GEOMETRÍA DINAMICA Y ESTADÍSTICA CON LA CLASSPAD 300 Y LA FX-9860G SD

3. GEOMETRÍA ANALÍTICA

ECUACIONES, VECTORES Y MATRICES.
PROGRAMACIÓN LINEAL.

CASIO

MAURICIO CONTRERAS

GEOMETRÍA ANALÍTICA

Introducción

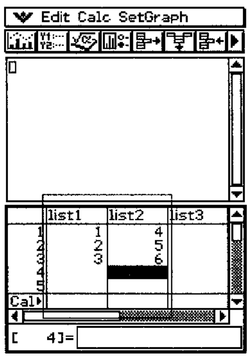
Con la ClassPad 300 se puede trabajar fácilmente con vectores y matrices, lo que facilita el trabajo con sistemas de ecuaciones lineales. Además, esta calculadora dispone de opciones que permiten representar gráficamente sistemas de inecuaciones lineales, lo que facilita la resolución de problemas de Programacion lineal. Por otra parte, la ClassPad 300 permite resolver fácilmente problemas de geometría analítica, gracias a las ventajas que supone el arrastre de una figura desde la ventana de geometría a la ventana principal.

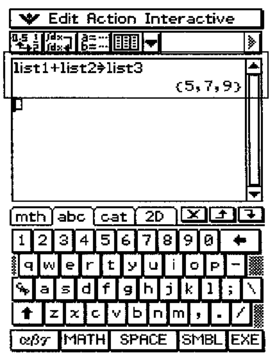
En esta sesión se analizarán las posibilidades de la ClassPad 300 para resolver problemas relacionados con matrices, determinantes, sistemas de ecuaciones lineales y vectores. Se estudiarán también las posibilidades de esta calculadora para resolver gráficamente sistemas de inecuaciones lineales y problemas de programación lineal. Se utilizarán algunas funciones básicas que permiten operar con listas. Se analizarán algunos ejemplos de problemas de transformaciones geométricas y de geometría analítica de la recta resueltos con la ClassPad 300.

1. Vectores, matrices y sistemas de ecuaciones

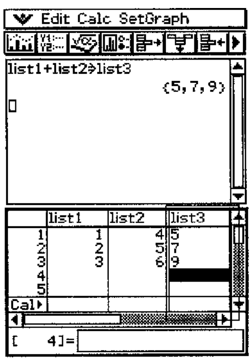
1. VECTORES Y LISTAS

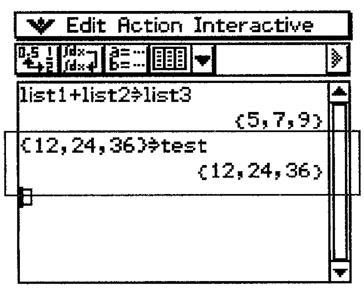
- Toca el botón Main para acceder a la ventana Principal.
- En la ventana del área de trabajo, toca el botón para ver la pantalla del editor de listas.
- Introduce los datos de tipo lista siguientes en las listas llamadas "list1" y "list2": list1={1,2,3}, list2={4,5,6}.
- Activa la ventana del área de trabajo y realiza el cálculo siguiente: list1+list2⇒list3.



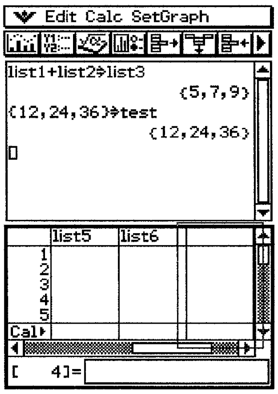


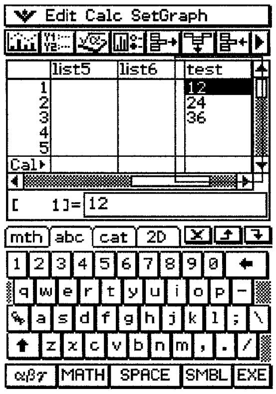
- Toca la ventana del editor de listas para que se active. Observa como list3 contiene el resultado de list1+list2.



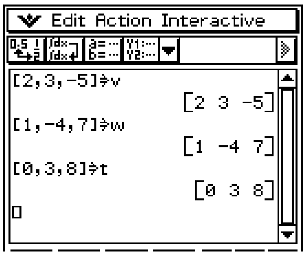


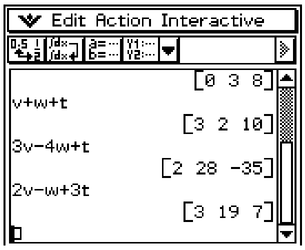
- Toca la ventana del área de trabajo Principal para activarla. Realiza la operación {12, 24, 36}⇒test, que asigna los datos de la lista {12, 24, 36} a la variable de lista denominada "test".
- Toca la ventana del editor de listas para activarla. Desplaza la pantalla hacia la derecha hasta que la lista en blanco a la derecha de "list6" sea visible.



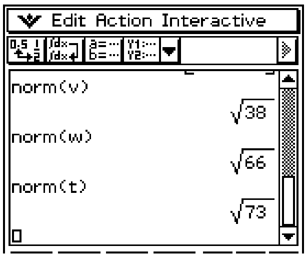


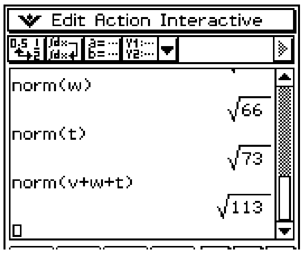
- Toca la celda en blanco junto a "list6", introduce "test" y toca el botón [Ejec.]. De esta forma se muestra la lista de datos {12, 24, 36}, que se asigna a la variable llamada "test".
- En la ventana Principal, utiliza el teclado virtual [mth] para introducir los vectores: [2, 3, -5]⇒v, [1,-4,7]⇒w, [0,3,8]⇒t.
- A continuación efectúa las siguientes operaciones: v+w+t, 3v-4w+t, 2v-w+3t.



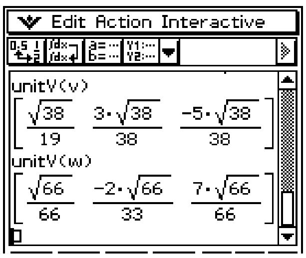


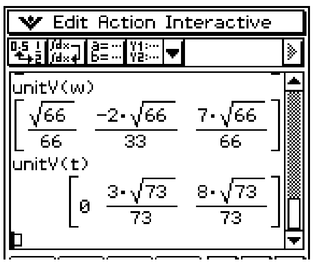
- Calcula la longitud o módulo de los vectores v, w, t y v+w+t. Utiliza para ello el comando norm del teclado virtual [cat]. ¿La longitud del vector suma es la suma de las longitudes de los vectores sumandos?.



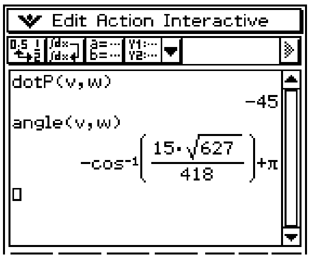


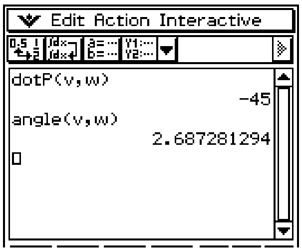
- Halla un vector unitario que tenga la misma dirección y sentido que v. Utiliza para ello el comando unitV del teclado virtual [cat]. Haz lo mismo para los vectores w y t.

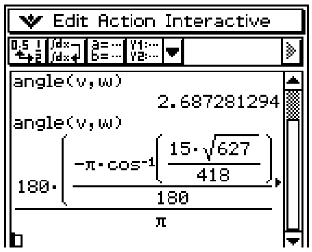


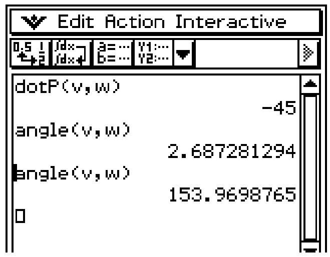


- Utilizando el comando dotP del teclado virtual [cat], halla el producto escalar de los vectores v y w. Utilizando el comando angle del teclado virtual [cat], halla el ángulo que forman dichos vectores. Si la configuración de ángulos es en radianes, se obtiene como respuesta una expresión algebraica. Para convertirla a decimal, debes seleccionar la respuesta y tocar el botón . Para ver el ángulo en grados, debes seleccionar el comando Preferencias / Configuración / Formato básico y en la lista desplegable Ángulo, seleccionar Grado.

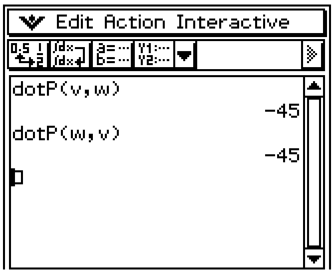


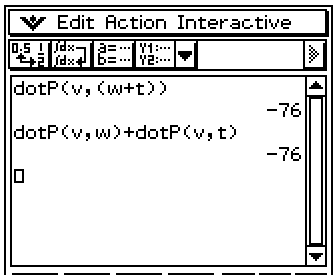




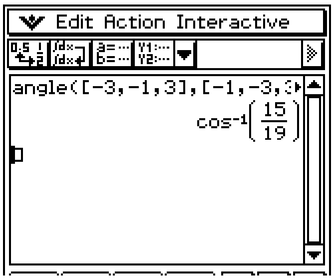


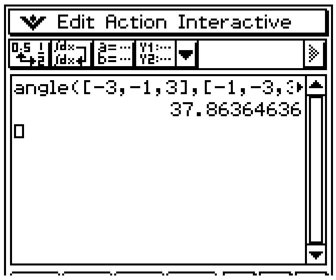
- Comprueba que el producto escalar cumple las propiedades conmutativa y distributiva: a) v ·w = w ·v, b) v · (w + t) = v · w + v · t.



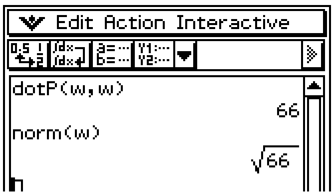


- Calcula los ángulos del triángulo de vértices A(2, 1, –1), B(–1, 0, 2) y C(1, –2, 2). Para ello considera los vectores AB=(–3, –1, 3), AC=(–1, –3, 3) y BC=(2, –2, 0). Los ángulos buscados son los que forman dichos vectores.

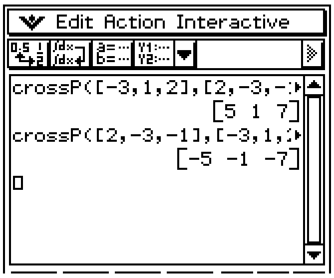




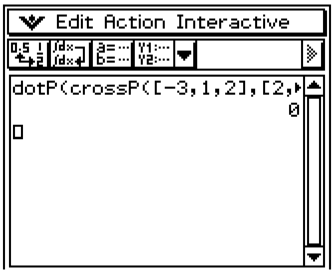
- Comprueba que el producto escalar de un vector por si mismo es igual al cuadrado de su módulo. Utiliza, por ejemplo, el vector w=[1,-4,7].



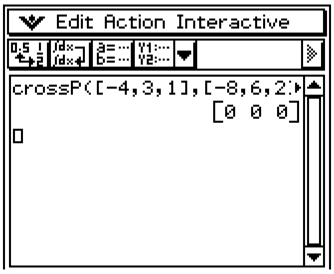
- Utilizando el comando crossP del teclado virtual [cat], halla el producto vectorial a×b de los vectores a=[–3, 1, 2] y b=[2, –3, –1]. Calcula también el producto vectorial b×a. ¿Se cumple la propiedad conmutativa?. ¿Qué relación existe entre los vectores a×b y b×a?.



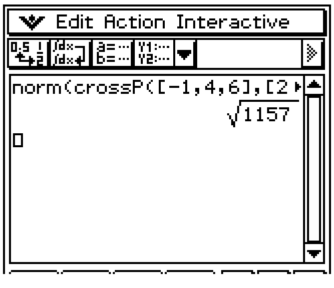
- Utilizando los vectores a=[–3, 1, 2] y b=[2, –3, –1], comprueba que el producto vectorial a×b es perpendicular a los vectores a y b. Utiliza para ello el comando dotP(crossP([–3, 1, 2], [2, –3, –1]), [–3, 1, 2]). Comprueba que el producto escalar es 0 y que, por consiguiente, son perpendiculares.



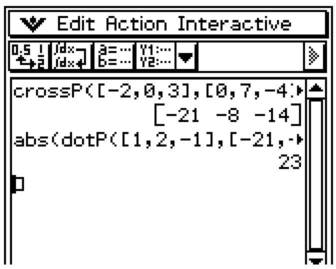
- Utiliza los vectores [–4, 3, 1] y [–8, 6, 2] para comprobar que si dos vectores son paralelos, su producto vectorial es el vector nulo.



- El área del paralelogramo de lados los vectores a y b es igual al módulo del producto vectorial, es decir, A=|a×b|. Calcula el área del paralelogramo que tiene tres vértices en los puntos P(1, 0, –1), Q(0, 4, 5) y R(3, 1, 7). Utiliza el comando norm(crossP([–1, 4, 6], [2, 1, 8])).



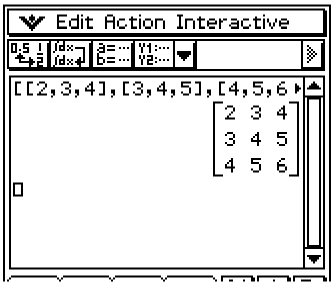
- Dados los vectores a, b y c, el producto mixto de dichos vectores es el producto escalar del primero por el producto vectorial de los otros dos, a·(b×c), y geométricamente representa el volumen del paralelepípedo de aristas los vectores a, b y c. Calcula el volumen del paralelepípedo determinado por los vectores: a=[1, 2, –1], b=[–2, 0, 3] y c=[0, 7, –4].



- Calcula el volumen del paralelepípedo determinado por los vectores [1, 1, 0], [2, 0, –1] y [0, 3, 1].

2. MATRICES

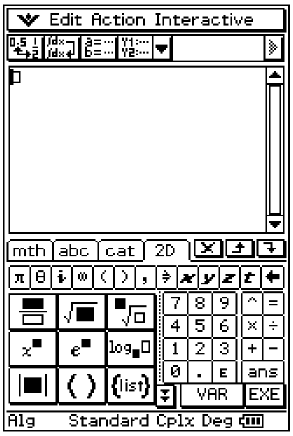
- Con ayuda del teclado virtual [mth] podemos introducir matrices en la pantalla de la aplicación Principal. Por ejemplo, introduce la expresión [[2, 3, 4], [3, 4, 5], [4, 5, 6]] en una línea en blanco de la ventana Principal y toca el botón [Ejec.]. Se muestra una matriz cuadrada de orden 3.

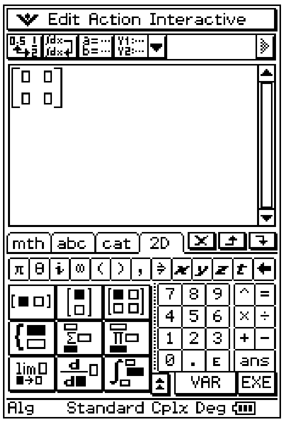


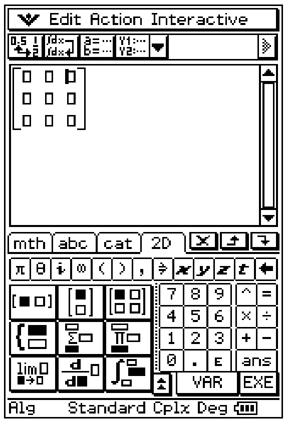
- También podemos utilizar, de forma más cómoda, el teclado virtual [2D] para editar matrices en la pantalla Principal. Usa dicho teclado para editar la matriz $\begin{bmatrix} 3 & -7 & 5 \\ -6 & 2 & -8 \\ 4 & 2 & -3 \end{bmatrix}$. Sigue estos pasos:

   1) Pulsa [KEYBOARD] para que se muestre el teclado virtual y toca el botón [2D]. Toca el botón

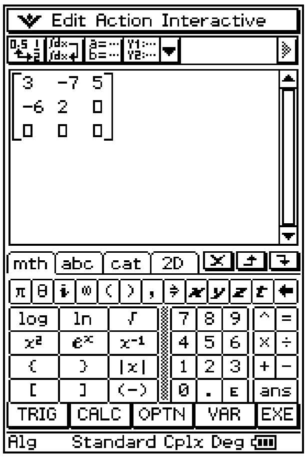
   2) Pulsa el botón que permite editar matrices. Con el cursor en una de las casillas vacías, vuelve a tocar el botón . De esta forma se incrementa en 1 el número de filas y columnas. Así, tenemos en pantalla la plantilla de una matriz cuadrada de orden 3.



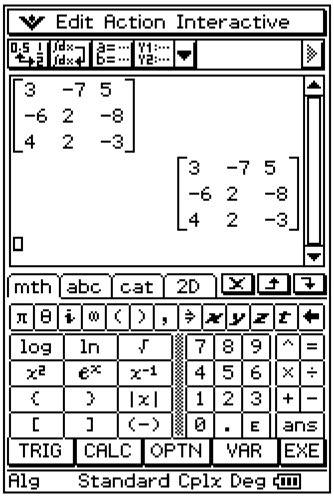




   3) En cada casilla introduce los elementos de la matriz, con ayuda del lápiz táctil.

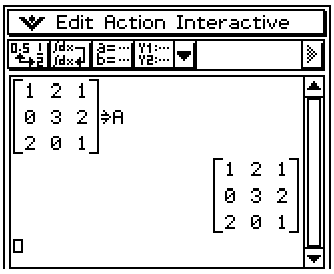


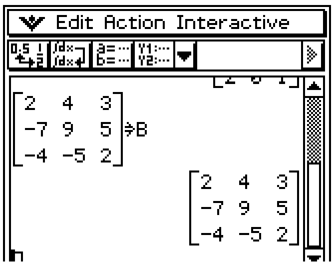
4) Finalmente, toca el botón [Ejec.] y aparecerá en pantalla la matriz editada.

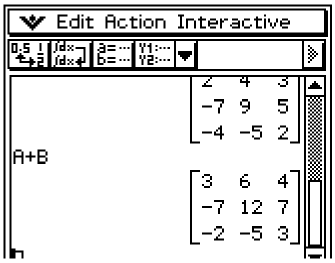


- Dadas las matrices A=$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, B=$\begin{bmatrix} 2 & 4 & 3 \\ -7 & 9 & 5 \\ -4 & -5 & 2 \end{bmatrix}$ calcula: a) A+B, b) 3A, c) A–B, d)A^T, e) A·B, f) B·A g)la matriz unidad de orden 3, h) det(A), i) A^{-1}. Sigue los siguientes pasos:

1) Edita las matrices A y B utilizando el teclado virtual [2D] y guárdalas en las variables A y B.



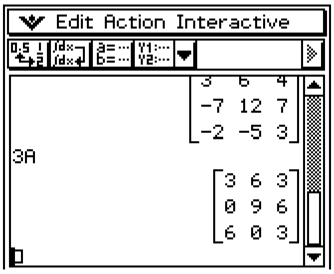


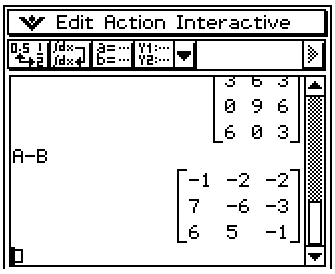


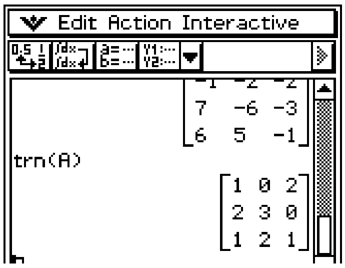
2) Calcula la suma: A+B.

3) Calcula la matriz 3A.

4) Efectúa la resta A–B.

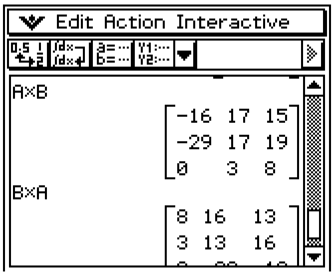


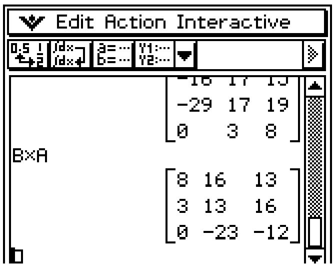




5) Halla la transpuesta de la matriz A. Para ello, en una línea en blanco de la pantalla Principal selecciona el comando Acción / Matriz-Crear / trn. A continuación escribe A). Aparece en pantalla el comando trn(A). Pulsa [Ejec.].

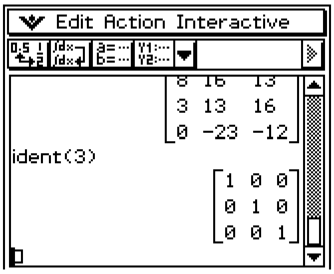
6) Efectúa las multiplicaciones A×B y B×A y comprueba si se cumple o no la propiedad conmutativa.

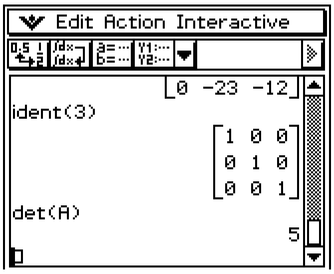




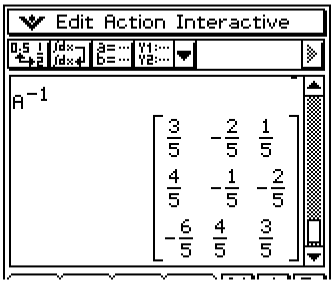
7) Escribe la matriz unidad de orden 3. Para ello selecciona el comando Acción / Matriz-Crear / ident. Escribe 3), con lo que aparece en pantalla ident(3). Pulsa [Ejec.].

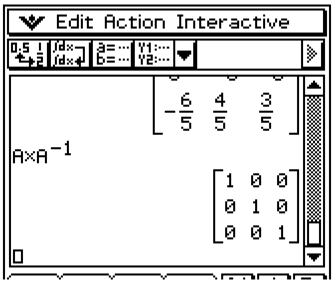
8) Calcula el determinante de la matriz A. Para ello selecciona el comando Acción / Matriz-Calcular / det. Escribe A). Aparece en pantalla la expresión det(A). Pulsa [Ejec.].

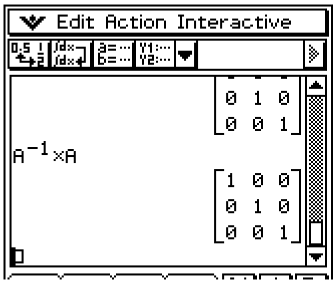




9) Halla la matriz inversa de A. Para ello escribe A y toca el botón del teclado virtual [2D]. Pulsa [(–)] [1] [Ejec.]. Comprueba que la matriz obtenida es la inversa de A, multiplicándola por la original.







- Halla las transpuestas de las matrices $A=\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 0 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$; $B=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$; $C=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

- Dadas las matrices $A=\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$; $B=\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$; $C=\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$ determina 2 A – 3 B + 4 C.

- Sean $A=\begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$. Efectúa los productos $A\cdot B$, $B\cdot A$, $A^t\cdot B$, $A\cdot B^t$, $B^t\cdot A^t$, $(A\cdot B)^t$. A la vista de los resultados, ¿qué propiedades se te ocurren sobre el producto de matrices y sus transpuestas ?. ¿Es cierto que $(A\cdot B)^t = B^t\cdot A^t$? (Considera primero el caso de dos matrices no cuadradas).

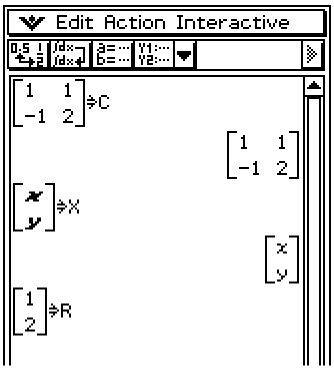
3. SISTEMAS DE ECUACIONES

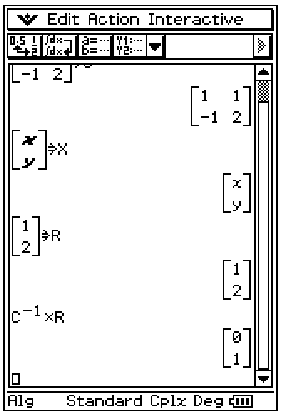
- **Método de la matriz inversa**

- Resuelve el sistema de ecuaciones $\left.\begin{matrix} x+y=1 \\ -x+2y=2 \end{matrix}\right\}$ utilizando el método de la matriz inversa. Sigue los siguientes pasos:

  1) Utilizando el teclado virtual [2D], edita las matrices de coeficientes $C=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$, de incógnitas $X=\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ y de términos independientes: $R=\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

  2) Como la matriz de coeficientes es cuadrada y regular, $\det(C)\neq 0$, tiene inversa. Multiplicando a la izquierda por la inversa de la matriz C, obtén la matriz de incógnitas: $C\cdot X=R \rightarrow X=C^{-1}\cdot C\cdot X=C^{-1}\cdot R$.





  3) Por tanto, la solución es x=0 e y=1.

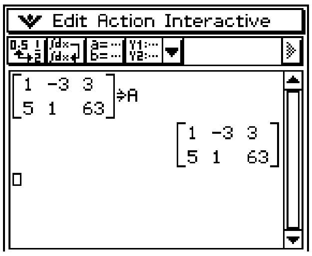
- **Método de Gauss y método de Gauss–Jordan**

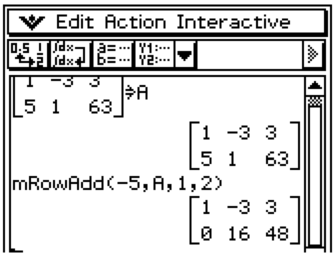
- Selecciona el menú Acción / Matriz–Calcular y observa los comandos que aparecen. Algunos de ellos permiten resolver sistemas de ecuaciones lineales, mediante los métodos de Gauss y Gauss–Jordan, haciendo uso de las operaciones elementales por filas que se describen en la siguiente tabla:

FUNCIÓN	DESCRIPCIÓN	EXPRESIÓN
swap(	Intercambia la fila i y la fila j	swap(matriz, fila i, fila j)
rowAdd(	Suma la fila i y la fila j y coloca el resultado en la fila j	rowAdd(matriz, fila i, fila j)
mRow(	Multiplica los elementos de una fila por un número y coloca el resultado en dicha fila	mRow(número, matriz, fila)
mRowAdd(	Multiplica la fila i por un número, se suma la fila j y se coloca el resultado en la fila j	mRowAdd(número, matriz, fila i, fila j)

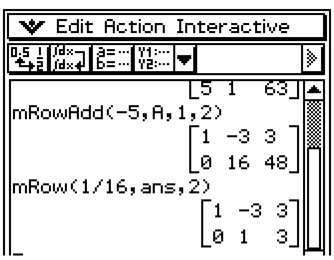
- Resuelve el sistema de ecuaciones lineales $\left.\begin{matrix} x-3y=3 \\ 5x+y=63 \end{matrix}\right\}$ usando la calculadora. Sigue los siguientes pasos:

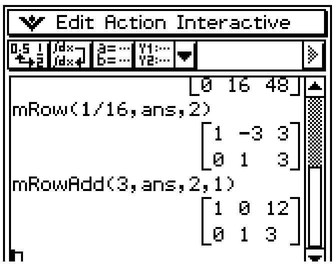
1) Edita la matriz $A=\begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 5 & 1 & 63 \end{pmatrix}$. Para ello toca el botón y el botón del teclado virtual [2D]. De esta forma aparece la plantilla de matriz 2×3.
2) Multiplica la fila primera por –5, suma la fila segunda y coloca el resultado en ésta. La operación es mRowAdd(–5, A, 1, 2) y obtenemos la matriz $\begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 0 & 16 & 48 \end{pmatrix}$.





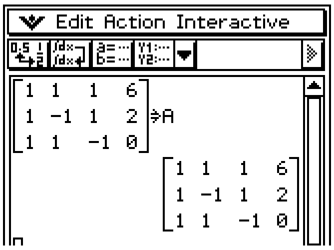
3) Multiplica la segunda fila por 1/16. La operación es mRow(1/16, Ans, 2) y obtenemos la matriz $\begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.
4) Multiplica la segunda fila por 3, suma la primera fila y coloca el resultado en ésta. La operación es mRowAdd(3, Ans, 2, 1) y obtenemos la matriz $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 12 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$. En esta matriz podemos leer que la solución del sistema es x = 12, y = 3. Se trata, pues, de un sistema compatible determinado.





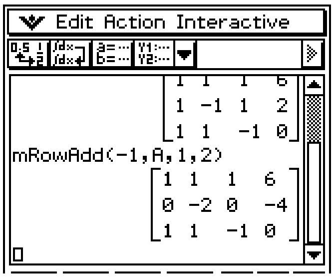
- Resuelve el sistema de ecuaciones lineales $\left.\begin{array}{l} x+y+z=6 \\ x-y+z=2 \\ x+y-z=0 \end{array}\right\}$ con la Classpad. Sigue los siguientes pasos:

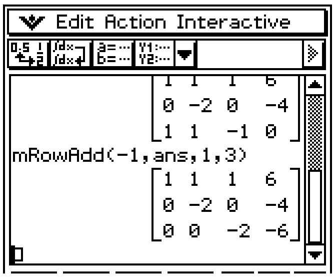
1) Editamos la matriz $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 1 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$. Para ello pulsa dos veces el botón y una vez el botón del teclado virtual [2D]. De esta forma aparece la plantilla de matriz 3×4.



2) Multiplica la primera fila por –1, suma la segunda fila y coloca el resultado en ésta. La operación es mRowAdd(–1, *A*, 1, 2) y obtenemos la matriz $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & -2 & 0 & -4 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

3) Multiplica la primera fila por –1, suma la tercera fila y coloca el resultado en ésta. La operación es mRowAdd(–1, *Ans*, 1, 3) y obtenemos la matriz $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & -2 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & -2 & -6 \end{pmatrix}$.



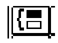


4) En la última matriz, utilizando el sistema triangular de Gauss $\left.\begin{array}{l} x+y+z=6 \\ -2y=-4 \\ -2z=-6 \end{array}\right\}$, obtenemos la única solución del sistema: x = 1, y = 2, z = 3. Se trata, pues, de un sistema compatible determinado.

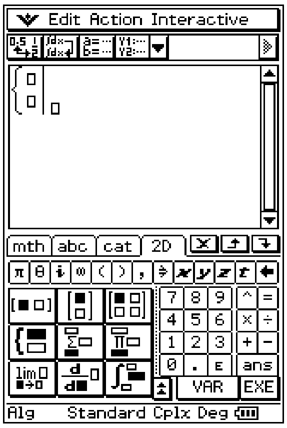
- **Resolución de sistemas en el teclado [2D]**

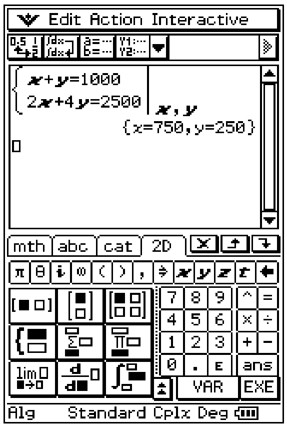
- Un comerciante dispone de dos tipos de zumo de 2 euros y 4 euros el litro respectivamente y desea obtener 1000 litros de un zumo cuyo precio sea de 2,50 euros el litro. ¿Cuántos litros de cada uno de los zumos tiene que mezclar?.

1) Sea x=número de litros del zumo A (de 2 euros/litro) y=número de litros del zumo B (de 4 euros/litro). Hay que resolver el sistema: $\left.\begin{array}{l} x+y=1000 \\ 2x+4y=2500 \end{array}\right\}$

2) Toca el botón [2D] para acceder al teclado virtual. Toca el botón  y después el botón  que tiene la plantilla de sistema de ecuaciones.

3) Utilizando el teclado virtual [2D] introduce las ecuaciones del sistema, pulsando en la primera línea: [x] [+] [y] [=] [1000] y pulsando en la segunda línea [2] [x] [+] [4] [y] [=] [2500]. A continuación sitúa el cursor en el cuadro inferior derecho y pulsa [x] [,] [y] para indicar que las incógnitas son x e y. Pulsa [Ejec.] y observa que la solución única del sistema es x=750, y=250. Por tanto, hay que mezclar 750 litros de zumo de 2 euros/litro y 250 litros de zumo de 4 euros/litro.



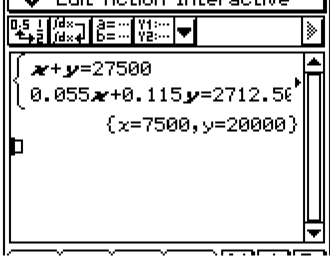


- Una familia dispone de 27500 euros para invertir. Parte de ese dinero lo pone en una cuenta corriente al 5,5 % ; el resto lo invierte en bonos al 11,5 %. ¿Cómo deberá hacer su inversión para obtener una renta anual de 2712,50 euros ?.

1) En cuenta corriente invertimos x euros y en bonos invertimos y euros. Debe cumplirse: x+y=27500. Además: x euros al 5,5 % dan unos intereses de $\frac{5,5}{100}x$ = 0,055 x. Por otra parte: y euros al 11,5 % dan unos intereses de $\frac{11,5}{100}y$ =0,115 y. La renta anual será: 0,055 x + 0,115 y. Debe ser : 0,055 x + 0,115 y = 2712,50. Hay que resolver el sistema:

$$\left.\begin{array}{l} x+y=27500 \\ 0.055x+0.115y=2712.50 \end{array}\right\}.$$

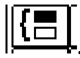
2) Utiliza el teclado virtual [2D] para introducir las ecuaciones del sistema. A continuación sitúa el cursor en el botón inferior derecho y pulsa [x] [,] [y] para indicar que las incógnitas son x e y.



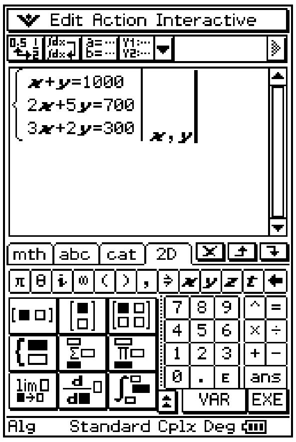
3) Toca el botón [Ejec.]. Observa que el sistema tiene una única solución. Por tanto, hay que invertir 20000 euros en bonos y 7500 euros en cuenta corriente.

- Los 1000 gramos de un menú constan de dos alimentos A y B. Cada gramo de A tiene 2 unidades de proteínas y 3 de grasas, mientras que cada gramo de B tiene 5 unidades de proteínas y 2 de grasas. El menú debe contener 700 unidades de proteínas y 300 de grasas. ¿Cuántos gramos de A y de B contiene el menú ?.

1) Sean x = gramos de A, y = gramos de B. Debe ser x + y = 1000. Los x gramos de A tienen 2x unidades de proteínas; los y gramos de B tienen 5y. Como en total han de ser 700 unidades, debe cumplirse: 2x + 5y = 700. Por otra parte, los x gramos de A tienen 3x unidades de grasas; los y gramos de B tienen 2y. Como en total han de ser 300 unidades, debe cumplirse: 3x + 2y = 300. Por consiguiente, hay que resolver el sistema: $\left.\begin{array}{l} x+y=1000 \\ 2x+5y=700 \\ 3x+2y=300 \end{array}\right\}$.

2) Utiliza el teclado virtual [2D] para introducir las ecuaciones del sistema. Para que aparezca una plantilla con tres ecuaciones hay que tocar dos veces el botón . A continuación sitúa el cursor en el botón inferior derecho y pulsa [x] [,] [y] para indicar que las incógnitas son x e y.

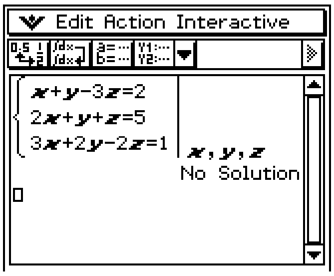
3) Toca el botón [Ejec.]. Aparece un mensaje de error, indicando que el sistema no tiene el mismo número de ecuaciones que de incógnitas. Es decir, el teclado [2D] solamente sirve para resolver sistemas en los que la matriz de coeficientes es cuadrada.



- Resuelve los siguientes sistemas de ecuaciones:

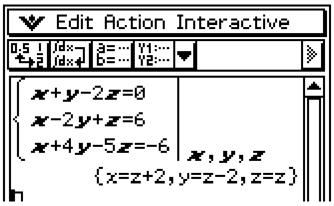
a) $\left.\begin{array}{l} x+y-3z=2 \\ 2x+y+z=5 \\ 3x+2y-2z=1 \end{array}\right\}$, b) $\left.\begin{array}{l} x+y-2z=0 \\ x-2y+z=6 \\ x+4y-5z=-6 \end{array}\right\}$, c) $\left.\begin{array}{l} 3x+2y+z=1 \\ 5x+3y+3z=2 \\ 7x+4y+4z=3 \end{array}\right\}$

1) Utiliza el teclado virtual [2D] para introducir las ecuaciones del sistema (a). Para que aparezca una plantilla con tres ecuaciones hay que tocar dos veces el botón . A continuación sitúa el cursor en el botón inferior derecho y pulsa [x] [,] [y] para indicar que las incógnitas son x e y.



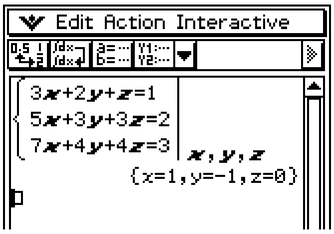
2) Toca el botón [Ejec.]. Aparece un mensaje de error, indicando que el sistema no tiene solución.

3) Utiliza el teclado virtual [2D] para introducir las ecuaciones del sistema (b). Para que aparezca una plantilla con tres ecuaciones hay que tocar dos veces el botón . A continuación sitúa el cursor en el botón inferior derecho y pulsa [x] [,] [y] para indicar que las incógnitas son x e y.



4) Toca el botón [Ejec.]. El sistema tiene infinitas soluciones que se pueden expresar en forma paramétrica así: x=t+2, y=t–2, z=t.

5) Utiliza el teclado virtual [2D] para introducir las ecuaciones del sistema (c). Para que aparezca una plantilla con tres ecuaciones hay que tocar dos veces el botón . A continuación sitúa el cursor en el botón inferior derecho y pulsa [x] [,] [y] para indicar que las incógnitas son x e y.



6) Toca el botón [Ejec.]. El sistema tiene solución única: x=1, y=–1, z=0.

2. Transformaciones geométricas

1. TRALACIONES, GIROS, SIMETRÍAS, HOMOTECIAS Y SEMEJANZAS

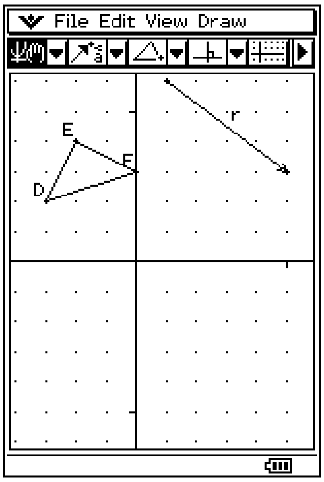
- Halla la imagen del triángulo de vértices A(–3, 2), B(–2, 4) y C(0, 3) mediante una traslación de vector PQ, siendo P(1, 6) y Q(5, 3).

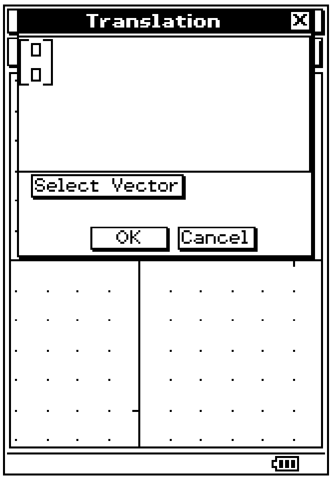
  1) Visualiza la ventana de Geometría en el formato de rejilla entera y muestra los ejes. Dibuja los lados del triángulo de vértices A(–3, 2), B(–2, 4) y C(0, 3), utilizando la herramienta Segmento.

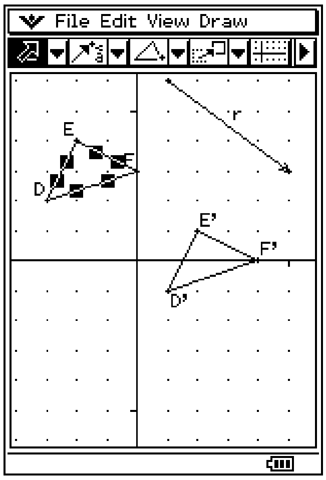
  2) Dibuja el vector PQ con la herramienta Vector.

  3) Selecciona cada uno de los lados del triángulo ABC y toca el botón Traslación. En el cuadro de diálogo Traslación, toca el botón Seleccionar Vector.

  4) Toca el vector PQ de la pantalla y observa que aparece el triángulo transformado A'B'C'.



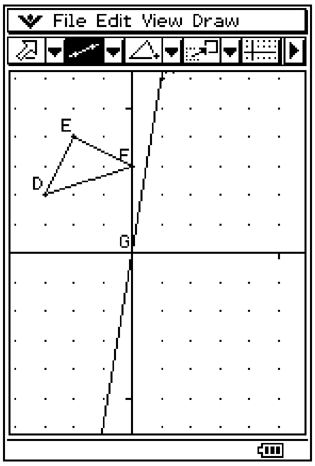


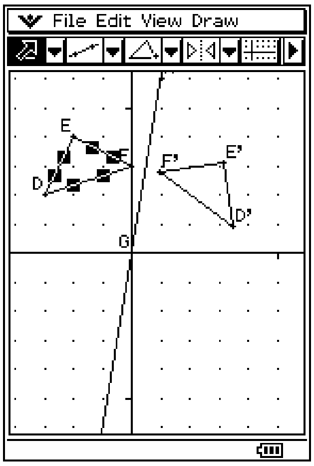


- Halla la imagen del triángulo de vértices *A*(–3, 2), B(–2, 4) y *C*(0, 3) mediante una simetría de eje la recta que pasa por los puntos *O*(0, 0) y P(1, 6).

    1) Dibuja los lados del triángulo de vértices *A*(–3, 2), B(–2, 4) y *C*(0, 3), utilizando la herramienta Segmento. Dibuja la recta r que pasa por los puntos *O*(0, 0) y P(1, 6).

    2) Selecciona cada uno de los lados del triángulo ABC y toca el botón Simetría axial. Toca el eje de simetría, es decir, la recta OP y observa como se dibuja el triángulo imagen.



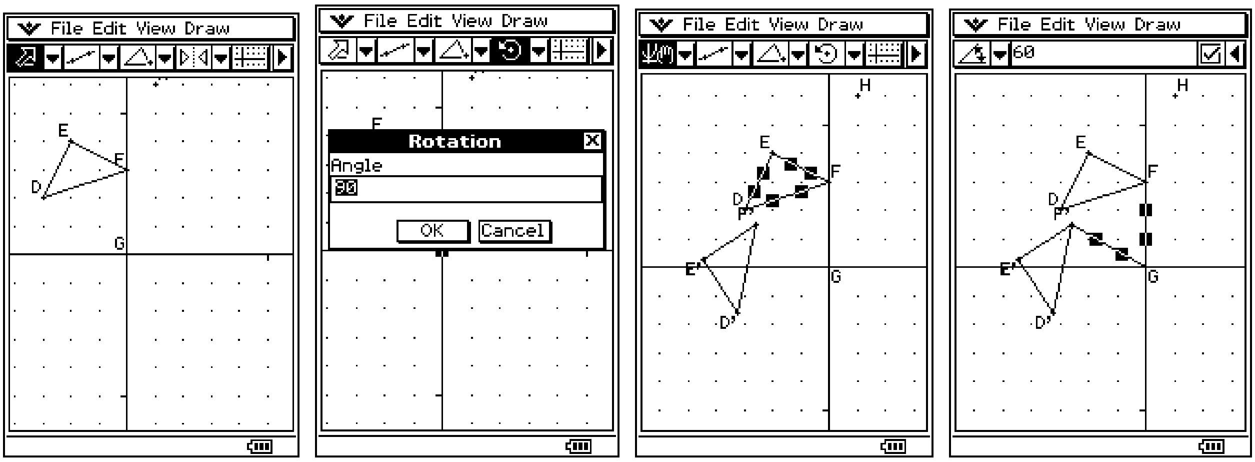


- Halla la imagen del triángulo de vértices *A*(–3, 2), B(–2, 4) y *C*(0, 3) mediante un giro de centro el origen O(0, 0) y ángulo de giro 60º.

    1) Dibuja los lados del triángulo de vértices *A*(–3, 2), B(–2, 4) y *C*(0, 3), utilizando la herramienta Segmento.

    2) Selecciona cada uno de los lados del triángulo ABC y toca el botón Giro. En el cuadro de diálogo Rotación, introduce el valor del ángulo de giro, 60º, y haz clic en [OK]. Observa el resultado.

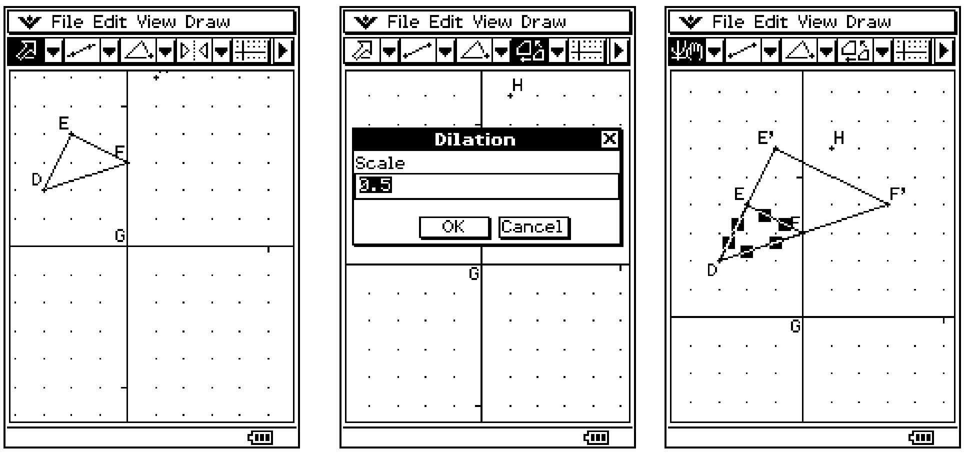
    3) Comprueba que el ángulo de giro vale 60º. Para ello, traza los segmentos OC y OC', selecciónalos y toca el botón del cuadro de medidas. Observa el valor del ángulo en el cuadro de texto.



- Halla la imagen del triángulo de vértices A(–3, 2), B(–2, 4) y C(0, 3) mediante una homotecia de centro el vértice A y razón de homotecia 2.

  1) Dibuja los lados del triángulo de vértices A(–3, 2), B(–2, 4) y C(0, 3), utilizando la herramienta Segmento.

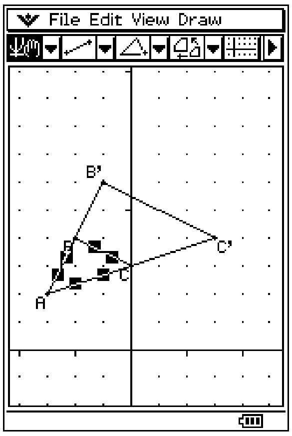
  2) Selecciona cada uno de los lados del triángulo ABC y toca el botón Homotecia. En el cuadro de diálogo Dilatación, introduce el valor de la razón de homotecia, 2, y haz clic en [OK]. Toca el centro de homotecia, es decir, el vértice A, y observa el resultado.

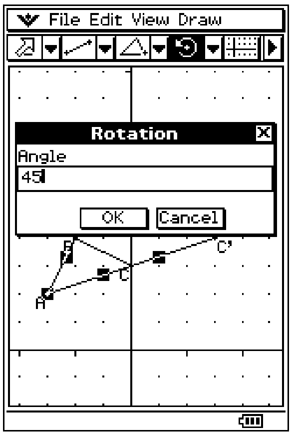


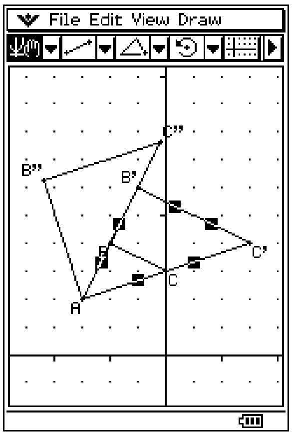
- Halla la imagen del triángulo de vértices A(–3, 2), B(–2, 4) y C(0, 3) mediante la composición de una homotecia de centro el vértice A y razón de homotecia 2 y un giro de centro A y ángulo de giro 45°. El triángulo resultante, ¿es semejante al original?

  1) Una vez dibujados los lados del triángulo de vértices A(–3, 2), B(–2, 4) y C(0, 3), selecciona cada uno de ellos y toca el botón Homotecia. En el cuadro de diálogo Dilatación, introduce el valor de la razón de homotecia, 2, y haz clic en [OK]. Toca el centro de homotecia (vértice A).

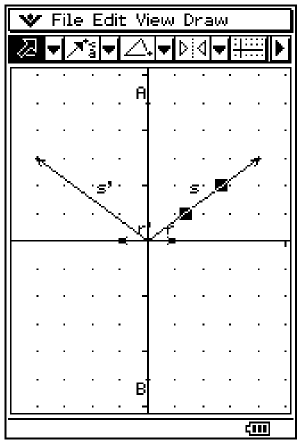
  2) Selecciona cada uno de los lados del triángulo transformado AB'C', toca el botón Giro y toca el centro de giro, el vértice A. En el cuadro de diálogo Rotación, introduce el valor del ángulo de giro, 45°, y haz clic en [OK]. Observa el resultado.







2. MATRICES DE TRANSFORMACIONES GEOMÉTRICAS



- Halla la matriz de una simetría cuyo eje sea el eje de ordenadas OY.

  1) Visualiza la ventana de Geometría en el formato de rejilla entera y muestra los ejes. Dibuja el eje de simetría sobre el eje OY, utilizando la herramienta "recta que pasa por dos puntos" y marcando dos puntos A y B sobre dicho eje. Dibuja el vector i=(1, 0), utilizando la herramienta Vector.

  2) Dibuja el simétrico del vector anterior por una simetría de eje AB. ¿Cuáles son sus coordenadas?

  3) Dibuja el vector j=(0, 1), utilizando la herramienta Vector. Dibuja el simétrico de dicho vector por una simetría de eje AB. ¿Cuáles son sus coordenadas?

  4) Dibuja el vector u=(4, 3). Dibuja su simétrico mediante la simetría de eje AB. ¿Cuáles son sus coordenadas?.

Observa que el vector i=$\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ se transforma en $\begin{pmatrix}-1\\0\end{pmatrix}$ y el vector j=$\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ se transforma en $\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$. Por otra parte, el vector u=$\begin{pmatrix}4\\3\end{pmatrix}=4\cdot\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}+3\cdot\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ se transforma en: $4\cdot\begin{pmatrix}-1\\0\end{pmatrix}+3\cdot\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-4\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-4\\3\end{pmatrix}$. Este resultado también se obtiene efectuando el producto de matrices: $\begin{pmatrix}4\\3\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}-1&0\\0&1\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}4\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}(-1)\cdot4+0\cdot3\\0\cdot4+1\cdot3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-4\\3\end{pmatrix}$. A la matriz S=$\begin{pmatrix}-1&0\\0&1\end{pmatrix}$ se le llama matriz de la simetría de eje OY.

En general, si una transformación geométrica plana transforma el vector i=$\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ en $\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$ y el vector j=$\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ en $\begin{pmatrix}c\\d\end{pmatrix}$, entonces la matriz de la transformación es: M=$\begin{pmatrix}a&c\\b&d\end{pmatrix}$

- En la simetría de eje la diagonal principal y=x, halla: a) el transformado del vector i=(1, 0); b) el transformado del vector j=(0, 1); c) la matriz de la transformación; d) el vector transformado del vector v=(5, 2); e) el vector transformado del vector u=(x, y).

- Busca la matriz que representa a cada una de las transformaciones siguientes: a) simetría central de centro O(0, 0); b) giro de 45° y centro O(0, 0); c) giro de 30° y centro O(0, 0); d) giro de 120° y centro O(0, 0); e) homotecia de centro O(0, 0) y razón 2; f) homotecia de centro O(0, 0) y razón 1/3.

- Busca las coordenadas del punto transformado de P(2, 1) por la homotecia de razón 2 y centro Q(1,1). Busca la imagen de un punto cualquiera X(x, y). ¿En qué recta se transforma la recta y=2x+3? ¿Y la recta y=x+1?

- Calcula los transformados de los puntos A(2, 4), B(–2, 3), C(1, 5), D(–1, –3), E(–2, –3) al aplicarles una traslación de coordenadas: a) (2, –3); b) (1, 2); c) (–2, 0); d) (–1, 2).

3. TRANSFORMACIONES GEOMÉTRICAS

Una transformación geométrica permite introducir una matriz o un vector para transformar una figura. Podemos efectuar dos tipos de transformaciones:

a) Transformación matricial: simetría respecto del eje OX o respecto del eje OY, rotación, ampliación, reducción, etc.

b) Transformación vectorial: Traslación vertical y horizontal.

- **Ejemplo de Transformación general.**

> *Dibuja un triángulo ABC y luego dibuja el triángulo A'B'C', que sea simétrico al ABC respecto al eje OX. A continuación, dibuja un triángulo A"B"C" mediante una traslación del triángulo A'B'C' de 1 unidad a lo largo de los ejes OX y OY.*

a) Toca el botón para activar la visualización de coordenadas en la ventana de Geometría.

b) Dibuja el triángulo ABC y luego selecciona sus tres lados.

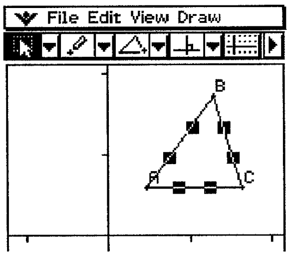
c) Selecciona el comando Dibuj. / Construir / Transformación general. Aparece el cuadro de diálogo de transformación.

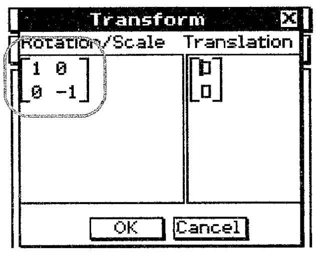
d) Como queremos un triángulo que sea simétrico al triángulo original respecto al eje OX, introduce la matriz [[1, 0], [0, –1]]. Toca el botón [OK].

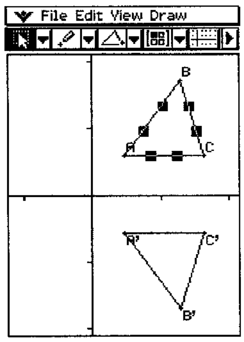
e) Toca en cualquier parte fuera de los triángulos para cancelar la selección del triángulo. A continuación, selecciona el triángulo A'B'C'.

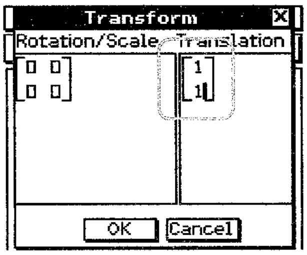
f) Selecciona el comando Dibuj. / Construir / Transformación general.

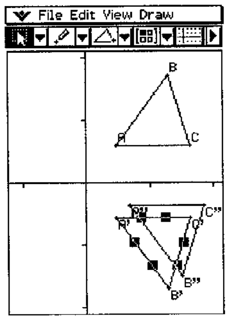
g) Para realizar la traslación del triángulo A'B'C' en 1 unidad a lo largo de los ejes OX y OY, introduce el vector [1, 1]. Toca el botón [OK]. Se traslada el triángulo A'B'C' y se dibuja el triángulo A"B"C".











Podemos hacer ambas operaciones de simetría y traslación al mismo tiempo, introduciendo la matriz y el vector en el paso (d) y pulsando [OK]. Todos los pasos se hacen usando las aplicaciones Geometría, Principal o eActivity para hacer cálculos con matrices y obtener la transformación. Podemos arrastrar una figura desde la ventana Geometría hasta la ventana Principal, realizar los cálculos y arrastrar los valores obtenidos a la ventana Geometría para dibujar la figura transformada. Podemos seleccionar un punto y su transformado en la ventana Geometría, arrastrarlos a la ventana Principal y ver la expresión de la transformación en la aplicación Principal. Podemos seleccionar un triángulo en la ventana Geometría y arrastrarlo a la ventana Principal para convertir dicho triángulo en una matriz de 2 filas y 3 columnas. Y, al revés, podemos arrastrar una matriz de 2 filas y 3 columnas (que puede obtenerse por cálculo) desde la aplicación Principal a la ventana Geometría y dibujar el triángulo correspondiente.

- Dibuja los transformados del triángulo ABC por las transformaciones definidas por las siguientes matrices, y en los casos en que sea posible, describe la transformación como simetría, giro, homotecia, afinidad, ...

$$A=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}\qquad B=\begin{pmatrix}1/2 & 0\\ 0 & 3\end{pmatrix}\qquad C=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix}\qquad D=\begin{pmatrix}3 & 0\\ 0 & 3\end{pmatrix}\qquad E=\begin{pmatrix}2 & -1\\ 1 & 2\end{pmatrix}$$

- **Ejemplo 1 de transformación usando la aplicación Principal.**

Supongamos que la pantalla de Geometría se encuentra en el estado del apartado (i) de la actividad anterior.

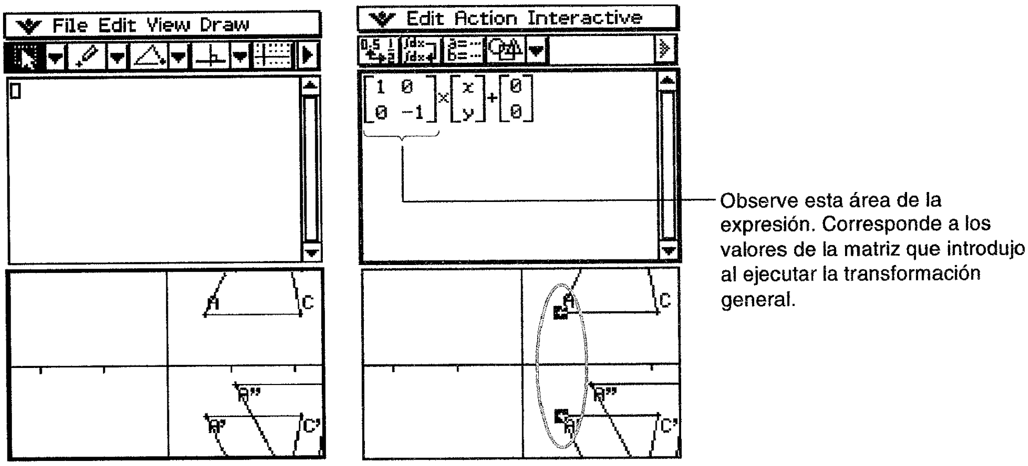
a) En el menú de aplicaciones, toca el botón Main para iniciar la aplicación Principal.

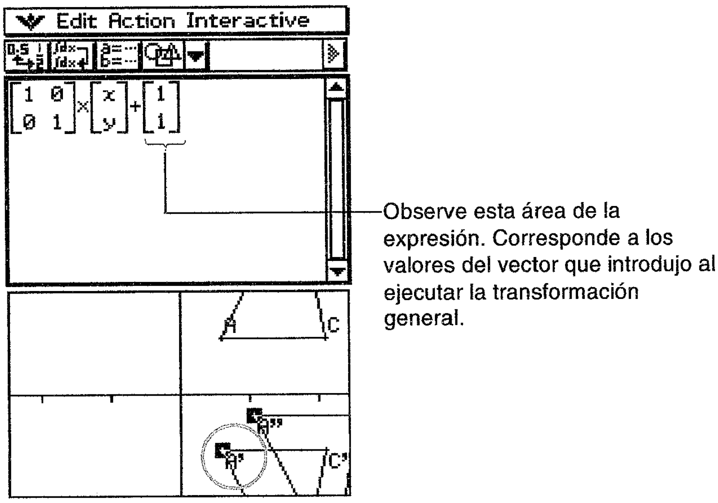
b) Toca el botón [▼] de la barra de herramientas de la aplicación Principal. De la lista desplegable de botones, selecciona . Se abre la aplicación Geometría y aparecen los triángulos ABC, A'B'C' y A"B"C" en la ventana Geometría.

c) Selecciona los puntos A y A'.

d) Mientras los dos puntos estén seleccionados, arrastra el punto A (o el punto A') a la posición del cursor del área de trabajo de la aplicación Principal. Aparece la expresión que ha transformado las coordenadas del punto A en las coordenadas del punto A'.

e) Después de borrar el área de trabajo de la aplicación Principal, intenta repetir los pasos (c) y (d) para los puntos A' y A". Aparece la expresión que ha transformado las coordenadas del punto A' en las coordenadas del punto A". Esta operación sólo funciona si se seleccionan un punto y su transformado. Si hubiésemos seleccionado, por ejemplo, A y A" la operación no habría funcionado.





- **Ejemplo 2 de transformación usando la aplicación Principal.**

a) En el menú de aplicaciones, toca el botón  para iniciar la aplicación Principal.

b) Toca el botón [▾] en la barra de herramientas de la aplicación Principal y selecciona el botón . Se abre la aplicación Geometría.

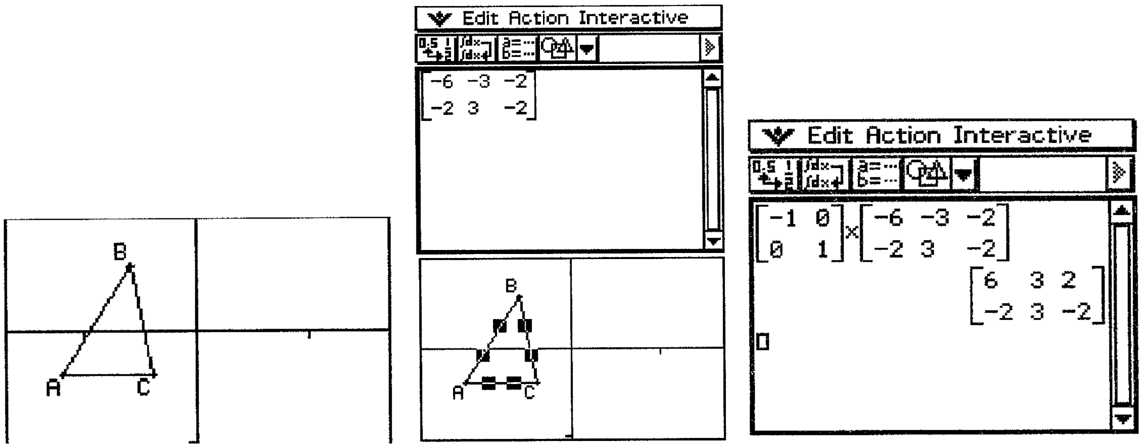
c) En la ventana Geometría selecciona Edit / Borrar todo. Se borra la pantalla.

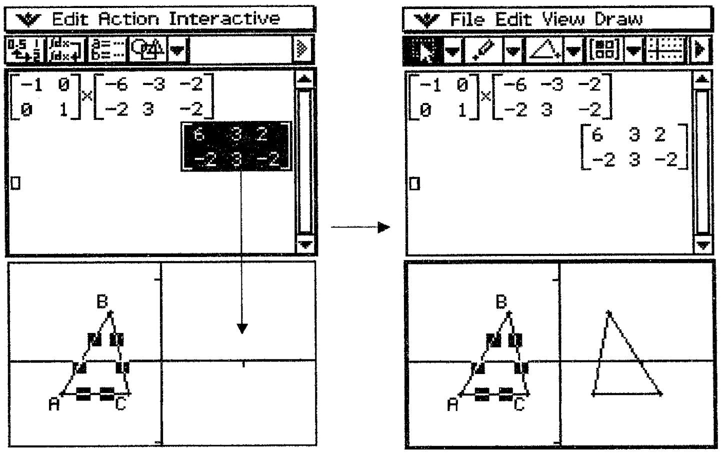
d) Dibuja un triángulo en la ventana de Geometría. Usa el cuadro de medidas para ajustar las coordenadas de los puntos A, B y C.

e) Selecciona el triángulo y arrástralo a la posición del cursor en el área de trabajo de la aplicación Principal. Se genera una matriz que muestra las coordenadas de los tres vértices del triángulo en el área de trabajo.

f) Multiplica la matriz anterior por la matriz [[–1, 0], [0, 1]], para transformar la matriz obtenida anteriormente según una simetría respecto del eje OY.

g) Selecciona la matriz obtenida y arrástrala a la ventana de Geometría. Se dibuja un triángulo simétrico del triángulo original respecto al eje OY.





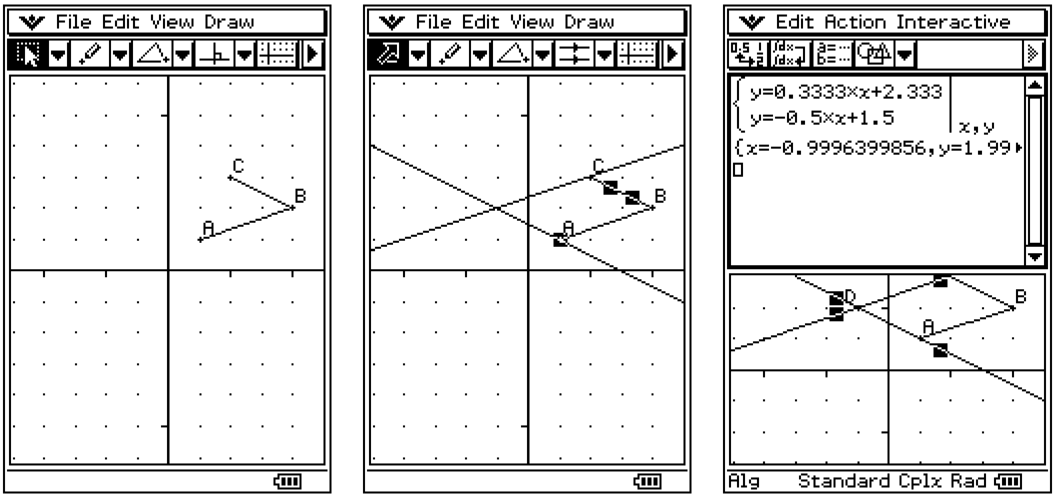
3. Geometría analítica

1. GEOMETRÍA AFÍN

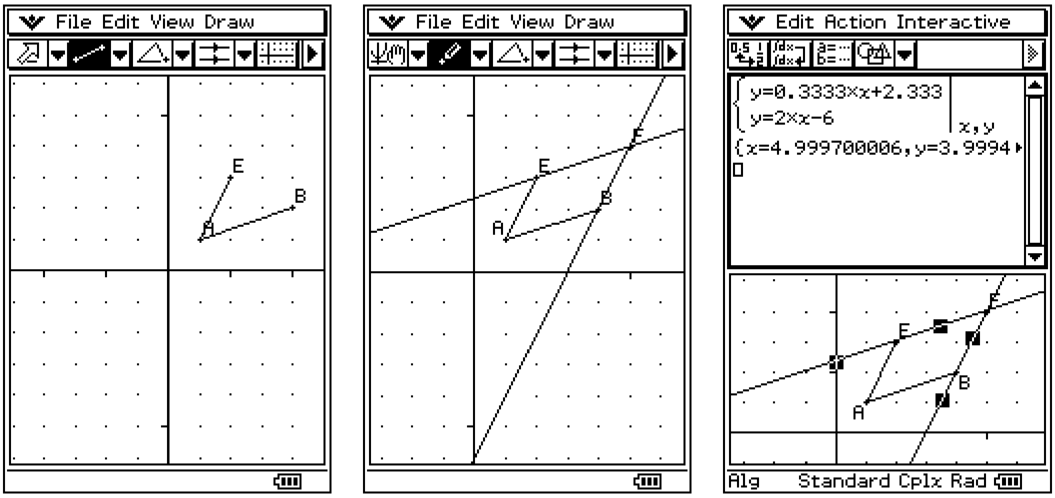
- Dados los puntos *A*(1, 1), B(4, 2) y *C*(2, 3):

  a) Da las coordenadas del punto D de forma que ABCD sea un paralelogramo.
  b) ¿Hay algún otro paralelogramo de vértices A, B y C?
  c) ¿En qué punto M se cortan las diagonales del paralelogramo ABCD?
  d) Halla la ecuación de la recta r que pasa por los puntos A y B.
  e) Halla la ecuación de la recta s, paralela a r, que pase por el punto medio entre A y C.
  f) Halla el punto de intersección entre la recta s y la diagonal AC.

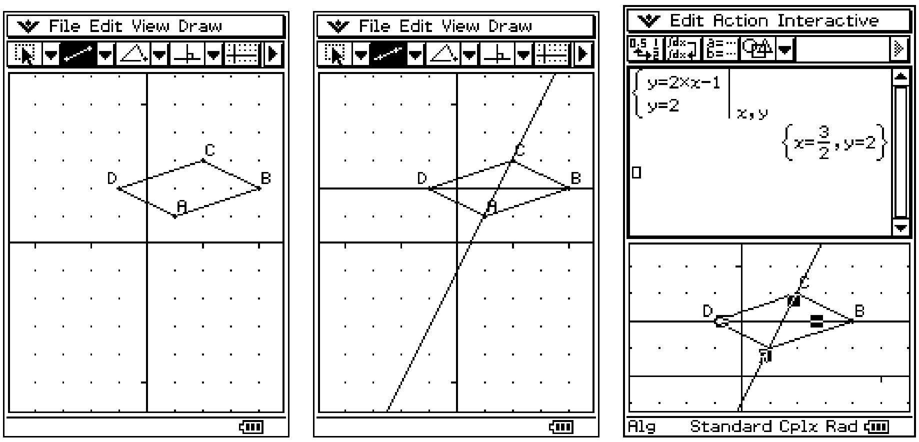
a) Visualiza la ventana de geometría con la rejilla entera y muestra los ejes. Dibuja los segmentos AB y BC con la herramienta Segmento. Para obtener el punto D, traza por A la recta paralela al lado BC (usa la herramienta rectas paralelas de la ClassPad); traza por C la recta paralela al segmento AB. Señala el punto de corte. Para averiguar sus coordenadas, selecciona las dos rectas y arrastra la selección a la ventana Principal; en ella, resuelve el sistema formado por las ecuaciones de las dos rectas. Observa que el punto buscado es D(–1,2).



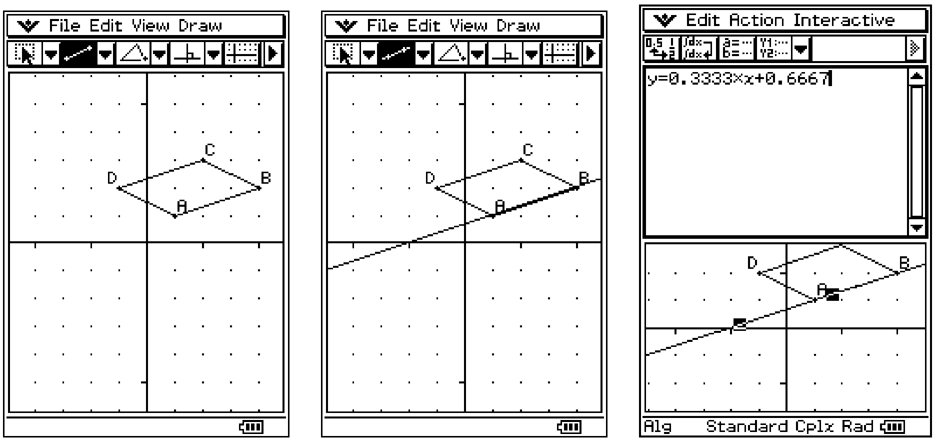
b) También podría ser solución el punto E(5, 4) en el paralelogramo ACBE, tal como se muestra en las siguientes figuras:



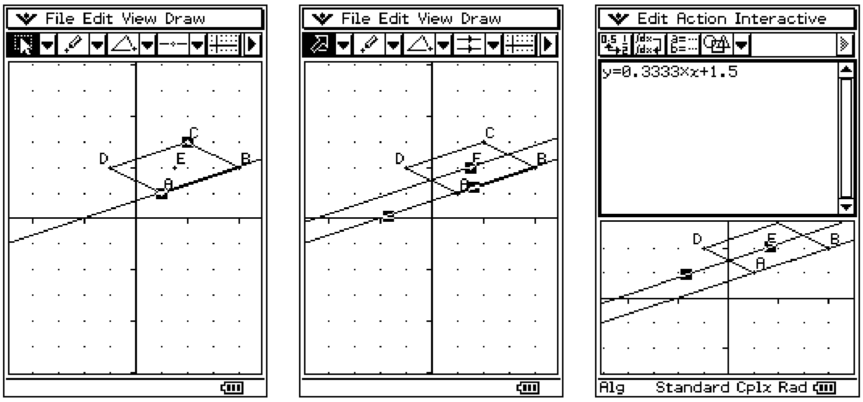
c) Continuando con la solución obtenida en el apartado (a), una vez dibujado el paralelogramo ABCD con A(1, 1), B(4, 2), C(2, 3) y D(–1, 2), dibujamos las dos diagonales AC y BD. Para hallar el punto de corte, seleccionamos dichas diagonales y las arrastramos a la ventana principal. En dicha ventana, resolvemos el sistema formado por las ecuaciones de las dos rectas, obteniendo como punto de corte M(3/2, 2)



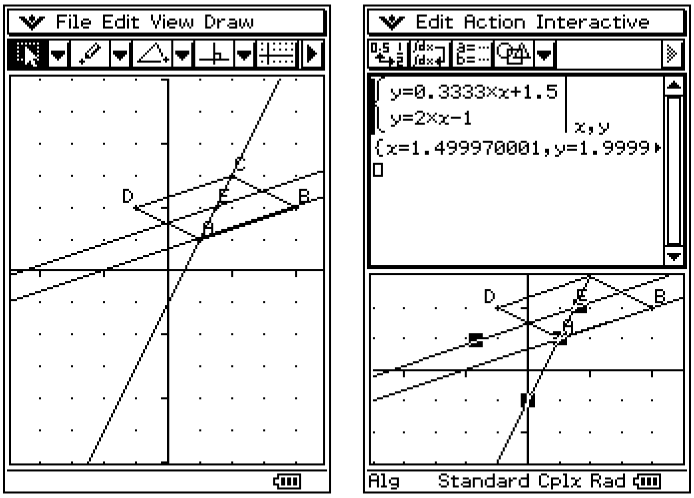
d) Una vez construido el paralelogramo ABCD, dibujamos la recta AB usando la herramienta "recta que pasa por dos puntos". La seleccionamos y arrastramos hasta la ventana principal, en donde aparece su ecuación: $y = \frac{1}{3}x + \frac{2}{3}$.



e) En primer lugar hallamos el punto medio del segmento AC. Para ello, seleccionamos los puntos A y C y tocamos el botón "punto medio", obteniendo el punto E. A continuación, dibujamos la recta que pasa por E y es paralela a AB. Por último, seleccionamos la recta obtenida y la arrastramos a la ventana Principal, en la que aparece su ecuación: $y = \frac{1}{3}x + \frac{3}{2}$.



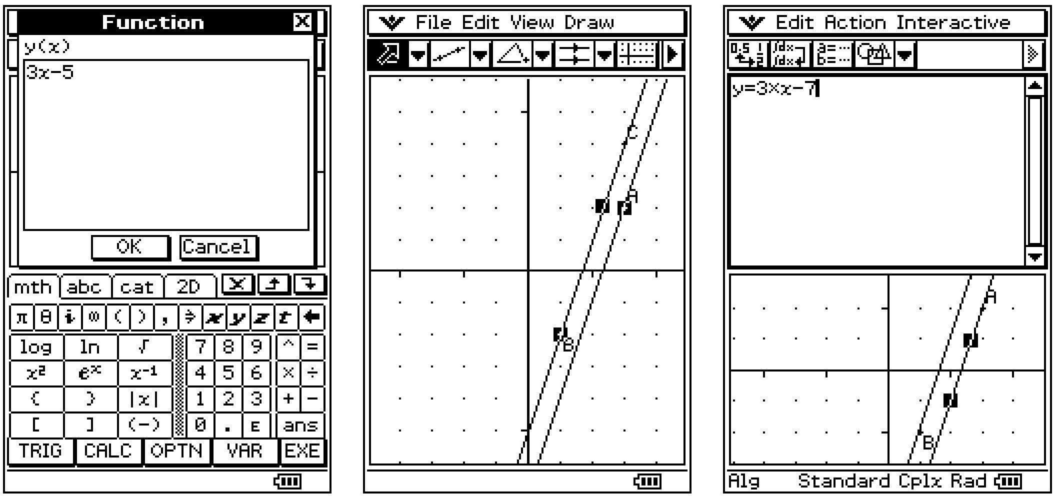
f) Con la herramienta "recta que pasa por dos puntos", dibujamos la diagonal AC. Seleccionamos la recta s y la diagonal AC y arrastramos la selección hasta la ventana Principal, en la que aparece el sistema formado por las ecuaciones de dichas rectas. Resolviendo el sistema, obtenemos el punto de intersección (1'5, 2), es decir, (3/2, 2). Se observa, por tanto, que las rectas dadas se cortan en el punto medio de las diagonales.



- Demuestra que la recta determinada por los puntos A(5, 2) y B(6, 1) es paralela a la que une C(–3, –2) y D(–1, –4).

- Halla la ecuación de la recta que pasa por el punto P(3, 2) y es paralela a la recta 3x–y=5.

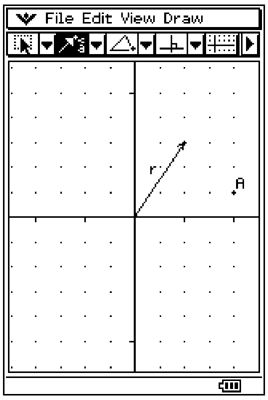
  Visualiza la ventana de Geometría con la rejilla entera y muestra los ejes. Para dibujar la recta 3x–y=5, selecciona el comando Draw/Function y, en el cuadro de diálogo Function, introduce la expresión de y como función de x (en nuestro caso, 3x–5) y haz clic en OK. A continuación, dibuja de nuevo dicha recta con la herramienta "recta que pasa por dos puntos", haciendo clic en dos cualesquiera de sus puntos (ten en cuenta que la calculadora diferencia entre construcciones geométricas y dibujos) y borra el dibujo de la función. Dibuja el punto P(3, 2) y la recta paralela a la dada que pasa por P. Selecciona esta última recta y arrastra la selección hasta la ventana Principal, en la cual aparecerá la ecuación de dicha recta: y=3x–7.

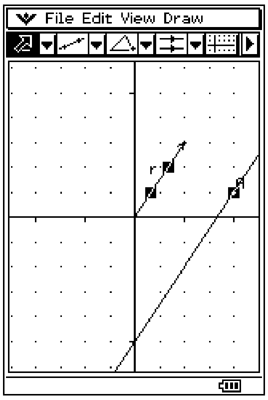


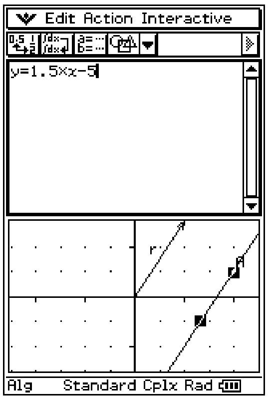
- Halla las ecuaciones continua y explícita de la recta que pasa por el punto P(4, 1) y tiene por vector director u=(2, 3).

  En la ventana de Geometría con rejilla entera y ejes coordenados, dibujamos el punto A(4, 1) y el vector r=(2, 3). A continuación, seleccionamos el punto y el vector y hacemos clic en la herramienta "recta paralela" para dibujar la recta que pasa por P y tiene la dirección del vector

r. Finalmente, seleccionamos dicha recta y la arrastramos hasta la ventana principal, en donde aparecerá su ecuación explícita: $y = \frac{3}{2}x - 5$. La ecuación continua de la recta es: $\frac{x-4}{2} = \frac{y-1}{3}$





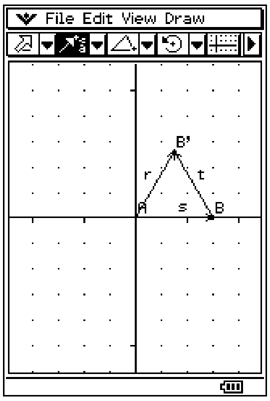


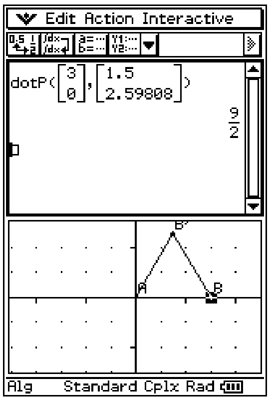
- Halla la ecuación de la recta que pasa por los puntos A(3, 0) y B(0, 5).
- Halla el punto de intersección de las rectas r: 2x–3y=4, y s: x+y=1.
- Halla los puntos medios de los lados del triángulo de vértices A(1, 1), B(0, 5) y C(5, 6).

2. GEOMETRÍA MÉTRICA

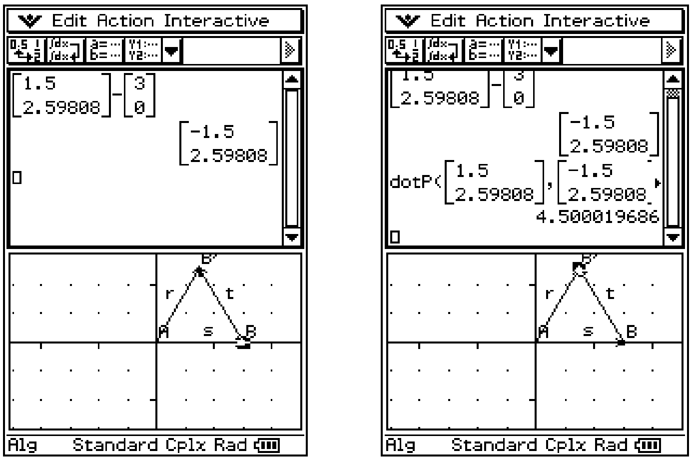
- Sea ABC un triángulo equilátero de lado 3 cm. Calcula los productos escalares AB • AC y AC • BC.

Podemos suponer que uno de los vértices del triángulo equilátero es el origen de coordenadas. Visualiza la ventana de geometría con rejilla entera y haz que se muestren los ejes. Dibuja el lado AB marcando los puntos A(0, 0) y B(3, 0). Halla el transformado de AB mediante un giro de centro A(0, 0) y ángulo de giro 60º. Con un segmento une el punto B con su transformado B' y tendrás dibujado el triángulo equilátero ABC. Con la herramienta Vector, dibuja los vectores s=AB, r=AC y t=BC. En la ventana principal, selecciona el comando Action/Vector/dotP para calcular el producto escalar; en la ventana de geometría, selecciona el extremo B del vector AB y arrástralo a la ventana principal a continuación de dotP(. Pulsa [,]. En la ventana de Geometría, selecciona el extremo C del vector AC y arrástralo hasta la ventana principal al final de la línea dotP(. Pulsa [EXE] y observa que el producto escalar es AB•AC=9/2.





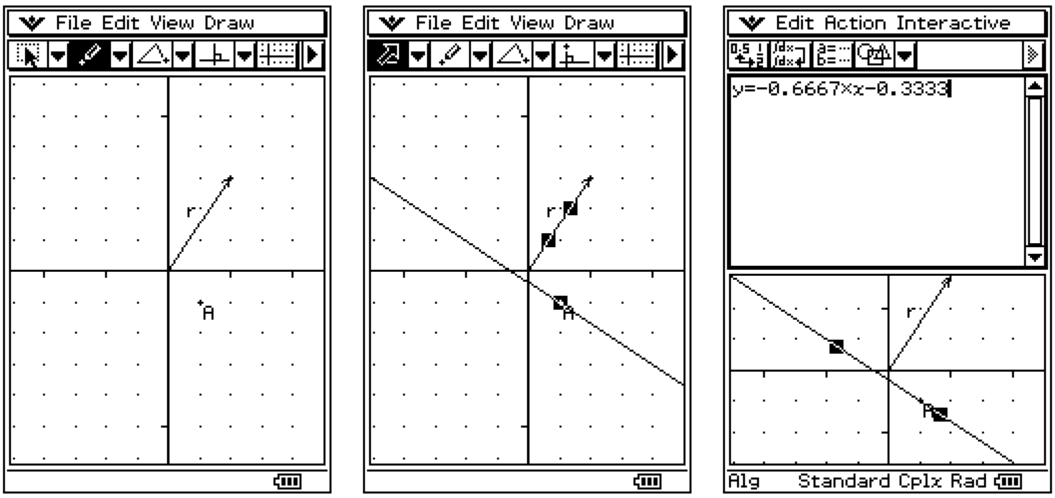
Para hallar el otro producto escalar, hay que calcular las coordenadas del vector BC. Para ello, selecciona el punto C, extremo del vector BC y arrástralo a la ventana principal, en la cual aparecerán las coordenadas del vector AC. Pulsa [–]. Selecciona el punto B, origen del vector BC y arrástralo a la ventana principal al final de la línea de edición. Pulsa [EXE] y tendrás las coordenadas del vector BC. Ahora puedes repetir los mismos pasos vistos antes para calcular el producto escalar AC•BC, obteniendo como resultado: AC•BC=9/2.



Nota: observa que, aunque aparentemente el ángulo que forman AC y BC es de 120º (si tenemos en cuenta el sentido), y por tanto, el producto escalar debería ser negativo, en realidad es positivo. Ello es debido a que el ángulo que forman dos vectores es **el menor de los dos ángulos que determinan sus direcciones**, es decir, el ángulo que forman los vectores AC y BC sigue siendo 60º.

- Representa gráficamente el vector a=(2, 1) y el vector b=(–1, 2). ¿Cómo son? Halla su producto escalar.
- Halla la ecuación de la recta de vector ortogonal v=(2, 3) que pasa por el punto P(1, –1).

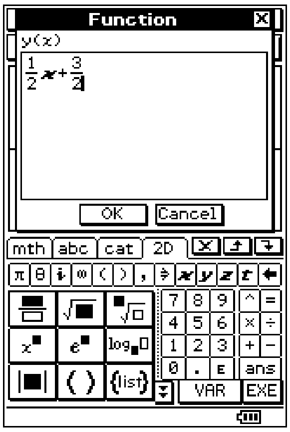
En la ventana de Geometría con rejilla entera y ejes coordenados, dibujamos el vector r=(2, 3) y el punto A(1, –1). Con la herramienta "recta perpendicular", dibujamos la recta que pasa por el punto A y es perpendicular al vector r. Seleccionamos dicha recta y la arrastramos a la ventana principal, en la cual aparece su ecuación: $y = -\frac{2}{3}x - \frac{1}{3}$

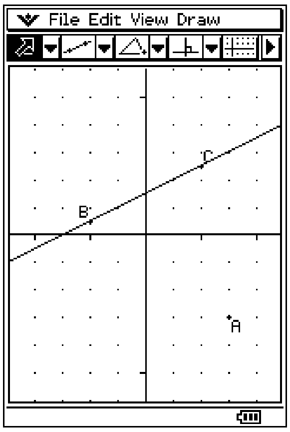


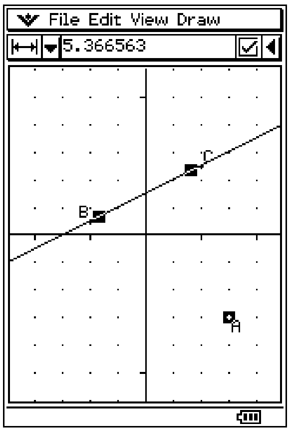
- Halla la ecuación de la recta que pasa por el punto P(2, 0) y es perpendicular a la recta 2x–5y=3.
- Halla la distancia del punto P(3, –3) a la recta x–2y+3=0.

En la ventana de Geometría (rejilla entera) dibuja el punto A(3, –3) y selecciona el comando Draw/Function. En el cuadro de diálogo introduce la ecuación explícita de la recta y pulsa OK.

Sobre la gráfica de la función, con la herramienta "recta por dos puntos" dibuja la recta marcando dos puntos sobre la misma. Selecciona el dibujo de la gráfica y suprímelo. A continuación selecciona la recta BC y el punto A y haz clic en el cuadro de medidas [▸]. Observa en dicho cuadro la distancia entre el punto y la recta, d(P, r)=5.366563.







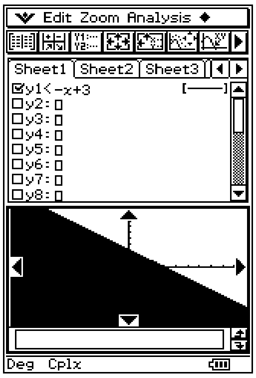
4. Programación lineal

1. <u>INECUACIONES Y SISTEMAS DE INECUACIONES</u>

- Cada una de las inecuaciones que siguen representa una región del plano cartesiano. Dibuja dichas regiones:

  1) $x + y < 3$ 2) $2x - 3y \leq 4$ 3) $2x > y - 6$ 4) $x \leq 3y - 6$ 5) $x + 5y = 6$

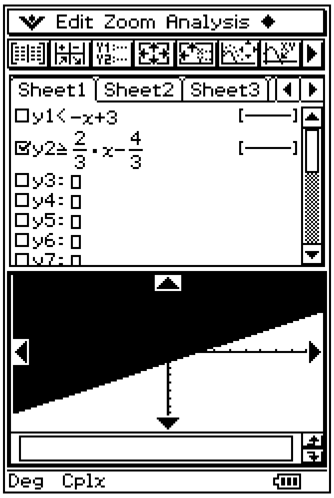
1) En el menú de aplicaciones toca el botón para abrir la aplicación Gráficos y Tablas. Para dibujar la región (1), en el editor de gráficos selecciona el comando Tipo / Tipo y< o toca el botón [y<] de la lista desplegable [y=]▾].
2) Sitúa el cursor en la línea y1 e introduce la expresión y1<–x+3. Toca el botón de marcación para seleccionar la línea y1.
3) Toca el botón para acceder a la ventana de visualización. Selecciona el comando Memoria / Estándar. Selecciona el comando Zoom / Estándar o Toca el botón para dibujar la región. Observa el resultado.



4) Para dibujar la región (2), en el editor de gráficos selecciona el comando Tipo / Tipo y≥ o toca el botón [y≥] de la lista desplegable [y=]▾].

5) Sitúa el cursor en la línea y2 e introduce la expresión $y2 \geq \frac{2}{3}x - \frac{4}{3}$. Toca el botón de marcación para seleccionar la línea y2 y quita la selección de la línea y1.

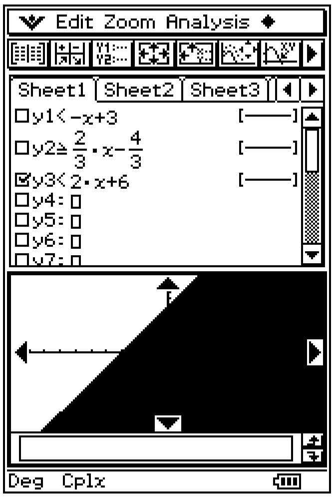
6) Selecciona el comando Zoom / Estándar o Toca el botón  para dibujar la región. Observa el resultado.



7) Para dibujar la región (3), en el editor de gráficos selecciona el comando Tipo / Tipo y< o toca el botón [y<] de la lista desplegable [y=]▼].

8) Sitúa el cursor en la línea y3 e introduce la expresión y3<2x+6. Toca el botón de marcación para seleccionar la línea y3 y quita la selección de la línea y2.

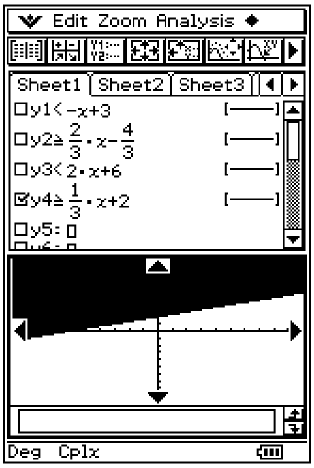
9) Selecciona el comando Zoom / Estándar o Toca el botón  para dibujar la región. Observa el resultado.



10) Para dibujar la región (4), en el editor de gráficos selecciona el comando Tipo / Tipo y≥ o toca el botón [y≥] de la lista desplegable [y=]▼].

11) Sitúa el cursor en la línea y4 e introduce la expresión y4≥(1/3)x+2. Toca el botón de marcación para seleccionar la línea y4 y quita la selección de la línea y3.

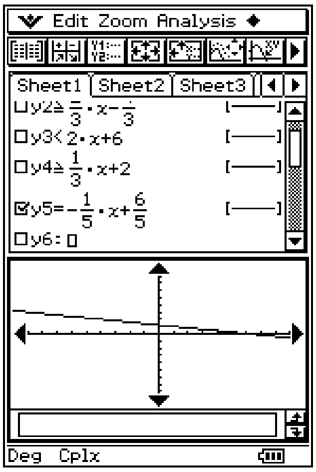
12) Selecciona el comando Zoom / Estándar o Toca el botón para dibujar la región. Observa el resultado.



13) Para dibujar la región (5), en el editor de gráficos selecciona el comando Tipo / Tipo y= o toca el botón [y=] de la lista desplegable [y=]▾].

14) Sitúa el cursor en la línea y5 e introduce la expresión y= −(1/5)x+(6/5). Toca el botón de marcación para seleccionar la línea y5 y quita la selección de la línea y4.

15) Selecciona el comando Zoom / Estándar o Toca el botón para dibujar la región. Observa el resultado.

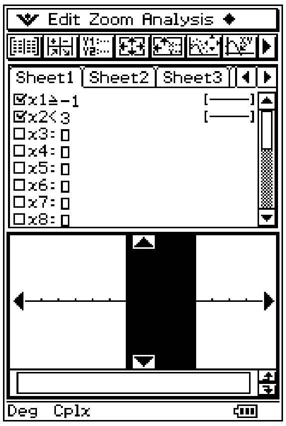


- Representa gráficamente las soluciones de cada uno de los sistemas de inecuaciones que siguen:

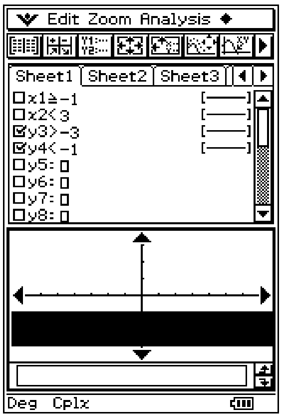
1) $\left.\begin{array}{l} x \geq -1 \\ x < 3 \end{array}\right\}$ 2) $\left.\begin{array}{l} y > -3 \\ y < -1 \end{array}\right\}$ 3) $\left.\begin{array}{l} x \leq 3 \\ y \leq -7 \end{array}\right\}$

4) $\left.\begin{array}{l} -1 < x < 3 \\ -3 < y < -1 \end{array}\right\}$ 5) $\left.\begin{array}{l} 2x - y < 1 \\ x - 3y < 6 \end{array}\right\}$ 6) $\left.\begin{array}{l} x + 3y < 6 \\ x - 2y < 4 \\ x + y > 0 \end{array}\right\}$

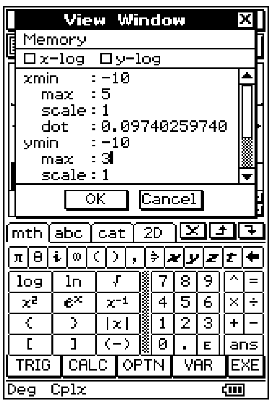
1) En el editor de gráficos selecciona el comando Tipo / Tipo x≥. En la línea X1 introduce la expresión x1≥−1. Selecciona el comando Tipo / Tipo x<. En la línea X2 introduce la expresión x<3. Selecciona el cuadro de marcación de las líneas x1 y x2 y toca el botón .

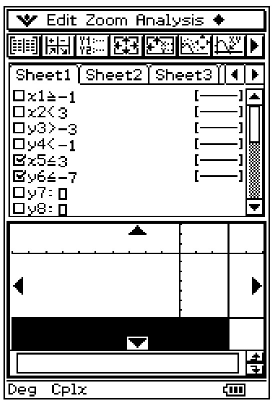


2) En el editor de gráficos selecciona el comando Tipo / Tipo y>. En la línea X1 introduce la expresión y3>–3. Selecciona el comando Tipo / Tipo y<. En la línea y4 introduce la expresión y4<–1. Selecciona el cuadro de marcación de las líneas y3 y y4 y toca el botón .



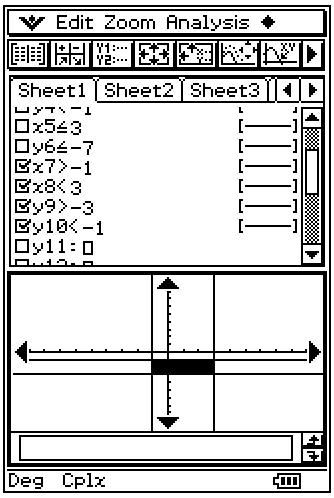
3) En el editor de gráficos selecciona el comando Tipo / Tipo x≤. En la línea X5 introduce la expresión x5≤3. Selecciona el comando Tipo / Tipo y≤. En la línea y6 introduce la expresión y6≤–7. Toca el botón y modifica los parámetros de la ventana de visualización tal como se indica en la siguiente figura. Selecciona el cuadro de marcación de las líneas x5 y y6 y toca el botón para representar gráficamente el conjunto de soluciones.



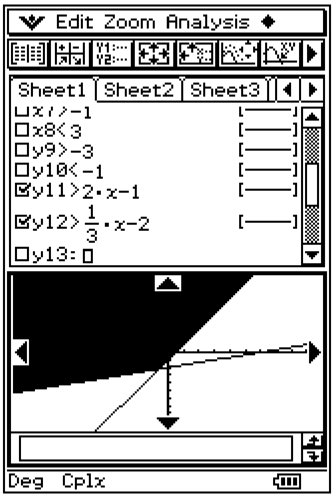


4) En el editor de gráficos selecciona el comando Tipo / Tipo x>. En la línea X7 introduce la expresión x7>–1. Selecciona el comando Tipo / Tipo x<. En la línea x8 introduce la expresión x8<3. Selecciona el comando Tipo / Tipo y>. En la línea Y9 introduce la expresión y9>–3. Selecciona el comando Tipo / Tipo y<. En la línea Y10 introduce la expresión y10<–1. Toca el

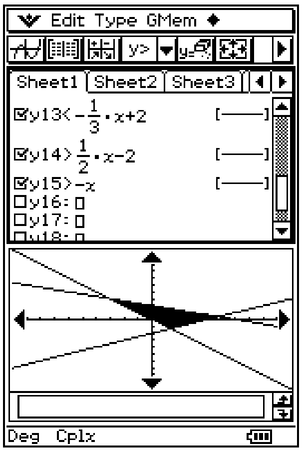
botón y selecciona el comando Memoria / Estándar. Selecciona el cuadro de marcación de las líneas x7, x8, y9 y y10 y toca el botón para representar gráficamente el conjunto de soluciones.



5) En el editor de gráficos selecciona el comando Tipo / Tipo y>. En la línea y11 introduce la expresión y11>2x-1. En la línea y12 introduce la expresión y12>$\frac{1}{3}$x–2. Selecciona el cuadro de marcación de las líneas y11 y y12 y toca el botón para representar gráficamente el conjunto de soluciones.



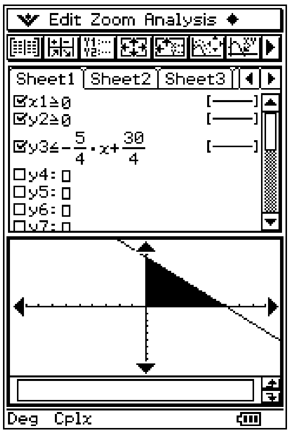
6) En el editor de gráficos selecciona el comando Tipo / Tipo y<. En la línea y13 introduce la expresión y13<$-\frac{1}{3}$x+2. Selecciona el comando Tipo / Tipo y>. En la línea y14 introduce la expresión y14>$\frac{1}{2}$x-2. Selecciona el comando Tipo / Tipo y>. En la línea y15 introduce la expresión y15>–x. Selecciona el cuadro de marcación de las líneas y13, y14 y y15 y toca el botón para representar gráficamente el conjunto de soluciones.



- Queremos comprar café de 5 euros / kg. y café de 4 euros / kg. para mezclarlo. Disponemos únicamente de 30 euros. ¿Cuántos kilogramos de cada tipo de café podemos comprar ?.

  Sea x el número de kilos de café de tipo A (de 5 euros / kg.). Sea y el número de kilos de café de tipo B (de 4 euros / kg.). Debe ser $x \geq 0$, $y \geq 0$. El precio de la mezcla es: $5x + 4y$. Este precio debe ser inferior o igual a 30 euros: $5x + 4y \leq 30$. Por tanto, hay que resolver el sistema de inecuaciones:

$$\left.\begin{array}{l} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ 5x + 4y \leq 30 \end{array}\right\}$$



  Todos los puntos de esta región (incluyendo los segmentos frontera) son solución del problema.

- Una fábrica oferta a sus trabajadores para el cobro de dietas las dos opciones siguientes:

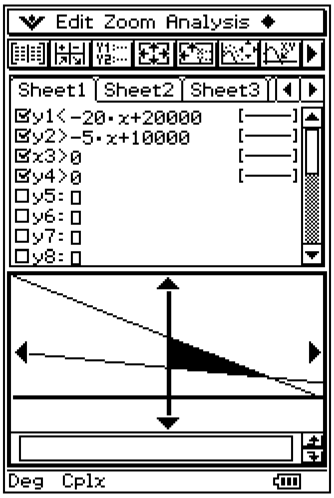
  a) 20 cents. por artículo vendido más una cantidad fija.
  b) 10 cents. por artículo vendido más el doble de la cantidad fija.

  ¿Cuántos artículos y qué dietas deben fijarse para que la opción b) permita ganar menos de 20000 cents y la opción a) más de 20000 cents?.

  Sea y la cantidad fija (igual para las dos opciones de cobro). Sea x el número de artículos vendidos. Las dietas correspondientes a la opción a) son $D = 20x + y$. Las dietas correspondientes a la opción b) son $D' = 10x + 2y$. Como queremos que $D<20000$ y que $D'>20000$, deberán cumplirse simultáneamente las inecuaciones:

$\left.\begin{array}{l} 20x+y<20000 \\ 10x+2y>20000 \\ x>0 \\ y>0 \end{array}\right\}$. Este sistema de inecuaciones lineales es equivalente a $\left.\begin{array}{l} 20x+y<20000 \\ 5x+y>10000 \\ x>0 \\ y>0 \end{array}\right\}$.

Despejando y en cada una de las dos primeras inecuaciones: $\left.\begin{array}{l} y<-20x+20000 \\ y>-5x+10000 \\ x>0 \\ y>0 \end{array}\right\}$ (1)



La región del plano definida por el sistema de inecuaciones lineales (1) es el triángulo sombreado de la figura, excluyendo los tres lados. Hay, por tanto, infinitas soluciones. Una de ellas es el punto de coordenadas (500, 8000), es decir, 500 artículos vendidos y 8000 cents fijos, lo que da unas dietas de $20\cdot 500+8000=18000$ cents (opción a) y de $10\cdot 500+2\cdot 8000=21000$ cents (opción b).

- Un artesano posee un taller de alfarería en el cual fabrica ceniceros de cerámica y jarrones. Tarda 2 horas en hacer cada jarrón y media hora para cada cenicero. Si trabaja como máximo 40 horas a la semana, ¿cuántos jarrones y ceniceros puede hacer semanalmente ?.

- Una persona invierte mensualmente 200 euros, como máximo, en comprar cintas de vídeo y cintas de cassette. Cada cinta de vídeo le cuesta 12 euros, y cada cinta de cassette 3 euros. ¿Cuántas cintas de cada tipo puede comprar al mes ?.

2. PROGRAMACIÓN LINEAL

- Una empresa constructora dispone de dos tipos de camiones, A y B, y desea transportar 100 toneladas de material recién comprado al lugar de la construcción. Naturalmente desea realizar el transporte con el menor coste posible.

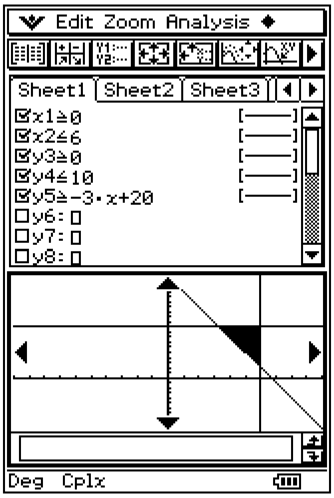
TIPO DE CAMIONES	A	B
CAMIONES DISPONIBLES	6	10
CAPACIDAD (Tm)	15	5
PRECIO DEL VIAJE (euros)	40	30

a) Con los datos de la tabla anterior, ¿cuántos camiones deben utilizar para obtener el mínimo coste?.

Sea x=número de camiones de tipo A ; y=número de camiones de tipo B. Debe cumplirse : $0 \le x \le 6$ $0 \le y \le 10$. El número total de toneladas que transportarán será : 15x+5y, que no podrá ser inferior a 100 toneladas: $15x+5y \ge 100$. Es decir: $3x+y \ge 20$. Por lo tanto, el conjunto de restricciones es el formado por las inecuaciones:

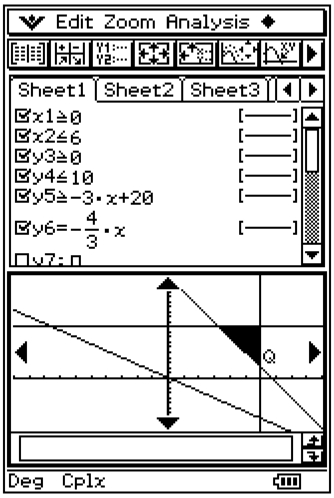
$$\left.\begin{array}{l} 0 \le x \le 6 \\ 0 \le y \le 10 \\ 3x + y \ge 20 \end{array}\right\}$$

El recinto de validez es el indicado en la siguiente figura:



La función objetivo es el precio : P=40x+30y, que expresado en decenas de euros es : P = 4x + 3y

De donde : 3y = –4x + P → $y=-\frac{4}{3}x+\frac{P}{3}$. Minimizar P es equivalente a minimizar la ordenada en el origen de esta recta. El problema es equivalente a determinar la recta de menor ordenada en el origen de todas las que pasan por el recinto de validez y son paralelas a la recta t : $y=-\frac{4}{3}x$, que representamos gráficamente:



Se observa en la figura que el mínimo coste se obtiene en el punto Q(6, 2). Por lo tanto, la solución del problema es: 6 camiones de tipo A y 2 camiones de tipo B. El mínimo coste es P=4·6+3·2=30 decenas de euros = 300 euros.

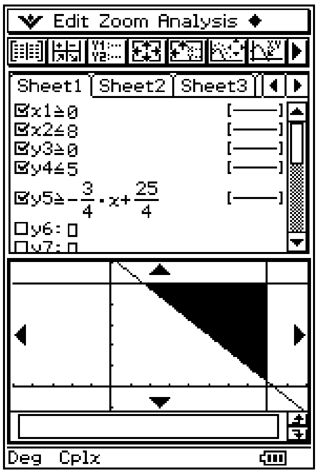
b) Resuelve el mismo problema suponiendo que los datos son los de la tabla siguiente:

TIPO DE CAMIONES	A	B
CAMIONES DISPONIBLES	8	5
CAPACIDAD (Tm)	12	16
PRECIO DEL VIAJE (euros)	50	90

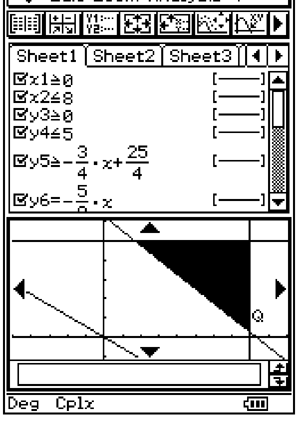
Sea x=número de camiones de tipo A ; y=número de camiones de tipo B. Debe cumplirse: $0 \le x \le 8$ $0 \le y \le 5$. El número total de toneladas que transportarán será : $12x + 16y$, que no podrá ser inferior a 100 toneladas : $12x + 16y \ge 100$. Es decir: $3x + 4y \ge 25$. Por lo tanto, el conjunto de restricciones es el formado por las inecuaciones :

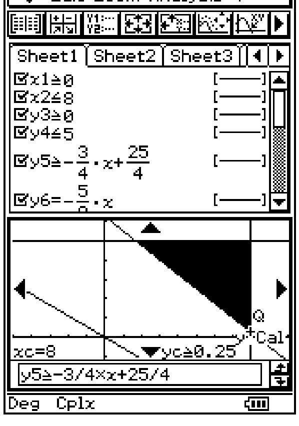
$$\left.\begin{array}{l} 0 \le x \le 8 \\ 0 \le y \le 5 \\ 3x + 4y \ge 25 \end{array}\right\}$$

El recinto de validez es el indicado en la siguiente figura:



La función objetivo es el precio : P=50x+90y, que expresado en decenas de euros es: $P = 5x + 9y$ De donde : $9y = -5x + P \rightarrow y = -\frac{5}{9}x + \frac{P}{9}$. Minimizar P es lo mismo que minimizar la ordenada en el origen de esta recta. El problema es equivalente a encontrar la recta de menor ordenada en el origen de entre todas las que pasan por el recinto de validez y son paralelas a la recta t : $y = -\frac{5}{9}x$, que representamos gráficamente:





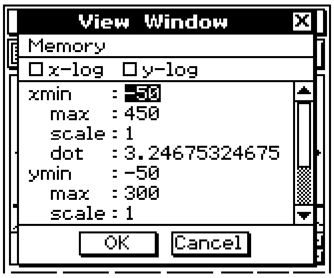
Se observa en la figura que el coste mínimo se obtiene en el punto Q(8, 1 / 4). Para obtener las coordenadas del punto Q, selecciona el comando Análisis / Resolución G. / Calc Y. Con las teclas de cursor [◄] [►] [▲] [▼] selecciona la recta que contiene al punto Q y pulsa [Ejec.]. En el cuadro de diálogo introduce el valor de x = 8. Aparece en pantalla el valor de y=0,25. Luego la solución del problema es: 8 camiones del tipo A y 1 camión del tipo B. El coste mínimo es P = 5·8+9·1=49 decenas de euros = 490 euros.

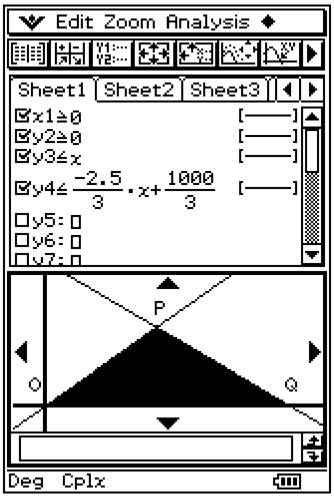
- Un fabricante de chocolate elabora dos tipos de cajas de bombones, de 250 gramos y de 300 gramos respectivamente. Obtiene un beneficio de 5 euros por cada caja de las primeras, y de 6,5 euros por cada caja de las últimas. Si dispone de 100 kg. de chocolate para confeccionar las cajas, y el número de cajas pequeñas debe ser, al menos, igual al de cajas grandes, ¿cuántas de cada tipo debe hacer si desea obtener un beneficio máximo ?.

Sea x=número de cajas pequeñas ; y=número de cajas grandes. Debe ser $x \geq 0$, $y \geq 0$, $x \geq y$. Como se dispone de 100 kg =100000 g de chocolate, debe ser $250x + 300y \leq 100000$. Por tanto: $2{,}5x + 3y \leq 1000$. El conjunto de restricciones del problema viene dado por el siguiente sistema de inecuaciones:

$$\left.\begin{array}{l} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ x \geq y \\ 2{,}5x + 3y \leq 1000 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ y \leq x \\ y \leq -\dfrac{2{,}5}{3}x + \dfrac{1000}{3} \end{array}\right\}$$

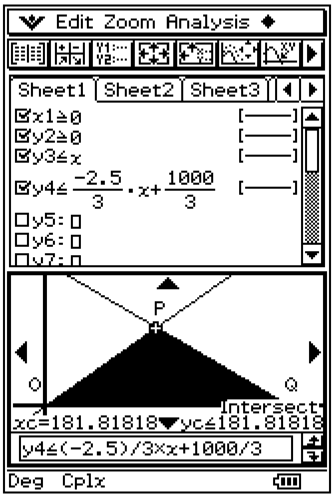
El recinto de validez, con los parámetros de visualización que se indican, es el que se muestra en la siguiente figura:



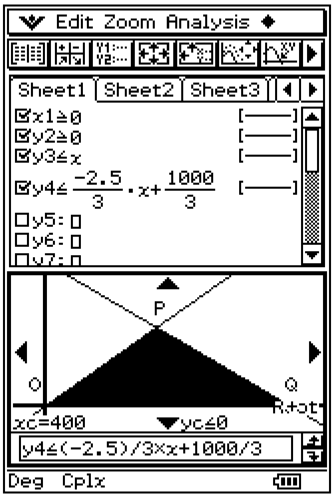


Los vértices de esta región de validez son los puntos O, P y Q.

Las coordenadas de P se obtienen resolviendo el sistema formado por las ecuaciones de las rectas OP y PQ. Para ello, selecciona el comando Análisis / Resolución G. / Intersección. Con las teclas de cursor [◄] [►] [▲] [▼] selecciona las rectas OP y PQ y pulsa [Ejec.]. Se muestra en pantalla las coordenadas del punto P, que podemos aproximar así: P(182, 182).



Las coordenadas de Q se obtienen como punto de corte de la recta PQ con el eje OX. Para ello, selecciona el comando Análisis / Resolución G. / Raíz. Con las teclas de cursor [◄] [►] [▲] [▼] selecciona la recta PQ y pulsa [Ejec.]. Se muestra en pantalla las coordenadas del punto Q(400, 0).



El beneficio es B=5x+6,5y. Calculemos el beneficio en cada uno de los vértices de la región de validez:

En O(0, 0) → B(0, 0) = 5· 0 + 6,5· 0 = 0
En Q(400, 0) → B(400, 0) = 5· 400 + 6,5· 0 = 2000 euros.
En P(182, 182) → B(182, 182) = 5· 182 + 6,5· 182 = 2093 euros.

Solución : El beneficio máximo se obtiene para el punto P, es decir, hay que fabricar 182 cajas pequeñas y 182 cajas grandes.

- Con el comienzo del curso se van a lanzar unas ofertas de material escolar. Unos almacenes quieren ofrecer 600 cuadernos, 500 carpetas y 400 bolígrafos para la oferta, empaquetándolo de dos formas distintas ; en el primer bloque pondrán 2 cuadernos, 1 carpeta y 2 bolígrafos ; en el segundo pondrán 3 cuadernos, 1 carpeta y 1 bolígrafo. Los precios de cada paquete serán 6,5 y 7 euros, respectivamente. ¿Cuántos paquetes les conviene poner de cada tipo para obtener los máximos beneficios ?.

- Una empresa compra 26 locomotoras a tres fábricas : 9 a A, 10 a B y 7 a C. Las locomotoras deben comenzar a prestar servicios en dos estaciones distintas : 11 de ellas en la estación N y 15 en la S. Los costes de traslados son, por cada una, los que se indican en la tabla (en cientos de decenas de euros):

	A	B	C
N	6	15	3
S	4	20	5

  Averigua cómo conviene hacer el reparto para que el coste sea mínimo.

- En una fábrica de dulces navideños se preparan dos surtidos para lanzarlos al mercado. El primero se vende a 4,50 euros y contiene 150 gramos de polvorones, 100 gramos de mantecados y 80 gramos de roscos de vino. El segundo se vende a 5,60 euros y contiene 200 gramos de polvorones, 100 gramos de mantecados y 100 gramos de roscos de vino. Se dispone de un total de 200 kg de polvorones, 130 kg de mantecados y 104 kg de roscos de vino. La empresa de embalajes sólo le puede suministrar 1200 cajas. ¿Cuántos surtidos de cada tipo convendría fabricar ?.

- En una tienda de electrodomésticos se quiere lanzar una oferta de frigoríficos a 500 euros y lavadoras a 450 euros. Cada venta de un frigorífico supone 10 minutos del tiempo de un vendedor y 5 minutos del tiempo de un instalador. La venta de una lavadora requiere 8 minutos del vendedor y 12 minutos del instalador. Se dispone de 4 vendedoras y 3 instaladores, que trabajan 4 horas diarias útiles. ¿Cuántos frigoríficos y lavadoras interesa poner a la venta durante los 20 días hábiles de la campaña ?.

5. Actividades

1) Halla el producto escalar de los vectores: a=(–6, 4) y b=(4, 5).

2) Halla el producto escalar de los vectores: a=(3, 4) y b=(–4, 3). ¿Qué ángulo forman?.

3) Si a=(4, 3), da un vector unitario con la misma dirección y sentido.

4) Calcula el área del triángulo de vértices A(1, 1, 1), B(2, 1, 0) y C(–1, 1, 2).

5) Los puntos A(1, –1, 1), B(2, 1, 1) y C(1, 2, –1) determinan un plano. Halla un vector perpendicular a dicho plano.

6) Calcula el volumen del tetraedro de vértices: A(3, 5, 7), B(1, 0, –1), C(7, –1, 4) y D(11, 4, –6).

7) Encuentra una matriz C que cumpla 2A+3B–C=0, siendo: $A=\begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 4 \\ 6 & 2 \end{bmatrix}$ y $B=\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 5 \\ 6 & 3 \end{bmatrix}$.

8) Determina si existe una matriz X tal que A·X=B, con $A=\begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 5 & 1 & 3 \end{bmatrix}$ y $B=\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$.

9) Encuentra una matriz X que verifique: AX+B=C, siendo: A=$\begin{bmatrix}1&0&0\\1&2&0\\1&2&4\end{bmatrix}$ y B=$\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$ y C=$\begin{bmatrix}3&0&0\\2&5&2\\0&1&3\end{bmatrix}$.

10) Dadas la matrices A=$\begin{bmatrix}1&0\\-1&1\end{bmatrix}$, B=$\begin{bmatrix}1&0&1\\0&1&0\\0&-1&1\end{bmatrix}$ y C=$\begin{bmatrix}3&1&2\\0&1&0\end{bmatrix}$, estudia la existencia de una matriz X que verifique la igualdad indicada en cada uno de los siguientes casos, hallando la matriz X cuando la respuesta sea afirmativa: a) AXB=C, b) BXA=C, c) XB=AC, d) BX=AC.

11) Utilizando el método de la matriz inversa, resuelve los siguientes sistemas de ecuaciones lineales: a) $\left.\begin{array}{l}x+y=2\\2x-2y=-4\end{array}\right\}$ b) $\left.\begin{array}{l}2x+y=1\\x-y=2\end{array}\right\}$.

12) Estudia la compatibilidad de los siguientes sistemas y resuélvelos cuando sea posible:

a) $\left.\begin{array}{l}x+y-3z=0\\2x+6y+2z=0\\x+13y+21z=2\end{array}\right\}$ b) $\left.\begin{array}{l}2x-3y+z=1\\-x+2y+z=2\\3x-4y+z=4\end{array}\right\}$ c) $\left.\begin{array}{l}x+y+z=2\\2x-y+z=-1\\3x+2y+2z=5\end{array}\right\}$ d) $\left.\begin{array}{l}x+2y-z=3\\2x-y+3z=-1\\x+y-z=2\end{array}\right\}$

13) Se quiere realizar el reparto de beneficios de una empresa valorando el tipo de trabajo realizado por cada uno de los tres socios. Se acuerda que el primero reciba 200 euros más que el segundo. Éste a su vez recibirá 300 euros más que el tercero. ¿Cómo hacer el reparto si los beneficios ascienden a 3000 euros?.

14) En una traslación de coordenadas (1, –2), el punto B(–3, 2), ¿en qué punto se transforma?

15) Dibuja el segmento AB con A(2, 4), B(4, 1) y calcula las coordenadas del segmento simétrico al aplicarle una simetría respecto al: a) eje OX; b) eje OY; c) origen de coordenadas.

16) Calcula las coordenadas de los simétricos de los puntos A(2, 4), B(–2, 3), C(1, 5), D(–1, –3), E(–2,–3) a) respecto del eje de abcisas; b) respecto del eje de ordenadas; c) respecto del origen.

17) En una simetría respecto al eje de ordenadas, el punto A(1, 2), ¿en qué punto se transforma?

18) En una simetría respecto al eje de abcisas, el punto A(1, 2), ¿en qué punto se transforma?

19) En el cuadrado de vértices ABCD conocemos los vértices A(1, 3), B(2, 5). Calcula los otros dos vértices. ¿Cuántas soluciones hay?

20) Calcula el área y los ángulos del triángulo de vértices A(2, 1), B(0, 3) y C(4, 3).

21) Halla la ecuación de una recta s, que pasa por el punto P(2, 3) y es perpendicular a la recta de ecuación y=0.5x+3. ¿Qué relación existe entre las pendientes de las dos rectas?

22) Calcula el área y el perímetro del triángulo ABC sabiendo que A(2, 2), B(5, 1) y C(1, 4).

23) Calcula la distancia del punto M(3, 4) a la recta que corta a los ejes coordenados en los puntos A(1,0) y B(0, 5).

24) Halla la ecuación del rayo reflejado del 2x+3y–5=0 sobre la recta y–2x=0.

25) Resuelve los siguientes sistemas de inecuaciones :

1) $\left.\begin{array}{l} x+2y-1\geq 0 \\ 2x+y\leq 0 \end{array}\right\}$ 2) $\left.\begin{array}{l} x+y\geq 2 \\ x-y\geq 3 \end{array}\right\}$ 3) $\left.\begin{array}{l} 2x-3y\leq 4 \\ 3x+2y\geq 2 \end{array}\right\}$ 4) $\left.\begin{array}{l} x+3y\leq 1 \\ 2x+6y\geq 2 \end{array}\right\}$

5) $\left.\begin{array}{l} 2x-y\geq 3 \\ 2x-y\geq 4 \end{array}\right\}$ 6) $\left.\begin{array}{l} x\geq 0 \\ 2x\geq y \\ x\leq y/3 \end{array}\right\}$ 7) $\left.\begin{array}{l} 3x+y\geq 0 \\ 2x-y\leq 0 \\ x\geq 2 \end{array}\right\}$ 8) $\left.\begin{array}{l} x+y+1\geq 0 \\ x-y+1\geq 2 \\ x\geq 0 \\ y\geq 0 \end{array}\right\}$

26) El departamento de policía de una ciudad dispone de 60 coches patrulla y 140 agentes para ocuparlos. Existen dos tipos de servicio : el de vigilancia intensiva en zonas de alto riesgo, y el de vigilancia rutinaria y ayuda al ciudadano. Los coches destinados al primer tipo de servicio son ocupados por 3 agentes ; los del segundo por 2 agentes. ¿Puede montarse un servicio de 30 coches de vigilancia intensiva y 30 coches de vigilancia normal ?. Expresa gráficamente las posibles distribuciones de agentes y coches.

27) Una fábrica produce bicicletas y motocicletas. En la planta de montaje se tarda media hora en montar una bicicleta y tres cuartos de hora en una motocicleta. En la planta de acabado se invierte un tiempo de media hora en cada caso. En ambas plantas se trabaja 40 horas a la semana, pero se dispone de un tiempo –variable e impredecible– para poner el sistema en funcionamiento y para dejar la maquinaria en condiciones al acabar la jornada de trabajo. Por otra parte, por razones de mercado, el número de bicicletas no debe ser superior al número de motocicletas. Resuelve gráficamente el sistema de inecuaciones que se puede plantear a partir de los datos del enunciado. ¿Se pueden producir semanalmente 20 bicicletas y 30 motocicletas ?. ¿Y 25 bicicletas y 30 motocicletas ?. ¿Y 10 bicicletas y 20 motocicletas ?.

28) Una dieta alimenticia debe contener al menos 400 unidades de vitaminas, 500 unidades de minerales y 1400 calorías. El alimento A contiene, por kg, 200 unidades de vitaminas, 100 unidades de minerales y 400 calorías. El alimento B, también por kg y respectivamente, 100, 200 y 400. Cada kg del alimento A cuesta 5 euros y cada kg de B 3 euros. ¿Qué composición puede tener la dieta ?.

29) Una fábrica paga a sus representantes 10 cents por artículo vendido más una cantidad fija de 50000 cents. Otra fábrica de la competencia paga 15 cents por artículo y 30000 cents fijos. ¿Cuántos artículos debe vender el representante de la competencia para ganar más dinero que el primero?.

30) En un curso hay 120 chicas y 156 chicos. El centro subvenciona con 180 euros cada equipo de baloncesto, formado por 5 chicos y 8 animadoras, y con 200 euros cada equipo de voleibol, formado por 6 chicas y 6 animadores. ¿Cuántos equipos de cada deporte conviene formar para conseguir la máxima subvención posible ?.

31) Un inversor dispone de 100000 euros. La rentabilidad de los bonos A es del 12% y desgravan, además un 15% en la Declaración de Hacienda. Los bonos B tienen una rentabilidad del 15%, pero no desgravan. Por cada euro invertido en bonos A es preciso invertir dos en bonos B. ¿Cuánto dinero se debe colocar en cada tipo de bonos para que el rendimiento sea máximo ?.

32) Un inversionista dispone de 20000 euros. Puede invertir en bonos del tipo A, que dan un rendimiento del 10 por 100, y en bonos del tipo B, cuyo rendimiento es del 15 por 100. Existen unos topes legales que impiden invertir más de 8000 euros en bonos del tipo B, pero sucede lo contrario con los del tipo A, en los cuales la inversión mínima es de 5000 euros. Por otra parte, el inversionista desea colocar en bonos del tipo A tanto dinero, al menos, como en bonos del tipo B. ¿Cuánto debe invertir en bonos de cada tipo para que el rendimiento obtenido sea máximo ?.

33) En una empresa se producen dos tipos de artículos, A y B, en cuya elaboración intervienen tres departamentos : cortado, montaje y embalado. Cada departamento trabaja ocho horas diarias, y mientras el producto A requiere sólo una hora de montaje y media de embalado, el producto B requiere 2 horas de cortado y una de embalado. El beneficio que se obtiene por cada unidad de A es de 4 euros, y por cada unidad de B 3,50 euros. ¿Cómo debe distribuirse la producción diaria para maximizar el beneficio ?.

34) Un productor de películas de vídeo lanza al mercado el film "El río" de Jean Renoir. Distribuye las copias en exclusiva al establecimiento Videolux, que percibe una comisión de 10 euros por copia adquirida para la venta al público, y a la cadena de grandes almacenes Baligo, que le exige 15 euros por copia. Por razones comerciales está obligado a vender a la cadena al menos la tercera parte de su producción, mientras que Videolux, debido a limitaciones de almacenaje, puede adquirir como máximo 2000 copias. El productor edita 10000 copias de la película que desea colocar de forma inmediata. ¿Cómo debe hacerlo para que los costes por comisiones sean mínimos ?.

35) Se planea editar una nueva revista de viajes y gastronomía con un total de 150 páginas por número. Se llega a la decisión de no destinar a publicidad más de 40 páginas. Cada artículo de viajes se paga a 100 euros la página, y cada artículo de gastronomía a 60 euros la página. Por otro lado, se cobran 250 euros por página de publicidad. El número de páginas dedicadas a viajes debe ser, al menos, igual al de páginas dedicadas a gastronomía. ¿Cuál debe ser el número de páginas dedicadas a cada sección, y cuál a publicidad, para que el coste sea mínimo, supuesto que los costes de edición son los mismos en cualquier caso ?.

MATRICES, SISTEMAS Y PROGRAMACIÓN LINEAL CON LA FX–9860G

Podemos utilizar la FX–9860G SD para resolver sistemas de ecuaciones lineales. Veamos un ejemplo.

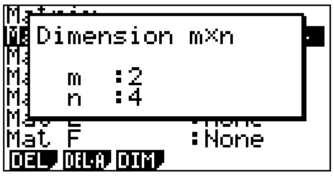
1. DOS ECUACIONES Y TRES INCÓGNITAS

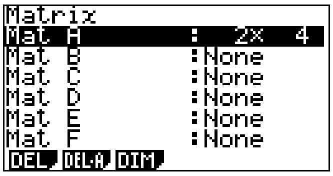
Resuelve el sistema $\left.\begin{array}{l} x+y+z=3 \\ 2x+y+4z=8 \end{array}\right\}$

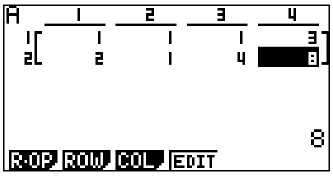
Solución:

Empezamos por escribir el sistema en forma matricial de la siguiente manera: $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 4 & 8 \end{pmatrix}$

Abrimos el Editor RUN y resolvemos esta matriz. Introducimos en primer lugar la dimensión de la matriz y entramos los elementos de la matriz:





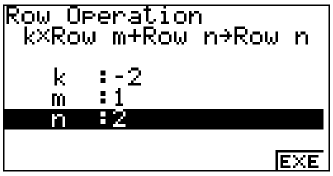


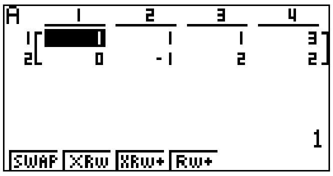
Podemos reducir la matriz del sistema mediante operaciones por filas. Mostramos a continuación cómo hacerlo con la calculadora FX–9860G SD.

2. Primero multiplicamos la fila 1 por –2 y sumamos el resultado a la fila 2. Sustituimos la fila 2 por lo obtenido.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 4 & 8 \end{pmatrix} \xrightarrow{-2r_1+r_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

En la calculadora introducimos la información mediante xRw+ para obtener la matriz resultante:

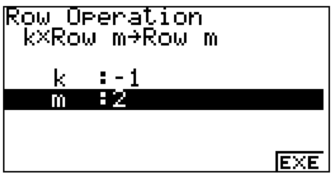


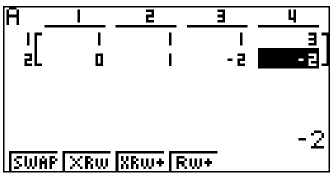


2. El siguiente paso consiste en multiplicar por –1 la fila 2 y sustituir el resultado en la fila 2:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{-r_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -2 & -2 \end{pmatrix}$$

Para hacer esto introducimos la información en la calculadora mediante xRw obteniendo la siguiente matriz:

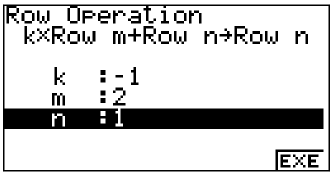


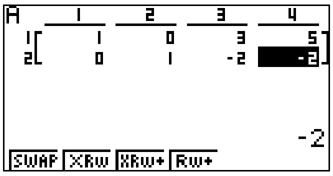


3. A continuación, multiplicamos por –1 la fila 2 y añadimos el resultado a la fila 1:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -2 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{-r_2+r_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & -2 & -2 \end{pmatrix}$$

Para ello introducimos la función xRw+ to para obtener la matriz final:



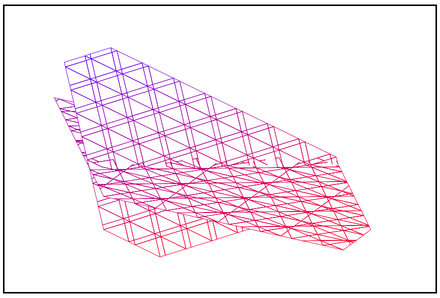


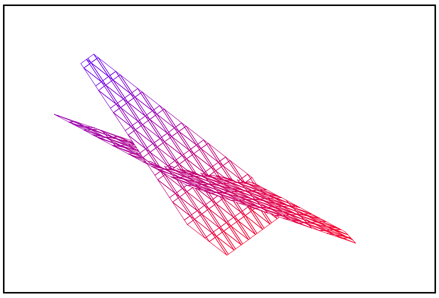
La matriz resultante $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & -2 & -2 \end{pmatrix}$ corresponde al sistema $\left.\begin{matrix} x+3z=5 \\ y-2z=-2 \end{matrix}\right\}$ o, equivalentemente, $\left.\begin{matrix} x=-3z+5 \\ y=2z-2 \end{matrix}\right\}$

El sistema tiene infintas soluciones (-3*z*+5,2*z*-2,*z*) donde *z* es un parámetro y puede tomar cualquier valor real. La representación gráfica del sistema de ecuaciones $\left.\begin{matrix} x+y+z=3 \\ 2x+y+4z=8 \end{matrix}\right\}$ está formada por dos planos en el espacio tridimensional. Para un sistema de dos ecuaciones con tres variables, una solución existe si los dos planos se cortan en una recta. En este ejemplo, el conjunto de soluciones está formado por los puntos de la recta r de ecuación vectorial

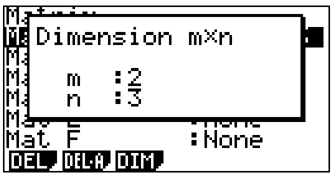
$$(-3z+5,2z-2,z) = (5,-2,0) + z(-3,2,1)$$

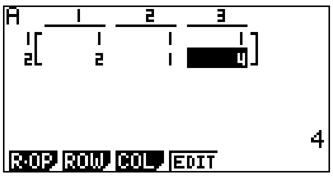
La intersección de los dos planos se muestra a continuación:

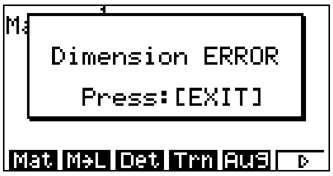




Nota: El sistema anterior tiene dos ecuaciones y tres incógnitas. La calculadora puede resolver tres incógnitas solamente si hay tres ecuaciones. Por tanto, no podemos resolver el sistema usando la calculadora directamente. Por otra parte, la matriz de coeficientes $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$, no es cuadrada y, por tanto, no tiene inversa. Un error de dimensión ocurre cuando intentamos obtener la inversa de la matriz en el Editor RUN:







Por tanto, el sistema hay que resolverlo transformando la matriz ampliada $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 4 & 8 \end{pmatrix}$ mediante operaciones por filas.

2. ESCULTURAS DE BRONCE

Una compañía produce tres tipos diferentes de esculturas de bronce. El departamento de fundición tiene disponible un máximo de 140 horas de trabajo por semana, y el departamento de acabado tiene un máximo de 180 horas de trabajo semanales. Una escultura del tipo 1 requiere 30 horas de fundición y 10 horas de acabado. Una escultura del tipo 2 requiere 10 horas de fundición y 10 horas de acabado. Una escultura del tipo 3 requiere 10 horas de fundición y 30 horas de acabado. Si la planta está operativa al máximo de capacidad, ¿cuántas esculturas de cada tipo puede producir cada semana?

Solución:

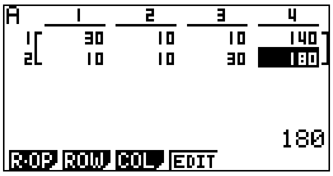
Sea x = número de esculturas del tipo 1 producidas cada semana
y = número de esculturas del tipo 2 producidas cada semana
z = número de esculturas del tipo 3 producidas cada semana

Podemos plantear el siguiente sistema de ecuaciones: $\left.\begin{array}{r} 30x+10y+10z=140 \\ 10x+10y+30z=180 \end{array}\right\}$

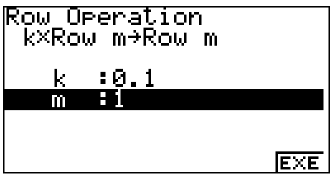
El sistema puede escribirse en forma matricial de la siguiente manera:

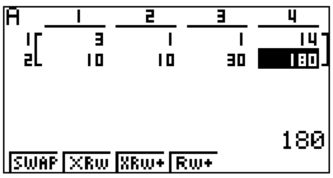
$$\begin{pmatrix} 30 & 10 & 10 & 140 \\ 10 & 10 & 30 & 180 \end{pmatrix}$$

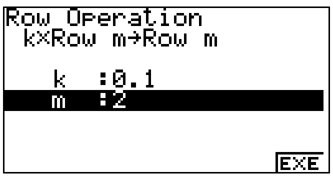
Introducimos la matriz en el Editor RUN:

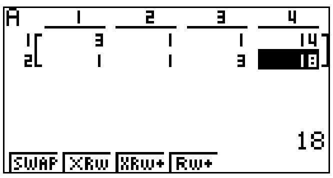


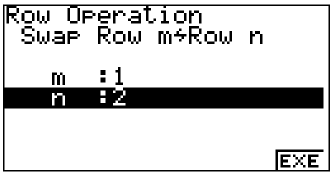
La siguiente figura muestra las operaciones por filas necesarias para transformar la matriz:

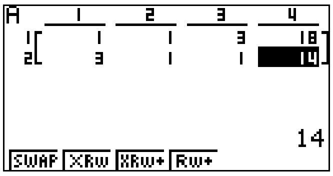


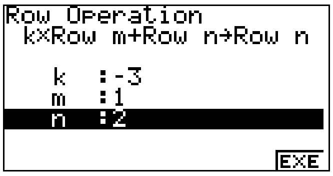


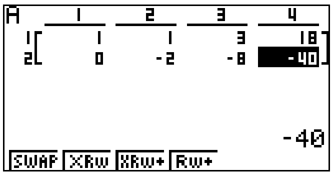


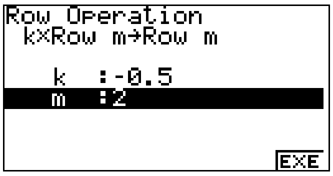


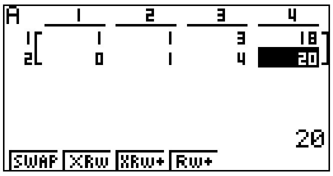


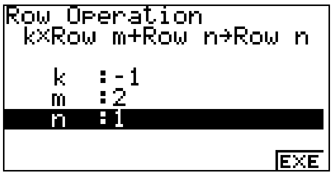


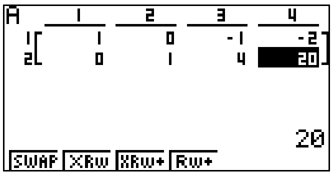












Traduciendo la matriz final obtenida a ecuaciones, obtenemos: $\left.\begin{array}{l} x - z = -2 \\ y + 4z = 20 \end{array}\right\}$ o, equivalentemente, $\left.\begin{array}{l} x = z - 2 \\ y = 20 - 4z \end{array}\right\}$

Las infinitas soluciones del sistema son (z-2,-4*z* + 20, *z*). Como las variables x, y, z representan números de esculturas, no pueden ser negativas. Por tanto z-2 $\geq$ 0 or $z \geq 2$. También 20–4$z \geq 0$ implica $z \leq 5$. Por tanto, los únicos posibles valores de z son 2, 3, 4 y 5.

Tenemos la siguiente tabla que muestra las diversas posibilidades:

Esculturas tipo 1	Esculturas tipo 2	Esculturas tipo 3
0	12	2
1	8	3
2	4	4
3	0	5

3. PROGRAMACIÓN LINEAL

Una fábrica de vidrio reciclado va a producir dos tipos de copas: unas sencillas que vende a 4,50 euros y otras talladas a 6 euros. Las máquinas condicionan la producción de modo que no pueden salir al día más de 400 sencillas, ni más de 300 talladas. Por razones de stock, no se pueden fabricar más de 500 en total. Suponiendo que es vendida toda la producción:

a) ¿Cuántas de cada clase convendrá producir para obtener máximos ingresos?

b) ¿A cuánto ascenderán dichos ingresos máximos?

Solución:

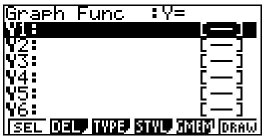
Sea x = número de copas sencillas.
y = número de copas talladas.

Dichas variables están sometidas a unas restricciones que podemos expresar en forma de sistema de inecuaciones lineales de la siguiente manera:

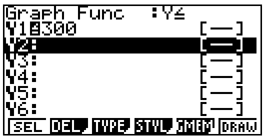
$$\left.\begin{array}{l} 0 \le y \le 300 \\ x + y \le 500 \\ 0 \le x \le 400 \end{array}\right\}$$

El conjunto de puntos del plano que son soluciones de este sistema de inecuaciones lineales se llama **región factible** o **recinto de validez**. Cualquiera de los puntos de dicho recinto puede ser solución del problema.

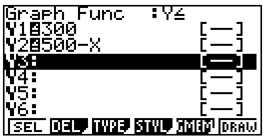
Para representar el recinto de validez con la FX–9860G SD, seleccionamos con los cursores el menú GRAPH y pulsamos [EXE]. Aparece la pantalla con la lista de funciones. Borramos todas las que haya en el editor colocando el cursor sobre cada una de las funciones que queramos eliminar, pulsando [F2] DEL [F1] YES, hasta quedar de la siguiente forma:



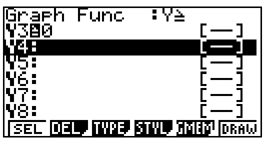
Introducimos la primera inecuación y≤300, pulsando [F3] TYPE [F6] ▷ [F4] Y≤ 300 [EXE]. Automáticamente se selecciona la siguiente función para introducir la nueva inecuación x+y≤500, que la entraremos como y≤500–x.



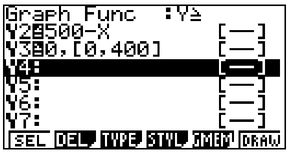
Para ello pulsamos 500 [–] [X,σ,T] [EXE], obteniendo la siguiente pantalla:



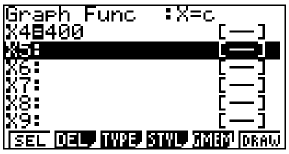
quedando seleccionada automáticamente la siguiente inecuación y≥0. Al ser una inecuación de otra forma que las anteriores, hay que modificar el TYPE. Para ello, pulsamos [F3] TYPE [F6] ▷ [F3] Y≥ 0 [EXE], obteniendo la siguiente pantalla:



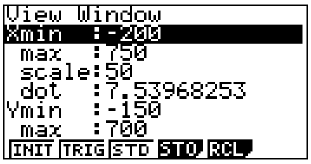
¿Cómo hacer para introducir las inecuaciones x≤400 x≥0? Podemos diseñar una estrategia consistente en acotar la última función escrita en el intervalo [0, 400], para lo cual, volvemos con los cursores sobre la función anterior: [▲] [▶] [▶] [,] [SHIFT] [+] [0 [,] 400 [SHIFT] [–]] [EXE]. Con ello obtenemos:

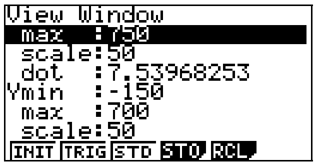


Además, si queremos que la recta x=400 se visualice, pulsamos: [F3] TYPE [F6] ▷ [F4] X=c 400 [EXE], con lo que resulta:

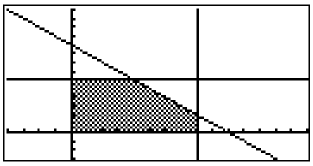


Ajustamos los parámetros de escala para la visualización de la ventana, pulsando [SHIFT] [F3] V–Window. Unos valores adecuados para este problema pueden ser los siguientes:



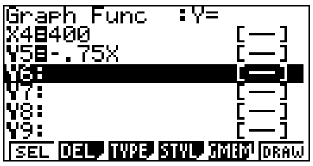


Representamos gráficamente el conjunto de restricciones, pulsando [EXE] [F6] DRAW y obtenemos:

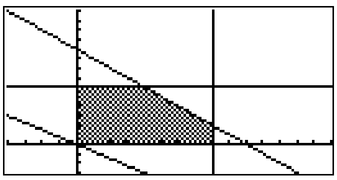


Los ingresos que se obtendrán por la venta de las copas vienen dados por la función: I(x, y)=4,50x+6y. Esta es la función que se quiere **maximizar** y que se llama **función objetivo**.

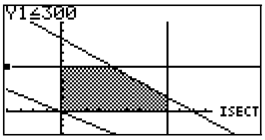
Para maximizar la función objetivo, representaremos gráficamente la función de ingresos nulos: I = 0 → 4,50 x + 6 y = 0 → $y = -\frac{4,50}{6}x$ o bien: y = –0,75 x. Para dibujar la gráfica de esta función, primero cambiamos el tipo a Y=. Para ello pulsamos [EXIT] [F3] TYPE [F1] Y= [(–)] 0 [.] 75 [x,σ,T] [EXE], obteniendo la pantalla:

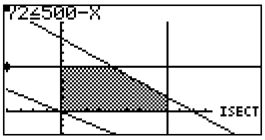


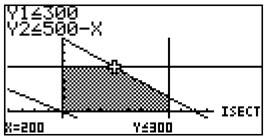
A continuación pulsamos [F6] DRAW para que se dibuje la gráfica, obteniendo la siguiente pantalla:



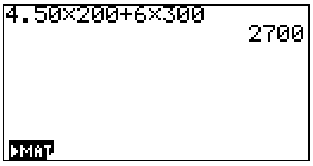
Todas las paralelas a la recta de ingreso nulo que pasan por el recinto de validez se llaman líneas de nivel. De todas las líneas de nivel, la que tiene mayor ordenada en el origen es la que pasa por el vértice del recinto que es punto de intersección de las rectas y=30, y=500–x. Por tanto, la solución viene dada por las coordenadas de dicho punto. Para obtenerlas, pulsamos [F5] G–SOLVE [F5] ICST. Cuando el cuadradillo esté sobre la recta Y≤300, la validamos, pulsando [EXE]. De la misma forma, cuando el cuadradillo esté sobre la recta Y≤500–X, la validamos, pulsando [EXE]. De esta forma aparece una pantalla donde se señala el punto de intersección y se indican sus coordenadas, X=200 e Y=300.







Por tanto, se deberán fabricar X=200 copas sencillas e Y=300 copas talladas para obtener el máximo beneficio. En este caso, el máximo beneficio se obtiene pulsando [EXIT] [MENU] [▲] [RUN] para elegir el menú RUN y tecleando 4 [.] 50 [x] 200 [+] 6 [x] 300 [EXE]. Obtenemos la pantalla:



Lo que indica que el máximo beneficio es de 2700 euros y se obtiene al vender 200 copas pequeñas y 300 copas talladas.

4. INVERSIÓN

Una persona decide invertir su dinero de dos formas distintas en un banco: una cantidad a plazo fijo, con un rendimiento del 5,25%, y otra en bonos, cuyo rendimiento es del 9%. Existen unos topes legales que impiden invertir más de 80000 euros en bonos, aunque le obligan en el banco a una inversión mínima a plazo fijo de 50000 euros. Si dispone de 200000 euros, deseando colocar a plazo fijo, al menos, tanto dinero como en bonos, ¿cuánto debe invertir en cada modalidad para que el rendimiento obtenido sea el máximo?