EXAMEN DE SELECTIVIDAD JULIO 2014. MATEMÁTICAS II

OPCIÓN A

Problema A.1. Obtener **razonadamente**, **escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado**:

a) **El valor del determinante de la matriz** $S=\begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 5 \end{pmatrix}$ **, (2 *puntos*) y la matriz *S* $^{-1}$, que es la matriz inversa de la matriz S. (2 *puntos*). Indicar la relación entre que el valor del determinante de una matriz *S* sea o no nulo y la propiedad de que esta matriz admita matriz inversa *S* $^{-1}$. (1 *punto*).**

$$S=\begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 5 \end{pmatrix} \rightarrow |S| = (10+3+2)-(-1+6-10)=15+5=20$$

$$S^{-1}=\frac{1}{|S|}Adj^{t}=\frac{1}{20}\begin{pmatrix} 2 & 13 & -3 \\ -6 & 11 & -1 \\ 4 & -4 & 4 \end{pmatrix}$$

$$S_{11}=\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 5 \end{vmatrix}=5-3=2 \qquad S_{21}=-\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 3 & 5 \end{vmatrix}=13 \qquad S_{31}=\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}=-3$$

$$S_{12}=-\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 5 \end{vmatrix}=-6 \qquad S_{22}=\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 5 \end{vmatrix}=11 \qquad S_{32}=-\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}=-1$$

$$S_{13}=\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix}=4 \qquad S_{23}=-\begin{vmatrix} 2 & -2 \\ -1 & 3 \end{vmatrix}=-4 \qquad S_{33}=\begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}=4$$

$$\text{Si } |S| = 20 \neq 0 \rightarrow \exists S^{-1}$$

CON WIRIS

Problema A.1

Apartado a) El valor del determinante de la matriz $S=\begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 5 \end{pmatrix}$, (2 puntos) y la matriz S -1 , que es la matriz inversa de la matriz S. (2 puntos).

Indicar la relación entre que el valor del determinante de una matriz S sea o no nulo y la propiedad de que esta matriz admita matriz inversa S -1 . (1 punto).

$$S=\begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 5 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 5 \end{pmatrix}$$

$$|S| \rightarrow 20$$

$$S^{-1} \rightarrow \begin{pmatrix} \frac{1}{10} & \frac{13}{20} & -\frac{3}{20} \\ -\frac{3}{10} & \frac{11}{20} & -\frac{1}{20} \\ \frac{1}{5} & -\frac{1}{5} & \frac{1}{5} \end{pmatrix}$$

Si $|S|=20\neq0 \Rightarrow$ Existe S^{-1}

b) El determinante de la matriz $(4(T^2))^{-1}$, sabiendo que *T* es una matriz cuadrada de 3 filas y que 20 es el valor del determinante de dicha matriz *T*. (3 *puntos*).

$$\left|\left(4\left(T^2\right)\right)^{-1}\right| = \left(\text{dado que } |T|^{-1} = \frac{1}{|T|}\right) \cdot \frac{1}{\left|4\left(T^2\right)\right|} = (\text{por ser matriz 3x3}) \frac{1}{4^3\left|\left(T^2\right)\right|} == \frac{1}{64 \cdot \left|T^2\right|} = \frac{1}{64 \cdot 20 \cdot 20} = \frac{1}{25600}$$

CON WIRIS

b)

$$T = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

$$|T| \rightarrow 20$$

$$\left|\left(4\left(T^2\right)\right)^{-1}\right| \rightarrow \frac{1}{25600}$$

c) La solución *a* de la ecuación $\begin{pmatrix} a & a^2-1 & -3 \\ a+1 & 2 & a^2+4 \\ -3 & 4a & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & a+1 & -3 \\ a^2-1 & 2 & 4a \\ -3 & a^2+4 & 1 \end{pmatrix}$ **(2 *puntos*).**

Para averiguar el valor de a que cumple la ecuación anteriormente descrita, cada uno de los términos de las matrices deben cumplir la igualdad, y nos queda:

$$\begin{matrix} a^2 - 1 = a + 1 \\ a^2 + 4 = 4a \end{matrix} \rightarrow \begin{matrix} a^2 - a - 2 = 0 \\ a^2 - 4a + 4 = 0 \end{matrix}$$

$$a^2 - a - 2 = 0 \rightarrow a = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = \frac{1 \pm 3}{2} = \begin{matrix} \dfrac{1+3}{2} = 2 \\ \dfrac{1 \pm 3}{2} = -1 \end{matrix}$$

$$a^2 - 4a + 4 = 0 \rightarrow a = \frac{4 \pm \sqrt{16-16}}{2} = \frac{4}{2} = 2$$

$$\text{Y por tanto la solución a de la ecuación es a} = 1$$

CON WIRIS

c) $\begin{pmatrix} a & a^2-1 & -3 \\ a+1 & 2 & a^2+4 \\ -3 & 4a & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & a+1 & -3 \\ a^2-1 & 2 & 4a \\ -3 & a^2+4 & 1 \end{pmatrix}$

$A = \begin{pmatrix} a & a^2-1 & -3 \\ a+1 & 2 & a^2+4 \\ -3 & 4a & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a & a+1 & -3 \\ a^2-1 & 2 & 4a \\ -3 & a^2+4 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & a^2-a-2 & 0 \\ -a^2+a+2 & 0 & a^2-4\cdot a+4 \\ 0 & -a^2+4\cdot a-4 & 0 \end{pmatrix}$

$B=[0,0,0] \rightarrow [0,0,0]$

$x = \text{resolver}(A,B) \rightarrow \left\{ \left[\begin{pmatrix} \frac{a-2}{a+1} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, [0,0,0] \right] \right\}$

$\text{resolver}(a^2-a-2=0) \rightarrow \{\{a=-1\},\{a=2\}\}$

$\text{resolver}(a^2-4a+4=0) \rightarrow \{\{a=2\}\}$

a= 2 es la solución a la ecuación dada puesto que cumple la igualdad dada

$a=-1$ no cumple la igualdad.

Problema A.2. Se dan los puntos $A = (1, 5, 7)$ y $B = (3, -1, -1)$.

Se pide obtener **razonadamente**, **escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado**:

a) **Las ecuaciones de los planos π_1 y π_2 que son perpendiculares a la recta *r* que pasa por los puntos *A* y *B*, sabiendo que el plano π_1 pasa por el punto *A* y el plano π_2 pasa por el punto medio del segmento cuyos extremos son los puntos *A* y *B*. (4 *puntos distribuidos en* 2 *puntos por cada plano*).**

Primero construimos la recta r, a partir de los puntos A y B, para ello necesitamos un vector director.

$$\vec{d_r} = \vec{AB} = B - A = (3,-1,-1) - (1,5,7) = (2,-6,-8) \rightarrow (1,-3,-4)$$
$$A = (1,5,7)$$
$$r: \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = 5 - 3\lambda \\ z = 7 - 4\lambda \end{cases}$$

Como π_1 es perpendicular a r, entonces $\vec{d_r} = n_{\pi_1}$

$$\pi_1 : \mathrm{x - 3y - 4z + d = 0}$$

Nos falta averiguar el valor del término independiente, y como $A \in \pi_1$, entonces cumple la ecuación del plano que nos solicitan.

$$1 - 3 \cdot 5 - 4 \cdot 7 + D = 0 \rightarrow 1 - 15 - 28 + D = 0 \rightarrow D = 42$$

$$\pi_1 : \mathrm{x - 3y - 4z + 42 = 0}$$

$$PM_{AB} = \left(\frac{1+3}{2}, \frac{5-1}{2}, \frac{7-1}{2} \right) = (2,2,3)$$

Como π_2 es perpendicular a r, entonces $\vec{d_r} = n_{\pi_2}$

$$\pi_2 : \mathrm{x - 3y - 4z + d = 0}$$

Nos falta averiguar el valor del término independiente, y como $PM_{AB} \in \pi_2$, entonces cumple la ecuación del plano que nos solicitan.

$$2 - 3 \cdot 2 - 4 \cdot 3 + D = 0 \rightarrow 2 - 6 - 12 + D = 0 \rightarrow D = 16$$

$$\pi_2 : \mathrm{x - 3y - 4z + 16 = 0}$$

CON WIRIS

Problema A.2

Apartado a)

a1) La ecuación del plano π_1 que pasa por el punto A y es perpedicular a la recta r.

A=[1,5,7] → [1,5,7]

B=[3,−1,−1] → [3,−1,−1]

AB=B−A → [2,−6,−8]

dr=AB → [2,−6,−8]

nπ=dr → [2,−6,−8]

Pr=[1,0,2] → [1,0,2]

plano(punto(1,5,7),nπ) → $x-3\cdot y-4\cdot z+42=0$

a2) La ecuación del plano π_2 que pasa por el punto medio de A y B y es perpedicular a la recta r.

PMAB=punto_medio(punto(1,5,7),punto(3,−1,−1)) → (2,2,3)

plano(PMAB,nπ) → $x-3\cdot y-4\cdot z+16=0$

b) La distancia entre los planos π_1 y π_2. (2 *puntos*).

Estamos ante la distancia de dos planos paralelos.

$$d(\pi_1,\pi_2)=\frac{|D_2-D_1|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}=\frac{|16-42|}{\sqrt{1^2+3^2+4^2}}=\frac{26}{\sqrt{26}}\cdot\frac{\sqrt{26}}{\sqrt{26}}=\frac{26\cdot\sqrt{26}}{26}=\sqrt{26}\text{ u}$$

CON WIRIS

Apartado b) La distanica entre los planos π_1 y π_2

$\pi1=\text{plano}(x-3\cdot y-4\cdot z+42=0) \rightarrow x-3\cdot y-4\cdot z+42=0$

$\pi2=\text{plano}(x-3\cdot y-4\cdot z+16=0) \rightarrow x-3\cdot y-4\cdot z+16=0$

$\text{distancia}(\pi1,\pi2) \rightarrow \sqrt{26}$

c) Las ecuaciones de la recta *r* que pasa por los puntos *A* y *B*, (2 *puntos*), y los puntos de la recta *r* que están a distancia 3 del punto *C* = (1, 0, 1) . (2 *puntos*).

$$\vec{d}_r = \vec{AB} = B - A = (3,-1,-1) - (1,5,7) = (2,-6,-8) \to (1,-3,-4)$$

$$A = (1,5,7)$$

$$r: \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = 5 - 3\lambda \\ z = 7 - 4\lambda \end{cases}$$

$$X \in r \,/\, d(X,C) = 3$$

$$\sqrt{(1-1-\lambda)^2 + (3\lambda - 5)^2 + (1 - 7 + 4\lambda)^2} = 3$$

$$\sqrt{(-\lambda)^2 + (3\lambda - 5)^2 + (4\lambda - 6)^2} = 3$$

$$\lambda^2 + 9\lambda^2 - 30\lambda + 25 + 16\lambda^2 - 48\lambda + 36 = 9$$

$$26\lambda^2 - 78\lambda + 52 = 0$$

$$13\lambda^2 - 39\lambda + 26 = 0$$

$$\lambda = \frac{-(-39) \pm \sqrt{(-39)^2 - 4 \cdot 13 \cdot 26}}{2 \cdot 13} = \frac{39 \pm \sqrt{1521 - 1352}}{26} \, \frac{39 \pm \sqrt{169}}{26} = \frac{39 \pm 13}{26} = \!\!\to \begin{matrix} \dfrac{39+13}{26} = 2 \\ \dfrac{39-13}{26} = 1 \end{matrix}$$

Por tanto los puntos que cumplen la igualdad, y que nos piden son:

$$X_1 = (1 + 2, 5 - 3 \cdot 2, 7 - 4 \cdot 2) = (3,-1,-1)$$

$$X_2 = (1 + 1, 5 - 3 \cdot 1, 7 - 4 \cdot 1) = (2,2,3)$$

CON WIRIS

Problema A.3. Sea f la función real definida por $f(x) = xe^x - 3x$.

Se pide la obtención **razonada, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado**, de:

a) Los puntos de corte de la curva $y = f(x)$ con el eje X. (2 *puntos*).

CORTES CON EL EJE X (y = 0)

$$\mathrm{x} \cdot \mathrm{e}^{x} - 3x = 0 \rightarrow x \cdot \left(e^{3} - 3\right) = 0 \rightarrow \begin{matrix} x = 0 \\ e^{x} - 3 = 0 \end{matrix} \rightarrow e^{x} = 3 \rightarrow x = \ln 3$$

Puntos de corte $(0,0)$ $(\ln 3,0)$

CORETES CON EL EJE Y (x = 0)

$$\mathrm{y}(0) = 0 \cdot e^{0} - 3 \cdot 0 = 0$$

Punto de corte $(0,0)$

CON WIRIS

Problema A.3

Apartado a) Puntos de corete Y= $xe^x - 3x$

EJE X (Y=0)

$y(x) = x \cdot e^x - 3x \rightarrow x \mapsto x \cdot e^x - 3 \cdot x$

resolver$(x \cdot \exp(x) - 3 \cdot x = 0) \rightarrow \{\{x=0\},\{x=1.0986\}\}$

puntos de corte con el eje X (0, 0) (1.0986,0)

EJE Y (x=0)

$y(0) \rightarrow 0$

punto de corte con el eje Y (0,0)

b) El punto de inflexión de la curva *y = f (x)* , (2 *puntos*), así como la justificación razonada de que la función *f* es creciente cuando *x* > 2 . (2 *puntos*).

Para hallar el punto de inflexión hay que calcular la segunda derivada e igualar a cero, y comprobar que el punto que anula la segunda derivada es positivo en la tercera derivada.

$$y = x \cdot e^{x} - 3x$$

$$y' = e^{x} + x \cdot e^{x} - 3 = (x+1) \cdot e^{x} - 3$$

$$y'' = \cdot e^{x} + (x+1) \cdot e^{x} = (x+2) \cdot e^{x} \rightarrow (x+2) \cdot e^{x} = 0 \rightarrow \begin{array}{l} x+2=0 \rightarrow x=-2 \\ e^{x} = 0 \text{ No tiene solución} \end{array}$$

$$y''' = e^{x} + (x+2) \cdot e^{x} = (x+3) \cdot e^{x}$$

$$y'''(-2) = (-2+3) \cdot e^{-2} = \frac{1}{e^2} > 0 \rightarrow \text{En x = - 2 hay un punto de inflexión}$$

$$y(-2) = -2 \cdot e^{-2} - 3 \cdot (-2) = 6 - \frac{2}{e^2}$$

$$\text{Punto de inlfexión } = \left(-2, 6 - \frac{2}{e^2} \right)$$

Para justificar que f es creciente cuando $x > 2$, vamos a calcular la primera derivada y calcular $y'(3)$, si el valor resultante es mayor que cera, entonces la función es creciente cuando $x > 2$.

$$y' = (x+1) \cdot e^{x} - 3$$

$$y'(3) = 4 \cdot e^{3} - 3 = 77.342 > 0 \rightarrow \text{Por tanto } f(x) \text{ es creciente cuando } x > 2$$

CON WIRIS

Apartado b)

b1) Puntos de inflexión de y = f(x)

$y(x)=x\cdot\exp(x)-3\cdot x \rightarrow x\mapsto x\cdot e^{x}-3\cdot x$

$y' \rightarrow x\mapsto (x+1)\cdot e^{x}-3$

$y'' \rightarrow x\mapsto (x+2)\cdot e^{x}$

resolver $((x+2)\cdot e^{x}=0) \rightarrow \{\{x=-2\}\}$

$y''' \rightarrow x\mapsto (x+3)\cdot e^{x}$

$y'''(-2) \rightarrow \frac{1}{e^{2}}$

$y(-2) \rightarrow \frac{6\cdot e^{2}-2}{e^{2}}$

punto inflexión $\left(-2, \frac{6\cdot e^{2}-2}{e^{2}}\right) = \left(-2, 6-2e^{-2}\right)$

b2) justifica que f es creciente cuando x>2

$y(x)=x\cdot\exp(x)-3\cdot x \rightarrow x\mapsto x\cdot e^{x}-3\cdot x$

$y' \rightarrow x\mapsto (x+1)\cdot e^{x}-3$

$y'(3) \rightarrow 4\cdot e^{3}-3$

$4.0\cdot e^{3}-3 \rightarrow 77.342$

c) El área limitada por el eje *X* y la curva $y = f(x)$, cuando $0 \le x \le \ln 3$, donde ln significa logaritmo neperiano. (4 *puntos*).

$$\int x \cdot e^x - 3x\, dx = \int x \cdot e^x dx - \int 3x\, dx = (x-1)\cdot e^x - \frac{3x^2}{2}$$

$$u = x \rightarrow du = dx$$
$$dv = e^x dx \rightarrow v = \int e^x dx = e^x$$

$$\int x \cdot e^x dx = x \cdot e^x - \int e^x dx = x \cdot e^x - e^x = (x-1)\cdot e^x$$

$$\int_0^{\ln 3} -\left(x \cdot e^x - 3x\right)dx = (1-x)\cdot e^x + \frac{3x^2}{2}\Bigg|_0^{\ln 3} = \left(\left(1-\ln 3\right)\cdot e^{\ln 3} + \frac{3(\ln 3)^2}{2}\Bigg|\right) - \left(\left(1-0\right)\cdot e^0 - \frac{3\cdot(0)^2}{2}\Bigg|\right) =$$
$$= \frac{3\ln^2 3}{2} - 3\ln 3 + 2 \approx 0{,}51459$$

CON WIRIS

Apartado c)El área limitada por el eje X y la curva y=f(x), cuando 0≤x≤ln3

$f(x) = x\cdot \exp(x) - 3\cdot x \rightarrow x \mapsto x\cdot e^x - 3\cdot x$

dibujar$(x\cdot \exp(x) - 3\cdot x$,{color=azul}) → tablero1

$$-\int_0^{\ln 3} (x\cdot \exp(x) - 3\cdot x) \rightarrow 0.51459$$

OPCIÓN B

Se tiene el sistema de ecuaciones lineales $\begin{cases} (1-\alpha)x+2y+z=4 \\ x+y-2z=-4 \\ x+4y-(\alpha+1)z=-2\alpha \end{cases}$ donde α es un parámetro real.

Obtener razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado:

a) Los valores del parámetro α para los que el sistema es incompatible. (3 *puntos*).

Mediante el teorema de Rouché - Frobenius averiguo la incompatibilidad del sistema de ecuaciones.

$$\text{Si } \operatorname{rg}(\mathrm{A}) = rg\left(A^*\right) = \text{nº de incógnitas} \rightarrow \text{SCD}$$
$$\text{Si } \operatorname{rg}(\mathrm{A}) = rg\left(A^*\right) < \text{nº de incógnitas} \rightarrow \text{SCI}$$
$$\text{Si } \operatorname{rg}(\mathrm{A}) \neq rg\left(A^*\right) \rightarrow SI$$

Para ello necesito construir la matriz de coeficientes y la matriz ampliada.

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 1-\alpha & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 1 & 4 & -\alpha-1 \end{pmatrix}$$
$$A^* = \begin{pmatrix} 1-\alpha & 2 & -1 & 4 \\ 1 & 1 & -2 & -4 \\ 1 & 4 & -\alpha-1 & -2\alpha \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1-\alpha & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 1 & 4 & -\alpha-1 \end{vmatrix} = (-(1-\alpha)(1+\alpha)+4-4)-(1-8(1-\alpha)+2(-\alpha-1)) = \alpha^2-1-6\alpha+9 = \alpha^2-6\alpha++8=0$$

$$\alpha = \frac{6\pm\sqrt{36-32}}{2} = \frac{6\pm 2}{2} = \Rightarrow \begin{matrix} \frac{6+2}{2}=4 \\ \frac{6-2}{2}=2 \end{matrix}$$

1) *Discutimos en función de los valores de* α

$$Si\ \alpha = 4 \ \rightarrow rg(A) = 2,\ rg(A^*) = ?$$

$$A^*_1(4) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 1 & -2 & -4 \\ 4 & -5 & -8 \end{pmatrix} \rightarrow |A^*_1(4)| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 1 & -2 & -4 \\ 4 & -5 & -8 \end{vmatrix} = (36-16-20)-(-32+40-8) = -4 \neq 0$$

$$rg(A) = 2 \neq \ rg(A^*) = 3 \rightarrow Sistema\ Incompatible$$

CON WIRIS

OPCIÓN B

Problema 1 : Se tiene el sistema de ecuaciones lineales $\begin{cases}(1-\alpha)x+2y+z=4\\ x+y-2z=-4\\ x+4y-(\alpha+1)z=-2\alpha\end{cases}$

Apartado a) Los valores del parámtro α para los que el sistema es incompatibe

$$A=\begin{pmatrix}1-\alpha & 2 & 1\\ 1 & 1 & -2\\ 1 & 4 & -(\alpha+1)\end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix}-\alpha+1 & 2 & 1\\ 1 & 1 & -2\\ 1 & 4 & -\alpha-1\end{pmatrix}$$

$$|A| \rightarrow \alpha^2-6\cdot\alpha+8$$

$$\text{resolver}(|A|=0) \rightarrow \{\{\alpha=2\},\{\alpha=4\}\}$$

$$A1=\begin{pmatrix}2 & 1 & 4\\ 1 & -2 & -4\\ 4 & -5 & -8\end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix}2 & 1 & 4\\ 1 & -2 & -4\\ 4 & -5 & -8\end{pmatrix}$$

$$|A1| \rightarrow -4$$

b) Los valores del parámetro α para los que el sistema es compatible y determinado. (3 *puntos*).

Si $\text{rg}(A)=rg(A^*)=$ nº de incógnitas $\rightarrow$ SCD

Si $\alpha \neq 4$ y $\alpha \neq 2 \rightarrow rg(A)=2=rg(A^*)=3=$ nº de incógnitas $\rightarrow$ SCD

c) Todas las soluciones del sistema cuando $\alpha = 2$. (4 *puntos*).

$$\begin{cases} (1-\alpha)x + 2y + z = 4 \\ x + y - 2z = -4 \\ x + 4y - (\alpha+1)z = -2\alpha \end{cases} \rightarrow \alpha = 2 \rightarrow \begin{cases} -x + 2y + z = 4 \\ x + y - 2z = -4 \\ x + 4y - 3z = -4 \end{cases} \text{ aplicando Gauss nos queda :}$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & -2 & -4 \\ 1 & 4 & -3 & -4 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{matrix} F1+F2 \\ F1+F2 \end{matrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 6 & -2 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \text{Eliminamos la fila 3 puesto que } F3 = 2F2$$

Y nos queda :

$$\begin{cases} -x + 2y + z = 4 \\ 3y - z = 0 \end{cases} \rightarrow y = \frac{\beta}{3}, z = \beta, x = 2 \cdot \frac{\beta}{3} + \beta - 4 = \frac{5\beta - 12}{3}$$

$$(x, y, z) = \left(\frac{5\beta - 12}{3}, \frac{\beta}{3}, \beta \right), \beta \in \Re$$

CON WIRIS

Apartado c)Todas las soluciones del sistema cuando α=2

$$\text{resolver}\left(\begin{cases} -x+2y+z=4 \\ x+y-2z=-4 \\ x+4y-3z=-4 \end{cases}\right) \rightarrow \left\{\left\{x=\frac{5}{3}\cdot z-4, y=\frac{1}{3}\cdot z, z=z\right\}\right\}$$

Problema B.2. Se dan las rectas $r:\begin{cases}x-y=0\\ z=10\end{cases}$ y $s:\begin{cases}x+y=8\\ x+y+z=13\end{cases}$

Obtener razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado:

a) Un vector director de cada recta (2 *puntos*) y la posición relativa de las rectas *r* y *s*. (2 *puntos*).

$$r:\begin{cases}x-y=0\\ z=10\end{cases}\rightarrow y=\alpha, x=\alpha, z=10$$

$$r:\begin{cases}x=\alpha\\ y=\alpha\\ z=10\end{cases}\rightarrow \begin{array}{l}\vec{d}_r=(1,1,0)\\ Ar=(0,0,10)\end{array}$$

$$s:\begin{cases}x+y=8\\ x+y+z=13\end{cases}\rightarrow y=\alpha\rightarrow \begin{array}{c}x=8-\alpha\\ z=13-8+\alpha-\alpha=5\end{array}$$

$$s:\begin{cases}x=8-\alpha\\ y=\alpha\\ z=5\end{cases}\rightarrow \begin{array}{l}\vec{d}_r=(-1,1,0)\\ As=(8,0,5)\end{array}$$

$$ArAs=As-Ar=(8,0,-5)$$

Ahora vamos a estudiar la posición relativa mediante sus vectores directores y un punto de cada recta :

$$\mathrm{M}=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}$$

$$M^*=\begin{pmatrix}1 & -1 & 8\\ 1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & -5\end{pmatrix}$$

$$rg(M)=?$$

$$\begin{vmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{vmatrix}=2\rightarrow rg(M)=2$$

$$rg(M^*)=?$$

$$\begin{vmatrix}1 & -1 & 8\\ 1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & -5\end{vmatrix}=(-5+0+0)-(0+0+5)=-5-5=-10\rightarrow rg(M^*)=3$$

$$rg(M)=2\neq rg(M^*)=3\rightarrow \text{las rectas r y s se cruzan}$$

CON WIRIS

Problema B.2 Se dan dos rectas $r:\begin{cases} x-y=0 \\ z=10 \end{cases}$ y $s:\begin{cases} x+y=8 \\ x+y+z=13 \end{cases}$

Apartado a.1)Un vector director de cada recta (2puntos)

$\text{resolver}\begin{cases} x-y=0 \\ z=10 \end{cases} \rightarrow \{\{x=y, y=y, z=10\}\}$

$dr=(1,1,0) \rightarrow 1,1,0$

$Ar=(0,0,10) \rightarrow 0,0,10$

$\text{resolver}\begin{cases} x+y=8 \\ x+y+z=13 \end{cases} \rightarrow \{\{x=-y+8, y=y, z=5\}\}$

$ds=(-1,1,0) \rightarrow -1,1,0$

$As=(8,0,5) \rightarrow 8,0,5$

Apartado a.2)Y la posición relativa de las dos rectas(2puntos)

$$M=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$Ma=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 8 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 8 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \end{pmatrix}$$

$\text{rango}(M) \rightarrow 2$

$\text{rango}(Ma) \rightarrow 3$

Por lo tanto como $\text{rango}(M) \neq \text{rango}(Ma) \rightarrow \rightarrow$ r y s se cruzan

b) La ecuación del plano que contiene a la recta *s* y es paralelo a la recta *r*. (3 *puntos*).

Si el plano contiene a la recta s, entonces el vector director de la recta s es vector director del plano. Y puesto que el plano es paralelo a r, el vector director de r es también vector director del plano solicitado. Finalmente el punto de la recta s es un punto del plano. Así pues:

$$d_r = (1{,}1{,}0) = \pi_1$$
$$d_s = (-1{,}1{,}0) = \pi_2$$
$$A_s = (8{,}0{,}-5)$$

$$\pi : \begin{cases} x = 8 + \lambda - \beta \\ y = +\lambda + \beta \\ z = -5 \end{cases}$$

En forma general :

$$\begin{vmatrix} x-8 & -1 & 1 \\ y & 1 & 1 \\ z+5 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow (-z-5)-(z+5) = 0 \rightarrow -2z-10 = 0 \rightarrow z = -5$$

CON WIRIS

Apartado b) Ecuación del plano que contiene a la recta s y es paralelo a la recta r. (3 puntos)

$$\left|\begin{pmatrix} x-8 & 1 & -1 \\ y & 1 & 1 \\ z+5 & 0 & 0 \end{pmatrix}\right| \rightarrow 2 \cdot z + 10$$

Ec del plano en forma general es z=−5

c) La distancia entre las rectas *r* y *s*. (3 *puntos*).

$$d(r,s)=\frac{\left|\left[\vec{d}_r,\vec{d}_s,\vec{A_rA_s}\right]\right|}{\left|\vec{d}_r\times\vec{d}_s\right|}=\frac{\begin{vmatrix}1&-1&8\\1&1&0\\0&0&-5\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}i&j&k\\1&1&0\\1&-1&0\end{vmatrix}}=\frac{10}{2}=5$$

CON WIRIS

Apartado c)La distancia entre las rectas r y s (3puntos)

r=recta(punto(0,0,10),[1,1,0]) → $-z+10=0\cap -x+y=0$

s=recta(punto(8,0,5),[−1,1,0]) → $-x-y+8=0\cap -5\cdot x-5\cdot y+8\cdot z=0$

Primera forma

distancia(r,s) → 5

Segunda forma

dr=[1,1,0] → [1,1,0]

ds=[−1,1,0] → [−1,1,0]

$\begin{vmatrix}1&-1&8\\1&1&0\\0&0&-5\end{vmatrix}$ → −10

dr×ds → [0,0,2]

‖dr×ds‖ → 2

$d(s,r)=\dfrac{\left|\begin{vmatrix}1&-1&8\\1&1&0\\0&0&-5\end{vmatrix}\right|}{\|ds\times dr\|}$ → $(s,r)\mapsto 5$

Problema B.3. Un club deportivo alquila un avión de 80 plazas para realizar un viaje a la empresa VR. Hay 60 miembros del club que han reservado su billete. En el contrato de alquiler se indica que el precio de un billete será 800 euros si sólo viajan 60 personas, pero que el precio por billete disminuye en 10 euros por cada viajero adicional a partir de esos 60 viajeros que ya han reservado el billete.

Obtener razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado:

a) El total que cobra la empresa VR si viajan 61, 70 y 80 pasajeros. (1 *punto*).

Primero construimos la función que nos permite calcular el precio total que cobra la empresa VR en función de un número "X" de pasajeros, siendo P(x) el precio total y X el número de viajeros.

$P(x) = (60+x)\,(800 - 10x) \quad 0 \le x \le 20$

Cuando viajan 61 pasajeros → x= 1

Cuando viajan 70 viajeros → x= 10

Cuando viajan 80 pasajeros → x=20

$P(1) = (60+1)\,(800 - 10*1) = 61 * 790 = 48.190$€

$P(20) = (60+10)\,(800 - 10*10) = 70 * 700 = 49.000$€

$P(1) = (60+20)\,(800 - 10*20) = 80 * 600 = 48.000$€

CON WIRIS

Apartado a) El total que cobra la empresa VR si viajan 61,70 y 80 pasajeros. (1 punto)

Primero construimos la función que nos permite calcular el precio total que cobra la empresa VR en función de un número "X" de pasajeros, siendo P(x) el precio total y X el número de viajeros.

$P(x) = (60+x)\cdot(800-10\cdot x) \rightarrow x \mapsto -10\cdot x^2+200\cdot x+48000$

$P(1) \rightarrow 48190$

$P(10) \rightarrow 49000$

$P(20) \rightarrow 48000$

b) El total que cobra la empresa VR si viajan 60 + *x* pasajeros, siendo $0 \le x \le 20$. (4 *puntos*).

$P(x) = (60+x)(800 - 10x) \quad 0 \le x \le 20$

CON WIRIS

Apartado b) El total que cobra la empresa VR si viajan 60 + x pasajeros, siendo $0 \le x \le 20$ (4 puntos)

$P(x) = (60+x) \cdot (800 - 10 \cdot x)$

c) El número de pasajeros entre 60 y 80 que maximiza lo que cobra en total la empresa VR. (5 *puntos*).

Para ello vamos a obtener la primera derivada de la función P(x) y a calcular el valor que máximiza la función.

$P(x) = (60+x)(800 - 10x) = 48.000 - 600x + 800x - 10x^2 = -10x^2 + 200x + 48.000$

$P'(x) = -20x + 200 = 0 \rightarrow x=10$

$P''(x) = -20 \rightarrow P''(10) = -20$ y por tanto en x=10 hay un máximo

Puesto que (60+x) es el número de viajeros que realizan el viaje, entonces 60+ 10 = 70 es el números que de pasajeros que maximiza la cantidad abonada a la empresa VR.

CON WIRIS

Apartado c) El número de pasajeros entre 60 y 80 que maximiza lo que cobra en total la empresa VR. R.(5 puntos

$P(x) = (60+x) \cdot (800 - 10 \cdot x)$
$P'(x)$
resolver$(P'(x)=0)$
$P''(x)$
$P''(10)$

Observamos que en x=10 hay un máximo
Puesto que (60+x) representa el número de pasajeros que suben al avión.
(60+10) = 70 es el valor que maximiza la cantidad que abona el club a la empresa VR.