Tema 5

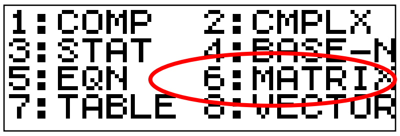
Matrices y vectores

- Matrices. Operaciones con matrices
- Vectores. Operaciones con vectores
- Actividades

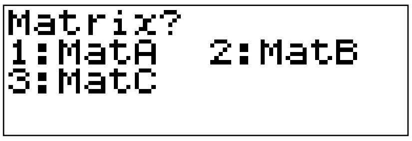
MATRICES. OPERACIONES CON MATRICES

La calculadora **CASIO FX 570-ES** permite trabajar con matrices de hasta 3 filas x 3 columnas.

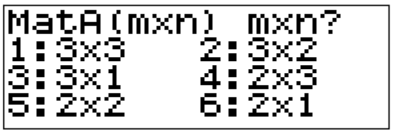
Para entrar en el modo de cálculo matricial, debemos pulsar en **MODE 6: MATRIX**



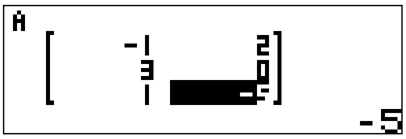
Ahora nos aparece la siguiente pantalla donde podemos definir tres matrices, **MatA, MatB y MatC**



Al seleccionar una de las matrices, normalmente, la A, aparece una nueva pantalla para elegir la dimensión de la matriz.

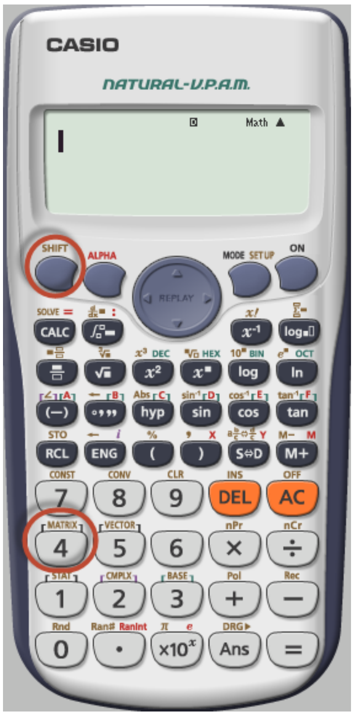


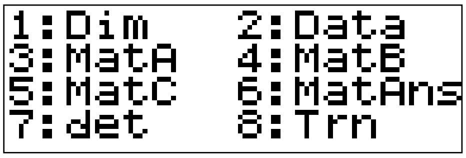
Si por ejemplo nuestra matriz fuera $A=\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 0 \\ 1 & -5 \end{pmatrix}$ pulsaríamos 2, para elegir la dimensión e ir introduciendo los números de dicha matriz por filas pulsando la tecla = después de cada nuevo ingreso.



Al borrar la pantalla nuestra matriz se ha almacenado en una variable llamada **MatrizA**

Para operar con las matrices, debemos entrar en el submenú de operaciones pulsando SHIFT 4. Nos aparece el siguiente menú:





1: Dim para dimensionar la matriz

2: Data nos permite entrar de nuevo en la matriz y modificar sus datos, también podemos seleccionar los datos, borrarlos o copiarlos a otra matriz

3: MatA pulsando esta opción nos permite "llamar" a esa matriz para operar con ella.

4: MatB Ídem con la matriz B

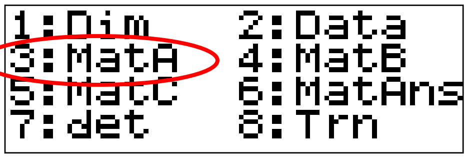
5: MatC Ídem con la matriz C

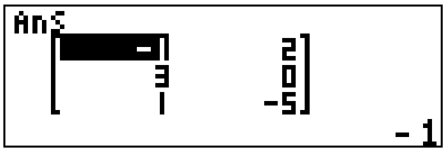
6: MatAns es la memoria de respuesta de los cálculos matriciales

7: det calcula el determinante de una matriz.

8: Trn halla la transpuesta de una matriz

Por lo tanto para recuperar nuestra Matriz A anterior debemos pulsar
3 =





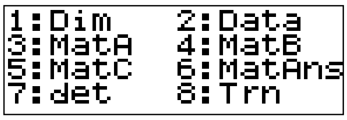
La opción **6: MatAns** es la memoria de respuesta de los cálculos matriciales hechos con anterioridad.

EJEMPLO 1

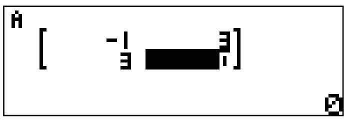
Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$ *y* $B = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$. *Calcula:*

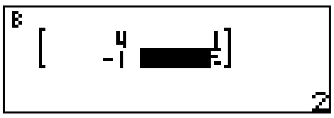
a) A+B *b) 2A* *c) Det(A)* *d)* B^{-1} *e) A*B* *f)* A^2

Lo primero que hacemos es entrar en el **Mode 6: Matrix,** borramos la pantalla AC y pulsamos SHIFT 4



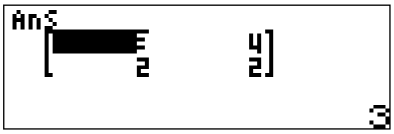
En la **opción 2** podemos definir nuestras matrices **MatA y MatB**





a) Borramos la pantalla y para que nos haga la suma de las matrices pulsamos SHIFT 4 3 + SHIFT 4 4 , nos debe aparecer esta pantalla:

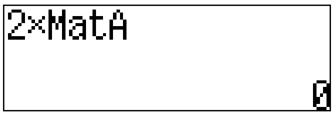
Ya sólo nos queda pulsar [=] para obtener el resultado deseado

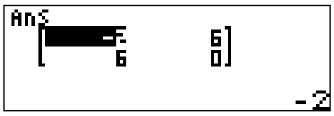


Una vez definidas las matrices ya sólo nos queda decirle que operaciones queremos que nos haga y pulsar [=]

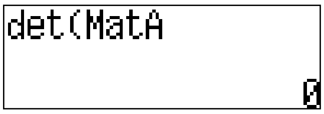
Utilizamos las siguientes combinaciones de teclas:

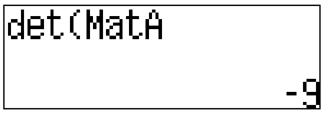
b) **2 x** [SHIFT] [4] [3] [=]



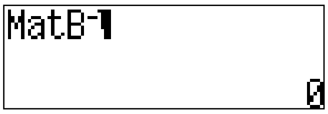


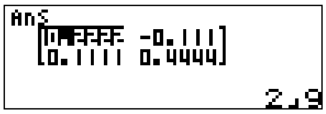
c) [SHIFT] [7] [SHIFT] [4] [3] [=]



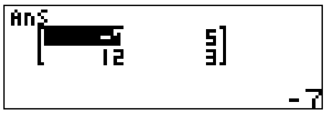


d) [SHIFT] [4] [4] [x^{-1}] [=]

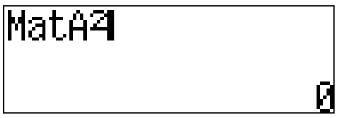


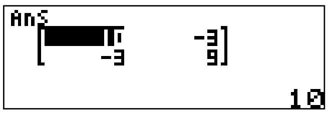


e) [SHIFT] [4] [3] [×] [SHIFT] [4] [4] [=]

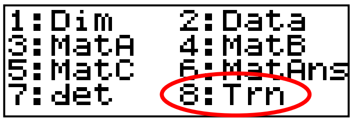


e) [SHIFT] [4] [3] [x^2] [=]



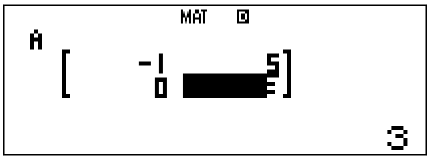


La calculadora también realiza la traspuesta de una matriz en la opción **8:Trn**

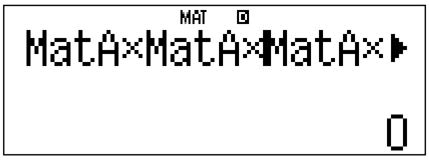


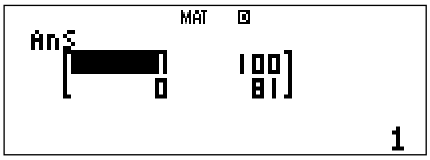
Si queremos obtener por ejemplo A^4 debemos actuar como sigue:

definimos la matriz por ejemplo $A = \begin{pmatrix} -1 & 5 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$



Y luego





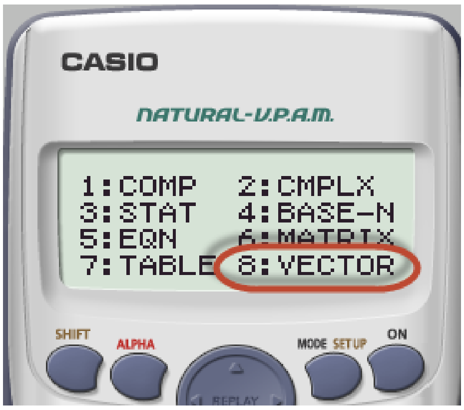
Pues solo podemos utilizar las teclas x^2 x^3 para hacer potencias ya que la tecla de la potencia $x^{\blacksquare}$ no nos sirve para las matrices, debemos multiplicar la matriz por si misma el número de veces que nos indiquen.

Para salir del modo **MATRIX**, debemos seleccionar **Mode 1**

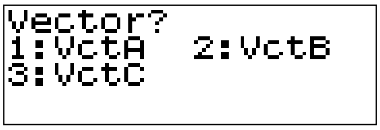
VECTORES. OPERACIONES CON VECTORES

La calculadora **CASIO FX 570-ES** permite trabajar con vectores de hasta dimensión 3.

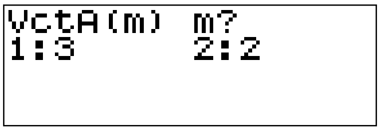
Para trabajar con vectores debemos seleccionar primero el **MODE 8:VECTOR**



Nos aparece la pantalla siguiente donde podemos trabajar hasta con 3 vectores denominados **VctA, VctB y VctC**.

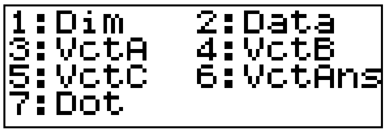


Al seleccionar uno de los vectores, normalmente **1: VctA,** nos aparece otra pantalla para elegir la dimensión que podrá ser 2 ó 3



Una vez elegida la dimensión, vamos introduciendo ordenadamente las componentes del vector pulsando la tecla  después de cada nuevo ingreso. De esta forma queda almacenado en memoria el **vector A**. Podemos repetir la operación con el B y el C.

Para operar con los vectores, debemos entrar en el submenú de operaciones pulsando [SHIFT] [5]. Nos aparece el siguiente menú:



1. Dim nos permite dimensionar el vector

2: Data introducimos las componentes del vector

3: VctA hace referencia a ese vector, nos permite "llamar" al vector A

4: VctB hace referencia a ese vector, nos permite "llamar" al vector B

5: VctC hace referencia a ese vector, nos permite "llamar" al vector C

6: VctAns es la memoria de respuesta de los cálculos matriciales

7: Dot es el operador para el producto escalar

El producto vectorial (para vectores de orden 3) lo haremos con la tecla [×]

EJEMPLO 2

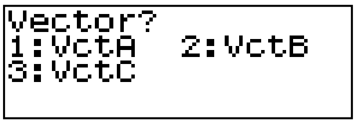
Dados los vectores $\vec{a} = (2,-1,0)$ *y* $\vec{b} = (2,1,-4)$. *Calcular:*

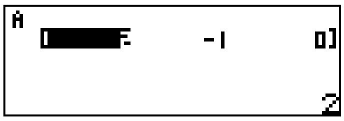
a) $\vec{a}+\vec{b}$ *b)* $3\vec{a}$ *c)* $\vec{a} \bullet \vec{b}$ *d)* $\vec{a} \times \vec{b}$ *e)* $|\vec{b}|$

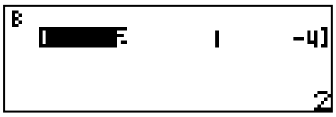
f) *Un vector unitario en la dirección de* $\vec{a}$

g) El ángulo que forman $\vec{a}$ *y* $\vec{b}$

Introducimos las componentes de 2 vectores, por ejemplo el A y el B

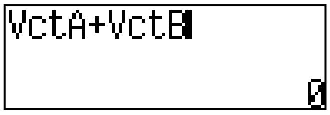


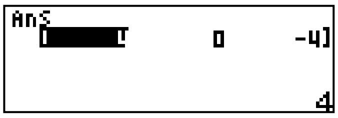




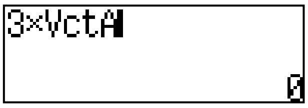
Ahora pulsamos las siguientes combinaciones de teclas para obtener las operaciones deseadas

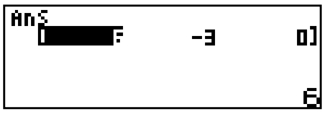
a) [SHIFT] [5] [3] [+] [SHIFT] [5] [4] [=]



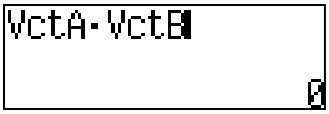


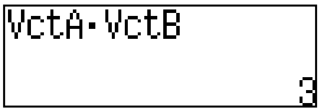
b) **3x** [SHIFT] [5] [3] [=]



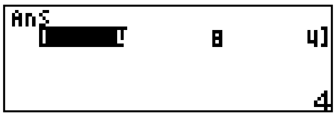


c) [SHIFT] [5] [3] [SHIFT] [5] [7] [SHIFT] [5] [4] [=]

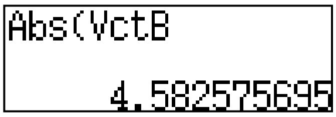




d) [SHIFT] [5] [3] [×] [SHIFT] [5] [4] [=]



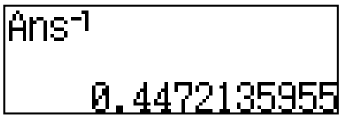
e) [SHIFT] [hyp] **(abs)** [SHIFT] [5] [4] [=]



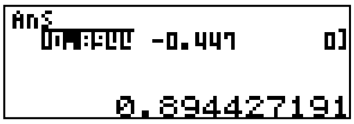
f) Para este proceso no existe una tecla específica, debemos seguir una serie de pasos. Recordemos que: $\vec{u}_v = \frac{1}{|\vec{v}|}\left(v_x \cdot \vec{i} + v_y \cdot \vec{j} + v_z \cdot \vec{k}\right)$

1º) Calculamos el módulo de $\vec{a}$

2º) Calculamos el inverso del módulo



3º) Multiplicamos el último resultado por las componentes del vector A



4º) Comprobamos que el último vector es unitario

g) Recordemos la expresión para calcular el ángulo de dos vectores

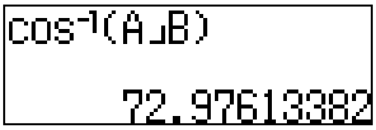
$\theta = \cos^{-1}\left(\dfrac{\vec{v}_a \cdot \vec{v}_b}{|\vec{v}_a| \cdot |\vec{v}_b|}\right)$. Realizamos una serie de pasos:

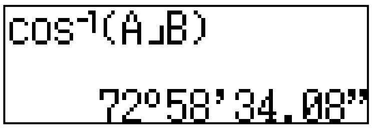
1º) Calculamos $\vec{v}_a \cdot \vec{v}_b$ y lo metemos en la memoria A

(Para meter ese número en la memoria A pulsamos SHIFT RCL (−) **(Shift +STO+ A))**

2º) Ahora realizamos el denominador $|\vec{v}_a| \cdot |\vec{v}_b|$ y lo metemos en la memoria B

3º) Buscamos ya el ángulo





ACTIVIDADES

1. Dadas las matrices:

$$A=\begin{pmatrix}-9 & 2\\ 5 & 0\end{pmatrix},B=\begin{pmatrix}-1 & -7\\ 0 & -3\end{pmatrix},C=\begin{pmatrix}0 & 2 & -1\\ -1 & -8 & 1\end{pmatrix},D=\begin{pmatrix}1 & 2 & -1\\ -1 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

Calcular:

a) A+B b) B-A

c) C+D d) D-C

e) A^2 f) -3C

g) 2A-B

2. Dadas las matrices del ejercicio anterior calcula:

a) La matriz opuesta de A
b) La matriz opuesta de C.
c) A^t, B^t, C^t
d) $A^t + B$
e) $C - D^t$
f) $(A+B)^t$

3. Dadas las matrices: $A=\begin{pmatrix}1 & 0\\ -1 & 2\end{pmatrix},B=\begin{pmatrix}2 & 1\\ -1 & -1\\ 0 & 1\end{pmatrix},C=\begin{pmatrix}1 & 3\\ -2 & 1\end{pmatrix},D=\begin{pmatrix}2 & 1\\ -1 & -1\\ 0 & -2\end{pmatrix}$

Calcula:

a) $A\cdot B$ *y* $B\cdot A$ *b)* $B\cdot C\cdot A$ *c)* $(B\cdot A)^t$

4. Dadas las matrices $A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 3\\ 2 & 1 & 0\\ -1 & 0 & -1\end{pmatrix},B=\begin{pmatrix}2 & 0 & -1\\ 3 & -2 & 0\\ 1 & 0 & 1\end{pmatrix}$. Calcula:

a) A^3 b) B^4

5. Dadas las matrices $A=\begin{pmatrix}2 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & 3\\ 2 & -2\end{pmatrix}$

a) Calcula $A^2 + 2A\cdot B + B^2$

b) Calcula $(A+B)^2$

6. Calcula la matriz inversa de las siguientes matrices:

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ *b*) $B = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}$

c) $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ -1 & 2 & 1 \\ -2 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ d) $D=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & -1 \\ 5 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

7.- Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

a) Calcula $A^{-1} \cdot (2B + 3I)$

b) Determina la matriz X para que $X \cdot A = A + I$

8. Calcula el módulo de los siguientes vectores:

a) $\vec{v}$ (3,7) b) $\vec{w}$ (8, 3,-2) c) $\vec{a}$ (-3, 1, 0)

9. Determina las componentes de los vectores indicados, a partir de los puntos señalados:

a) A(1,3) B(6,-7) vector $\overrightarrow{AB}$

b) C(3,2,1) D(6,-1,7) vector $\overrightarrow{DC}$

c) E(1,8,-4) F(3,7,1) vector: $\overrightarrow{EF}$

10. Dados los vectores de componentes indicadas, y del extremo inicial, determina las coordenadas del extremo final:

a) $\overrightarrow{AB} = (3,7,1)$ y A=$(1,0,0)$

b) $\overrightarrow{CD} = (-1,8)$ y D=$(2,3)$

11.- Dados los vectores $\vec{a}$ (1, 3), $\vec{b}$ (1, 0, 0) y $\vec{c} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$, determina vectores unitarios en la misma dirección de $\vec{a}$, $\vec{b}$ y $\vec{c}$

12.- Dados los vectores $\vec{a}$ (3, 1, 6) , $\vec{b}$ (2,1, −2), calcula:

a) $3\vec{a} - 5\,\vec{b}$

b) $\vec{a} \cdot \vec{b}$

c) $4\vec{w} - 6\vec{t}$ siendo $\vec{w} = -2\vec{a} + \vec{b}$ y $\vec{t} = \alpha \cdot \vec{a} - \vec{b}$ donde $\alpha = \vec{a} \cdot \vec{b}$

d) Módulo de $\vec{w}$ y $\vec{t}$

e) El producto vectorial de $\vec{a}$ y $\vec{b}$ $(\vec{a} \times \vec{b})$

13.- Dados los vectores $\vec{u} = (1, -3)$ y $\vec{v} = (2,1)$. Calcular:

a) El vector $2\vec{u} - \vec{v}$

b) Un vector unitario que tenga la misma dirección y sentido que $\vec{u}$

c) Un vector opuesto a $\vec{v}$

d) El ángulo que forman $\vec{u}$ y $\vec{v}$