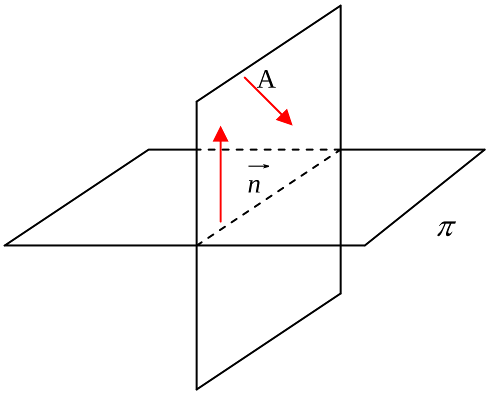
TEMA 7 Problemas métricos

1. Plano perpendicular.

Halla la ecuación del plano que contiene a los puntos A (-4, 0,-2) y B (0, 3, -1) y es perpendicular al plano $\pi: x+3z-5=0$.

Los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\vec{n}$ (vector normal del plano π) y uno de los puntos A o B determinan el plano que buscamos:

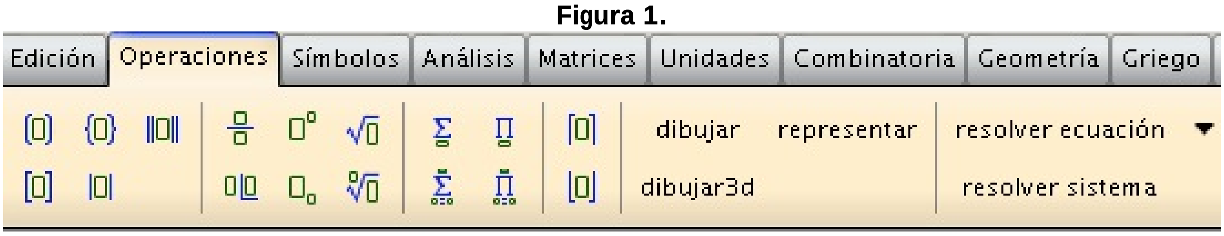


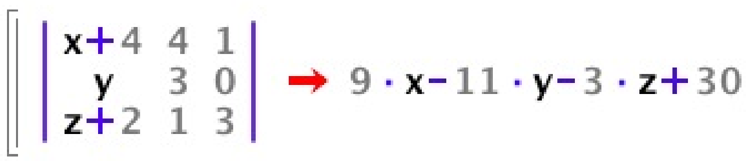
$$\begin{vmatrix} x+4 & 4 & 1 \\ y & 3 & 0 \\ z+2 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow 9x-11y-3z+30=0$$

Ahora resolveremos el problema con Wiris:

1. Para resolver este ejercicio, resolveremos el determinante.

Figura 1.





**Recordamos que para calcular un determinante, pinchamos en la pestaña Matrices y a continuación en el botón Determinante, indicamos cuántas filas y columnas queremos que tenga, las rellenamos y pulsamos el botón igual.*

Enlace con el ejercicio resuelto en la web:

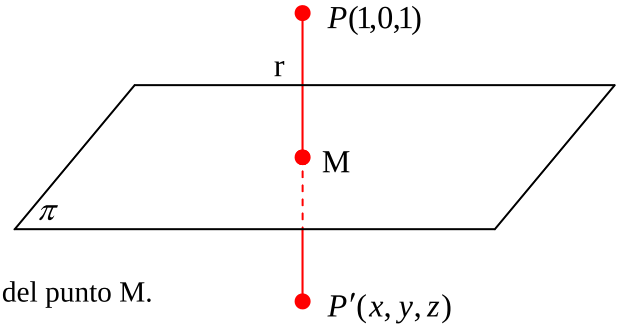
WIRIS

2. Punto simétrico.

Halla el punto simétrico de P (1, 0, 1) respecto del plano $\pi: x-y+z=1$.

- Hallamos la recta r que pasa por P y es perpendicular a π :

$$\vec{d}_r = \vec{n}(1,-1,1) \rightarrow \begin{cases} x = 1+\lambda \\ y = -\lambda \\ z = 1+\lambda \end{cases}$$



- Obtenemos el punto M de corte de r y π :

$$1+\lambda+\lambda+1+\lambda = 1 \rightarrow 3\lambda = -1 \rightarrow \lambda = -\frac{1}{3} \rightarrow M\left(\frac{2}{3},\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right)$$

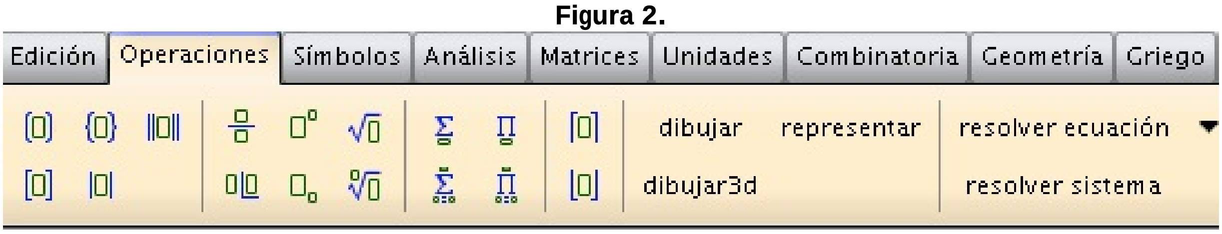
- El punto que buscamos, $P'(x,y,z)$, es simétrico de P respecto del punto M.

Como M es el punto medio de $\overline{PP'}$, se tiene: $\left(\frac{x+1}{2},\frac{y}{2},\frac{z+1}{2}\right) = \left(\frac{2}{3},\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right) \rightarrow P'\left(\frac{1}{3},\frac{2}{3},\frac{1}{3}\right)$

Ahora resolveremos el problema con Wiris:

1. Para obtener cada coordenada del punto, tenemos que resolver tres ecuaciones:

Figura 2.



$$\text{resolver}\left(\frac{x+1}{2}=\frac{2}{3}\right) \rightarrow \left\{\left\{x=\frac{1}{3}\right\}\right\}$$

$$\text{resolver}\left(\frac{y}{2}=\frac{1}{3}\right) \rightarrow \left\{\left\{y=\frac{2}{3}\right\}\right\}$$

$$\text{resolver}\left(\frac{z+1}{2}=\frac{2}{3}\right) \rightarrow \left\{\left\{z=\frac{1}{3}\right\}\right\}$$

**Para obtener el resultado de una ecuación, pinchamos en Operaciones, luego en Resolver ecuación, rellenamos los datos y pulsamos igual.*

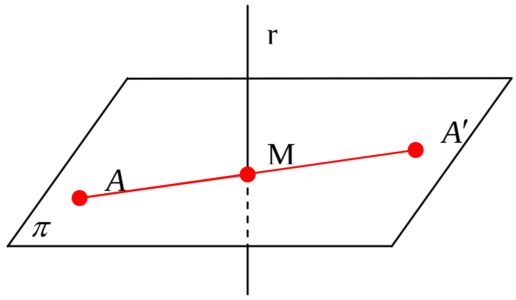
***Para poner una fracción, nos vamos dentro de operaciones y pinchamos en el icono representado por dos cuadrados y una barra entre ellas.*

Enlace con el ejercicio resuelto en la web:

3. Punto simétrico.

Determina el punto simétrico de A (-3, 1, -7) respecto de la recta siguiente: $r:\dfrac{x+1}{1}=\dfrac{y-3}{2}=\dfrac{z+1}{2}$.

- Hallamos el plano π que contiene a A y es perpendicular a r:



$$\vec{n}=\vec{d}_r(1,2,2): x+2y+2z+k=0 \rightarrow -3+2-14+k=0$$

$$k=15 \rightarrow x+2y+2z+15=0$$

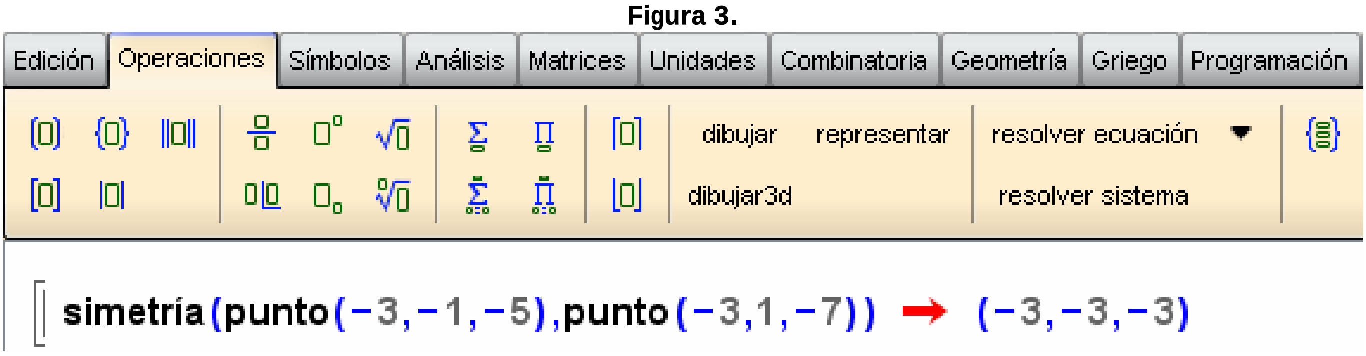
- Buscamos el punto de corte de r y π: M (-3, -1, -5)

- El punto A' es simétrico de A respecto de M: $\left(\dfrac{x-3}{2}=\dfrac{y-3}{2}=\dfrac{z+1}{2}\right)=(-3,-1,-5)\rightarrow A'(-3,-3,-3)$

Ahora resolveremos el problema con Wiris:

1. Para resolver este ejercicio, utilizaremos la opción 'simetría'. Calcularemos el punto simétrico escribiendo 'simetría' y entre paréntesis los dos puntos sobre los que queremos calcular el tercero:

Figura 3.



Enlace con el ejercicio resuelto en la web:

WIRIS

Otra forma de hallar M.

M es un punto de r. Sus coordenadas son $(-1+\lambda, 3+2\lambda, -1+2\lambda)$.

El vector $\overrightarrow{AM}$ debe ser perpendicular al vector director de r:

$\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{d_r}=0 \rightarrow (\lambda+2, 2\lambda+2, 2\lambda+6)\cdot(1,2,2)=0 \rightarrow 9\lambda+18=0 \rightarrow \lambda=-2$

Sustituyendo este valor de λ en r, obtenemos M (-3, -1, -5).

4. Distancia punto-recta.

Halla el punto de $r:\begin{cases} x=\lambda \\ y=3-\lambda \\ z=1+2\lambda \end{cases}$ ***cuya distancia al punto P (1, 0, 2) sea*** $\sqrt{5}$.

El punto que buscamos, Q, es de la forma $(\lambda, 3-\lambda, 1+2\lambda)$ por pertenecer a la recta r:

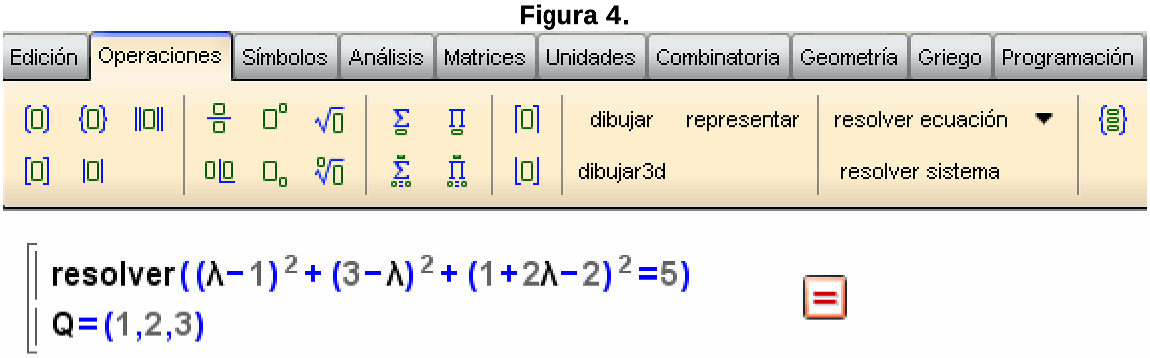
$$dist(P,Q)=\left|\overrightarrow{PQ}\right|=\sqrt{(\lambda-1)^2+(3-\lambda)^2+(1+2\lambda-2)^2}=\sqrt{5}:$$

$$(\lambda-1)^2+(3-\lambda)^2+(1+2\lambda-2)^2=5 \to 6\lambda-12\lambda+6=0 \to \lambda=1 \to Q=(1,2,3)$$

Ahora resolveremos el problema con Wiris:

1. Resolvemos la ecuación que se nos plantea, sabiendo que para introducir una letra como λ, sólo tenemos que pinchar en la pestaña Griego y pinchar en ella:

Figura 4.



**Recordamos que para resolver una ecuación pinchamos en Operaciones y luego en Resolver Sistema. Después solo tenemos que rellenar ambos miembros de la ecuación.*

Enlace con el ejercicio resuelto en la web:

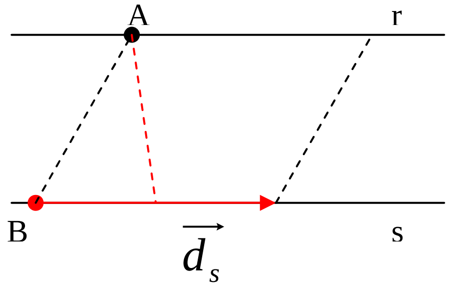
WIRIS

5. Distancia entre rectas.

Halla la distancia entre las rectas r y s: $r:\begin{cases} x=2\lambda \\ y=1+\lambda \\ z=3-\lambda \end{cases}$ $\quad s:\begin{cases} x-2y-1=0 \\ y+z=0 \end{cases}$

- Estudiamos la posición de las rectas:

  Hallamos $\vec{d_r} = (1,-2,0)\cdot(0,1,1) = (2,1,-1)$; $\vec{d_r} = (2,1,-1)$ $\vec{d_s} = (-2,-1,1) \rightarrow$ r y s tienen la misma dirección. A (0, 1, 3,) $\in r \rightarrow A \notin s \rightarrow$ r y s son paralelas.



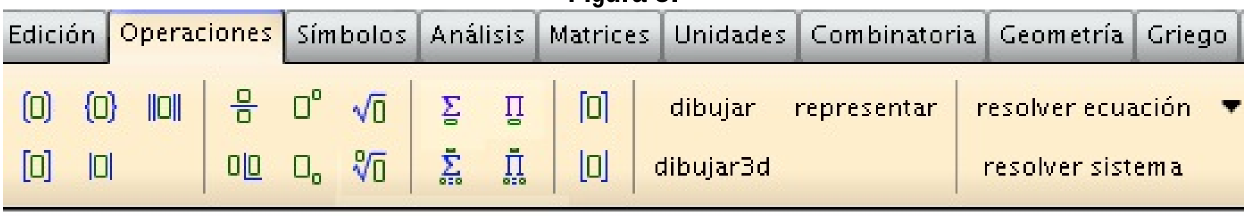
- Calculamos la distancia de A a s:

  Tomamos un punto de s haciendo z = 0: B (1, 0, 0)

$$\left.\begin{matrix} B(1,0,0) \\ \vec{AB}(1,-1,-3) \end{matrix}\right\} dist(A,s) = \frac{\left|\vec{AB}\cdot\vec{d_s}\right|}{\left|\vec{d_s}\right|} = \frac{\sqrt{50}}{\sqrt{6}} = \frac{5\sqrt{2}}{\sqrt{6}} = \frac{5}{\sqrt{3}} = 2{,}89$$

Ahora resolveremos el problema con Wiris:

Figura 5.



$$\frac{\sqrt{50}}{\sqrt{6}} \rightarrow \frac{5\cdot\sqrt{3}}{3}$$

Enlace con el ejercicio resuelto en la web:

WIRIS

6. Volumen de un tetraedro.

Un tetraedro tiene por vértices A (2, 1, 0), B (3, 4, 0) y C (5, 1, 0). El cuarto vértice, D, esta sobre la recta $r:\begin{cases} x = 1-\lambda \\ y = 2+\lambda \\ z = 3+\lambda \end{cases}$. ***Halla las coordenadas de D para que el volumen del tetraedro sea 6 unidades cúbicas.***

D es un punto de r. Sus coordenadas son $D(1-\lambda, 2+\lambda, 3+\lambda)$. $V_{ABCD} = \frac{1}{6}\left|[\vec{AB}, \vec{AC}, \vec{AD}]\right|$

$\vec{AB} = (1.3.0)$ $\vec{AC} = (3,0,0)$ $\vec{AD} = (-1-\lambda, 1+\lambda, 3+\lambda)$.

Calculamos el valor absoluto de $\frac{1}{6}\begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \\ -1-\lambda & 1+\lambda & 3+\lambda \end{vmatrix} = 6 \rightarrow |-9(3+\lambda)| = 36$ y esta ecuación tiene 2 soluciones

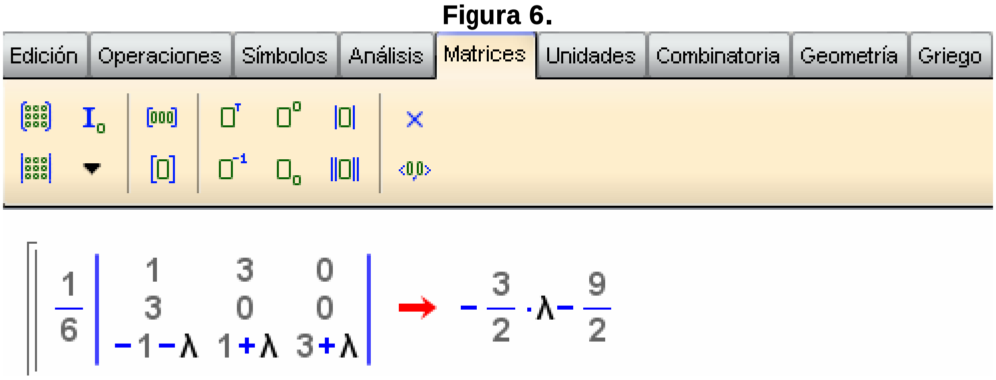
que son $\begin{array}{l} 3+\lambda=4 \Rightarrow \lambda=1 \\ -3-\lambda=4 \Rightarrow \lambda=-7 \end{array}$

Hay 2 soluciones del problema: $\left< \begin{array}{l} D(0,3,4) \\ D(8,-5,-4) \end{array} \right.$

Ahora resolveremos el problema con Wiris:

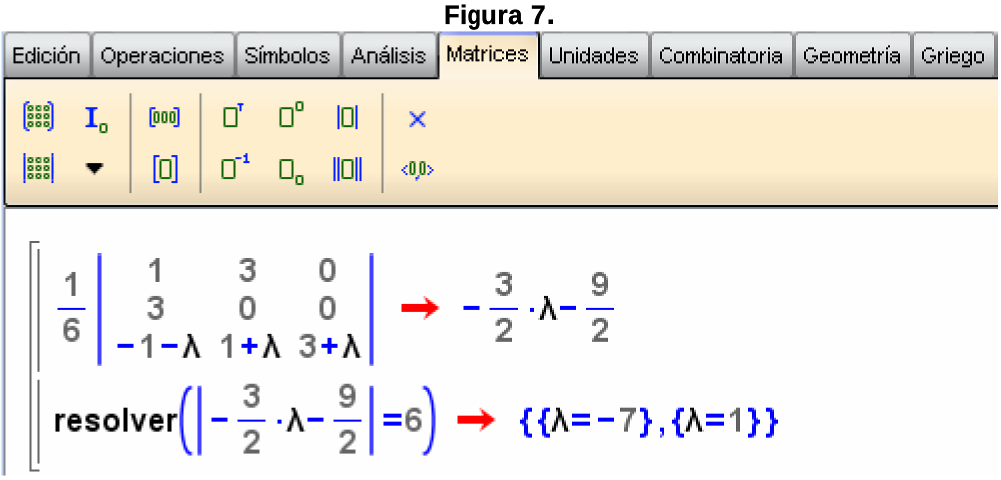
1. Calculamos el determinante pinchando en la pestaña 'Matrices', indicando cuántas filas y columnas queremos que tenga y rellenamos con nuestros datos. Después escribimos delante del determinante la fracción por la que queremos multiplicarla y pulsamos igual para obtener el resultado:

Figura 6.



2. En segundo lugar, igualamos el resultado obtenido al calcular el determinante a seis, pero para ello, debemos poner este en valor absoluto, y para ello, lo seleccionamos y pichamos en el icono de valor absoluto dentro de la pestaña de 'Operaciones':

Figura 7.



Enlace con el ejercicio resuelto en la web:

7. Punto equidistante de otros dos.

a) Calcula un punto de R de la recta $s:\begin{cases} x = 5+\lambda \\ y = \lambda \\ z = 2\lambda \end{cases}$ ***que equidiste de los puntos P (1, 0, -1) y Q (2, 1, 1).***

b) Calcula el área del triangulo determinado por los puntos P, Q, y R.

a) El punto R, por ser un punto de s, tiene por coordenadas $R(5+\lambda,\lambda,-2-2\lambda)$. Este punto debe cumplir:

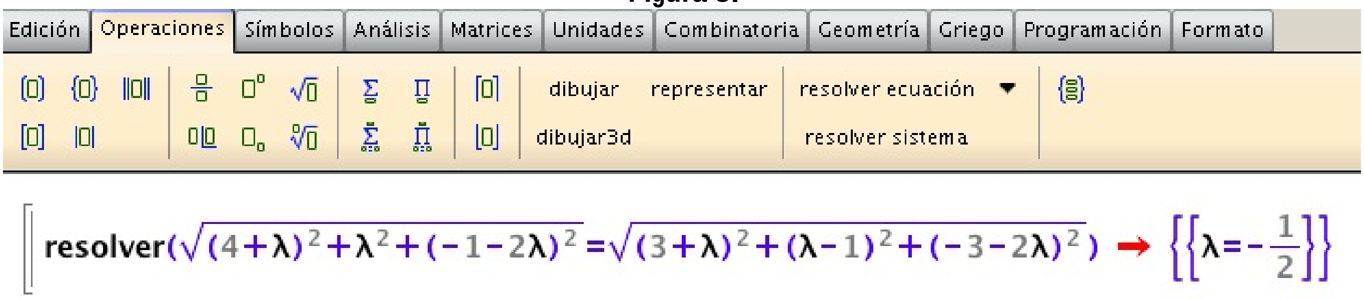
$$dist(P,R) = dist(Q,R) \Rightarrow \sqrt{(4+\lambda)^2+\lambda^2+(-1-2\lambda)^2} = \sqrt{(3+\lambda)^2+(\lambda-1)^2+(-3-2\lambda)^2} \rightarrow 4\lambda+2=0 \rightarrow \lambda = -\frac{1}{2}$$

Por tanto, $R\left(\frac{9}{2},-\frac{1}{2},-1\right)$.

Ahora resolveremos el problema con Wiris:

1. Resolveremos la ecuación de una manera muy sencilla. Recordaremos que después de pinchar en *Resolver Ecuación*, y rellenar los miembros, pulsamos el botón de igual y obtenemos el resultado:

Figura 8.



Enlace con el ejercicio resuelto en la web:

b) Área del triangulo PQR: $S = \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{PQ}\times\overrightarrow{PR}\right| \rightarrow \overrightarrow{PQ} = (1,1,2; \overrightarrow{PR} = \left(\frac{7}{2},-\frac{1}{2},0\right) \rightarrow \overrightarrow{PQ}\times\overrightarrow{PR} = (1,7,-4)$

$$S = \frac{1}{2}\sqrt{1+49+16} = \frac{\sqrt{66}}{2}u^2$$

Como el triangulo PQR es isósceles, podríamos obtener su área calculando su base, $\overrightarrow{PQ} = \sqrt{6}$,

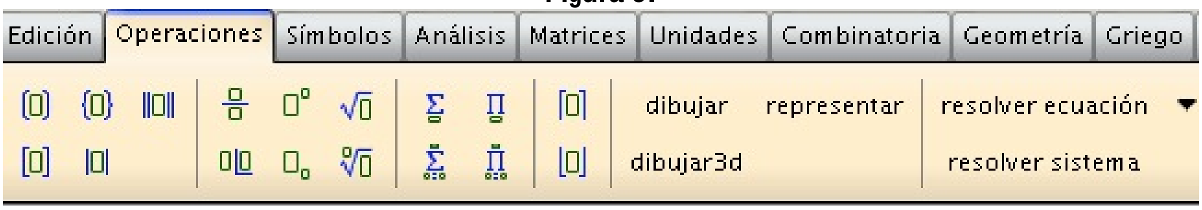
Y su altura, que es la distancia de R al punto medio de PQ, $M\left(\frac{3}{2},\frac{1}{2},0\right):\left|\overrightarrow{RM}\right| = \sqrt{11}$ así

$$S = \frac{\sqrt{6}\cdot\sqrt{11}}{2} = \frac{\sqrt{66}}{2}u^2.$$

Ahora resolveremos el problema con Wiris:

1. Resolvemos la operación para calcular S (ya sabemos que para incorporar las fracciones y las raíces, vamos a Operaciones y pulsamos sus correspondientes iconos):

Figura 9.



$$\left[\frac{1}{2}\sqrt{1+49+16} \rightarrow \frac{\sqrt{66}}{2}\right.$$

Enlace con el ejercicio resuelto en la web:

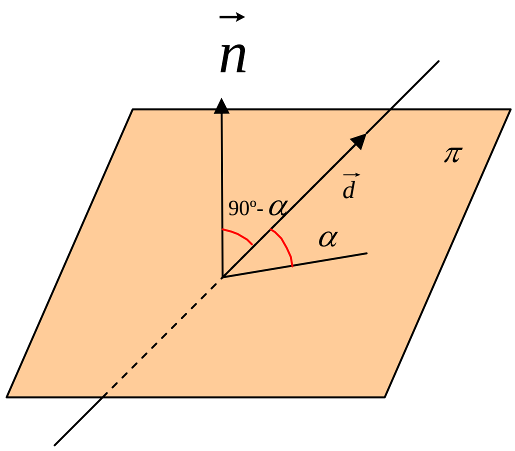
WIRIS

8. Proyección ortogonal de una recta sobre un plano.

Sean la recta r y el plano π dados por: $r:\begin{cases} x = -1-\lambda \\ y = -\lambda \\ z = 2\lambda \end{cases} \quad \pi: 2x-3y+z+1=0$

a) Calcula el seno del ángulo que forman r y π.

b) Halla la ecuación de la proyección ortogonal de r sobre π.



a) El ángulo que forman el vector director de r y el vector normal de π es el complementario del ángulo que forman r y π.

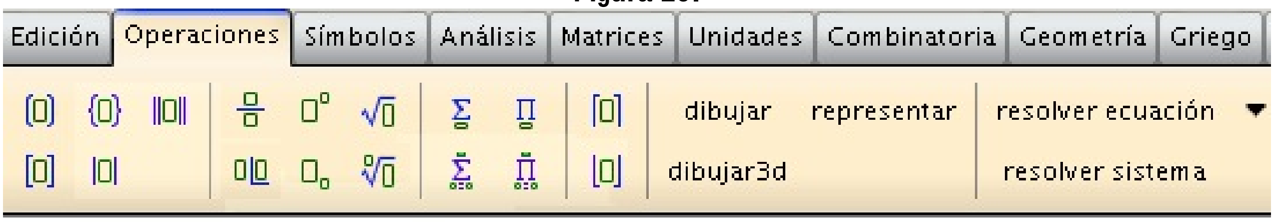
$$\cos(90^\circ - \alpha) = \frac{\vec{d}\cdot\vec{n}}{|\vec{d}|\cdot|\vec{n}|} = \frac{(-1,-1,2)\cdot(2,-3,1)}{\sqrt{1+1+4}\cdot\sqrt{4+9+1}} = \frac{3}{\sqrt{84}}$$

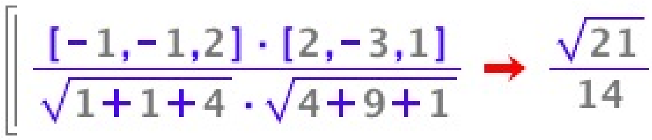
Por tanto: $\cos(90^\circ - \alpha) = sen(\alpha) = \dfrac{3}{\sqrt{84}}$

Ahora resolveremos el problema con Wiris:

1. Haremos el cálculo de la fracción:

Figura 10.



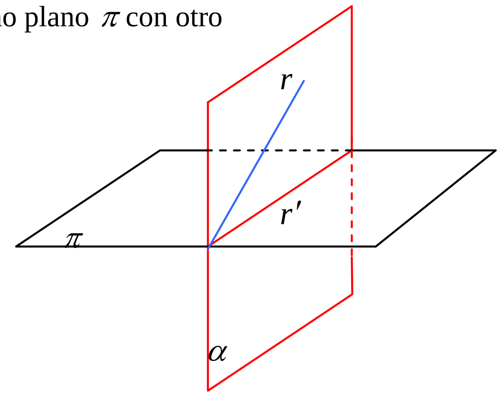


**Deberemos recordar que para hacer una multiplicación de vectores, los pondremos entre corchetes, y que para insertar una raíz, nos iremos a la pestaña Operaciones.*

Enlace con el ejercicio resuelto en la web:

b) La proyección ortogonal de r sobre π es la recta de intersección de dicho plano π con otro α perpendicular a π y que contenga a r.

$A(-1,0,0); \vec{d_r} = (-1,-1,2); \vec{n} = (2,-3,1)$



- ***Ecuación de*** $\alpha = x + y + z + 1 = 0$
- ***Proyección ortogonal:*** $r' : \begin{cases} 2x - 3y + z + 1 = 0 \\ x + y + z + 1 = 0 \end{cases}$

9. Recta perpendicular.

Halla la ecuación de la recta s que pasa por el punto P (2, -1, 1) y corta perpendicularmente a la recta

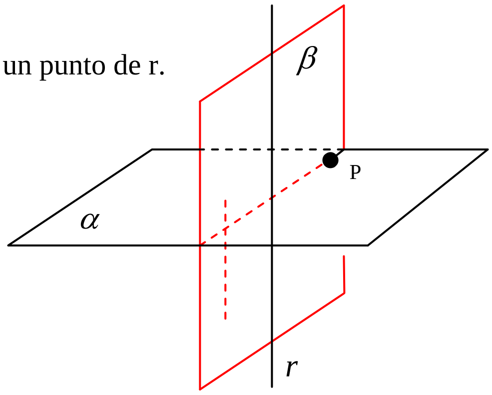
$r: \dfrac{x-3}{1} = \dfrac{y+1}{2} = \dfrac{z}{3}.$

La recta s es la recta de intersección de los planos α y β.

α : es perpendicular a r y contiene a P.

β : contiene a r y a P.

- Plano $\alpha : x+2y+3z+k=0 \rightarrow 2+2(-1)+3\cdot 1+k=0 \rightarrow k=-3$; $\alpha : x+2y+3z-3=0$
- Plano β : vectores del plano $\overrightarrow{d_r}(1,2,3)$ y $\overrightarrow{AP}(-1,0,1)$, siendo $A(3,-1,0)$ un punto de r.



$$\beta : \begin{vmatrix} x-2 & 1 & -1 \\ y+1 & 2 & 0 \\ z-1 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow x-2y+z-5=0$$

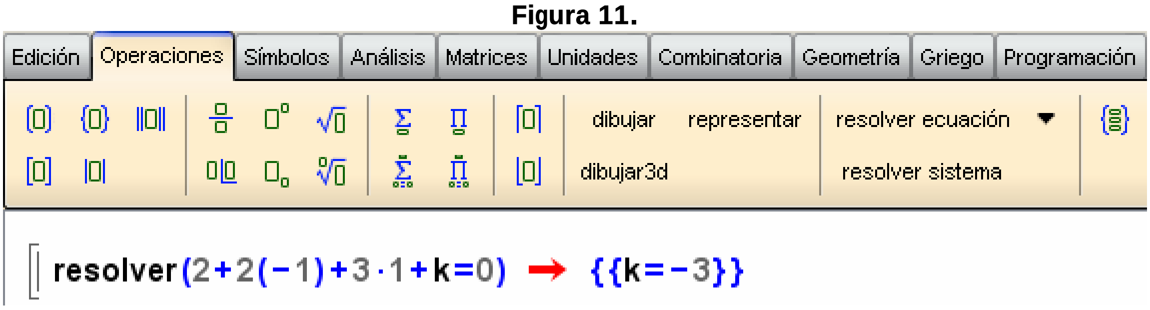
La recta que buscamos es: $s : \begin{cases} x+2y+3z-3=0 \\ x-2y+z-5=0 \end{cases}$

Vector director de s: (-8, -2,4)

Ahora resolveremos el problema con Wiris:

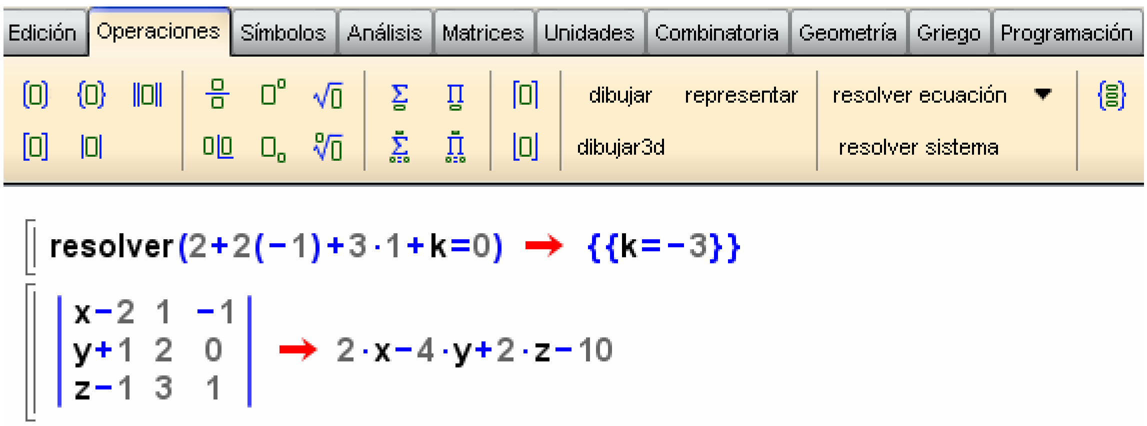
1. En primer lugar, resolvemos la ecuación del plano α para obtener el valor de k, que luego sustituiremos para obtener la primera ecuación de la recta:

Figura 11.



2. En segundo lugar, calculamos el determinante como en otros ejercicios (dentro de la pestaña 'Matrices'). El resultado de este determinante es la segunda ecuación de la recta:

Figura 12.



Enlace con el ejercicio resuelto en la web:

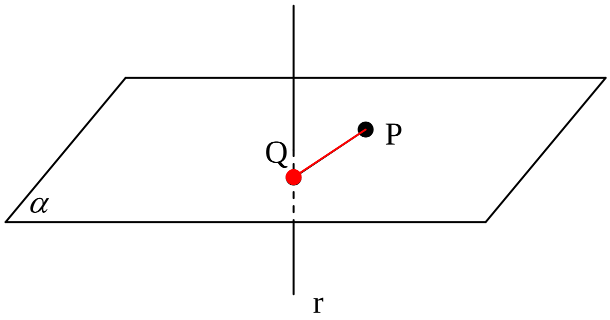
WIRIS

- Otra forma de resolver el problema

Después de hallar el plano α, perpendicular a r y que contiene a p,

buscamos el punto de corte de r y α, Q. Los puntos P y Q determinan s.

$$\alpha: x+2y+3z-3=0 \to 3+\lambda+2(-1+2\lambda)+3\cdot 3\lambda-3=0$$
$$\to \lambda=\frac{1}{7} \to Q\left(\frac{22}{7},-\frac{5}{7},\frac{3}{7}\right)$$
$$s: \overrightarrow{PQ}=\left(\frac{8}{7},\frac{2}{7},-\frac{4}{7}\right) \to \vec{d}\,'(8,2,-4) \to s: \begin{cases} x=2+8\lambda \\ y=-1+2\lambda \\ z=1-4\lambda \end{cases}$$



- Otro método

También podemos buscar el vector director de s, $\vec{d}\,'(a,b,c)$ teniendo en cuenta que:

1. $\vec{d} \perp \vec{d}\,' \Rightarrow d\cdot d'=0 \to a+2b+3c=0$

2. r y s se cortan $\to ran(\vec{d},\vec{d}\,',\overrightarrow{PA})=2 \to \begin{vmatrix} a & b & c \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix}=0$ Las soluciones del sistema: $\begin{cases} 1.)\, a+2b+3c=0 \\ 2.)\, a-2b+c=0 \end{cases}$

Son los vectores de la recta s $\to \vec{d}\,'\left(-2\lambda,-\frac{1}{2}\lambda,\lambda\right)$ para $\lambda=-4$, obtenemos $\vec{d}\,'(8,2,-4)$.

10. Perpendicular común.

Comprueba que las rectas r y s se cruzan, y halla la ecuación de la perpendicular común a ambas.

$$r: \frac{x}{0}=\frac{y-1}{1}=\frac{z-3}{2} \qquad s: \frac{x-1}{1}=\frac{y+1}{-1}=\frac{z}{3}$$

Tomamos $A(0,1,-3)\in r$ y $B(1,-1,0)\in s \Rightarrow \overrightarrow{AB}=(1,-2,3)$

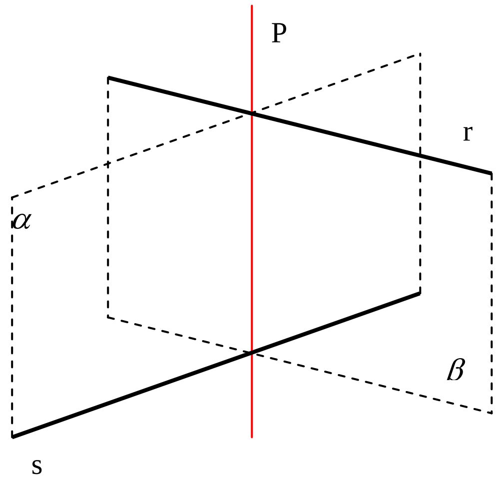
$ran[(0,1,2)(1,-1,3)(1,-2,3)]=3 \to$ r y s se cruzan. La recta P, perpendicular a r y s, tiene por vector director $\vec{d}\times\vec{d}\,'=(0,1,2)\times(1,-1,3)=(5,2,-1)$.

Daremos la recta P como intersección de los planos α y β.

Plano α : contiene a s y al vector $\vec{d} \times \vec{d}' \rightarrow \begin{vmatrix} x-1 & 1 & 5 \\ y+1 & -1 & 2 \\ z & 3 & -1 \end{vmatrix} = 0$

Plano α : contiene a s y al vector $\vec{d} \times \vec{d}' \rightarrow \begin{vmatrix} x & 0 & 5 \\ y-1 & 1 & 2 \\ z+3 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 0$

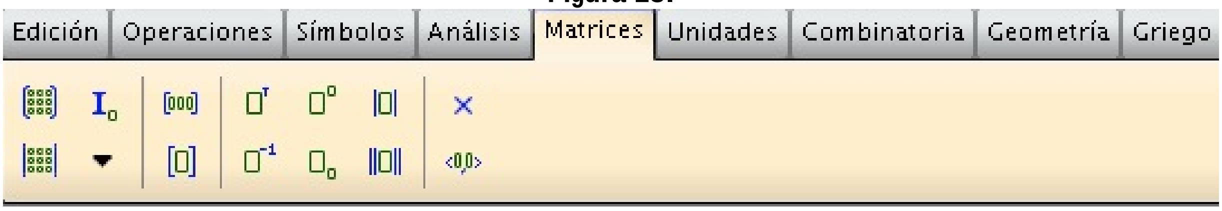
Ecuaciones de la recta $P : \begin{cases} 5x-16y-7z-21=0 \\ x-2y+z+5=0 \end{cases}$

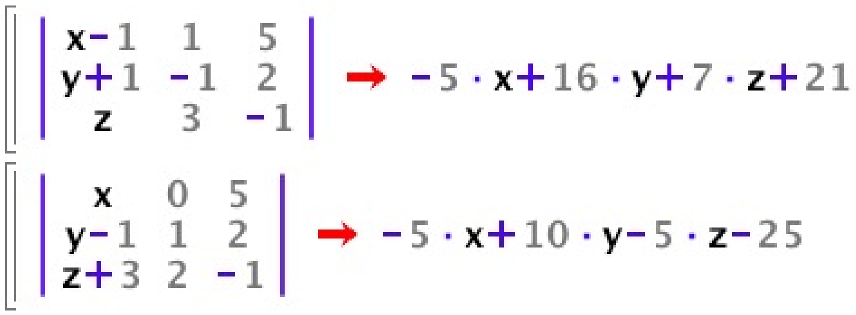


Ahora resolveremos el problema con Wiris:

1. Este ejercicio lo resolveremos como los anteriores, calculando el determinante:

Figura 13.





Enlace con el ejercicio resuelto en la web:

WIRIS

- Otro método.

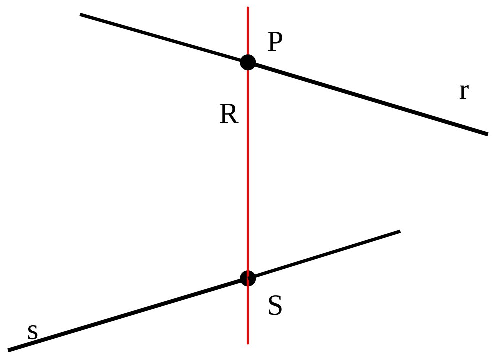
Vamos a hallar los puntos de R y S, en los que la recta P corta a r y s.

Un punto genérico de r es $(0,1+\lambda,-3+2\lambda)$.

Un punto genérico de s es $(1+\mu,-1-\mu,3\mu)$.

Un vector genérico de origen en r y extremo en s es:

$\overrightarrow{RS} = (1+\mu,-2-\lambda-\mu,3-2\lambda+3\mu)$



Este vector debe ser perpendicular a r y s.

$$\overrightarrow{RS}\cdot(0,1,2)=0 \rightarrow -2-\lambda-\mu+6-4\lambda+6\mu=0 \rightarrow 5\lambda-5\mu=4$$

$$\overrightarrow{RS}\cdot(1,-1,3)=0 \rightarrow 1+\mu+2+\lambda+\mu+9-6\lambda+9\mu=0 \rightarrow -5\lambda+11\mu=-12$$

$$\lambda=-\frac{8}{15} \quad \mu=-\frac{4}{3} \quad \left.\begin{array}{l} R\left(0,1-\frac{8}{15},-3-\frac{16}{15}\right)=\left(0,\frac{7}{15},-\frac{61}{15}\right) \\ S\left[1-\frac{4}{3},-1+\frac{4}{3},3\left(-\frac{4}{3}\right)\right]=\left(-\frac{1}{3},\frac{1}{3},-4\right) \end{array}\right\} \begin{array}{l} \overrightarrow{RS}=\left(-\frac{1}{3},\frac{-2}{15},\frac{1}{15}\right) \\ \overrightarrow{d''}=(-5,-2,1) \end{array}$$

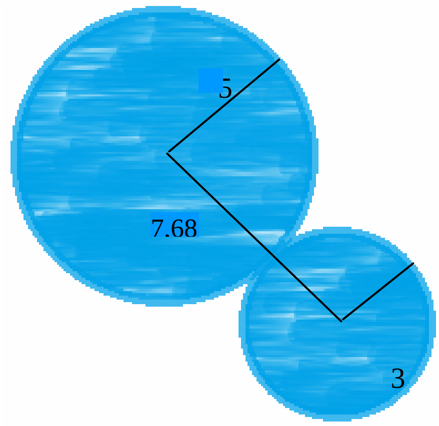
Ecuaciones paramétricas de P: $\begin{cases} x=-1/3-5\lambda \\ y=1/3-2\lambda \\ z=-4+\lambda \end{cases}$

11. Posición relativa de esferas.

Halla la posición relativa de las siguientes esferas: $C_1: x^2+y^2+z^2-4x+6y-10z+13=0$

$C_2: x^2+y^2+z^2+2x-8y-12z+44=0.$

$$C_1:\begin{cases} O_1=(2,-35) \\ r_1=\sqrt{2^2+3^2+5^2-13}=5 \end{cases}$$



$$C_2:\begin{cases} O_2=(-1,4,6) \\ r_2=\sqrt{1^2+4^2+6^2-44}=3 \end{cases}$$

La distancia entre sus centros es:

$$\overline{O_1O_2}=\sqrt{3^2+7^2+1^2}=\sqrt{59}=7{,}68$$

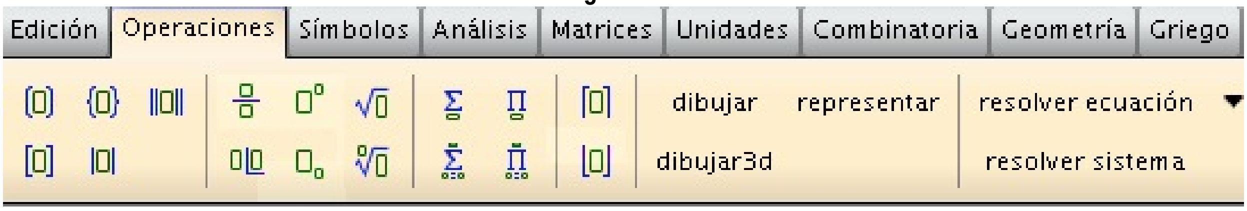
Como la distancia entre sus centro es 7.68, es menor que la suma de sus radios,

$r_1+r_2=8,$ las esferas se cortan.

Ahora resolveremos el problema con Wiris:

1. Obtenemos los dos radios (recordamos que para insertar raíces y potencias, pinchamos en sus respectivos símbolos en Operaciones):

Figura 14.

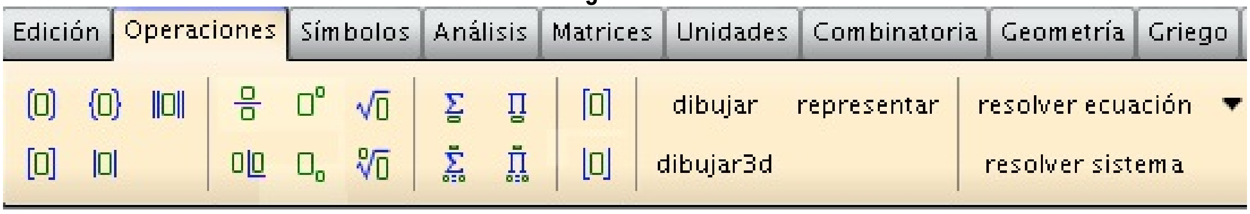


$$\sqrt{2^2+3^2+5^2-13} \rightarrow 5$$

$$\sqrt{1^2+4^2+6^2-44} \rightarrow 3$$

2. Calculamos la distancia entre los centros de la misma forma:

Figura 15.



$$\sqrt{3^2+7^2+1^2} \rightarrow \sqrt{59}$$

Enlace con el ejercicio resuelto en la web:

WIRIS