuales se utilizan en campos impensados por los matemáticos que las idearon. Entre ellas tenemos la teoría de Galois, extensiones transcendentes de cuerpos, teoría de grupos, métodos de iteración, etc.

Muchos problemas de matemáticas, física, química, ingeniería, etc. necesitan para su resolución de un cálculo algebraico más o menos complicado. En algunos de esos problemas, los símbolos no denotan números, sino otro tipo de entidades como pueden ser vectores.

3.4. Programación Lineal.

Es una de las aplicaciones más modernas del álgebra. Resuelve gran cantidad de problemas de optimización. Se trata de encontrar el mínimo de una determinada función dentro de un subconjunto. En caso de que exista, hay que calcular tanto el mínimo como en el lugar donde se alcanza. Se dice que el problema es de programación lineal cuando la aplicación es una forma lineal y el subconjunto viene dado por un conjunto de desigualdades lineales.

3.5. Aplicaciones a otras ramas de la matemática.

Como consecuencia del proceso de sistematización de la matemática llevado a cabo a lo largo del siglo pasado, la interrelación entre las diferentes ramas de la matemática es total. Así, el álgebra se usa a menudo en campos tan dispares como el Análisis Numérico, Teoría de Ecuaciones Diferenciales, Análisis Funcional, Investigación Operativa, Topología Algebraica, etc.

4. EVOLUCIÓN HISTÓRICA DEL ÁLGEBRA.

4.1. Álgebra Egipcia.

En el papiro de Ahmes nos podemos encontrar con problemas que podemos clasificarlos como algebraicos. Estos problemas no se refieren a objetos concretos ni piden el resultado de operaciones con números conocidos. Se trata de resolver ecuaciones lineales de la forma $x+ax=b$ o $x+ax+bx=c$ siendo a, b, c números conocidos y x desconocido, que recibe el nombre de *aha* o *montón*.

4.2. Álgebra Babilónica.

Conocemos una tabla de la que hacían gran uso los babilonios. Se trata de una tabulación para valores n naturales de n^3+n^2, y que jugó un papel esencial en el álgebra babilónica. La resolución de la ecuación de segundo grado no ofrecía ninguna dificultad importante, dada la flexibilidad que habían desarrollado en las operaciones algebraicas. Podían transponer términos de una ecuación sumando igualdades, eliminar factores multiplicando ambos miembros por cantidades iguales, sumando $4ab$ a $(a-b)^2$ lo podían transformar en $(a+b)^2$, etc.

No usaban letras para denotar cantidades desconocidas puesto que todavía no tenían alfabeto, pero utilizaban palabras como *longitud*, *área*, y otras para dicho fin.

El álgebra egipcia se había centrado en la resolución de ecuaciones lineales, algo que los babilonios consideraron elemental. En problemas de la época nos encontramos con que resolvían sistemas de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas.

La resolución de ecuaciones cuadráticas completas superó en mucho la capacidad algebraica de los egipcios, pero no así de los babilonios. Éstos las clasificaron en tres tipos que reducidas a sus formas canónicas son:

a) $x^2+px=q$
b) $x^2=px+q$

c) $x^2+q=px$

Los babilonios sólo supieron resolver aquellas con soluciones reales, ya que desconocían los complejos.

El álgebra mesopotámica alcanzó un alto grado de flexibilidad, que queda demostrado al ser capaces de reducir una ecuación cuadrática de la forma $ax^2+bx=c$ a su forma normal $y^2+by=ac$ por medio del cambio de variable $y=ax$.

4.3. Álgebra Griega.

En época de Platón, la dicotomía existente entre número y magnitud continua exigía un nuevo planteamiento del álgebra babilónica que habían heredado los pitagóricos. Había que construir un *álgebra geométrica* que generalizase y ocupase el lugar de la vieja *álgebra aritmética*. En esta nueva álgebra ya no se podrían sumar segmentos con áreas o áreas con volúmenes, como hacían los babilonios, sino que tenía que haber una homogeneidad estricta de los términos de las ecuaciones. Las formas canónicas mesopotámicas, $x \cdot y=A$, $x \pm y=b$, deberían ser interpretadas geométricamente. Así, los griegos consiguieron resolver las ecuaciones cuadráticas por medio de procedimientos que formaban parte del álgebra geométrica, que aparece tratada de manera muy completa en los *Elementos* de Euclides. El álgebra geométrica griega era excesivamente artificial y difícil, pero era considerada cómoda por aquellos que la manejaron con asiduidad.

El Libro II es uno de los más cortos de los que componen la obra de los *Elementos* de Euclides. Consistía en un álgebra geométrica que les servía más o menos para los mismos fines que nuestra álgebra simbólica. Los *Elementos* fueron la primera obra matemática griega de importancia que ha llegado hasta nosotros. Fue escrito hacia el 300 a.C.

La matemática griega no se mantuvo uniformemente a un nivel alto, sino que el glorioso periodo del siglo III a.C. fue seguido de una época de decadencia que no se recuperó hasta la "Edad de Plata" de la matemática griega, que abarca desde el año 250 al 350 aproximadamente.

La *Arithmetica* de Diofanto constituía un tratado que se caracterizaba por el alto grado de habilidad matemática y de ingenio. Este libro no tenía nada que ver con la matemática griega tradicional, ya que no seguía los métodos geométricos y recordaba mucho al álgebra babilónica tradicional. Este tratado está dedicado casi completamente a la resolución exacta de ecuaciones determinadas e indeterminadas.

A lo largo de los seis libros que nos han llegado de la *Arithmetica*, podemos ver que se hace uso de ciertas abreviaturas par potencias de números y para relaciones y operaciones entre ellos. Un número desconocido o incógnita se representa por un símbolo que se parece a la letra griega *s*. Diofanto conocía las reglas de combinación equivalentes a nuestras leyes para operar con los exponentes, y tenía además nombres especiales para los inversos de las seis primeras potencias de la incógnita, lo que equivale a nuestras potencias negativas. Podemos afirmar que Diofanto ha tenido una influencia mucho mayor sobre la teoría de números moderna que cualquier otro algebrista no-geométrico griego.

4.4. Álgebra China.

En el documento *Chou Pei* (se cree que es del 300 aC.) nos encontramos con algunas indicaciones relativas al teorema de Pitágoras, que es tratado algebraicamente por los chinos.

Casi tan antiguo como el *Chou Pei* es el *Chui-chang suan-shu*, o los *Nueve Capítulos sobre el Arte Matemático*. El capítulo ocho de los *Nueve Capítulos* tiene una gran importancia por contener problemas que conducen a sistemas de ecuaciones lineales, utilizando números positivos y negativos.

El matemático chino Chu Shih-Chieh, escribió dos tratados siendo el segundo, *Ssu-yüan yü-Chien* o Espejo Precioso de los Cuatro Elementos (1303), el que mayor interés matemático tiene. Los cuatro elementos a que se refiere el título (el cielo, la tierra, el hombre y la materia) representan cuatro incógnitas de una ecuación. Este libro marca la cota más alta que alcanzó el desarrollo del álgebra china, y en él se estudian tanto sistemas de ecuaciones simultáneas como ecuaciones individuales de grados tan altos como el 14. El autor explica en el libro un método de transformación para ecuaciones que en occidente se conoce como *Método Horner*, matemático que vivió 500 años después.

4.5. Álgebra India.

Fue el matemático hindú Brahmagupta quien realizó las contribuciones más importantes al álgebra. Dio soluciones generales de ecuaciones cuadráticas, incluyendo las dos raíces aun en casos en que una de ellas es negativa. Aparece sistematizada la aritmética de números negativos y el cero surge por primera vez.

A los hindúes les corresponde el mérito de considerar como números las raíces irracionales de otros números, algo que no hicieron los griegos. El álgebra hindú es notable por su desarrollo del análisis indeterminado, al que Brahmagupta hizo varias contribuciones. Podemos indicar que fue este autor el que dio una solución general de la ecuación diofántica lineal $ax+by=c$ con a, b y c enteros.

Otro matemático hindú digno de mencionar fue Bhaskara (1114-1185). Completó algunos huecos de la obra de Brahmagupta. Dio una solución de la ecuación de Pell y se enfrentó al problema de la división por cero. El tratado más conocido de Bhaskara es el *Lilavati.* Contiene numerosos problemas sobre ecuaciones lineales y cuadráticas.

4.6. Álgebra Árabe.

El matemático Al-Khowarizmi es al que podemos considerar como Padre del álgebra. A partir del título de su obra más importante, *Al-jabr wa'l muqabalah*, se ha derivado el término "álgebra", cosa natural si se tiene en cuenta que fue de este libro del que aprendió más tarde Europa la rama matemática que lleva ese nombre. Ni Al-Khowarizmi ni otros matemáticos árabes hicieron uso de la sincopación ni de los números negativos. No obstante, *Al-jabr* viene a estar más próxima al álgebra elemental moderna que las obras de Diofanto o Brahmagupta, ya que este libro trata de la exposición directa y elemental de la resolución de ecuaciones, especialmente de las de segundo grado.

A los árabes les gustaba mucho poder seguir una argumentación lógica correcta y clara de las premisas a la conclusión, así como una organización sistemática.

La traducción latina del Algebra de Al-Khowarizmi comienza con una breve introducción acerca del principio de notación posicional para los números, y a continuación se expone, en seis breves capítulos, la solución de los seis tipos de ecuaciones que resultan al considerar simultáneamente en presencia los tres posibles tipos de cantidades: cuadrados, raíces, números (es decir, x^2, x y números). Los seis tipos de ecuaciones anteriores agotan todas las posibilidades de ecuaciones lineales y cuadráticas que tengan una raíz positiva.

El Algebra de Al-Khowarizmi contiene más cosas además de la resolución de ecuaciones. Nos encontramos con reglas para operar con expresiones binómicas, incluyendo productos. Aunque los árabes rechazaban las raíces negativas y, en general, todo tipo de magnitudes absolutas negativas, estaban familiarizados con las reglas que rigen las operaciones con números enteros positivos y negativos, considerados éstos como restas indicadas.

Abu'l-Wefa tradujo la *Arithmetica* de Diofanto y su sucesor, Al-Karkhi, utilizó esta traducción para convertirse en un discípulo árabe de Diofanto. A él se le atribuye la primera resolución numérica de ecuaciones de la forma $ax^{2n}+bx^n=c$, considerando únicamente raíces positivas.

4.7. Álgebra Medieval y Renacentista.

Fibonacci escribió en el año 1202 su obra *Liber abaci.* Es un tratado muy completo sobre métodos y problemas algebraicos, en el que se recomienda el uso de los numerales hindú-arábigos.

Leonardo da Pisa fue sin duda el matemático más original y más importante del mundo medieval cristiano, pero la mayor parte de su obra era demasiado avanzada para ser entendida por sus contemporáneos. En su obra *Liber Cuadratorum* encontramos una gran variedad de problemas, uno de los cuales recuerda los de Diofanto.

El primer libro de álgebra del renacimiento fue el *Triparty* de Chuquet. Pero fue el libro *Summa de arithmetica, geometrica, proportioni et proportionalita* del fraile italiano Luca Pacioli (1445-1514) el que tuvo mayor importacia, hasta eclipsar al primero. Las historias del álgebra solían pasar del *Liber Abaci* de 1202 a la *Summa* de 1494 sin mencionar ninguna obra intermedia.

En Alemania también surgieron algebristas de relevancia. A ellos les debemos los símbolos + y – para denotar la suma y la resta, en lugar de los símbolos italianos *p* y *m*. Las obras más importantes de esta época son *Coss* (1525) de Christoph Rudolff, el *Rechnung* (1527) de Peter Apian y la *Arithmetica integra* (1544) de Michael Stifel. En la primera de estas tres obras encontramos el uso de fracciones decimales, así como del símbolo moderno de las raices, en la segunda obra nos encontramos impreso el Triángulo de Pascal (un siglo antes de su nacimiento). La tercera obra fue la más importante, ya que trata de los números negativos, las raíces y las potencias, pero ninguno de los problemas que contenía conducía a una ecuación cúbica.

Fue al año siguiente, 1545, cuando se divulgó la solución de la ecuación cúbica y también de la cuártica, gracias a la publicación del *Ars Magna* de Jerónimo Cardano. Este avance tan sorprendente e inesperado supuso un impacto tan fuerte que el año 1545 se suele considerar a menudo el comienzo de la matemática moderna. Hemos de especificar que el propio Cardano explica en su obra que la solución de la ecuación cúbica la obtuvo de Niccolo Tartaglia, y la cuártica de Luigi Ferrari. Una consecuencia de la solución de la cúbica fue la aparición de un nuevo tipo de número, los complejos.

4.8. Álgebra Europea.

La introducción de la notación simbólica se asocia con el nombre de Vieta, que comenzó a escribir con letras, no sólo las incógnitas, sino también los coeficientes. Descartes también contribuyó al desarrollo de la notación simbólica. A partir de ese momento podemos afirmar que el álgebra es la ciencia de los cálculos simbólicos, de las transformaciones, de las fórmulas literales, de las ecuaciones algebraicas, etc.

Esta forma de concebir el álgebra quedo aclarada en el libro "Introducción al álgebra" de Euler, escrito en el año 1760. El libro de descompone en varias partes.

En la primera parte del libro aparece la teoría de los cálculos con números enteros, las fracciones ordinarias, las raíces cuadradas y cúbicas, la teoría de los logaritmos, las progresiones, los cálculos con polinomios, el binomio de Newton y sus aplicaciones.

En la segunda parte nos podemos encontrar con la teoría de las ecuaciones de primer grado y de los sistemas de tales ecuaciones, la teoría de las ecuaciones cuadráticas, las soluciones de las ecuaciones de tercer y cuarto grado por radicales, así como diversos métodos de resolución de ecuaciones diofánticas.

A finales del siglo XVIII, un problema comenzó a destacar sobre el resto: la teoría de la resolución de las ecuaciones algebraicas. Solucionadas las de grado tres y cuatro, aparecieron una gran cantidad de teoremas y resultados para intentar resolver este problema.

4.9. Álgebra Moderna.

Abarca desde el siglo XVIII en adelante. Siendo esta etapa la de menor duración, es también en la que más a variado la concepción original del álgebra.

A principios del siglo XVIII la pujanza del Análisis era total, hasta el punto de que la composición de fuerzas y velocidades (conocidas desde el siglo anterior) no repercutieron en el álgebra, a pesar de ser la semilla del cálculo vectorial.

A principios del XIX la noción de ley de composición se extiende a conjuntos que tienen parecido solo remoto con los números. Así destacaríamos la "teoría de las sustituciones" desarrollada a partir de las ideas de Gauss, Vandermonde y Lagrange, y que dieron lugar a la teoría de grupos.

Pero es Galois el verdadero iniciador de esta teoría. Es el primero que profundiza en los grupos de permutaciones y el primero que define subgrupo invariante. Igualmente acaba con la controversia sobre las ecuaciones algebraicas al demostrar que las ecuaciones de grado superior al cuarto no son resolubles por radicales.

Pero fueron los algebristas ingleses los que dieron el empujón claro hacia la abstracción, llegaron a la noción abstracta de ley de composición y ampliaron así el campo algebraico: el álgebra de Boole, vectores, cuaterniones y sistemas hipercomplejos con Hamilton, matrices y leyes no conmutativas con Cayley.

Paralelamente en el continente se inicia la evolución del cálculo vectorial (Moebius) y álgebra lineal (Grassmann).

La escuela alemana del siglo XIX (Dirichlet, Kronecker, Hilbert) construyó la teoría de números algebraicos, iniciada por Gauss. A partir de Gauss se introducen cuerpo, anillos, ideales,...

A lo largo del siglo XX el desarrollo del álgebra ha continuado gracias a Jordan, Sylvester, Lie, Klein, Poincaré, Sylow, etc.

Bibliografía Recomendada.

Historia de la Matemática. Carl B. Boyer (Alianza Editorial).

Historia Universal de las Cifras. Georges Ifrah (Espasa)

Elementos de historia de las Matemáticas. N. Bourbaki (Alianza Universidad)