TEMA 5 Vectores en el espacio

1. Combinación lineal de vectores.

Dados los vectores: $\vec{u}(1,-3,2)$, $\vec{v}(-2,6,-4)$, $\vec{w}(2,0,1)$

a) Expresa $\vec{u}$ ***como combinación lineal de*** $\vec{v}$ ***y de*** $\vec{w}$.

b) ¿Es posible expresar $\vec{w}$ ***como combinación lineal de*** $\vec{u}$ ***y de*** $\vec{v}$ ***?***

c)¿ Son linealmente dependientes o independientes $\vec{u}$, $\vec{v}$ ***y*** $\vec{w}$ ***?***

a) $\vec{u} = m\vec{v} + n\vec{w} \quad \rightarrow \quad (1,-3,2) = m(-2,6,-4) + n(2,0,1)$ ***;***

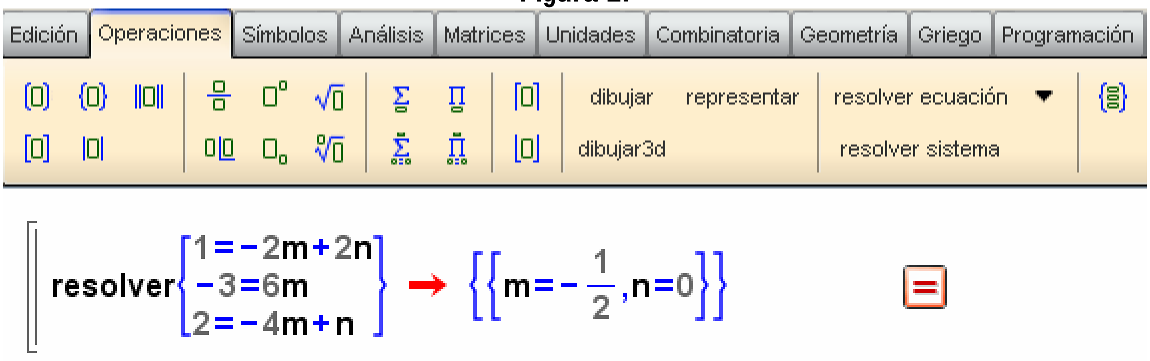
$$\left.\begin{array}{r} 1 = -2m + 2n \\ -3 = 6m \\ 2 = -4m + n \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} m = -\dfrac{1}{2} \\ n = -2\left(-\dfrac{1}{2}\right) + 2n \rightarrow n = 0 \end{array}$$

El vector $\vec{u}$ se puede expresar como combinación lineal de $\vec{v}$ y de $\vec{w}$ así: $\quad \vec{u} = -\dfrac{1}{2}\vec{v} + 0\vec{w}$

Ahora resolveremos el problema con Wiris:

1. Resolveremos el sistema de ecuaciones. Para ello, pincharemos en la pestaña Operaciones y luego en Resolver sistema, indicamos el número de ecuaciones y rellenamos dichas ecuaciones, pulsamos el botón 'igual' y obtenemos la solución

Figura 1.



Enlace con el ejercicio resuelto en la web:

b) $\vec{w} = p\vec{u} + q\vec{v} \rightarrow (2,0,1) = p(1,-3,2) + q(-2,6,-4)$ ***:***

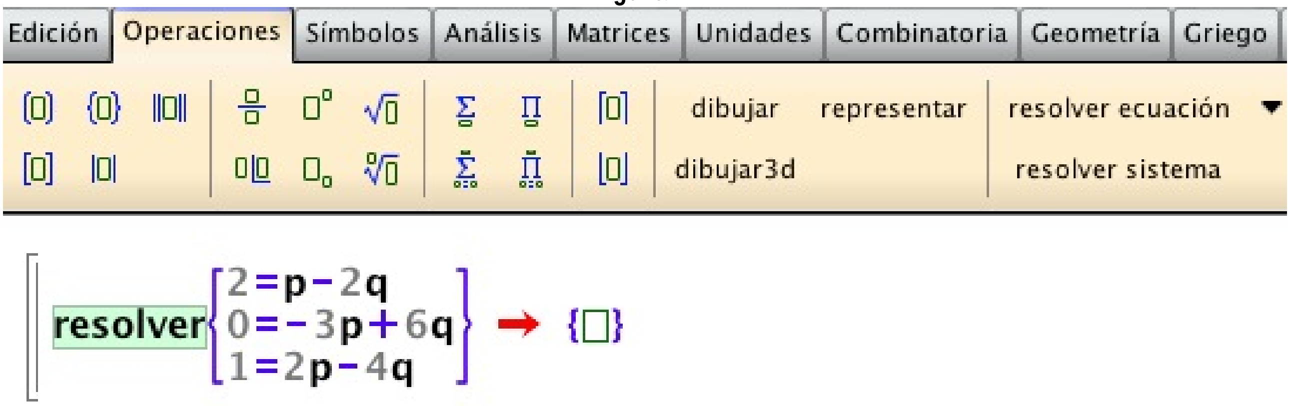
$$\left.\begin{array}{r} 2 = p - 2q \\ 0 = -3p + 6q \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} \text{Estas dos primeras ecuaciones} \\ \text{son incompatibles.} \end{array}$$
$$1 = 2p - 4q$$

Como este sistema no tiene solución, no es posible expresar $\vec{w}$ como combinación lineal de $\vec{u}$ y $\vec{v}$.

Ahora resolveremos el problema con Wiris:

1. Haremos lo mismo que en el apartado anterior. Plantearemos el sistema de ecuaciones para intentar obtener la solución, pero como veremos no hay ninguna posible:

Figura 2.



Enlace con el ejercicio resuelto en la web:

2. Dependencia lineal.

a) Halla el valor de k para el cual los vectores $\vec{u}(1,2,-1)$, $\vec{v}(0,1,2)$, $\vec{w}(-1,k,3)$ son linealmente dependientes.

b) Obtén, en ese caso, una relación de dependencia entre $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$.

a) Varios vectores son linealmente dependientes cuando alguno de ellos puede ponerse como combinación lineal de los demás. En este caso, el rango de la matriz que forman será menos que 3.

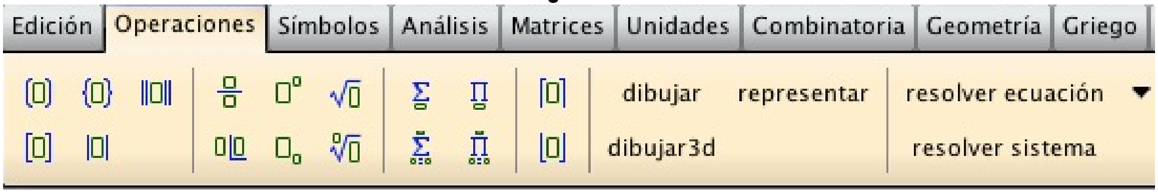
$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & k & 3 \end{pmatrix} \text{ Para que } ran(A) < 3, \text{ debe ser } |M| = 0: \quad |M| = -2-2k \rightarrow -2-2k = 0 \rightarrow k = -1$$

Si k = -1, los vectores $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$ son linealmente dependientes. Para cualquier otro valor de k son linealmente independieres.

Ahora resolveremos el problema con Wiris:

1. Escribiremos la matriz M. A continuación, calculamos el determinante de esta matriz, y a continuación igualamos este a, obteniendo que para k=-1 los vectores son linealmente dependientes:

Figura 3.



$$M=\begin{pmatrix}1&2&-1\\0&1&2\\-1&k&3\end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix}1&2&-1\\0&1&2\\-1&k&3\end{pmatrix}$$

$$|M| \rightarrow -2\cdot k-2$$

$$\text{resolver}(-2\cdot k-2=0) \rightarrow \{\{k=-1\}\}$$

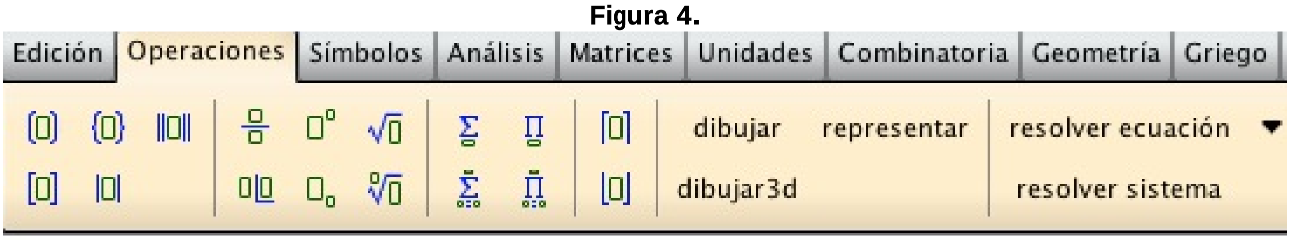
Enlace con el ejercicio resuelto en la web:

b) $\vec{u}=m\vec{v}+n\vec{w} \rightarrow (1,2,-1)=m(0,1,2)+n(-1,-1,3): \left.\begin{array}{r}1=-n\\2=m-n\\-1=2m+3n\end{array}\right\}\begin{array}{l}m=1\\n=-1\end{array} \rightarrow \vec{u}=\vec{v}-\vec{w}$

Ahora resolveremos el problema con Wiris:

1. Obtendremos los valores de n y m resolviendo el sistema de ecuaciones:

Figura 4.



$$\text{resolver}\left\{\begin{array}{l}1=-n\\2=m-n\\-1=2m+3n\end{array}\right\} \rightarrow \{\{m=1,n=-1\}\}$$

Enlace con el ejercicio resuelto en la web:

3. Base y coordenadas.

Sean $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$ tres vectores linealmente independientes de $\Re^3$.

¿Son también linealmente independientes los vectores siguientes?

$$\vec{u}=\vec{e}_1-\vec{e}_3 \qquad \vec{v}=\vec{e}_2+\vec{e}_3 \qquad \vec{w}=\vec{e}_1-\vec{e}_2+\vec{e}_3$$

Los vectores $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$ forman una base de $\Re^3$. Las coordenadas de $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$ en esa base son:

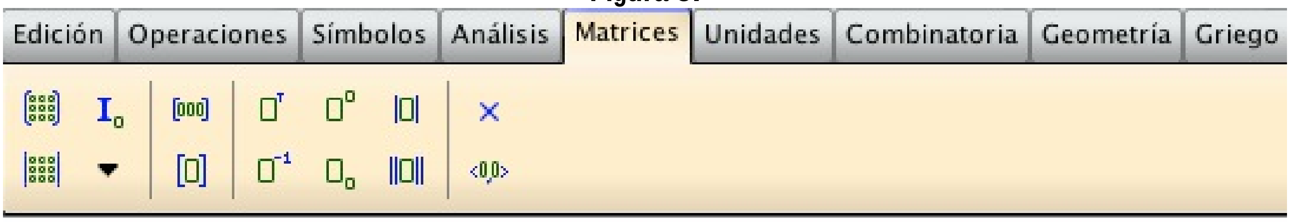
$\vec{u} = (1,0,-1)$ $\quad$ $\vec{v} = (0,1,1)$ $\quad$ $\vec{w} = (1,-1,1)$ $\quad$ Estudiamos la dependencia lineal de $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$.

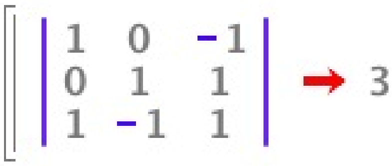
$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 1+1+1 \neq 0$$; Los vectores $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$ son linealmente independientes.

Ahora resolveremos el problema con Wiris:

1. Calcularemos el determinante de la matriz resultante de los tres vectores:

Figura 5.





Enlace con el ejercicio resuelto en la web:

WIRIS

4. Producto escalar.

Encuentra los vectores unitarios de $\Re^3$ ***que son perpendiculares a*** $\vec{v} = (1,0,1)$ ***y forman un ángulo de 60º con*** $\vec{w} = \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{2}\right)$. Sea $\vec{u}$ =(x, y, z,) el vector buscado, que debe cumplir:

- $\vec{u} \perp \vec{v} \rightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \rightarrow (x, y, z) \cdot (1,0,1) = 0 \rightarrow x + z = 0$
- $(\vec{u}, \vec{w}) = 60^\circ \rightarrow \dfrac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}| \cdot |\vec{w}|} = \dfrac{1}{2} \rightarrow \dfrac{1}{2}x + \dfrac{\sqrt{2}}{2}y + \dfrac{1}{2}z = \dfrac{1}{2}$;

Ya que $|\vec{u}| = 1$ y $|\vec{w}| = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = 1$

- $|\vec{u}| = 1 \rightarrow \sqrt{x^2+y^2+z^2} = 1$ tenemos que resolver el sistema: $\begin{cases} x+z=0 \rightarrow z=-x \\ x+\sqrt{2}y+z=1 \rightarrow y=\dfrac{1}{\sqrt{2}} \\ x^2+y^2+z^2=1 \rightarrow x=\pm\dfrac{1}{2} \end{cases}$

Hay 2 soluciones: $\vec{u}_1 = (\frac{1}{2}, \frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{2})$ y $\vec{u}_2 = (-\frac{1}{2}, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{2})$

Ahora resolveremos el problema con Wiris:

1. Resolvemos el sistema de ecuaciones que se nos plantea, obteniendo las dos soluciones diferentes:

Figura 6.

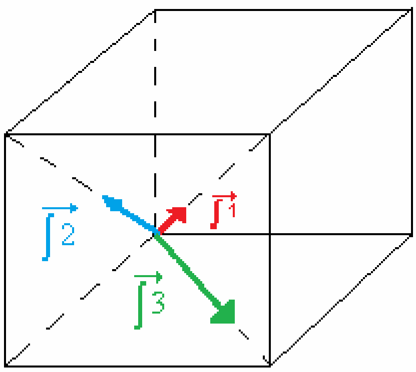
$$\text{resolver}\begin{Bmatrix} x+z=0 \\ x+\sqrt{2}y+z=1 \\ x^2+y^2+z^2=1 \end{Bmatrix} \rightarrow \left\{\left\{x=\frac{1}{2}, y=\frac{\sqrt{2}}{2}, z=-\frac{1}{2}\right\}, \left\{x=-\frac{1}{2}, y=\frac{\sqrt{2}}{2}, z=\frac{1}{2}\right\}\right\}$$

Enlace con el ejercicio resuelto en la web:

WIRIS

5. Módulo de un vector.

En un vértice de un cubo se aplican tres fuerzas dirigidas según las diagonale tres caras que pasan por dicho vértice. Sus módulos son 1, 2 ,3 respectivamer Halla el modulo de la resultante.



Queremos hallar $|\vec{R}| = |\vec{f_1}+\vec{f_2}+\vec{f_3}|$: sabemos que $|\vec{v}|^2 = \vec{v}\cdot\vec{v}.$ por tanto:

$$|\vec{R}|^2 = |\vec{f_1}+\vec{f_2}+\vec{f_3}| \cdot |\vec{f_1}+\vec{f_2}+\vec{f_3}| =$$

$$= \vec{f_1}\,\vec{f_1} + \vec{f_2}\,\vec{f_2} + \vec{f_3}\,\vec{f_3} + 2\,\vec{f_1}\,\vec{f_2} + 2\,\vec{f_1}\,\vec{f_3} + 2\,\vec{f_2}\,\vec{f_3}$$

$$\vec{f_1}\,\vec{f_1} = |\vec{f_1}|^2 = 1 \qquad \vec{f_2}\,\vec{f_2} = |\vec{f_2}|^2 = 4 \qquad \vec{f_3}\,\vec{f_3} = |\vec{f_3}|^2 = 9$$

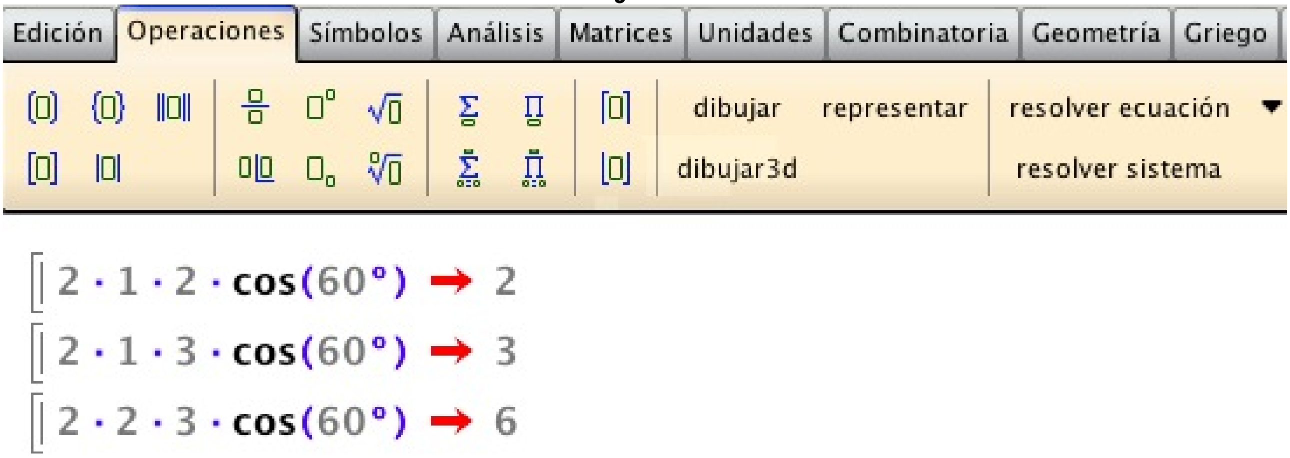
$$2\,\overrightarrow{f_1}\,\overrightarrow{f_2} \overset{(*)}{=} 2\cdot 1\cdot 2\,\cos 60^{o} = 2 \qquad 2\,\overrightarrow{f_1}\,\overrightarrow{f_3} \overset{(*)}{=} 2\cdot 1\cdot 3\,\cos 60^{o} = 3 \qquad 2\,\overrightarrow{f_2}\,\overrightarrow{f_3} \overset{(*)}{=} 2\cdot 2\cdot 3\,\cos 60^{o} = 6$$

(*) El ángulo que forman las diagonales de dos caras consecutivas de un cubo de 60º, ya que, uniendo sus extremos, se obtiene un triangulo lo equilátero. $\left|\overrightarrow{R}\right|^2 = 1+4+9+2+3+6 = 25 \rightarrow \left|\overrightarrow{R}\right| = 5$.

Ahora resolveremos el problema con Wiris:

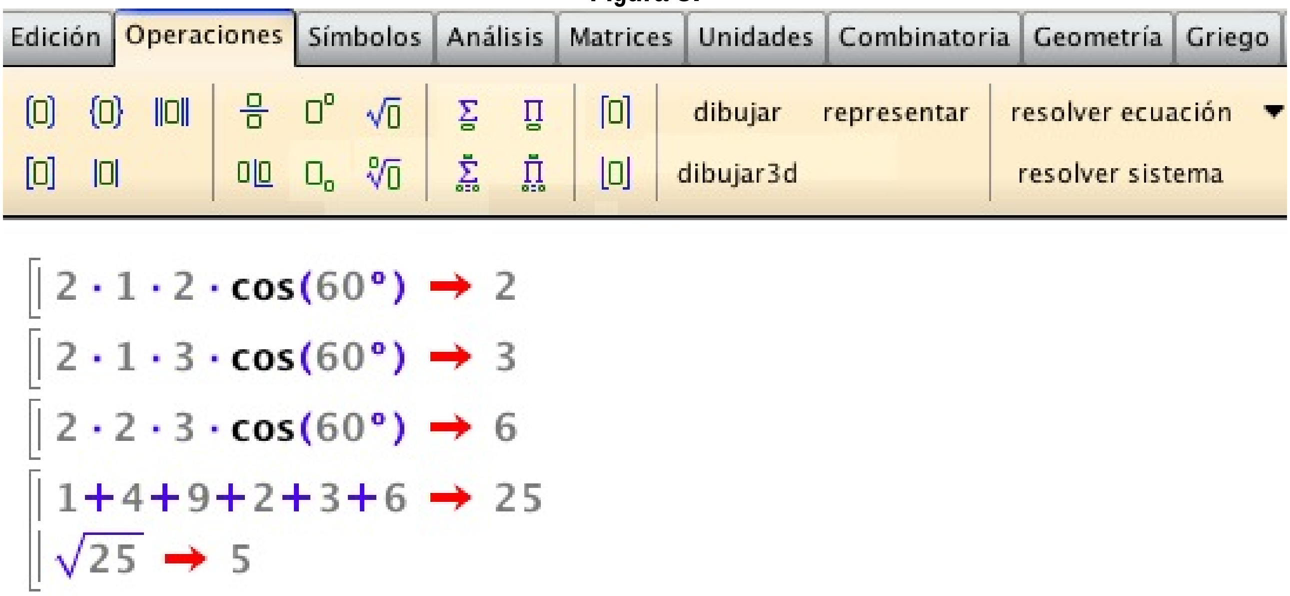
1. Para este ejercicio, Wiris nos será muy útil para hacer los siguientes cálculos:

Figura 7.



2. Luego haremos las demas operaciones hasta obtener el resultado:

Figura 8.



Enlace con el ejercicio resuelto en la web:

6. Producto mixto.

Halla el valor de m para que los vectores $\vec{u}(3,-5,1)$, $\vec{v}(2,1,-1)$ y $\vec{w}(1,4,m)$ determinen un paralelepípedo de volumen 11 u^3.

El volumen se obtiene con el producto mixto: $\left[\vec{u},\vec{v},\vec{w}\right]=\begin{vmatrix} 3 & -5 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 4 & m \end{vmatrix}=13m+24 \rightarrow$

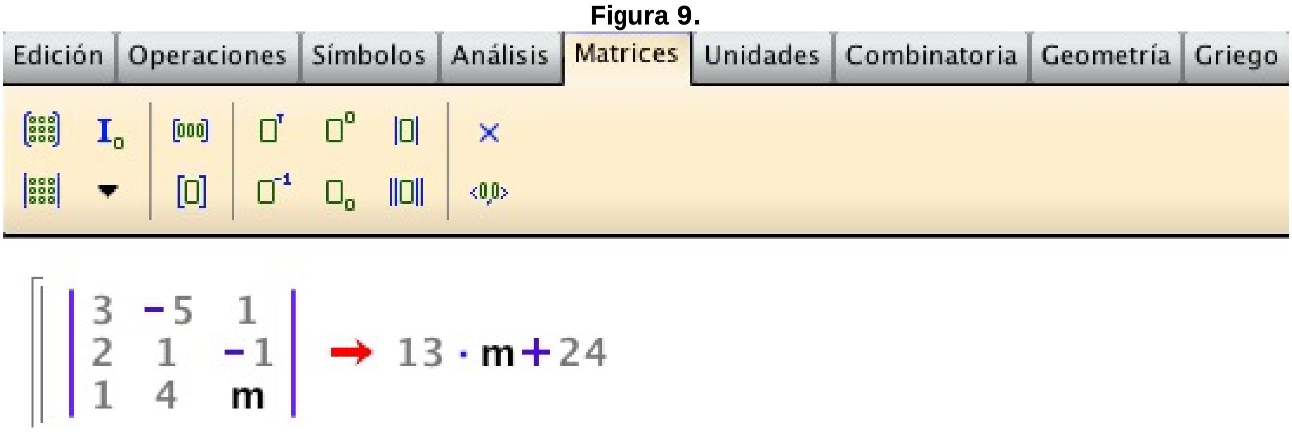
Volumen $=\left|13m+24\right|=11$

Hay 2 soluciones: $\begin{matrix} 13m+24=11 \rightarrow m=-1 \\ 13m+24=-11 \rightarrow m=-\dfrac{35}{13} \end{matrix}$

Ahora resolveremos el problema con Wiris:

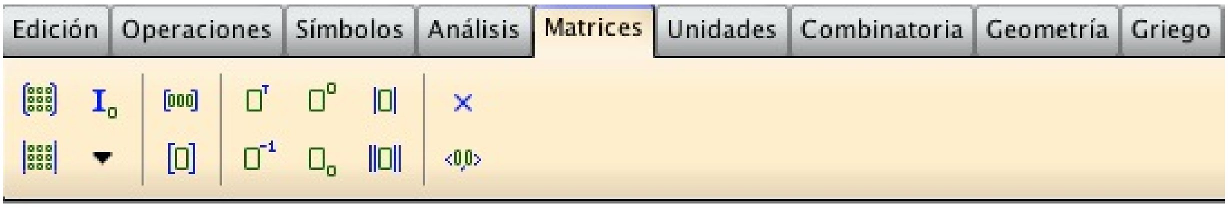
1. Para resolver este ejercicio calcularemos el determinante, tal y como ya lo hicimos anteriormente:

Figura 9.



2. Por último, obtenemos las soluciones de igualar el determinante a 11 y -11:

Figura 10.



$$\begin{vmatrix} 3 & -5 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 4 & m \end{vmatrix} \rightarrow 13 \cdot m + 24$$

$$\text{resolver}(13 \cdot m + 24 = 11) \rightarrow \{\{m = -1\}\}$$

$$\text{resolver}(13 \cdot m + 24 = -11) \rightarrow \left\{\left\{m = -\frac{35}{13}\right\}\right\}$$

Enlace con el ejercicio resuelto en la web:

WIRIS