PROVES D'ACCÉS A LA UNIVERSITAT	PRUEBAS DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD
CONVOCATÒRIA: JUNY 2014	CONVOCATORIA: JUNIO 2014
MATEMÀTIQUES II	MATEMÁTICAS II

CRITERIS DE CORRECCIÓ / CRITERIOS DE CORRECCIÓN

BAREM DE L'EXAMEN: Cal elegir sols UNA de les dues OPCIONS, A o B, i s'han de fer els tres problemes d'aquesta opció.
Cada problema puntua fins a 10 punts.
La qualificació de l'exercici és la suma de les qualificacions de cada problema dividida entre 3, i aproximada a les centèsimes.
Cada estudiant pot disposar d'una calculadora científica o gràfica. Se'n prohibeix la utilització indeguda (guardar fórmules o text en memòria). S'use o no la calculadora, els resultats analítics i gràfics han d'estar sempre degudament justificats.

BAREMO DEL EXAMEN: **Se elegirá solo UNA de las dos OPCIONES, A o B, y se han de hacer los tres problemas de esa opción.**
Cada problema se puntuará hasta 10 puntos.
La calificación del ejercicio será la suma de las calificaciones de cada problema dividida entre 3 y aproximada a las centésimas.
Cada estudiante podrá disponer de una calculadora científica o gráfica. Se prohíbe su utilización indebida (guardar fórmulas o texto en memoria). Se utilice o no la calculadora, los resultados analíticos y gráficos deberán estar siempre debidamente justificados.

OPCIÓ A

Problema A.1. Donat el sistema d'equacions $\begin{cases} x+3y+2z &= -1 \\ 2x+4y+5z &= k-2 \\ x+k^2y+3z &= 2k \end{cases}$, on k és un paràmetre real, es demana:

a) Discutir, **<u>d'una manera raonada,</u>** el sistema segons els valors de *k*. (4 *punts*).
b) Obtenir, **<u>d'una manera raonada</u>**, **<u>escrivint tots els passos del raonament utilitzat</u>**, totes les solucions del sistema quan $k=-1$. (3 *punts*).
c) Resoldre **<u>d'una manera raonada</u>** el sistema quan $k=0$. (3 *punts*).

Solució. a) El determinant de la matriu de coeficients val $1-k^2$. Si $k\neq\pm1$, el sistema és compatible i determinat. Si $k=1$, el sistema és incompatible, i quan $k=-1$, és compatible indeterminat. b) $x=1-7\alpha$, $y=\alpha$, $z=-1+2\alpha$. c) $x=6,\quad y=-1,\quad z=-2.$

Problema A.2. Es donen el punt $A=(-1,\ 0,\ 2)$ i les rectes $r:\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y}{3}=z-2$ i $s:\begin{cases} x=-1-2\lambda \\ y=\ \ 1+3\lambda \\ z=\ \ 1+\ \lambda \end{cases}$.

Obteniu **<u>raonadament</u>**, **<u>escrivint tots els passos del raonament utilitzat</u>**:

a) L'equació del pla π que passa pel punt *A* i conté la recta *r*. (3 *punts*).
b) L'equació del pla σ que passa pel punt *A* i és perpendicular a la recta *s*. (3 *punts*).
c) Un vector direcció de la recta *l* intersecció dels plans π i σ (2 *punts*) i la distància entre les rectes *s* i *l*. (2 *punts*).

Solució. a) $-y+3z=6.$ b) $-2x+3y+z-4=0$. c) $(5,3,1)$ i $2\sqrt{10}/5=1{,}2649...$.

Problema A.3. Obteniu **<u>raonadament</u>**, **<u>escrivint tots els passos del raonament utilitzat</u>**:

a) El valor de *m* per al qual la funció $f(x)=\begin{cases} m(x+1)e^{2x}, & x\leq 0 \\ \dfrac{(x+1)\sin x}{x}, & x>0 \end{cases}$ és contínua en $x=0$. (3 *punts*).
b) Els intervals de creixement o decreixement de la funció $(x+1)e^{2x}$. (3 *punts*).

c) La integral $\int (x+1)e^{2x}dx$, (2 *punts*) i l'àrea limitada per la corba $y=(x+1)e^{2x}$, i les rectes $x=0,\quad x=1\quad i\quad y=0.$ (2 *punts*).

Solució. a) $m=1$. b) Decreixent en $(-\infty,\ -3/2)$ i creixent en $(-3/2,\ +\infty)$. c) $\frac{e^{2x}}{4}(1+2x)$; àrea $=\frac{3e^2-1}{4}=5{,}2918$.

OPCIÓ B

Problema B.1. Es donen les matrius $A=\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}-2\\ 1\\ -1\end{pmatrix}$ i $C=\begin{pmatrix}-1 & 1 & 3\end{pmatrix}$

Obteniu **<u>raonadament</u>**, **<u>escrivint tots els passos del raonament utilitzat</u>**:

a) La matriu inversa A^{-1} de la matriu *A*. (3 *punts*).
b) La matriu *X* que és solució de l'equació $AX=BC$. (4 *punts*).
c) El determinant de la matriu $2M^3$, sent M una matriu quadrada d'ordre 2 el determinant de la qual val $\frac{1}{2}$. (3 *punts*).

Solució. a) $A^{-1}=\begin{pmatrix}1 & 1 & -2\\ 0 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$. b) $X=A^{-1}BC=\begin{pmatrix}1 & 1 & -2\\ 0 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & -2 & -6\\ -1 & 1 & 3\\ 1 & -1 & -3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & 1 & 3\\ -2 & 2 & 6\\ 1 & -1 & -3\end{pmatrix}$ c) $\frac{1}{2}$.

Problema B.2. Tenim el triangle *T*, els vèrtexs del qual són $A=(1,\ 2,\ -2)$, $B=(0,\ -3,\ 1)$ i $C=(-1,\ 0,\ 0)$, i els plans $\pi_1: x+y+z+1=0$ i $\pi_2:\begin{cases} x = -\alpha+\beta+1\\ y = \alpha-2\beta\\ z = \alpha+\beta\end{cases}$.

Obteniu **<u>raonadament</u>**, **<u>escrivint tots els passos del raonament utilitzat</u>**:

a) La posició relativa del pla π_1 i del pla que conté al triangle *T*. (4 *punts*).
b) Un vector $\vec{n}_1$ perpendicular al pla π_1 i un vector $\vec{n}_2$ perpendicular al pla π_2 (1,5 *punts*), i el cosinus de l'angle format pels vectors $\vec{n}_1$ i $\vec{n}_2$ (1,5 *punts*).
c) Les equacions paramètriques de la recta intersecció dels plans π_1 i π_2. (3 *punts*).

Solució. a) El pla π_1 talla el pla $x+y+2z+1=0$, que conté el triangle *T*, en una recta. b) $\vec{n}_1=(1,\ 1,\ 1)$ i $\vec{n}_2=(3,\ 2,\ 1)$; el cosinus de l'angle que formen $\vec{n}_1$ i $\vec{n}_2$ és $\frac{6}{\sqrt{42}}=\sqrt{\frac{6}{7}}=0{,}9258$. c) Un punt de la recta és $(3,-2,-2)$ i un vector direcció és $(1,-2,\ 1)$, per això $x=3+\alpha$, $y=-2-2\alpha$ i $z=-2+\alpha$.

Problema B.3. Tenim un quadrat de marbre de costat 80 cm. Es produeix el trencament d'un cantó i queda un pentàgon de vèrtexs $A=(0,\ 20)$, $B=(20,\ 0)$, $C=(80,\ 0)$, $D=(80,\ 80)$ i $E=(0,\ 80)$. Per a obtenir una peça rectangular, triem un punt $P=(x,\ y)$ del segment *AB* i fem dos talls paral·lels als eixos *X* i *Y*. Així obtenim un rectangle *R* els vèrtexs del qual són els punts $P=(x,\ y)$, $F=(80,\ y)$, $D=(80,\ 80)$ i $G=(x,\ 80)$.

Obteniu **<u>raonadament</u>**, **<u>escrivint tots els passos del raonament utilitzat</u>**:

a) L'àrea del rectangle *R* en funció de *x*, quan $0\le x\le 20$. (3 *punts*).
b) El valor de *x* per al qual l'àrea del rectangle *R* és màxima. (5 *punts*).
c) El valor de l'àrea màxima del rectangle *R*. (2 *punts*).

Solució. a) $(80-x)(60+x)$. b) la derivada de l'àrea és $20-2x$, per la qual cosa l'àrea creix quan $0\le x<10$ i decreix quan $10<x\le 20$. Llavors, l'àrea és màxima per a $x=10$. c) L'àrea màxima és 4900 cm^2.

OPCIÓN A

Problema A.1. Dado el sistema de ecuaciones $\begin{cases} x+3y+2z &= -1 \\ 2x+4y+5z &= k-2 \\ x+k^2y+3z &= 2k \end{cases}$, donde k es un parámetro real se pide:

a) Discutir **razonadamente** el sistema según los valores de *k*. (4 *puntos*).
b) Obtener **razonadamente**, **escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado**, todas las soluciones del sistema cuando $k=-1$. (3 *puntos*).
c) Resolver **razonadamente** el sistema cuando $k=0$. (3 *puntos*).

Solución. a) El determinante de la matriz de coeficientes vale $1-k^2$. Si $k \neq \pm 1$ el sistema es compatible y determinado. Si $k=1$ el sistema es incompatible y cuando $k=-1$ es compatible indeterminado. b) $x=1-7\alpha$, $y=\alpha$, $z=-1+2\alpha$. c) $x=6, \quad y=-1, \quad z=-2.$

Problema A.2. Se dan el punto $A=(-1,\ 0,\ 2)$ y las rectas $r: \dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y}{3}=z-2$ y $s: \begin{cases} x=-1-2\lambda \\ y=\ \ 1+3\lambda \\ z=\ \ 1+\ \lambda \end{cases}$.

Obtener **razonadamente**, **escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado**:

a) La ecuación del plano π que pasa por el punto *A* y contiene a la recta *r*. (3 *puntos*).
b) La ecuación del plano σ que pasa por el punto *A* y es perpendicular a la recta *s*. (3 *puntos*)
c) Un vector dirección de la recta *l* intersección de los planos π y σ (2 *puntos*) y la distancia entre las rectas *s* y *l*. (2 *puntos*).

Solución. a) $-y+3z=6.$ b) $-2x+3y+z-4=0$. c) $(5,3,1)$ y $2\sqrt{10}/5=1{,}2649...$.

Problema A.3. Obtener **razonadamente**, **escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado**:

a) El valor de *m* para el cual la función $f(x)=\begin{cases} m(x+1)e^{2x}, & x \leq 0 \\ \dfrac{(x+1)\operatorname{sen} x}{x}, & x>0 \end{cases}$ es continua en $x=0$. (3 *puntos*).
b) Los intervalos de crecimiento o decrecimiento de la función $(x+1)e^{2x}$. (3 *puntos*).
c) La integral $\int (x+1)e^{2x}dx$, (2 *puntos*) y el área limitada por la curva $y=(x+1)e^{2x}$ y las rectas $x=0, \quad x=1$ e $y=0$. (2 *puntos*).

Solución. a) $m=1$. b) Decreciente en $(-\infty,\ -3/2)$ y creciente en $(-3/2,\ +\infty)$

c) $\dfrac{e^{2x}}{4}(1+2x)$; área $=\dfrac{3e^2-1}{4}=5{,}2918$.

OPCIÓN B

Problema B.1. Se dan las matrices $A=\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}-2\\ 1\\ -1\end{pmatrix}$ y $C=\begin{pmatrix}-1 & 1 & 3\end{pmatrix}$.

Obtener **razonadamente**, **escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado**:

a) La matriz inversa A^{-1} de la matriz *A*. (3 *puntos*).

b) La matriz *X* que es solución de la ecuación $AX = BC$. (4 *puntos*).

c) El determinante de la matriz $2M^3$, siendo M una matriz cuadrada de orden 2 cuyo determinante vale $\frac{1}{2}$. (3 *puntos*).

Solución. a) $A^{-1}=\begin{pmatrix}1 & 1 & -2\\ 0 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$. b) $X = A^{-1}BC=\begin{pmatrix}1 & 1 & -2\\ 0 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & -2 & -6\\ -1 & 1 & 3\\ 1 & -1 & -3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & 1 & 3\\ -2 & 2 & 6\\ 1 & -1 & -3\end{pmatrix}$ c) $\frac{1}{2}$.

Problema B.2. Se da el triángulo *T*, cuyos vértices son $A=(1,\ 2,\ -2)$, $B=(0,\ -3,\ 1)$ y $C=(-1,\ 0,\ 0)$, y los planos $\pi_1: x+y+z+1=0$ y $\pi_2:\begin{cases} x = -\alpha+\beta+1\\ y = \alpha-2\beta\\ z = \alpha+\beta\end{cases}$.

Obtener **razonadamente**, **escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado**:

a) La posición relativa del plano π_1 y del plano que contiene al triángulo *T*. (4 *puntos*).

b) Un vector $\vec{n}_1$ perpendicular al plano π_1 y un vector $\vec{n}_2$ perpendicular al plano π_2 (1,5 *puntos*) y el coseno del ángulo formado por los vectores $\vec{n}_1$ y $\vec{n}_2$ (1,5 *puntos*).

c) Las ecuaciones paramétricas de la recta intersección de los planos π_1 y π_2. (3 *puntos*).

Solución. a) El plano π_1 corta al plano $x+y+2z+1=0$, que contiene al triángulo *T*, en una recta.

b) $\vec{n}_1=(1,\ 1,\ 1)$ y $\vec{n}_2=(3,\ 2,\ 1)$; el coseno del ángulo que forman $\vec{n}_1$ y $\vec{n}_2$ es $\frac{6}{\sqrt{42}}=\sqrt{\frac{6}{7}}=0{,}9258$.

c) Un punto de la recta es $(3,-2,-2)$ y un vector dirección es $(1,-2,\ 1)$, por lo que $x=3+\alpha$, $y=-2-2\alpha$ y $z=-2+\alpha$.

Problema B.3. Se tiene un cuadrado de mármol de lado 80 cm. Se produce la rotura de una esquina y queda un pentágono de vértices $A=(0,\ 20)$, $B=(20,\ 0)$, $C=(80,\ 0)$, $D=(80,\ 80)$ y $E=(0,\ 80)$. Para obtener una pieza rectangular se elige un punto $P=(x,\ y)$ del segmento *AB* y se hacen dos cortes paralelos a los ejes *X* e *Y*. Así se obtiene un rectángulo *R* cuyos vértices son los puntos $P=(x,\ y)$, $F=(80,\ y)$, $D=(80,\ 80)$ y $G=(x,\ 80)$.

Obtener **razonadamente**, **escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado**:

a) El área del rectángulo *R* en función de *x*, cuando $0\le x\le 20$. (3 *puntos*).

b) El valor de *x* para el que el área del rectángulo *R* es máxima. (5 *puntos*).

c) El valor del área máxima del rectángulo *R*. (2 *puntos*).

Solución. a) $(80-x)(60+x)$. b) la derivada del área es $20-2x$, por lo que el área crece cuando $0\le x<10$ y decrece cuando $10<x\le 20$. Luego el área es máxima para $x=10$. c) El área máxima es 4900 cm^2.