TEMAS DE MATEMÁTICAS
(Oposiciones de Secundaria)

TEMA 21

FUNCIONES REALES DE VARIABLE REAL. FUNCIONES ELEMENTALES. SITUACIONES EN QUE APARECE. FUNCION COMPUESTA.

1. Introducción.
   1.1. Subconjuntos de $\mathbb{R}$.
   1.2. Cotas de subconjuntos.
2. Concepto de función.
3. Operaciones con funciones.
   3.1. Suma de funciones.
   3.2. Producto de funciones.
   3.3. Producto de una función por un número real.
   3.4. Composición de funciones.
4. Función Recíproca.
5. Relación de Orden en $\mathcal{F}$(A).
6. Tipos de Funciones.
   6.1. Funciones Acotadas.
   6.2. Funciones Monótonas.
   6.3. Funciones Pares e Impares.
   6.4. Funciones Periódicas.
7. Funciones Elementales, situaciones reales donde aparecen.
   7.1. Funciones Polinómicas de 1er grado.
   7.2. Funciones Polinómicas de 2º grado.
   7.3. Funciones Potenciales.
   7.4. Funciones Polinómicas.
   7.5. Funciones de Proporcionalidad Inversa.
   7.6. Funciones Escalonadas.
   7.7. Funciones Exponenciales.
   7.8. Funciones Logarítmicas.
   7.9. Funciones Definidas a trozos.

Bibliografía Recomendada.

TEMA 21

FUNCIONES REALES DE VARIABLE REAL. FUNCIONES ELEMENTALES. SITUACIONES EN QUE APARECE. FUNCION COMPUESTA.

1. INTRODUCCIÓN.

1.1. Subconjuntos de $\mathbb{R}$.

Los conjuntos de números que conocemos son

$\mathbb{N}$ = Naturales.

$\mathbb{Z}$ = Enteros.

$\mathbb{Q}$ = Racionales.

$\mathbb{R}$ = Reales.

$\mathbb{C}$ = Complejos.

En este tema vamos a trabajar sobre el conjunto de números reales.

Los subconjuntos de números reales más simples que no podemos encontrar son los intervalos.

Intervalos Abierto $(a,b)=\{x\in \mathbb{R} / a<x<b\}$

Intervalo Cerrado $[a,b]=\{x\in \mathbb{R} / a\leq x\leq b\}$

Como podemos comprobar fácilmente, un intervalo abierto comprende todos los números reales situados entre los extremos, pero sin incluir a éstos. En cambio, un intervalo cerrado si los incluye.

También podemos encontrar intervalos que son mezcla de ambos.

Intervalos Semiabiertos y Semicerrados.

$(a, b] = \{x\in\mathbb{R}/ a < x \leq b\}$

$[a, b) = \{x\in\mathbb{R}/ a \leq x < b\}$

Otro tipo de intervalo son las semirrectas. Estas, a su vez, pueden ser abiertas o cerradas según no incluyan o si el extremo, respectivamente.

Semirrectas Abiertas a la derecha $(a, \rightarrow) = \{x\in\mathbb{R}/ a < x\}$

Semirrectas Abiertas a la izquierda $(\leftarrow, a) = \{x\in\mathbb{R}/ x < b\}$

Semirrectas Cerradas a la derecha $[a, \rightarrow) = \{x \in \mathbb{R} / a \leq x\}$

Semirrectas Cerradas a la izquierda $(\leftarrow, b] = \{x \in \mathbb{R} / x \leq b\}$

Podemos observar que las semirrectas cerradas no van entre corchetes. Eso se explica porque la flecha representa a $+\infty$ ó a $-\infty$ y estos elementos no son números reales (forman parte de la recta real ampliada).

El ultimo tipo de intervalos que nos podemos encontrar son los entornos reales. Estos son intervalos con unas características que los diferencian del resto. Son siempre intervalos abiertos y están centrados en un punto.

$E(a, r) = \{x \in \mathbb{R} / a - r < x < a + r\}$

Se dice que $E(a, r)$ es un entorno de centro a y radio r. Equivale a $E(a, r) = (a - r, a + r)$.

También nos podemos encontrar con los subconjuntos de $\mathbb{R}$. Estos son entidades menos simples que los intervalos vistos antes. Por ejemplo:

$A = (-2, -1) \cup \{0\} \cup [2, 4]$

1.2. Cotas de Subconjuntos.

DEF $a \in \mathbb{R}$ es cota superior de $A \subset \mathbb{R}$ si $\forall x \in A$ se verifica $x \leq a$.

DEF $a \in \mathbb{R}$ es cota inferior de $A \subset \mathbb{R}$ si $\forall x \in \mathbb{R}$ se verifica $x \geq a$.

DEF Si $a \in \mathbb{R}$ es cota superior del subconjunto $A \subset \mathbb{R}$, entonces, cualquier $b \in \mathbb{R}$ con $b > a$ es también cota superior. De forma análoga, si a' es cota inferior de $A \subset \mathbb{R}$ entonces dado $b' \in \mathbb{R}$ con $b' < a'$ también es cota inferior.

DEF Diremos que un subconjunto $A \subset r$ está acotado superiormente si tiene cota superior.

DEF Diremos que un subconjunto $A \subset \mathbb{R}$ está acotado inferiormente si tiene cota inferior.

DEF Diremos que un subconjunto $A \subset \mathbb{R}$ está acotado si lo está superior e inferiormente.

DEF Diremos que $a \in \mathbb{R}$ es el Supremo del Subconjunto $A \subset \mathbb{R}$ si es la más pequeña de las cotas superiores. Se representa por $a = \text{Sup } A$.

DEF Diremos que $a \in \mathbb{R}$ es el Infimo del Subconjunto $A \subset \mathbb{R}$ si es la más grande de las cotas Inferiores. Se representa por $a = \text{Inf } A$.

DEF Diremos que $a \in \mathbb{R}$ es el Máximo del subconjunto $A \subset \mathbb{R}$ si $a = \text{Sup } A$ y $a \in A$. Se representa por a = Max A.

DEF Diremos que $a \in \mathbb{R}$ es el Mínimo del subconjunto $A \subset \mathbb{R}$ si $a = \text{Inf } A$ y $a \in A$. Se representa por a = Min A.

2. CONCEPTO DE FUNCIÓN.

Sean A y B dos conjuntos cualesquiera.

DEF Una correspondencia entre dos conjuntos A y B cualesquiera es una relación entre los elementos de ambos conjuntos.

Ejemplo.

Sea A = {Alumnos} y B = {Asignaturas} y definimos la relación "Matriculado en".

Es fácil ver que un alumno puede estar matriculado en varias asignaturas y que de una asignatura pueden estar matriculados varios alumnos.

Por tanto un elemento de A puede estar relacionado con varios del B y uno del B con varios del A.

DEF Una aplicación entre dos conjuntos es una correspondencia entre ambos donde cada elemento del primer conjunto está relacionado con un único elemento del segundo.

Ejemplo.

Sea A = {alumnos} y B = {sillas} y definimos la relación "sentado en". Es inmediato comprobar que la relación es una aplicación ya que un alumno solo puede estar relacionado con una silla (no puede estar sentado en dos a la vez).

DEF Una función es una aplicación entre conjuntos numéricos. Se puede denotar por $\begin{array}{c} f: A \to B \\ x \to f(x) \end{array}$ donde

f es la función

A es el conjunto inicial

B es el conjunto final

X es la variable independiente

f(x) es al relación entre ambos conjuntos.

DEF El Dominio de una función f es el subconjunto del conjunto inicial formado por todos los valores que puede tomar la variable independiente. Se representa por Dom f, es decir, $\text{Dom}(f) = \{x \in A / \exists f(x)\}$.

DEF Diremos que $y_o \in B$ es imagen por f si $\exists x_o \in A$ tal que $f(x_o) = y_o$.

DEF El Recorrido de una función f es el subconjunto del conjunto final formado por todas las imágenes. Se representa por Rec f. También se conoce por Rango de la función, es decir, $Rec\ (f) = \{y \in B / \exists x \in A \text{ con } f(x) = y\}$.

OBS Las funciones cuyo conjunto inicial es el conjunto de los números naturales reciben el nombre de sucesiones.

A partir de ahora vamos a tratar las funciones reales de variable real, $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

DEF Dada $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, llamaremos grafo de f al conjunto

$$G = \{(x, y) \in \mathbb{R}x\mathbb{R} / y = f(x)\}$$

OBS Conociendo G, tenemos completamente determinada la función f.

Si dado $x \in \mathbb{R}$ disponemos de una fórmula que permita calcular f(x), podemos definir f como $y = f(x)$.

Si lo que tenemos es $y = f(x)$, entenderemos que el dominio de f será el subconjunto $A \subset \mathbb{R}$ para el que es posible efectuar las operaciones indicadas en la fórmula f(x). A recibiría el nombre de Campo de Existencia o Dominio de Definición de f(x).

Al fórmula que expresa f(x) puede no tener una expresión analítica. Por ejemplo f(x)= "Mayor número primo menor que x".

Resumiendo, el conocimiento de G define la función, y como G puede representarse en un diagrama cartesiano, la función puede venir dada por una gráfica o por una tabla de valores, además de por una fórmula.

5. OPERACIONES CON FUNCIONES.

DEF Dadas $f: A \to \mathbb{R}$ y $g: B \to \mathbb{R}$ con $A, B \subset \mathbb{R}$, diremos que $f = g$ si se verifica que $A = B$ y que $f(x) = g(x)\ \ \forall x \in A$.

3.1. Suma de funciones.

DEF Dadas dos funciones $f: A \to \mathbb{R}$ y $g: B \to \mathbb{R}$ con $A, B \subset \mathbb{R}$ se define la suma, f + g, como la función

$$f + g: Dom\ (f) \cap Dom\ (g) \to \mathbb{R}$$

$$x \to (f + g)\ (x)$$

siendo $(f + g)\ (x) = f(x) + g(x)\ \ \forall x \in A \cap B$

PROP La operación suma definida anteriormente verifica las siguientes propiedades:

1) Conmutativa.

2) Asociativa.

3) Elemento Neutro.

4) Elemento Opuesto.

<u>Dem.</u>

Sean $f: A \to \mathbb{R}$ y $g: B \to \mathbb{R}$ con $A, B \subset \mathbb{R}$ y sea $D = Dom\,(f) \cap Dom\,(g)$

1) Dada $f + g: D \to \mathbb{R}$ definida por $(f + g)\,(x) = f(x) + g(x)$ $\forall x \in$

Podemos construir $g + f: D \to \mathbb{R}$ tal que $(g + g)\,(x) = g(x) + f(x)$ $\forall x \in D$

Es fácil ver que $f + g$ y $g + f$ tienen el mismo dominio, pues

$$Dom\,(f + g) = Dom\,(g + f) = D$$

Y $\forall x \in D$ $\quad (f + g)\,(x) = f(x) + g(x) =$

Como $f(x) \in \mathbb{R}$ y $g(x) \in \mathbb{R}$

$= g(x) + f(x) = (g + f)\,(x)$

Luego $f + g = g + f$.

2) Sean $f: A \to \mathbb{R}$, $g: B \to \mathbb{R}$ y $h: C \to \mathbb{R}$ con $A, B, C \subset \mathbb{R}$.

Sean $A' = Dom\,(f)$, $B' = Dom\,(g)$ y $C' = Dom\,(h)$.

Si $(f + g) + h: (A' \cap B') \cap C' \to \mathbb{R}$ con $[(f + g) + h]\,(x) = (f(x) + g(x)) + h(x)$ $\forall x \in (A' \cap B') \cap C'$ podemos construir.

$f + (g + h): A' \cap (B' \cap C') \to \mathbb{R}$ con $[f + (g + h)](x) = f(x) + (g(x) + h(x))$ $\forall x \in A' \cap (B' \cap C')$.

Veamos que son iguales.

- Trivialmente $(A' \cap B') \cap C' = A' \cap (B' \cap C')$
- $\forall x \in (A' \cap B') \cap C'$ se verifica

$[(f + g) + h] = (f(x) + g(x)) + h(x) =$

como $f(x) \in \mathbb{R}$, $g(x) \in \mathbb{R}$ y $h(x) \in \mathbb{R}$

$= f(x) + (g(x) + h(x)) = [f + (g + h)] (x)$

Por tanto $(f + g) + h = f + (g + h)$

3) Definimos $O: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ con $\forall x \in \mathbb{R}$ $O(x) = 0$

Se verifica por tanto que $f + O = f = O + f$

$\forall x \in A$ $(f+O)(x) = f(x) + O(x) = f(x) + O = f(x) = O + f(x) = O(x) + f(x) = (O + f)(x)$

4) Dada $f: A \to \mathbb{R}$, podemos encontrar $(- f): A \to \mathbb{R}$ con $(- f)(x) = - f(x)$ $\forall x \in A$

Así pues, $f + (- f) = 0$

CONCLUSIÓN Si definimos $\mathcal{F}(A) = \{f: A \to \mathbb{R} / f$ función real con $\text{Dom } f = A \subset \mathbb{R}\}$ podemos afirmar que $(\mathcal{F}(A), +)$ es un grupo abeliano.

3.2. Producto de funciones.

DEF Dadas dos funciones $f: A \to \mathbb{R}$ y $g: B \to \mathbb{R}$ con $A, B \in \mathbb{R}$ se define el producto, $f \cdot g$, como la función:

$$f \cdot g: D \to \mathbb{R}$$

$$x \to (f \cdot g)(x)$$

siendo $(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$ $\forall x \in D$ donde $D = \text{Dom}(f) \cap \text{Dom}(g)$

PROP Las operaciones producto definida anteriormente verifica las siguientes propiedades:

1) Conmutativa.

2) Asociativa.

3) Elemento Neutro.

4) Elemento Inverso.

Dem.

Sean $f: A \to \mathbb{R}$ y $g: B \to \mathbb{R}$ con $A, B \subset \mathbb{R}$.

1) Análogamente a la proposición anterior.

2) Análogamente a la proposición anterior.

3) Definimos $1: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ con $1(x) = 1$ $\forall x \in \mathbb{R}$

Se verifica que $(f \cdot 1)(x) = f(x) \cdot 1(x) = f(x) \cdot 1 = f(x)$

$(1 \cdot f)(x) = 1(x)\, f(x) = 1 \cdot f(x) = f(x)$

Luego $f \cdot 1 = f = f \cdot 1$

4) Podemos definir $\frac{1}{f} = A' \to \mathbb{R}$ con $\left(\frac{1}{f}\right)(x) = {}^{1}\!/_{f(x)} \qquad \forall x \in A$

Siendo A´ el subconjunto de A/ $\forall x \in A'$ $f(x) \neq 0$.

Se verifica que $\left(f \cdot \frac{1}{f}\right)(x) = f(x) \cdot \left(\frac{1}{f}\right)(x) = f(x) \cdot \frac{1}{f(x)} = 1$

$$\left(\frac{1}{f} \cdot f\right)(x) = \left(\frac{1}{f}\right)(x) f(x) = \frac{1}{f(x)} f(x) = 1$$

Luego $\frac{1}{f} \cdot f = 1 = f \cdot \frac{1}{f}$

La función 1 tendría dominio A´.

CONCLUSIÓN (F(A), •) es un semigrupo abeliano multiplicativo.

PROP Se verifica la propiedad distributiva del producto respecto de la suma.

Dem.

Hemos de demostrar que

$$(f + g) \cdot h = f - h + g \cdot h$$

siendo f: A $\to \mathbb{R}$, g: B $\to \mathbb{R}$ y h: C $\to \mathbb{R}$ y A´= Dom (f), B´= Dom (g) y C´= Dom (h)

Definimos (f + g) · h: $A' \cap B' \cap C' \to \mathbb{R}$ como $[(f+g) \cdot h](x) = (f(x) + g(x)) \cdot h(x)$ y definimos $(fh + gh): A' \cap B' \cap C' \to \mathbb{R}$ como $(fh + gh)(x) = f(x)h(x) + g(x)h(x)$ verificándose:

1) El dominio de ambas es el mismo

2) El verificarse en $\mathbb{R}$ la propiedad distributiva

$$[(f+g) \cdot h](x) = (f(x) + g(x))h(x) = f(x)h(x) + g(x)h(x) = (fh + gh)(x)$$

Luego $(f + g)h = fh + gh$

CONCLUSIÓN $(\mathcal{F}(A), +, \cdot)$ es un anillo conmutativo con unidad.

3.3. Producto de una función por un número Real.

DEF Dada la función $f: A \to \mathbb{R}$ y $\alpha \in \mathbb{R}$, se define el producto de α por f, αf, como la función

$$\begin{aligned} \alpha \cdot f: A &\to \mathbb{R} \\ x &\to (\alpha f)(x) \end{aligned}$$

siendo $(\alpha f)(x) = \alpha \cdot f(x)$

PROP La operación anterior verifica las siguientes propiedades:

1) Distributiva respecto de la suma de funciones.

2) Distributiva respecto de la suma de números reales.

3) Pseudo asociativa.

4) Elemento Unidad.

Dem.

Sea $f: A \to \mathbb{R}$ y $g: B \to \mathbb{R}$ dos funciones con $A, B \subset \mathbb{R}$ y sean $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ dos números cualesquiera.

1) Hemos de comprobar que $\alpha(f + g) = \alpha f + \alpha g$

$$[\alpha(f+g)](x) = \alpha \cdot (f+g)(x) = \alpha(f(x) + g(x)) =$$

En $\mathbb{R}$ se verifica la propiedad distributiva

$$= \alpha \cdot f(x) + \alpha \cdot g(x) = (\alpha f)(x) + (\alpha g)(x) = (\alpha f + \alpha g)(x) \qquad \forall x \in A \cap B$$

y como ambas funciones tienen por dominio $A \cap B$, se verifica que

$$\alpha(f + g) = \alpha f + \alpha g$$

2) Hemos de comprobar que $(\alpha + \beta) \cdot f = \alpha f + \beta f$

$$[(\alpha + \beta) \cdot f](x) = (\alpha + \beta) \cdot f(x) =$$

En $\mathbb{R}$ se verifica la propiedad distributiva

$$= \alpha f(x) + \beta f(x) = (\alpha f)(x) + (\beta f)(x) = (\alpha f + \beta f)(x) \qquad \forall x \in A$$

Por tanto $(\alpha + \beta) f = \alpha f + \beta f$

3) $a\cdot(b\cdot f)=(ab)f$

$\forall x\in A \qquad [a(bf)](x)=a(bf)(x)=a(bf(x))=$

En ℝ se verifica la propiedad pseudoasociativa

$=(ab)\cdot f(x)=[(ab)\cdot f](x)$

Luego $a(bf)=(ab)\cdot f$

4) 1 · f = f

$\forall x\in A \qquad (1\cdot f)(x)=1\cdot f(x)=f(x)\Rightarrow 1\cdot f=f$

CONCLUSIÓN ($\mathcal{F}$(A), +, $\cdot_{\mathbb{R}}$) es un ℝ-espacio vectorial.

<u>3.4. Composición de funciones.</u>

DEF Dadas las funciones f: A → ℝ y g: B → ℝ con A, B ⊂ ℝ, llamamos función compuesta de f y g, y se escribe $g\circ f$, a la función

$$\begin{aligned} g\circ f : C &\to \mathbb{R} \\ x &\to (g\circ f)(x) \end{aligned}$$

siendo $(g\circ f)(x)=g(f(x))$ y $C=\{x\in A/\ f(x)\in B\}$

PROP La operación de composición definida anteriormente verifica las propiedades

1) Asociativa.

2) Elemento Neutro.

<u>Dem.</u>

Sean f: C → ℝ, g: B → ℝ y h: A → ℝ

1) Comprobemos que $(f\circ g)\circ h=f\circ(g\circ h)$

El dominio de ambas funciones $(f\circ g)\circ h$ y $f\circ(g\circ h)$ es

$$D=\{x\in A/h(x)\in B \text{ y } g(h(x))\in C\}$$

y $\forall x\in D \quad [(f\circ g)\circ h](x)=(f\circ g)(h(x))=f(g(h(x)))$

$[f\circ(g\circ h)](x)=f((g\circ f)(x))=f(g(h(x)))$

2) Definimos I: ℝ → ℝ como I(x) = x $\quad\forall x\in\mathbb{R}$

Se verifica que $I \circ f = f = f \circ I \quad \forall f \in \mathcal{F}(A)$

OBS De esta operación podemos afirmar que, en general, no es conmutativa. Por ejemplo, sea f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = 2^x$ y g: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ como $g(x) = x + 1$

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(x+1) = 2^{x+1}$$

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(2^x) = 2^x + 1$$

4. FUNCIÓN RECÍPROCA.

DEF Dada la función f: A $\to \mathbb{R}$, llamaremos función recíproca de f, f^1, a una función g: B $\to \mathbb{R}$ que verifica

$$f \circ g = g \circ f = I$$

OBS De la condición anterior se puede deducir que

1) Rec g = Dom f

2) Rec f = Dom g

La función recíproca de f, que llamaremos f^1, si existe ha de ser inyectiva ya que si f(x) = f(y) con $x \neq y$ tendremos que $f^{-1}(f(x)) = f^{-1}(f(y)) \Rightarrow x = y$ lo que sería una contradicción.

La existencia de la función recíproca no significa que su cálculo sea fácil o posible.

Veamos una forma de calcular la recíproca de una función:

$$f(x) = \frac{4x-1}{3}$$

1) f es inyectiva ya que si $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$

2) Imf = $\mathbb{R}$ = Dom f^1

3) $y = \dfrac{4x-1}{3} \Rightarrow 3y = 4x - 1 \Rightarrow x = \dfrac{3y+1}{4} \Rightarrow f^{-1}(x) = \dfrac{3x+1}{4}$

5. RELACIÓN DE ORDEN EN $\mathcal{F}$(A).

DEF Dadas dos funciones f: A $\to \mathbb{R}$ y g: A $\to \mathbb{R}$ definimos una relación en $\mathcal{F}$(A) como

$$f \leq g \Leftrightarrow f(x) \leq g(x) \quad \forall x \in A$$

PROP La relación binaria anterior definida en F(A) verifica las propiedades

1) Reflexiva.

2) Antisimétrica.

3) Transitiva.

Dem.

Inmediata.

CONCLUSIÓN La relación binaria anterior es una relación de orden. Por tanto (F(A), $\leq$) es un conjunto ordenado.

OBS La relación de orden no es de orden total ya que dadas cualquier par de funciones f, g$\in F$(A) no podemos garantizar que $f \leq g$ ó $g \leq f$

DEF Diremos que una función f es positiva si $f \geq 0 \quad \forall x \in$ Dom f, y estrictamente positiva si $f > 0$.

DEF Diremos que una función g es negativa si $g \leq 0 \quad \forall x \in$ Dom g y estrictamente negativa si $g < 0$.

A partir de estas definiciones podemos dar otras como

1) $f^+(x) = \begin{cases} f(x)\ si\ f(x) \geq 0 \\ 0\ si\ f(x) < 0 \end{cases}$

2) $f^-(x) = \begin{cases} 0\ si\ f(x) > 0 \\ f(x)\ si\ f(x) \leq 0 \end{cases}$

DEF Definimos el Valor Absoluto de f, y se representa por $|f|$, como

$$|f|(x) = \begin{cases} f(x)\ si\ f(x) \geq 0 \\ -f(x)\ si\ f(x) < 0 \end{cases}$$

PROP $|f| = f^+ - f^-$

Dem.

Inmediata.

PROP Se verifican las siguientes propiedades

1) $|f+g| \leq |f| + |g|$

2) $|f \cdot g| = |f| \cdot |g|$

3) $||f| - |g|| \leq |f - g|$

<u>Dem.</u>

1) Como:

$-|f(x)| \leq f(x) \leq |f(x)| \quad \forall x \in Dom(f)$

y $-|g(x)| \leq g(x) \leq |g(x)| \quad \forall x \in Dom(g)$

Entonces sumando obtenemos que:

$-|f(x)| - |g(x)| \leq f(x) + g(x) \leq |f(x)| + |g(x)| \quad \forall x \in C$

siendo $C = Dom(f) \cap Dom(g)$

$\Rightarrow -(|f(x)| + |g(x)|) \leq f(x) + g(x) \leq |f(x)| + |g(x)|$

$\Rightarrow |f(x) + g(x)| \leq |f(x)| + |g(x)| \quad \forall x \in C$

2) Trivial.

3) Sea $C = Dom(f) \cap Dom(g)$

$\forall x \in C \quad ||f(x)| - |g(x)|| \leq |f(x) - g(x)| \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow ||f(x)| - |g(x)||^2 \leq |f(x) - g(x)|^2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow |f(x)|^2 + |g(x)|^2 - 2|f(x)||g(x)| \leq (f(x))^2 + (g(x))^2 - 2f(x)g(x) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -2|f(x)||g(x)| \leq -2f(x)g(x) \Leftrightarrow f(x)g(x) \leq |f(x)||g(x)|$

que es cierto trivialmente $\forall x \in C$

6. TIPOS DE FUNCIONES.

6.1. Funciones Acotadas.

Dada una función f: A $\rightarrow \mathbb{R}$, sabemos que Imf es un conjunto de números reales (Im f = f(A))

DEF Diremos que f: A $\rightarrow \mathbb{R}$ está acotada inferiormente si el conjunto Imf también lo está.

DEF Diremos que f: A $\rightarrow \mathbb{R}$ está acotada si lo está superiormente e inferiormente.

Recordemos que todo subconjunto $\mathbb{R}$ que está acotado superiormente tiene supremo (la más pequeña de las cotas superiores).

DEF Si f está acotada superiormente, con f: A $\rightarrow \mathbb{R}$, llamaremos extremo superior de f en A al supremo de f(A), y se denota por $\sup_{x\in A} f(x)$.

DEF Si f: A $\rightarrow \mathbb{R}$ está acotada inferiormente, llamaremos extremo inferior de f en A al Infimo de f(A), y se denota por $\mathit{Inf}_{x\in A}\ f(x)$.

DEF Si el $\mathit{Sup}_{x\in A} f(x)$ es un elemento de Imf, recibe el nombre de Máximo de f y se representa por $\mathit{Max}_{x\in A} f(x)$

DEF si el $\mathit{Inf}_{x\in A}\ f(x)$ es un elemento Imf, recibe el nombre de Mínimo de f y se representa por $\mathit{Min}_{x\in A}\ f(x)$

6.2. Funciones Monótonas.

DEF Diremos que f: A $\rightarrow \mathbb{R}$ es una función monótona creciente si $\forall x_1, x_2 \in A$ con $x_1<x_2$ se verifica que $f(x_1) \leq f(x_2)$. Y es estrictamente creciente si $f(x_1) < f(x_2)$.

DEF Diremos que f: A $\rightarrow \mathbb{R}$ es una función monótona decreciente si $\forall x_1, x_2 \in A$ con $x_1 < x_2$ se verifica que $f(x_1) \geq f(x_2)$. Y es estrictamente decreciente si $f(x_1) > f(x_2)$.

6.3. Funciones Pares e Impares.

DEF Dada f: A $\rightarrow \mathbb{R}$ diremos que es una función par si $\forall x\in A$

1) $- x\in A$

2) $f(x) = f(- x)$

OBS Las funciones pares tienen una representación gráfica simétrica con respecto al eje y. Si doblamos el plano respecto al eje OY entonces las gráficas de ambos lados coinciden.

DEF Dada f: A $\rightarrow \mathbb{R}$ diremos que es una función impar si $\forall x\in A$

1) $- x\in A$

2) $f(x) = - f(- x)$

OBS Las funciones impares tienen una representación gráfica donde el origen (0, 0) es su centro de simetría. Si doblamos el plano respecto de un eje y después respecto del otro entonces las gráficas coinciden.

6.4. Funciones periódicas.

DEF Dada $f: A \to \mathbb{R}$ diremos que una función periódica de período P si P es menor número positivo que verifica $\forall x \in A$.

1) $x + T \in A$

2) $f(x + T) = f(x)$

Ejemplo.

$F(x) = \text{sen } x$ o $f(x) = \cos x$ que tienen período $T = 2\pi$

7. FUNCIONES ELEMENTALES. SITUACIONES REALES DONDE APARECEN.

7.1. Funciones Polinómicas de 1^er^ grado.

Las funciones polinómicas de primer grado son

$$f: (\mathbb{R}, +) \to (\mathbb{R}, +)$$

con $f(x) = ax + b$ siendo $a, b \in \mathbb{R}$.

El dominio de estas funciones es $\mathbb{R}$ y su recorrido también. Su representación gráfica es una recta de pendiente a y ordenada en el origen b.

Según los valores de a y b podemos distinguir varios casos:

1) b = 0

Son isomorfismos continuos entre el grupo $(\mathbb{R}, +)$ y $(\mathbb{R}, +)$. Por tanto son aplicaciones biyectivas, continuas y verifican que $f(x_1 + x_2) = f(x_1) + f(x_2) \quad \forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}$.

Es fácil comprobar que si $f(1) = a$ entonces $f(x) = ax$.

Al ser homomorfismo $$f(m) = f\left(1 + 1 + \overset{m}{\cdots} + 1\right) = mf(1) = am$$

$$\left.\begin{aligned} f\left(\frac{m}{m}\right) &= f(1) = a \\ f\left(\frac{m}{m}\right) &= mf\left(1/m\right) \end{aligned}\right\} \Rightarrow f\left(1/m\right) = a\frac{1}{m}$$

$$f(0) = f(x + (-x)) = f(x) + f(-x) \Rightarrow f(x) = -f(-x)$$

Podemos concluir que $f\left(\frac{m}{n}\right) = \frac{m}{n}a \quad \forall \frac{m}{n} \in Q$

Y como Q es denso y f es continua podemos extender la definición de Q a ℝ.

Estas aplicaciones reciben el nombre de Lineales.

2) b ≠ 0

Estas aplicaciones reciben el nombre de Afines, y su gráfica no pasa por el origen de coordenadas.

3) a > 0

Son funciones estrictamente crecientes en ℝ.

4) a < 0

Son funciones estrictamente decrecientes en ℝ.

Como aplicaciones en la vida real nos podemos encontrar:

1) La distancia recorrida por un móvil en un movimiento rectilíneo uniforme viene dada por

$$e(t) = e_o + v_o \cdot t$$

2) El coste de una determinada cantidad de un producto vendido al peso

$$c(p) = a \cdot p$$

3) La longitud de una circunferencia es función lineal del diámetro de la misma

$$L(d) = \boldsymbol{p} \cdot d$$

4) Cambio de escala lineal, por ejemplo para pasar de grados Fahrenheit a grados centígrados.

7.2. Funciones Polinómicas de 2º grado.

Una función polinómica de segundo grado o cuadrática tiene como expresión general

$f(x) = ax^2 + bx + c$ con $a, b, c \in$ ℝ y $a \neq 0$.

Estas funciones tienen como dominio todo ℝ, y su representación gráfica es una parábola.

Los puntos más característicos de estas funciones son:

1) Los puntos de corte con el eje horizontal. Si existen son

$$P_1\left(\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a},0\right) \quad y \quad P_2\left(\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a},0\right)$$

2) El punto de corte con el eje vertical

P_3 (0, b)

3) El vértice de la parábola

$$V\left(\frac{-b}{2a},\frac{-\left(b^2-4ac\right)}{4a}\right)$$

Si a > 0 tenemos que el vértice es el mínimo de la función y si a < 0 el vértice es el máximo de la función.

Aplicaciones:

1) La distancia recorrida por un móvil es un movimiento uniformemente acelerado es

$$e(t)=e_o+v_o t+\frac{1}{2}a_o t^2$$

2) El área de un círculo

$$a(r)=\pi r^2$$

7.3. Funciones Potenciales.

Son isomorfismos continuos entre ($\mathbb{R}^+$, ·) y ($\mathbb{R}^+$, ·). Sus características son

1) Son funciones biyectivas de $\mathbb{R}^+$ en $\mathbb{R}^+$.

2) $f(x_1 \cdot x_2) = f(x_1) \cdot f(x_2) \quad \forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}^+$

3) Son continuas.

Su expresión es $f(x) = x^\alpha$ con $\alpha \in \mathbb{R} - \{0\}$

7.4. Funciones Polinómicas.

Las funciones polinómicas son aplicaciones continuas de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ donde

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

y $f(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$

Como aplicaciones nos encontramos con

1) El volumen de un cubo es

$$V(l) = l^3$$

2) Y el de una esfera

$$V(r) = \frac{4}{3}\pi r^3$$

7.5. Funciones de Proporcionalidad Inversa.

Las funciones homográficas tienen como expresión

$$f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$$

verificando que $c \neq 0$ y $ad \neq bc$.

El dominio de estas funciones es $\mathbb{R} - \left\{-d/c\right\}$ y su representación gráfica es una hipérbola.

También las podemos expresar como

$$f(x) = p + \frac{K}{x-q}$$

donde $y = p$ y $x = q$ son las ecuaciones de los ejes de la hipérbola.

Si $p = 0$ y $q = 0$ obtenemos $f(x) = \frac{K}{x}$ que son las llamadas funciones de proporcionalidad inversa.

Aplicaciones:

1) Relación entre la base y la altura de un rectángulo de área constante.

2) Ley de Ohm con V constante.

3) Atracción entre dos cuerpos de masas m_1 y m_2, siguiendo la ley de Newton:

$$F = G\frac{m_1 \cdot m_2}{r^2}$$

4) Atracción o repulsión entre dos cuerpos con cargas Q_1 y Q_2 siguiendo la ley de Coulomb

$$F = K\frac{Q_1 \cdot Q_2}{r^2}$$

7.6. Funciones Escalonadas.

Las más conocida es f(x) = E(x) donde f(x) es la función parte entera x, y f tiene como dominio $\mathbb{R}$ y recorrido $\mathbb{Z}$.

También nos encontramos en informática con

1) f(x) = $\lfloor x \rfloor \Rightarrow$ Entero más próximo pero mas pequeño que x.

2) F(X) = $\lceil X \rceil \Rightarrow$ Entero más próximo pero más pequeño grande que x.

7.7. Funciones Exponenciales.

Son funciones que verifican

$$f: (\mathbb{R}, +) \rightarrow (\mathbb{R}^+, \cdot)$$

y $f(x) = a^x$ con $a \in \mathbb{R}^+$.

1) Son aplicaciones biyectivas.

2) $f(x_1 + x_2) = f(x_1) \cdot f(x_2) \quad \forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}$

3) Son Continuas.

Nos encontramos aplicaciones en

1) Cálculo del interés compuesto y del interés continuo.

2) Crecimiento de Poblaciones.

3) Desintegración de Sustancias Radiactivas.

7.8. Funciones Logarítmicas.

Son funciones recíprocas de las exponenciales,

$$f: (\mathbb{R}^+, \cdot) \rightarrow (\mathbb{R}, +)$$

con $f(x) = \log_a x$ y $a \in \mathbb{R}^+$. Verifican

1) Son aplicaciones biyectivas

2) $f(x_1 \cdot x_2) = f(x_1) + f(x_2) \quad \forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}$

3) Son Continuas.

Como aplicaciones tenemos las mismas que para las exponenciales, al ser unas recíprocas de otras.

Además tenemos:

1) La escala de Richter que mide la intensidad de los terremotos es logarítmica.

2) Los logaritmos son la base de la construcción de la regla de Cálculo.

7.9. Funciones Definidas a Trozos.

Por ejemplo

$$f(x) = \begin{cases} 2x+1 & x < 0 \\ -e^x & x \geq 0 \end{cases}$$

Como aplicación a la vida real nos podemos encontrar con la función que nos da la escala de gravemen del Impuesto sobre la Renta de las Personas Físicas (IRPF).

Bibliografía Recomendada.

Análisis Matemático I. Aut. J.A. Fernández Viña. Ed. Tecnos

Lecciones de Cálculo Infinitesimal I. Aut. R. Molina Legaz, M. Franco. Ed. Universidad de Murcia.

Principios de Análisis Matemático. Aut. W. Rudin. Ed. McGraw-Hill

Curso de Análisis Matemático I. Aut. E.L. Luna. Ed. Edunsa, 1991.

Calculus. Aut. M. Spivak. Ed. Reverté.

Análisis Matemático. Aut. M. de Guzmán, B. Rubio. Ed. Pirámide.

Calculus. Aut. Apostol. Ed. Reverté

Introducción al Análisis Matemático. Aut. J.M. Ortega. Ed. Labor