TEMAS DE MATEMÁTICAS
(OPOSICIONES DE SECUNDARIA)

TEMA 9

EL NÚMERO COMPLEJO. APLICACIONES.

TEMA 9

EL NÚMERO COMPLEJO.APLICACIONES.

1. INTRODUCCIÓN.

En el tema 1 se definieron los números naturales. En el tema 4 ampliamos a los enteros y en el tema 5 a los racionales. La última extensión la realizamos en el tema 6, construyendo el cuerpo de los números reales. Cada una de las sucesivas ampliaciones surgió porque el conjunto original no era capaz de resolver una determinada ecuación. Ahora nos sucede lo mismo.

Partiendo del conjunto de los números reales, nos encontramos que ecuaciones como ésta, $x^2+1=0$, no tienen solución. Ello es debido a que los números negativos no tienen raíz cuadrada. Podemos generalizar este resultado a: los números negativos no tienen raíz de índice par.

Es decir $\sqrt[n]{-m}$ con n par y m positivo. Es claro, ya que si existiera, $\sqrt[n]{-m} = k$, entonces se debe verificar que $(k)^n=-m$. Y sabemos por la regla de los signos, que la potencia par de un número no es negativa.

Hemos de ampliar $\mathbb{R}$ para que se puedan calcular dichas raíces. Eso nos dará el conjunto de los números complejos.

Ya en el siglo XVI se intentó dar una solución a este problema, definiendo el símbolo $\sqrt{-1}$, que luego se representaría con la letra i. Al número i se le consideró un número ficticio o imaginario, ya que no se podía calcular. Pero permitía resolver ecuaciones como $x^2+1 = 0$ dando como resultado que x^2+1 0 $(x+i)(x-i)$, siendo $\pm i$ las dos soluciones de la ecuación.

Estos números, como +i, -i o también 1+2i, 3-i,... recibieron el nombre de números complejos. Pero no fue hasta el siglo XIX cuando, tanto Gauss como Hamilton, definieron de una forma precisa los números complejos. Se definieron como pares de números reales, (a,b), con una serie de propiedades.

2. EL CUERPO DE LOS NÚMEROS COMPLEJOS.

DEF Llamaremos conjunto de los números complejos a $\mathbb{C} = \mathbb{R}x\mathbb{R}$.
Es decir $\mathbb{C}=\{(a,b) / a\in \mathbb{R}\}$

2.1. El grupo aditivo de los números complejos.

DEF Definimos en $\mathbb{C}$ la operación suma como $+: \mathbb{C}x\mathbb{C}\to\mathbb{C}$
$\forall(a,b), (c,d)\in \mathbb{C}$ $(a,b)+(c,d) = (a+c, b+d)$.

PROP La operación suma definida anteriormente verifica las siguientes propiedades:

i) Asociativa.

ii) Conmutativa.

iii) Elemento neutro.

iv) Elemento simétrico u opuesto.

Dem

i) $\forall(a,b), (c,d), (e,f) \in \mathbb{C}$

$[(a,b)+(c,d)]+(e,f) = (a+c, b+d) + (e,f) = ((a+c)+e, (b+d)+f) =$

como en $\mathbb{R}$ se verifica la propiedad sociativa

$= (a+(c+e), b+(d,f)) = (a,b) + (c+e, d+f) = (a,b) + [(c,d)+(e,f)]$

ii) $\forall(a,b), (c,d) \in \mathbb{R}$

$(a,b) + (c,d) = (a+c, b+d) =$

como en $\mathbb{R}$ se verifica la propiedad conmutativa

$=(c+a, d+b) =(c,d) + (a,b)$

iii) $\forall(a,b) \in \mathbb{C}$

Sabemos que $0 \in \mathbb{R}$ es el neutro de la suma en $\mathbb{R}$, $\forall x \in \mathbb{R}$ $x+0 = x$.

Definimos $(0,0) \in \mathbb{C}$. Comprobamos que es el neutro:

$(a+b)+(0,0) = a+0,b+0) = (a,b)$

iv) $\forall(a,b) \in \mathbb{C} \Rightarrow a,b \in \mathbb{R} \Rightarrow \exists -a, -b \in \mathbb{R}$ / $a+(-a) = 0$ y $b+(-b) = 0$.

Sea $(-a, -b) \in \mathbb{C}$. Comprobamos que es el opuesto:

Dado $(a,b) \in \mathbb{C}$ $\exists(-a,-b) \in \mathbb{C}$ con $(a,b) + (-a,-b) = (a+(-a),b+(-b)) = (0,0)$.

Luego $(-a, -b)$ es elemento opuesto de (a,b).

Conclusión:

El conjunto $\mathbb{C}$ con la operación interna suma definida $(\mathbb{C},+)$ tiene estructura de grupo abeliano. Recibe el nombre de grupo aditivo de los números complejos.

PROP El grupo abeliano $(\mathbb{C},+)$ contiene a $(\mathbb{R},+)$.

Dem

Sea $\varphi:(\mathbb{R},+)\rightarrow(\mathbb{C},+)$ con $\forall a \in (\mathbb{R},+) \Rightarrow \varphi(a) = (a,0)$

- φ es inyectiva:

$\varphi(a) = \varphi(b) \Rightarrow (a,0) = (b,0) \Rightarrow a=b$.

- φ es homomorfismo:

$\varphi(a+b) = (a+b,0) = (a,0) + (b,0) = \varphi(a) + \varphi(b)$.

Luego $(\mathbb{R},+) \subset (\mathbb{C},+)$.

2.2 El grupo multiplicativo de los números complejos.

DEF Definimos en $\mathbb{C}$ la operación producto como $\cdot: \mathbb{C} \times \mathbb{C} \to \mathbb{C}$
$\forall\ (a,b), (c,d) \in \mathbb{C}\ \ (a,b)\cdot(c,d) = (ac-bd, ad+bc)$.

PROP La operación producto definida anteriormente verifica las siguientes propiedades:

i) Asociativa.

ii) Conmutativa.

iii) Elemento neutro.

iv) Elemento simétrico.

Dem

i) $\forall (a,b), (c,d), (e,f) \in \mathbb{C}$

$[(a,b)\cdot(c,d)](e,f) = (ac-bd, ad+bc) =$

$= ((ac-bd)\cdot e-(ad+bc)f, (ac-bd)f+(ad+bc)e) =$

$= (ace-bde-adf-bcf, acf-bdf+ade+bce) =$

$= (a,b)\cdot(cd-df,cf+de) = (a,b)\cdot[(c,d)\cdot(e,f)]$

ii) $\forall (a,b), (c,d) \in \mathbb{C}$

$(a,b)\cdot(c,d) = (ac-bd, ad+bc) = (ca-db, da+cb) = (c,d)\cdot(a,b)$

iii) $\forall (a,b) \in \mathbb{C}$

$$(a,b)\cdot(x,y) = (a,b) \Rightarrow (ax-by, ay+bx) = (a,b) \Rightarrow \left.\begin{array}{l} ax-by=a \\ ay+bx=b \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\left.\begin{array}{l} a^2x - aby = a^2 \\ aby + b^2x = b^2 \end{array}\right\} \Rightarrow a^2x+b^2x = a^2+b^2 \Rightarrow x=1.$$

Si x=1 ⇒ ax-by = a ⇒ -by=0 ⇒ b=0 ó y=0.

Pero ⇒ ay+bx = b ⇒ ay=0 ⇒ a=0 ó y=0.

Por tanto, si (a,b)≠(0,0) ⇒ El neutro es (1,0)∈ ℂ.

Por la propiedad conmutativa se verifica (a,b)·(1,0) =(a,b) = (1,0)·(a,b).

iv) ∀(a,b)∈ ℂ* (ℂ-* = ℂ-{ (0,0) })

$$(a,b)\cdot(x,y) = (1,0) \Rightarrow (ax-by,\ ay+bx) = (1,0) \Rightarrow \left.\begin{array}{l} ax - by = 1 \\ ay + bx = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\left.\begin{array}{l} a^2x - aby = a \\ aby + b^2x = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow (a^2+b^2)x = a \Rightarrow x= \frac{a}{a^2+b^2}$$

$$\left.\begin{array}{l} ax - by = 1 \\ ay + bx = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} -abx + b^2y = -b \\ a^2y + abx = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow (a^2+b^2)y = -b \Rightarrow y= \frac{-b}{a^2+b^2}$$

Como (a,b)≠(0,0) ⇒ $a^2+b^2 \neq 0$.

Por tanto el elemento simétrico de (a,b) es $\left(\frac{a}{a^2+b^2}, \frac{-b}{a^2+b^2}\right)$

<u>Conclusión:</u>

El conjunto ℂ* con la operación producto, (ℂ,·) tiene estructura de grupo conmutativo. (ℂ*,·) recibe el nombre de grupo multiplicativo abeliano de los números complejos.

PROP El grupo (ℂ*,·) contiene a (ℝ,·).

<u>Dem</u>

Sea φ:(ℝ*,·)⟶(ℂ*,·) con ∀a∈(ℝ,·) ⇒ φ(a) =(a,0).

- φ es inyectiva:

φ(a) =φ(b) ⇒ (a,0) = (b,0) ⇒a=b.

- φ es homomorfismo:

φ(a·b) = (a·b,0) =(a,0) * (b,0) = φ(a)·φ(b)

Luego $(\mathbb{R}^*,\cdot) \subset (\mathbb{C}^*,\cdot)$

2.3. El cuerpo de los números complejos.

Una vez visto que $(\mathbb{C},+)$ y $(\mathbb{C}^*,\cdot)$ tienen estructura de grupo abeliano respecto de sus operaciones, veamos como podemos relacionar la suma y el producto de los números complejos.

PROP En $\mathbb{C}$ se verifica la propiedad distributiva del producto respecto de la suma.

Dem

Hemos de probar que $\forall(a,b), (c,d), (e,f)\in \mathbb{C}$ se verifica

$[(a,b)+(c,d)]\cdot(e,f) = (a,b)\cdot(e,f)+(c,d)\cdot(e,f)$.

Veámoslo:

$[(a,b)+(c,d)]\cdot(e,f) = (a+c, b+d)\cdot(e,f) = ((a+c)e-(b+d)f, (a+c)f+(b+d)e) =$

$= (ae+ce-bf-df, af+cf+be+de) = (ae-bf, af+be) + (ce-df, cf+de) =$

$=(a,b)\cdot(e,f) + (c,d)\cdot(e,f)$

Conclusión:

Como $(\mathbb{C},+)$ es un grupo abeliano, $(\mathbb{C}^*,\cdot)$ es un grupo abeliano, y se verifica la propiedad distributiva del producto respecto de la suma, podemos afirmar que $(\mathbb{C},+,\cdot)$ tiene estructura de cuerpo conmutativo. Diremos que $\mathbb{C}$ es el cuerpo de los números complejos.

3. INVERSÓN DE $\mathbb{R}$ EN $\mathbb{C}$.

PROP El cuerpo $(\mathbb{C},+,\cdot)$ contiene a $(\mathbb{R},+,\cdot)$.

Dem

Sea $\varphi: \mathbb{R}\to\mathbb{C}$ con $\forall a\in \mathbb{R}$ $\varphi(a) = (a,0)$.

En dos proposiciones previas ya comprobamos que:

- φ es inyectiva
- φ es homomorfismo

1) $\varphi(a+b) = \varphi(a)+\varphi(b)$

2) $\varphi(a\cdot b) = \varphi(a)\cdot\varphi(b)$

Como ya está visto, no lo vamos a volver a demostrar.

Como Imφ = $\mathbb{R}$x{0}, llamaremos números reales a los números complejos cuya segunda componenete sea nula. Cuando sea al revés, primera componenete nula,diremos que el número complejo es imaginario puro.

4. EL ESPACIO VECTORIAL DE LOS NÚMEROS COMPLEJOS.

Ya hemos visto que sobre el conjunto $\mathbb{C}$ tenemos definidos dos leyes internas, la suma y el producto. Considerando sólo la primera de ellas, ($\mathbb{C}$,+) es un grupo abeliano.

Ahora vamos a definir sobre ($\mathbb{C}$,+) una ley externa.

DEF Definimos sobre $\mathbb{C}$ la ley externa, llamada producto por un escalar, como $\cdot$: $\mathbb{R}\text{x}\mathbb{C}\rightarrow\mathbb{C}$ donde $\forall x\in\mathbb{R}$ y $\forall(a,b)\in\mathbb{C}$ $x\cdot(a,b) = (x\cdot a,\ x\cdot b)$.

PROP La operación producto por un escalar definida anteriormente verifica las siguientes propiedades:

1) Distributiva del producto con respecto a la suma.

2) Distributiva de la suma con respecto al producto.

3) Pseudo asociativa.

4) Elemento unidad.

Dem

1) $\forall x\in\mathbb{R}$ $\forall(a,b),(c,d)\in\mathbb{C}$

$$x\cdot[(a,b)+(c,d)]= x\cdot(a+c,\ b+d)= (x(a+c),\ x(b+d)) = (xa+xc,\ xb+xd) =$$

$$= (xa,xb)+(xc,xd) = x(a,b)+x(c,d)$$

2) $\forall x,y\in\mathbb{R}$ $\forall(a,b)\in\mathbb{C}$

$$(x+y)\cdot(a,b) = ((x+y)a,\ (x+y)b) = (xa+ya,\ xb+yb) = (xa,xb)+(ya,yb)=$$

$$= x(a,b) + y(a,b)$$

3) $\forall x,y\in\mathbb{R}$ $\forall(a,b)\in\mathbb{C}$

$$x\cdot(y\cdot(a,b)) = x(ya,yb) = (x(ya),\ x(yb)) = ((xy)a,\ (xy)b) = (xy)(a,b)$$

4) Dado $1\in\mathbb{R}$ $\forall(a,b)\in\mathbb{C}$

$$1\cdot(a,b) = (1\cdot a, 1\cdot b) = (a,b)$$

Las demostraciones están hechas por la izquierda siendo necesario realizarlas también por la derecha. Como son análogas, se omiten.

Conclusión:

El conjunto ($\mathbb{C}$,+,$\cdot_{\mathbb{R}}$) posee estructura de espacio vectorial sobre el cuerpo de los reales. Esto da lugar a:

PROP $\mathbb{C}$ es isomorfo a $\mathbb{R}^2$.

Dem

Sea φ: $\mathbb{C}\rightarrow\mathbb{R}^2$. Hemos de demostrar que φ es biyectiva.

5. REPRESENTACIÓN DE UN NÚMERO COMPLEJO EN FORMA BINÓMICA.

Hasta ahora hemos estado viendo que los números complejos son de la forma (a,b). Teniendo en cuenta las definiciones de las diferentes operaciones sobre $\mathbb{C}$,

El número $(0,1)\in\mathbb{C}$ tiene como cuadrado $(0,1)\cdot(0,1)=(-1,0)$.

Por tanto la raíz cuadrada -1, $\sqrt{-1}$, es (0,1). A ese número imaginario lo denotaremos por la letra i, (0,1)=i.

PROP $\forall(a,b)\in\mathbb{C}$, se puede escribir de forma única como a+bi, considerando que $\forall x\in\mathbb{R}$ $x\equiv(x,0)$.

Dem

Dado un complejo cualquiera (a,b)

(a,b) = (a,0)+(0,b) = (a,0)+(b,0)(0,1) = a+bi.

Y es único, ya que si (c,d) = a+bi $\Rightarrow$ (c,d) = (a,b) $\Rightarrow$ c=a y d=b.

DEF Dado un número complejo a+bi, diremos que está escrito en forma binómica.

DEF Se llama parte real de un número complejo, a+bi, y se denota por Re(a+bi), al número a. Re(a+bi) = a, siendo Re: $\mathbb{C}\rightarrow\mathbb{R}$.

DEF Se llama parte imaginaria de un número complejo a+bi, y se denota por Im(a+bi), al número b. Im(a+bi)=b, siendo Im: $\mathbb{C}\rightarrow\mathbb{R}$.

6. ORDEN EN $\mathbb{C}$.

PROP $\mathbb{C}$ no es un cuerpo ordenado.

Dem

Supongamos que $\mathbb{C}$ fuese un cuerpo ordenado, es decir que existiese ua relación de orden total, denotada por<.

Entonces, como $0\in\mathbb{C}$ y $i\in\mathbb{C}$, por la relación de orden deben ser comparables.

Si $i>0 \Rightarrow$ al multiplicar esa desigualdad por sí misma se obtiene $i^2>0 \Rightarrow$

$\Rightarrow$ como $i^2=-1$, sustituyendo: $-1>0 \Rightarrow$ si de nuevo multiplicamos esa desigualdad

por sí misma $(-1)^2>0 \Rightarrow 1>0$. Luego $1>0$. (1).

Partiendo de la desigualda $-1>0$, si sumamos a ambos miembros $1\in\mathbb{C}$ se obtiene

$(-1)+1>0+1 \Rightarrow 0>1$. (2).

De (1) y (2) se llega a una contradicción, luego i no es mayor estricto que 0.

Entonces si i no es mayor estricto que 0, debe darse $i<0$ (ya que sabemos $i\neq0$).

Comprobémoslo:

$i<0 \Rightarrow i^2>0 \Rightarrow -1>0 \Rightarrow (-1)^2>0 \Rightarrow i>0$. Pero si $-1>0 \Rightarrow (-1)+1>0+1 \Rightarrow 0>1$.

De nuevo llegamos a una contradicción $\Rightarrow$ i no es menor estricto que 0.

Pero si 0 e i no son comparables es porque no tiene una relación de orden con las mismas propiedades que la relación de orden definida en $\mathbb{R}$.

Por tanto, la relación de orden en $\mathbb{R}$ no se puede extender a $\mathbb{C}$.

Sabemos que $\mathbb{C}$ y $\mathbb{R}^2$ son isomorfos. Entonces podemos definir en $\mathbb{C}$ una relación de

orden propia del producto cartesiano.

DEF Definimos en $\mathbb{C}$ la relación $\leq$ como sigue:
$\forall(a,b),(c,d)\in\mathbb{C}$ $(a,b)\leq(c,d) \Leftrightarrow a<c$ ó si $a=c$ entonces $b\leq d$.

PROP La relación $\leq$ definida en $\mathbb{C}$ es una relación de orden.

<u>Dem</u>

Para comporbar que $\leq$ es una relación de orden hemos de ver que verifica las propiedades reflexiva, antisimétrica y transitiva.

1) Antisimétrica:

Dados $(a,b),(c,d)\in\mathbb{C}$. Sea $(a,b)\leq(c,d)$ y $(c,d)\leq(a,b)$.

Como (a,b)≤(c,d) $\Rightarrow \begin{cases} a < c \\ a = c \;\; y \;\; b \le d \end{cases}$ (1)

Como (c,d)≤(a,b) $\Rightarrow \begin{cases} c < a \\ c = a \;\; y \;\; d \le b \end{cases}$ (2)

Si a<c en (1) ⇒ no puede darse que c<a o c=a en (2), luego de ambas expresiones se deduce que a=c.

Entonces de b≤d en (1) y d≤b en (2) se deduce que b=d. Y por tanto (a,b)=(c,d).

3) Transitiva.

Dado ∀ (a,b),(c,d)∈ ℂ, sea (a,b)≤(c,d) y (c,d)≤(e,f)

(a,b)≤(c,d) $\Rightarrow \begin{cases} a < c \\ a = c \;\; y \;\; b \le d \end{cases}$ (3)

(c,d)≤(e,f) $\Rightarrow \begin{cases} c < e \\ c = e \;\; y \;\; c \le e \end{cases}$ (4)

Distingamos cuatro casos:

a) Si a<c de (3) y c<e de (4) ⇒a<e ⇒(a,b)≤(e,f).

b) Si a<c y c=e con d≤f ⇒ a<e ⇒ (a,b)≤(e,f)

c) Si a=c y c<e ⇒ a<e ⇒ (a,b)≤(e,f)

d) Si a=c con b≤d y c=e con d≤f ⇒ a=e y b≤f ⇒(a,b)≤(e,f)

PROP La relación de orden definida en ℂ es de orden total.

Dem

∀(a,b),(c,d)∈ ℂ se verifica que a,b,c,d∈ℝ.

Como en ℝ existe una relación de orden total y los números a y c son comparables

Si a<c ⇒ (a,b)≤(c,d)

Si a>c ⇒ (c,d)≤(a,b)

Si a=c $\Rightarrow$ $\mathbb{C}$omparamos b y d.

Si b<d $\Rightarrow$ (a,b)≤(c,d)

Si b=d $\Rightarrow$ (a,b)≤(c,d) y (c,d) ≤(a,b)

Si b>d $\Rightarrow$ (c,d)≤(a,b)

Luego cualquier par de números en $\mathbb{C}$ son comparables.

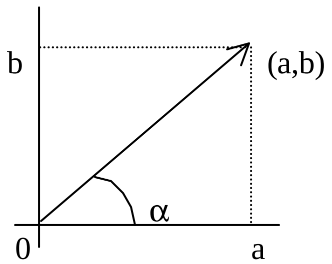
7. REPRESENTACIÓN GEOMÉTRICA DE LOS NÚMEROS COMPLEJOS. EL PLANO COMPLEJO.

Sea V_2 el plano euclídeo de OXY con ejes ortogonales y sean $\vec{U}_1$ y $\vec{U}_2$ los vectores de la base ortogonal.

PROP La aplicación $\varphi: \mathbb{C} \rightarrow V_2$ dada por $\varphi(a+bi) = a\vec{u}_1 + b\vec{u}_2$ es un isomorfismo de espacios vectoriales.

A partir de la proposición anterior, podemos identificar el número complejo a+bi con el vector $a\vec{u}_1 + b\vec{u}_2$.

DEF Llamamos afijo del complejo a+bi a un representante del vector $a\vec{u}_1 + b\vec{u}_2$ con origen en 0 y extremo en (a,b).



Ahora podemos relacionar los conceptos de módulo y argumento de los vectores en V_2 con los números complejos.

DEF Dado el número complejo a+bi, llamaremos módulo del número complejo, y se denota por |a+bi|, al número real positivo $|a+bi| = \sqrt{a^2 + b^2}$.

DEF Dado el número complejo a+bi, llamaremos argumento del número complejo al ángulo que forman los vectores $\vec{u}_1$ y $a\vec{u}_1 + b\vec{u}_2$.El argumento está definido módulo 2π, y es único. Se representa por arg(a+bi).

8. NÚMEROS COMPLEJOS CONJUGADOS.

<u>Notación</u>: Vamos a representar a los números complejos de la forma $z \in \mathbb{C}$ con z=a+bi.

DEF Llamamos conjugado de un número complejo z=a+bi, y se denota por $\bar{z}$, al número $\bar{z}$=a-bi.

PROP La aplicación $\varphi:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ con $\varphi(z)=\bar{z}$ es un automorfismo que deja invariantes a los elementos de $\mathbb{R}$.

<u>Dem</u>

Sean z y z´ números complejos con z=a+bi y z´=a´+b´i.

-φ es inyectiva:

$\varphi(z) = \varphi(z') \Rightarrow a-bi = a'-b'i \Rightarrow a=a'$ y $b=b' \Rightarrow a+bi = a'+b'i \Rightarrow z=z'$

-φ es suprayectiva.

Dado $c+di\in\mathbb{C}$ como $d\in\mathbb{R} \Rightarrow \exists(-d)$ opuesto de d $\Rightarrow \varphi(c-di) = c+di$.

Entonces φ es biyectiva.

-φ es homomorfismo.

$\varphi(z+z') = \varphi(a+a'+(b+b')i) = a+a'-(b+b')i = a+bi+a'-b'i = \bar{z}+\bar{z'} = \varphi(z)+\varphi(z')$

$\varphi(z\cdot z') = \varphi((a+bi)\cdot(a'+b'i)) = \varphi((aa'-bb')+(ab'+a'b)i) = (aa'-bb')-(ab'+a'b)i =$

$(aa'-bb')+(-ab'-a'b)i = (a-bi)\cdot(a'-b'i) = \bar{z}\cdot\bar{z'} = \varphi(z)\cdot\varphi(z')$.

-φ es involutivo ($\varphi^2=1_{ID}$)

$\varphi^2(z) = \varphi^2(a+bi) = \varphi(\varphi(a+bi)) = \varphi(a-bi) = a+bi = z$.

-φ deja invariantes los elementos de $\mathbb{R}$.

$\forall x\in\mathbb{R}$ sea $x = z = x+0i$

$\varphi(x) = \varphi(x+0i) = x-0i = x \Rightarrow \varphi(x) = x$

PROP Se verifica:

1) $\mathrm{Re}(\bar{z}) = \mathrm{Re}(z)$.

2) $\mathrm{Im}(\bar{z}) = -\mathrm{Im}(z)$.

3) $\mathrm{Re}(z) = \frac{1}{2}(z+\bar{z})$.

4) Im(z) = Im ($\frac{1}{2}(z+\bar{z})$).

Dem

Sea $z\in\mathbb{C}$ con z=a+bi.

1) Re($\bar{z}$)=a y Re(z)=a $\Rightarrow$ Re($\bar{z}$)=Re(z)

2) Im($\bar{z}$) = -b y Im(z)=b $\Rightarrow$Im($\bar{z}$)=-Im(z)

3) $\frac{1}{2}(z+\bar{z})$ = $\frac{1}{2}$(a+bi+a-bi = $\frac{1}{2}$ ·2a = a=Re(z).

4) $\frac{1}{2}(z-\bar{z})=\frac{1}{2}$(a+bi-a+bi) = $\frac{1}{2}$ 2bi=bi $\Rightarrow$ Im(z) = Im$\left(\frac{1}{2}(z-\bar{z})\right)$

PROP 1) Un número complejo es real $\Leftrightarrow$ z= $\bar{z}$

2) Un número complejo es imaginario $\Leftrightarrow$z+ $\bar{z}$ =0.

Dem

1) "$\Rightarrow$" Si z es real, φ(z)=z $\Rightarrow$ $\bar{z}$ =z

"$\Leftarrow$" Si z= $\bar{z}$ $\Rightarrow$ a+bi = a-bi $\Rightarrow$ a=a y b=-b $\Rightarrow$ 2b = 0 $\Rightarrow$ b=0, luego z=a que es real.

2)"$\Rightarrow$" Si z es imaginario $\Rightarrow$z=bi $\Rightarrow$z+ $\bar{z}$ =bi+(-bi) = 0

"$\Leftarrow$" Si z=a+bi $\Rightarrow$ z+ $\bar{z}$ =0 es (a+b)+(a-bi) = 0 $\Rightarrow$ 2a=0 $\Rightarrow$a=0$\Rightarrow$z=bi.

PROP Los únicos automorfismos de $\mathbb{C}$ que dejan invariantes los números reales son la identidad y φ.

Dem

Sea φ: $\mathbb{C}\rightarrow\mathbb{C}$ un automorfismo de $\mathbb{C}$ que deja invariante a $\mathbb{R}$.

Como φ es un homormorfismo φ(a+bi) = a+bφ(i).

Sabemos que i^2=-1 y como φ deja invariantes los números reales, se verifica que φ(i^2)=-1.

Pero φ(i^2) = φi·i)=φ(i)·φ(i) = $\varphi(i)^2$

Luego $\varphi(i)^2$=-1 $\Rightarrow$ φ(i)=i ó φ(i)=-i.

Si $\varphi(i)=i \Rightarrow \varphi(a+bi) = a+bi \Rightarrow \varphi=1_{ID}$

Si $\varphi(i)=-i \Rightarrow \varphi(a+bi) = a-bi \Rightarrow \varphi=\varphi$

PROP $z\cdot \bar{z} = a^2+b^2$

<u>Dem</u>

Sea $z=a+bi \Rightarrow z\cdot \bar{z} = (a+bi)(a-bi)=a^2+b^2+abi-abi = a^2+b^2$

COROLARIO Dado $z=a+bi\in \mathbb{C}$, su inverso es $\frac{1}{z} = \frac{a-bi}{a^2+b^2}$

<u>Dem</u>

$$\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{z\cdot\bar{z}} = \frac{a-bi}{a^2+b^2}$$

<u>9. VALOR ABSOLUTO EN $\mathbb{C}$.</u>

En el punto 7 hemos definido el módulo de un número complejo $z=a+bi$ como $|z|=\sqrt{a^2+b^2}$.

PROP $|z|=\sqrt{z\cdot\bar{z}}$

<u>Dem</u>

Como $z\cdot \bar{z} = a^2+b^2 \Rightarrow |z|^2 = z\cdot\bar{z} \Rightarrow |z|=\sqrt{z\cdot\bar{z}}$

Este resultado lo podríamos haber dado como definición del módulo de z.

PROP El valor absoluto definido en $\mathbb{C}$ verifica $\forall z,z' \in \mathbb{C}$

1) $|z|\geq 0$

2) $|z|=0 \Leftrightarrow z=0$.

3) $|z\cdot z'| = |z|\cdot|z'|$

4) $|z+z'| \leq |z|+|z'|$

<u>Dem</u>

1) $|z| = \sqrt{a^2+b^2} \geq 0$ ya que sabemmos $\forall x\in \mathbb{R}$ $x^2\geq 0$

2) "$\Rightarrow$" $|z|=0 \Rightarrow |z|^2=0 \Rightarrow a^2+b^2=0 \Rightarrow a=b=0 \Rightarrow z=0$

"$\Leftarrow$" Si $z=0 \Rightarrow z=0+0i \Rightarrow |z|=\sqrt{0^2+0^2}=0$

3) $|z\cdot z'|^2 = (z\cdot z')\cdot\left(\overline{z\cdot z'}\right) = z\cdot z'\cdot\overline{z}\cdot\overline{z}' = z\cdot\overline{z}\cdot z'\cdot\overline{z}' = |z|^2\cdot|z'|^2$

Si $|z\cdot z'|^2$"$|z|^2\cdot|z'|^2$ por 1) $|zz'| = |z|\cdot|z'|$

4) $|z+z'|^2=(z+z')(\overline{z\cdot z'}) = (z+z')(\overline{z}+\overline{z}')=z\cdot\overline{z}+z\cdot\overline{z}'+z'\,\overline{z}+z'\,\overline{z}'=$

$= |z^2| + |z'|^2+z\overline{z}'+z'\,\overline{z} =$

Si $z=a+bi$ y $z'=a'+b'i \Rightarrow z\overline{z'} = (a+bi)(a'-b'i) = aa'+bb'-ab'i+a'bi =$

$= (aa'+bb')+(a'b-ab')$

$\overline{z}\cdot z' = (a-bi)(a'+b'i) = (aa'+bb')+(ab'-a'b)i$

Luego $\overline{z\cdot\overline{z}'} = \overline{z}\cdot z' \Rightarrow z\cdot\overline{z}'+z'\,\overline{z} = 2\mathrm{Re}(z\cdot\overline{z}')$

$= |z|^2+|z'|^2+2\mathrm{Re}(z\cdot\overline{z}') \le \mathrm{Re}(z\cdot z') \le |\mathrm{Re}(z\cdot z')| \le |z\cdot\overline{z}'| = |z|\cdot|z'| \le$

$\le |z|^2+|z'|^2+2|z|\cdot|z'| = (|z|+|z'|)^2 \Rightarrow |z+z'| \le (|z|+|z'|)^2 \Rightarrow |z+z'| \le |z|+|z'|$

Conclusión: El valor absoluto así definido extiende de manera natural el valor absoluto definido en $\mathbb{R}$.

COROLARIO $\forall z_i\in\mathbb{C}$ con i: 1,...,m se verifica $|z_1+z_2+\ldots+z_n| \le |z_1|+|z_2|+\ldots+|z_n|$

Dem

La demostración se realiza por inducción, aplicando el punto 4 de la proposición anterior.

PROP El conjunto $U=\{z\in\mathbb{C} \,/\, |z|=1\}$ es un grupo multiplicativo.

Dem

Para comprobar que U es un subgrupo de $\mathbb{C}^*$, basta ver que $\forall z_1,z_2\in U \Rightarrow z_1,z_2^{-1}\in U$

$|z_1,z_2^{-1}| = |z_1|\cdot\dfrac{1}{|z_2|} = 1\cdot 1=1 \Rightarrow z_1,z_2^{-1}\in U \Rightarrow$ U es un subgrupo de $\mathbb{C}^*$.

COROLARIO Todo número complejo $z\in\mathbb{C}$ puede escribirse como $z = |z|\cdot u$ con $u\in U$.

10. REPRESENTACIÓN DE UN NÚMERO COMPLEJO EN FORMA POLAR Y TRIGONOMÉTRICA.

Cuando vimos la representación geométrica de un número complejo establecimos los siguientes resultados; dado un complejo z= a+bi:

1) z=a+bi se puede escribir como $a\vec{u}_1+b\vec{u}_2$.

2) El módulo de z es $|z|=\sqrt{a^2+b^2}$.

3) El argumento de z es el ángulo que forman $\vec{u}_1$ y $a\vec{u}_1+b\vec{u}_2$ módulo 2π.

PROP Todo número complejo queda completamente determinado por su módulo y su argumento.

DEF Diremos que un número complejo $z\in\mathbb{C}$, está representado en forma trigonométrica si $z=r(\cos\alpha+i\operatorname{sen}\alpha)$ con $r=|z|$ y $\alpha=\arg(z)$.

DEF Diremos que un número complejo $z\in\mathbb{C}$ está representado en forma polar si $z=r_\alpha$ y $\alpha=\arg(z)$.

Por la proposición anterior, las fórmulas de paso de forma binómica a polar son

$$r=\sqrt{a^2+b^2} \text{ y } \alpha=\operatorname{arctg}\frac{b}{a}$$

y las fórmulas de paso de forma polar a binómica.

$$a=r\cdot\cos\alpha \text{ y } b=r\cdot\operatorname{sen}\alpha$$

10.1 Operaciones con números complejos en forma polar y trigonométrica.

Utilizando la forma trigonométrica de los números complejos, es posible realizar la operación de producto de números complejos sin tener que emplear la fórmula que vimos. Se utiliza la forma polar para que la represntación sea más compacta.

a) Producto.

PROP Dados z_1 y z_2 números complejos con $z_1=r_{1\alpha 1}$ y $z_2=r_{2\alpha 2}$ se veerifica que $z_1\cdot z_2=(r_1\cdot r_2)_{\alpha 1+\alpha 2}$.

<u>Dem</u>

Para la demostración usaremos la forma trigonométrica.

$z_1\cdot z_2=r_1(\cos\alpha_1+i\operatorname{sen}\alpha_2)\cdot r_2(\cos\alpha_2+i\operatorname{sen}\alpha_2) =$
$= r_1r_2(\cos\alpha_1\cdot\cos\alpha_2-\operatorname{sen}\alpha_1\cdot\operatorname{sen}\alpha_2+i(\cos\alpha_1\cdot\operatorname{sen}\alpha_2+\operatorname{sen}\alpha_1\cdot\cos\alpha_2)) =$

$= r_1r_2(\cos(\alpha_1+\alpha_2)+i\,\mathrm{sen}(\alpha_1+\alpha_2)) = (r_1r_2)_{\alpha_1+\alpha_2}$.

COROLARIO Sean $z_i\in\mathbb{C}$ con i:1,...,n números complejos con $z_i=r_{i\alpha_i}$ $\forall$i: 1,...,n.

Entonces $\prod_{i=1}^{n} z_i = \left(\prod_{i=1}^{n} r_i\right)_{\sum_{i=1}^{n}\alpha_i}$.

Dem

Se demuestra utilizando el método de inducción y aplicando la proposición anterior.

b) Potencia.

TEOREMA. FÓRMULA DE MOIVRE.

Dado $z\in\mathbb{C}$ y $n\in Z$, $z^n=(r^n)_{n\alpha}$.

Dem

Para $n\in N$ ya está demostrado por el corolario anterior.

Para n=-1, $z^{-1}=\dfrac{1}{z}=\dfrac{\overline{z}}{z\cdot\overline{z}}=\dfrac{r(\cos\alpha-i\,\mathrm{sen}\,\alpha)}{r^2}=r^{-1}(\cos\alpha-i\,\mathrm{sen}\,\alpha)=(r^{-1})_{-\alpha}$

Para n<-1 $z^n=(z^{-n})^{-1}$ con $-n\in N \Rightarrow z^n=(z^{-n})^{-1}=[r^{-n}(\cos(-n\alpha)+i\,\mathrm{sen}(-n\alpha))]^{-1}=$

Aplicando el caso anterior: $r^n(\cos n\alpha+i\,\mathrm{sen}\, n\alpha)=(r^n)_{n\alpha}$

c) División.

COROLARIO Dados z_1 y z_2 números complejos con $z_1=r_{1\alpha_1}$ y $z_2=r_{2\alpha_2}$ se verifica que $\dfrac{z_1}{z_2}=\left(\dfrac{r_1}{r_2}\right)_{\alpha_1-\alpha_2}$.

Dem

Aplicando la fórmula de Moivre para obtener el inverso de un número complejo.

$\dfrac{z_1}{z_2}=z_1\cdot z_2^{-1}=r_{1\alpha_1}\cdot(r_2^{-1})_{-\alpha_2}=(r_1\cdot r_2^{-1})_{\alpha_1-\alpha_2}=\left(\dfrac{r_1}{r_2}\right)_{\alpha_1-\alpha_2}$

d) Raíces.

PROP Sea $z=r_\alpha$ un número complejo. Si $z'=r'_{\alpha'}$ es otro número complejo tal que $z'=\sqrt[n]{z}$ entonces $r'=\sqrt[n]{r}$ y $\alpha'=\dfrac{\alpha+2k\pi}{n}$.

Dem

Si $z'=\sqrt[n]{z}$ $\Rightarrow z=(z')^n \Rightarrow r_\alpha=(r'_{\alpha'}) \Rightarrow r_\alpha=(r'^n)_{n\alpha'} \Rightarrow r=r'^n$ y $\alpha+2k\pi=n\alpha' \Rightarrow$

ecordemos que arg(z) es un valor comprendido entro 0 y 2π módulo 2π.

$\Rightarrow r'=\sqrt[n]{r}$ y $\alpha'=\dfrac{a+2kp}{n}$. El valor de k varía entre $k\in\{0,\ldots,n-1\}$ ya que

Si $k=0 \Rightarrow \alpha'_0=\dfrac{a}{n}$

Si $k=n \Rightarrow \alpha_n=\dfrac{a+2np}{n}=\dfrac{a}{n}+2p$.

Luego $\alpha'_0=\alpha'_n$.

Por tanto el número complejo z tiene n raíces n-ésimas y son $z_1,z_2,\ldots,z_{n-1}$ con $z_i=\left(\sqrt[n]{r}\right)_{\frac{a+2ip}{n}}$ con $i:0,1,\ldots,n-1$.

11. APLICACIONES DE LOS NÚMEROS COMPLEJOS.

11.1. Resolución de ecuaciones polinómicas de 2º grado.

Toda ecuación polinómica de 2º grado de la forma $ax^2+bx+c=0$ con $a,b,c\in\mathbb{R}$ puede resolverse formalmente, siendo las soluciones $x_s=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$.

Si $b^2-4ac\geq 0$, las soluciones son reales.
Si $b^2-4ac<0$, hemos de introducir los complejos, siendo las soluciones $x_s=\dfrac{-b\pm\sqrt{4ac-b^2}\,i}{2a}$.

Si las dos soluciones son complejas, una es la conjugada de la otra.

11.2. Aplicaciones geométricas.

Recordemos que existe una aplicación biyectiva entre V_2 y $\mathbb{C}$, siendo $z=a+bi$ el vector $a\vec{u}_1+b\vec{u}_2$, con $\{\vec{u}_1,\vec{u}_2\}$ base ortonormal de V_2. Por tanto, identificaremos los números complejos con vectores de V_2, abusando de la notación.

11.2.1. Traslaciones.

Sea $v\in\mathbb{C}$ con $v=v_1+v_2i$.

Definimos $\varphi_v: \mathbb{C}\rightarrow\mathbb{C}$ como $\forall z\in\mathbb{C}$ $\varphi_v(z)=z+v$.

Si $z=a+bi \Rightarrow \varphi_v(z)=(a+v_1)+(b+v_2)i$.

Entonces, como $\varphi_v(z)\in \mathbb{C}$, $\varphi_v(z)=x+yi$ y por tanto

$$\left.\begin{array}{l} x=a+v_1 \\ y=b+v_2 \end{array}\right\}$$

La aplicación φ_v con $v\in\mathbb{C}$ recibe el nombre de traslación de "vector v" en el plano complejo.

11.2.2. Giros.

Sea $U=\{z\in\mathbb{C} \;/\; |z|=1\}$. Tomemos $u\in U$.

Definimos $\theta_U: \mathbb{C}\rightarrow\mathbb{C}$ como $z\in\mathbb{C}$ $\theta_U(z)=U\cdot z$

Si $za+bi=r_\alpha$ y $U=1_\beta \Rightarrow \theta_U(z)=r_{\alpha+\beta}$

Se obtiene un número complejo con el mismo módulo.

La aplicación θ_U recibe el nombre de giro de ángulo β(siendo $u=1_\beta$).

11.2.3. Homotecias con centro el origen.

Sea $k\in\mathbb{R}^*$. Definimos $\psi_k: \mathbb{C}\rightarrow\mathbb{C}$ como $\forall z\in\mathbb{C}$ $\Psi_k(z)=k\cdot z$.

Si $z=a+bi$ y $\varphi_k(z)=x+yi$ se verifica $\left.\begin{array}{l} x=ka \\ y=kb \end{array}\right\}$.

La aplicación ψ_k con $k\in\mathbb{R}^*$ recibe el nombre de homotecia de centro 0 y razón k en el plano complejo.
Si componemos φ_v y ψ_k en cualquier orden, obtenemos aplicaciones del tipo

$\varnothing:\mathbb{C}\rightarrow\mathbb{C}$ con $z\in\mathbb{C}$ $\varnothing(z)=kz+w$ $k\in\mathbb{R}^*$ y $w\in\mathbb{C}$.

$(\varphi_v \text{ o } \psi_k)(z) = \varphi_v(\psi_k(z)) = \varphi_v(kz) = kz+v$.

$(\psi_k \text{ o } \varphi_v)(z) = \psi_k(\varphi_v(z)) = \psi_k(z+v) = k(z+v) = kz+kv = kz+w$

La aplicación $\varnothing$ recibe el nombre de homotecia de razón k y centro w(entendiendo por centro w, el afijo del número complejo w).

11.2.4. Semejanzas con centro en el origen.

Una semejanza con centro en el origen es la composición de una homotecia con centro en el origen y un giro.

Basta pues componer φ_v y ψ_k en cualquier orden, ya que el resultado será el mismo.

OBS $(\psi_k \circ \theta_v)(z) = k\cdot u\cdot z = (\theta_v \circ \psi_k)(z)$

Y como $u=1_\beta$ y $k\in \mathbb{R}^* \Rightarrow k\cdot u$ escrito en forma polar es k_β.

Por tanto, si $z'=ku \Rightarrow \psi_k \circ \theta_v = \mu_{z'}$ y $\mu_{z'}: \mathbb{C}\rightarrow\mathbb{C}$ con $\mu_{z'}=z'z$.

Podemos extender este resultado para obtener una semejanza con origen en un punto arbitrario. Basta componer una semejanza con origen en cero con una traslación de vector v. Dará lugar a una aplicación $\eta: \mathbb{C}\rightarrow\mathbb{C}$ con $\eta(z)=z'\cdot z+v$ y $z',v\in \mathbb{C}$.

BIBLIOGRAFIA RECOMENDADA.

Análisis Matemático I. Aut. J.A. Fernández Viña. Ed. Tecnos.

Análisis Matemático. Aut. M. de Guzmán – B. Rubio. Ed. Pirámide.

Principios de Análisis Matemático. Aut. W. Rudin. Ed. McGraw-Hill.

Introducción al Análisis Matemático. Aut. J. M. Ortega. Ed. Labor.

Curso de Análisis Matemático I. Aut. E.L. Lima. Ed. Edunsa.