Tema 4

Combinatoria. Probabilidad. Números complejos.

- Introducción.
- Combinatoria. Técnicas de recuento.
- Tabla de números aleatorios.
- **Probabilidad de un suceso. Ley de los grandes números.**
- **Probabilidad de un suceso. Regla de Laplace.**
- **Combinatoria para calcular probabilidades.**
- Números complejos.
- Actividades.

INTRODUCCIÓN

Las calculadoras científicas facilitan los cálculos para abordar problemas de recuento y probabilidad. Además se puede realizar simulaciones de experimentos aleatorios, ayudando de esta manera a entender mejor las leyes de los grandes números y el concepto de probabilidad.

Ante un problema de recuento o de probabilidad, el alumnado deberá plantear la situación y decidir las mejores estrategias y técnicas. La calculadora le ayudará a comprobar resultados y, lógicamente, le proporcionará herramientas para el cálculo que servirán de atajo para muchos procedimientos.

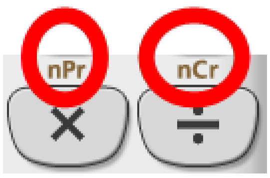
Vamos a utilizar la calculadora fx-570ES PLUS.

El cálculo con números complejos se simplifica bastante con el uso de esta calculadora. Todos los cálculos que precisan los ejercicios de complejos en 1º de bachillerato y/o 4º de ESO son abordables con esta herramienta.

COMBINATORIA. TÉCNICAS DE RECUENTO

Las técnicas de recuento permiten resolver problemas que contienen cuestiones del tipo ¿cuántas cosas, de un cierto, tipo hay?, ¿de cuántas maneras podemos escoger…? En este tipo de problemas cada uno de los resultados posibles recibe el nombre de *configuración.*

La calculadora científica que estamos utilizando dispone de herramientas para realizar los cálculos que intervienen en los problemas de técnicas de recuento Las teclas, combinaciones de teclas y herramientas son:

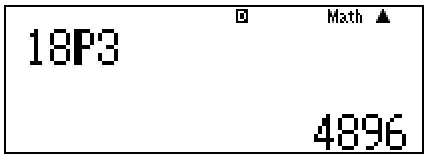


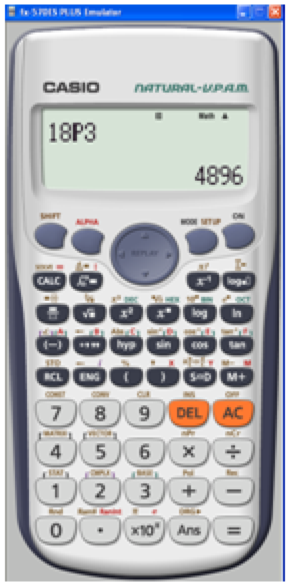
Variaciones

Ejemplo 1. En una comunidad de 18 vecinos, ¿de cuántas maneras pueden elegirse al presidente, al tesorero y al vocal si un vecino no puede tener más de un cargo?

Importa el orden porque los cargos son diferentes; no se pueden repetir porque un vecino no puede tener más de un cargo; no intervienen todos los elementos en las configuraciones, puesto que hay 18 vecinos y sólo seleccionamos 3. Se trata de variaciones ordinarias de 18 elementos tomados de 3 en 3.

$$V_{18}^{3} = 18 \cdot 17 \cdot 16 = 4896$$

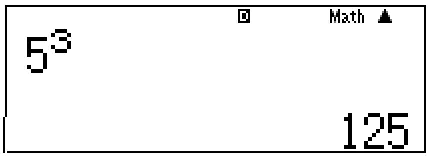




Ejemplo 2. ¿Cuántos números de tres cifras hay, de modo que las tres cifras sean impares.

Para formar uno de tres de estos números hemos de escoger tres cifras entre 1, 3, 5, y 7, de manera que importa el orden y que pueden aparecer elementos repetidos. Se tratan por tanto de calcular las **variaciones con repetición d**e cinco elementos tomados de 3 en 3.

$VR_5^3 = 125$ 



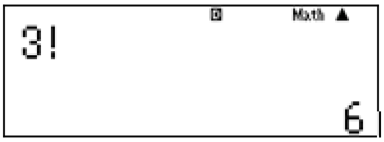
Permutaciones

Ejemplo 3. Diana tiene hilo de algodón de tres colores: rojo, azul y negro. ¿Cuántas camisetas diferentes de tres franjas horizontales de distinto color puede confeccionar?

Importa el orden, porque dos camisetas se diferencian sólo por el orden en el que aparecen los colores; no se pueden repetir los elementos e intervienen todos en todas las configuraciones.

Se trata, pues, de **permutaciones** de 3 elementos.

$P_3 = 3! = 6$ 

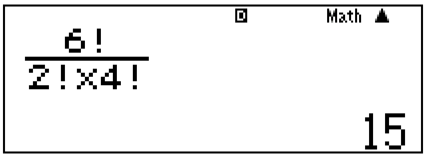


Ejemplo 4. En un código secreto, las diversas letras se obtienen combinando los signos • (punto) y **–** (raya). ¿Cuántas letras diferentes podemos obtener utilizando dos puntos y cuatro rayas?

Las diversas letras son las ordenaciones de seis signos, de los que **2** son **iguales entre ellos** (2 puntos) y **4** son **iguales entre ellos** (4 rayas) y diferentes de los anteriores.

Tenemos que contar, pues, las **permutaciones con repetición** de 6 elementos del tipo 2, 4.

$PR_6^{2,4} = \frac{6!}{2! \cdot 4!}$ 



Combinaciones

Ejemplo 5. Si en la comunidad de vecinos del ejemplo 1 es necesario formar una comisión de ocho vecinos cualesquiera para resolver un determinado problema, ¿de cuántas maneras se puede hacer?

No importa el orden de colocación de los elementos porque no hay distinción de cargos; no se pueden repetir los elementos, ya que tienen que ser ocho vecinos diferentes. Se trata, pues, de **combinaciones ordinarias** de 18 elementos tomados de 8 en 8.

$$C_{18}^{8} = \binom{18}{8} = 43758$$ 1 8 SHIFT ÷ 8 =

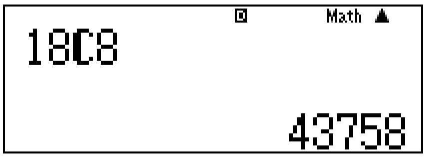


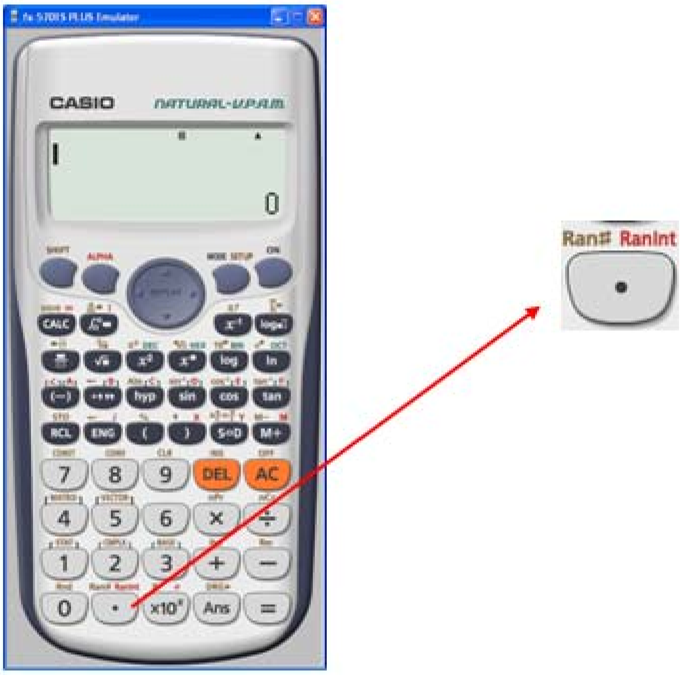
Tabla de números aleatorios

Una tabla de números aleatorios es una sucesión de dígitos generados al azar por diversos métodos, como lanzamientos de monedas, dados, ruletas, simulaciones, calculadora u ordenador. Se anotan los resultados y se confecciona una lista. La más habitual es la que contiene números entre 0 y 9.

Para usarla nos situamos en un lugar cualquiera de la tabla y elegimos al azar una dirección para desplazarnos. A partir de ahí, se van leyendo los resultados y se realizan las simulaciones pertinentes.

Pero con las calculadoras podemos disponer de cuantos números aleatorios queramos y con determinadas cifras y condiciones.

La calculadora que estamos manejando incorpora la nueva función **RanInt** que genera números aleatorios enteros en el intervalo cerrado [a,b] que le proporcionemos (pero lo escribiremos entre paréntesis).



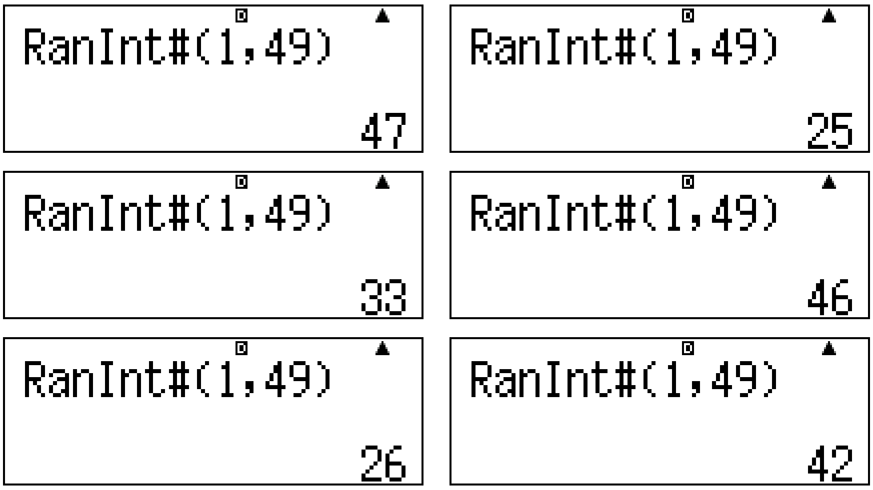
Cada vez que pulsemos el signo [=] obtendremos un nuevo número aleatorio.

[ALPHA] [•] [1] [SHIFT] [)] [6] [)] [=] [=] [=] [=]

RanInt#(1,6) 3	RanInt#(1,6) 5
RanInt#(1,6) 6	RanInt#(1,6) 2

En el siguiente **Ejemplo 6** hemos simulado la obtención de una combinación de la lotería primitiva.

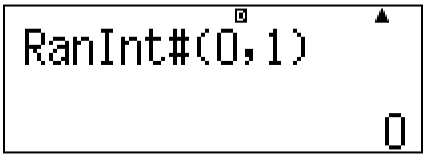
[ALPHA] [•] [1] [SHIFT] [)] [4] [9] [)] [=] [=] [=] [=] [=] [=]



Probabilidad de un suceso. Ley de los grandes números

Con la función anterior podemos trabajar la idea intuitiva de probabilidad.

Ejemplo 7. Para simular el lanzamiento de una moneda y asignar probabilidades a los sucesos *Cara* y *Cruz* utilizamos **RanInt(0,1)**

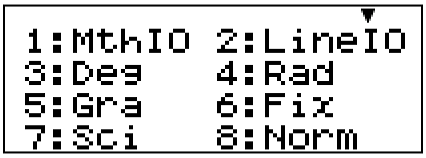


Pulsamos la tecla = tantas veces como queramos repetir el lanzamiento y lo anotamos en una tabla.

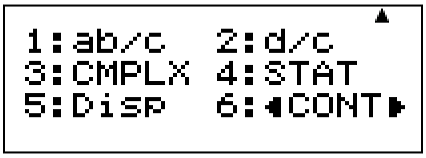
Vamos a poner los datos en la calculadora y a hallar las frecuencias relativas. Supongamos que hemos obtenido estos resultados

Nº de lanzamientos	10	20	30
Nº de caras	6	11	16

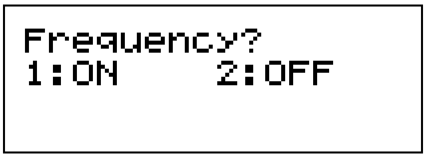
Lo primero que hacemos es acceder a la configuración **SETUP** para activar la columna de frecuencias. Para ello, pulsamos SHIFT MODE y cuando aparezca la pantalla:



pulsamos el cursor que marca la dirección hacia abajo ▼ para que aparezcan más opciones.



A continuación pulsamos en la opción **4**,

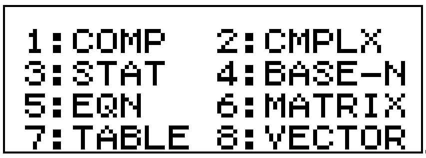


y en esa pantalla pulsaremos **1: ON,** para que se active la columna de frecuencias.

O sea, hemos pulsado SHIFT MODE ▼ 4

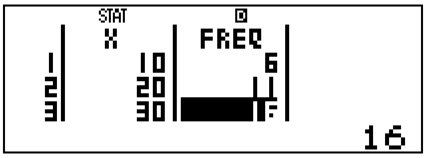
En pantalla no se aprecia ahora ningún cambio, pero las opciones quedan recogidas. Ahora, preparamos la calculadora para que opere en modo estadístico.

Pulsamos 

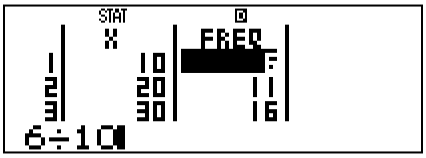


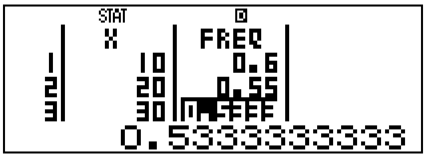
. Hemos accedido a la configuración para establecer distintos modos de trabajo. Pulsamos 3 **STAT** (modo estadístico). En esa pantalla pulsamos **1: 1-VAR**

Introducimos los datos y sus frecuencias uno a uno, pulsando el signo =



Vamos a obtener las frecuencias relativas; para ello podemos teclear directamente la operación de dividir las frecuencias absolutas por el número total de extracciones. Así, aprovechando que ya los tenemos introducidos, sobrescribimos la columna de frecuencias absolutas.



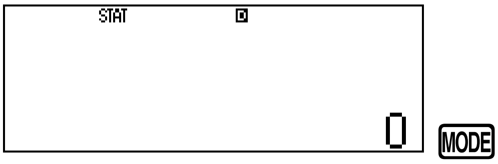


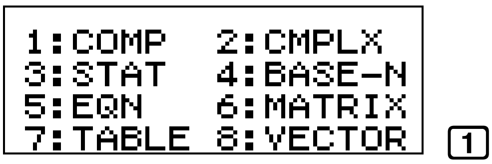
La ley de los grandes números afirma que para asignar una probabilidad a un suceso de un experimento aleatorio, hay que repetirlo un cierto número de veces. A medida que aumenta el número de veces que realizamos el experimento, la frecuencia relativa se va aproximando a su probabilidad.

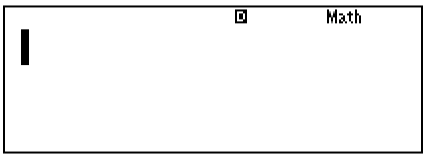
Podemos sacar en conclusión que las frecuencias relativas del suceso cara tienden a estabilizarse hacia el valor 0’5.

Para simular el lanzamiento de un dado y asignar probabilidades a los sucesos *1, 2, 3, 4, 5, 6* utilizamos **RanInt(1,6)**.

Para volver al modo “no estadístico”







Probabilidad de un suceso. Regla de Laplace.

Cuando al realizar un experimento aleatorio los sucesos que componen el espacio muestral tienen la misma probabilidad de ocurrir, es decir, son equiprobables, la probabilidad de que ocurra un suceso *A* se puede calcular por la regla de Laplace.

$$P(A) = \frac{\text{Número de casos favorables al suceso } A}{\text{Número de casos posibles}}$$

Ejemplo 8. Lanzamiento de una dado.

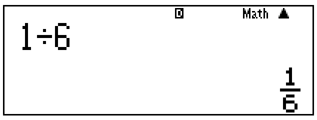
Al lanzar un dado (experimento aleatorio), calcula la probabilidad de obtener los siguientes sucesos:

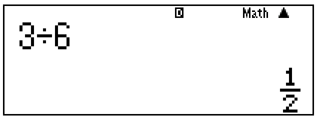
a.- Número 3. b.- Número impar. c.- Número menor que 5.

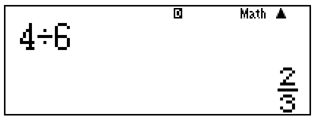
d.- Múltiplo de 3. e.- Divisor de 2. f.- Número primo.

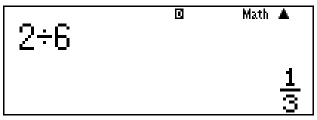
g.- Divisor de 6 h.- Menor que 8. i.- Número par.

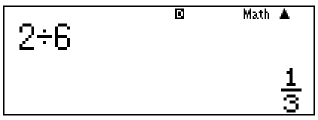
j.- Múltiplo de 4. k.- Número mayor que 6.

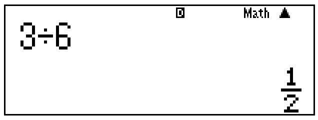


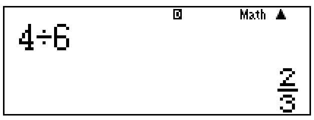


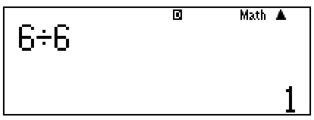


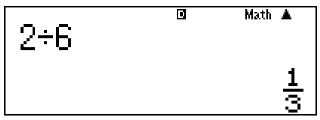


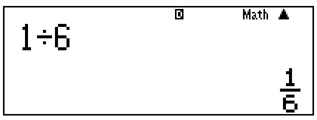


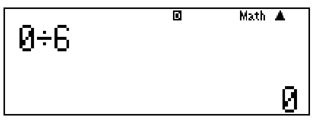












Combinatoria para calcular probabilidades.

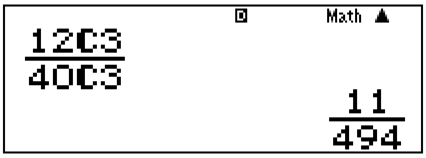
La aplicación de la ley de Laplace para el cálculo de probabilidades en experiencias regulares requiere contar casos favorables y casos posibles.

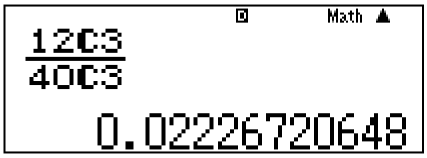
Como con la combinatoria podemos contar agrupaciones de todo tipo y con las calculadoras podemos hacer los cálculos que intervienen en los problemas de recuento, es natural que la calculadora sea útil en el cálculo de probabilidades.

Ejemplo 9. Se extraen tres cartas de una baraja de 40. ¿Cuál es la probabilidad de que las tres sean FIGURAS (sota, caballo o rey)?

Casos favorables: extraer 3 figuras de un total de 40; C_{12}^{3}

Casos posibles: extraer 3 cartas de un total de 40; C_{40}^{3}



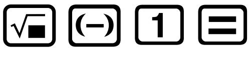


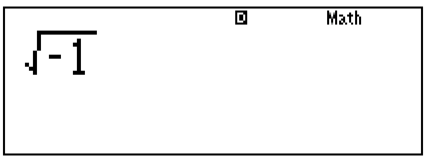
Números complejos

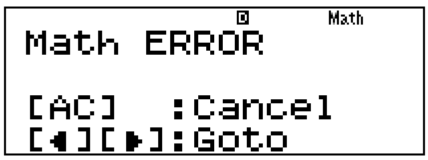
Al resolver $x^2 - 6x + 13 = 0$, obtenemos $3 + 2\sqrt{-1}$ y $3 - 2\sqrt{-1}$, soluciones que carecen de sentido porque $\sqrt{-1}$ no es un número real.

Los números complejos nacen de la necesidad de dar sentido válido a lo anterior.

Si en la calculadora científica queremos hallar $\sqrt{-1}$ nos ocurrirá lo siguiente:

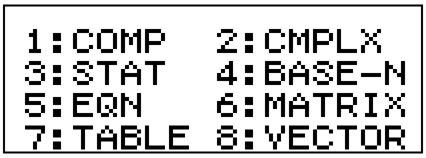


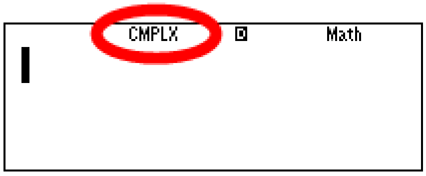




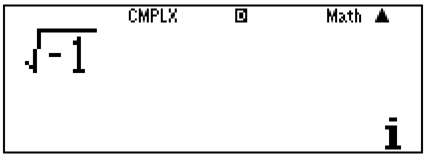
La calculadora fx-570ES PLUS permite admitir como números válidos a $\sqrt{-1}$ y a todos los que se obtengan al operar con él.

Para operar con números complejos procedemos así: [MODE]



[2]


En este nuevo modo nos quedará:

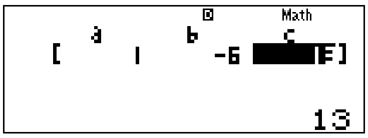


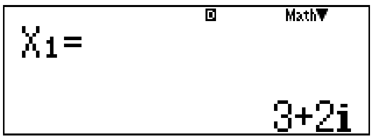
Aparece la unidad imaginaria.

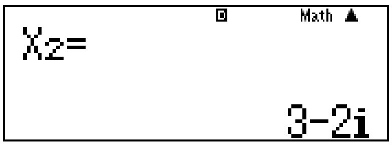
Ejemplo 10. Como se ha visto en el tema de ecuaciones, resolvemos ahora en este modo la ecuación del principio $x^2-6x+13=0$.

[MODE] [5] [3] [1] [=] [−] [6] [=] [1] [3] [=] [=] [=]

(Para introducir los coeficientes) (Para las soluciones)



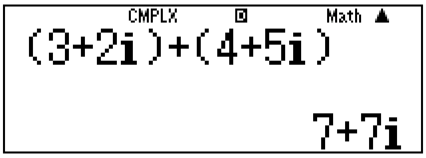




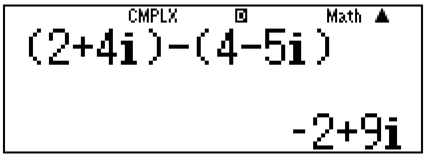
Operaciones con números complejos

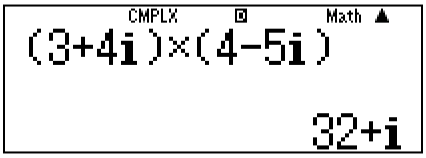
Para lo que sigue nos aseguramos que estamos en el modo de escritura **Math** [SHIFT] [MODE] [1] [1] y en el modo **CMPLX** [MODE] [2]

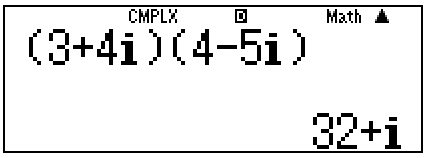
La unidad imaginaria se introduce pulsando las teclas [SHIFT] [ENG]

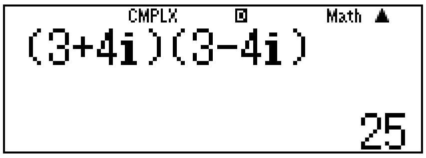
Suma: 

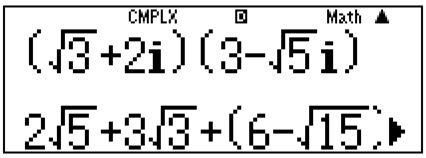
(Los paréntesis no son necesarios).

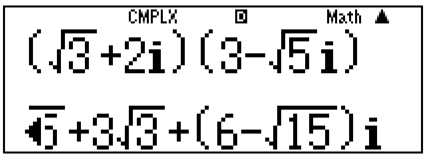
Resta: 

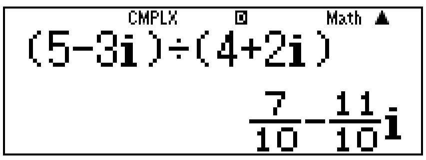
Multiplicación: 

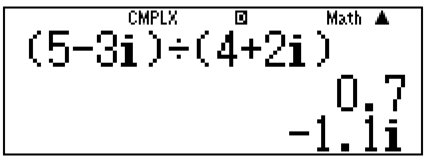




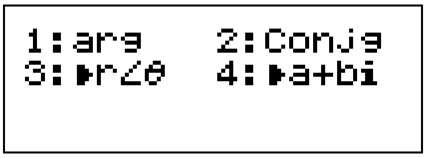




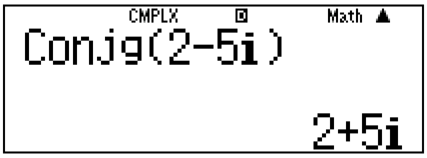
División: 



Conjugado: [SHIFT] [2]

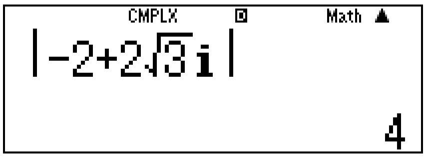


[2]

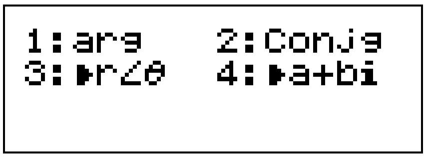


Números complejos en forma polar

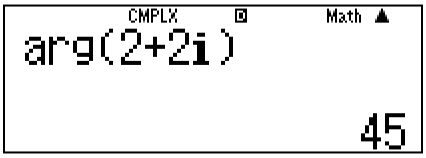
Módulo: [SHIFT] [hyp] (en esta tecla)



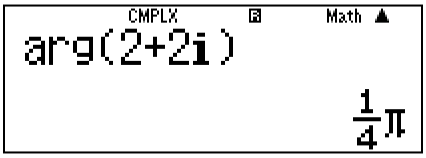
Argumento: [SHIFT] [2]



[1]



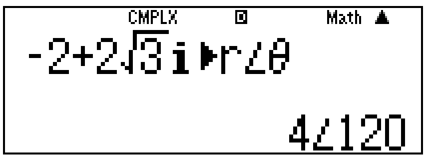
Si queremos el resultado en radianes: [SHIFT] [MODE] [4] [=]



No olvidemos volver a grados sexagesimales para lo que sigue.

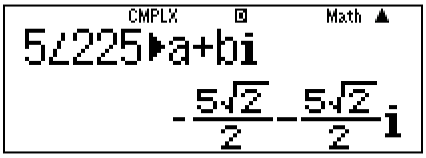
Paso de forma binómica a forma polar: Para pasar el número $-2+2\sqrt{3}i$

[(−)] [2] [+] [2] [√■] [3] [▶] [SHIFT] [ENG] [SHIFT] [2] [3] [=]



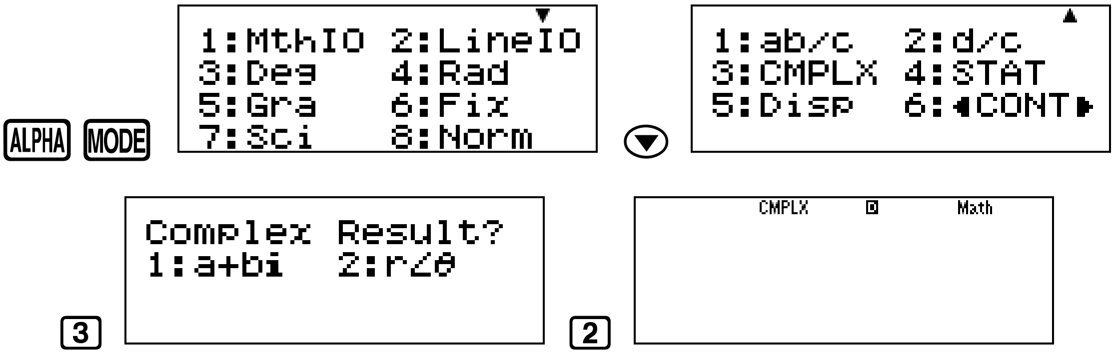
Paso de forma polar a forma binómica: Para pasar el número 5_{225°

[5] [SHIFT] [(−)] [2] [2] [5] [SHIFT] [2] [4] [=]

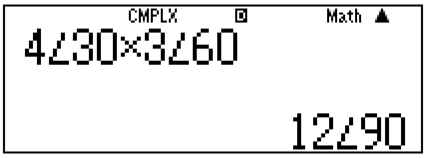


Operaciones con números complejos en forma polar.

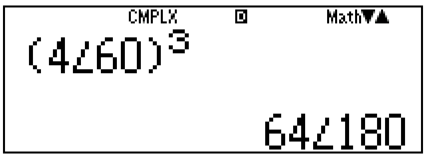
Vamos a preparar la calculadora para que todos los resultados aparezcan en forma polar.



Producto: $r_{\alpha} \cdot r'_{\beta} = (r \cdot r')_{\alpha+\beta}$



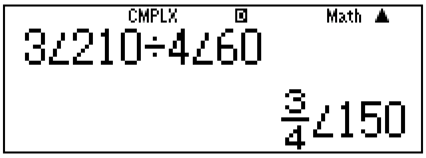
Potencia: $(r_{\alpha})^{n} = (r^{n})_{n\alpha}$



(Sólo admite potencias de índice dos y tres)

Cociente: $\dfrac{r_\alpha}{r'_\beta} = \left(\dfrac{r}{r'}\right)_{\alpha-\beta}$

3 SHIFT (−) 2 1 0 ÷ 4 SHIFT (−) 6 0 =



ACTIVIDADES

1. ¿De cuántas formas distintas pueden sentarse ocho personas en una fila de butacas?

2. ¿De cuántas formas pueden mezclarse los siete colores del arco iris tomándolos de tres en tres?

3. En una clase de 35 alumnos se quiere elegir un comité formado por tres alumnos. ¿Cuántos comités diferentes se pueden formar?

4. ¿Cuántas quinielas de una columna han de rellenarse para asegurarse el acierto de los 15 resultados?

5. ¿Cuántas apuestas de Lotería Primitiva de una columna han de rellenarse para asegurarse el acierto de los seis resultados, de 49?

6. Con las cifras 1, 2 y 3, ¿cuántos números de cinco cifras pueden formarse? ¿Cuántos son pares?

7. Con las cifras 2, 2, 2, 3, 3, 3, 3, 4, 4; ¿cuántos números de nueve cifras se pueden formar?

8. En el palo de señales de un barco se pueden izar tres banderas rojas, dos azules y cuatro verdes. ¿Cuántas señales distintas pueden indicarse con la colocación de las nueve banderas?

9. Halla el número de capicúas de 8 cifras. ¿Cuántos capicúas hay de nueve cifras?

10. Obtener 5 números aleatorios de 3 cifras.

11. Obtener 5 números enteros aleatorios menores que 10000.

12. Obtener 5 números aleatorios enteros de 1 cifra.

15.- Estimar la probabilidad de obtener un número menor que 6 al lanzar un dado construido con un dodecaedro en el que sus caras están numeradas del 1 al 12.

16.- Halla las soluciones de la ecuación $z^2 + 4 = 0$

17.- Resolver en el conjunto de los números complejos las ecuaciones:

a) $x^2+4=0$ b) $x^2-2x+2=0$ c) $16x^4-1=0$ d) $x^4-x^2-2=0$

18.- Halla las soluciones de la ecuación $z^2 + 6z + 10 = 0$

19.- Calcula las potencias cuadradas y cúbicas de ***i***

20.- Escribir en forma binómica y dar el módulo y argumento de $\frac{1+3i}{3+i}$

21.- Sean los complejos $z = -\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{6}}{2}i$ y $w = -1 + \sqrt{3}\,i$. Se pide

(a) Forma polar de *z* y *w*

(b) Calcular $\frac{z}{w}$

22.- Calcula el módulo, argumento, inverso y conjugado del complejo $z = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$

23.- Escribe en forma polar ***w, -w,*** $\overline{w}$ y $\frac{1}{w}$ siendo **w=**$\left(\sqrt{3}\,i - 1\right)$