

**FICHA BLOQUE I:**

**NÚMEROS REALES. ALGEBRA. FUNCIONES ELEMENTALES. REPASO DEL BLOQUE II**

**1. Opera y simplifica al máximo las expresiones:**

a)  $\sqrt{5} \cdot \sqrt{\frac{80}{45}}$

b)  $\sqrt{128} + 2\sqrt{18}$

c)  $\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}-2}$

**Solución:**

a)  $\sqrt{5} \cdot \sqrt{\frac{180}{4}} = \sqrt{\frac{5 \cdot 180}{4}} = \sqrt{\frac{5 \cdot 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5}{2^2}} = \sqrt{5^2 \cdot 3^2} = 5 \cdot 3 = 15$

b)  $\sqrt{63} - 2\sqrt{28} = \sqrt{3^2 \cdot 7} - 2\sqrt{2^2 \cdot 7} = 3\sqrt{7} - 4\sqrt{7} = -\sqrt{7}$

c)  $\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1} = \frac{(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}-1)}{(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1)} = \frac{2+1-2\sqrt{2}}{2-1} = 3-2\sqrt{2}$

**2. Descompón en factores el siguiente polinomio:**

$$x^4 - 4x^3 - 5x^2$$

**Solución:**

Sacamos factor común:

$$x^4 - 4x^3 - 5x^2 = x^2(x^2 - 4x - 5)$$

Buscamos las raíces de  $x^2 - 4x - 5$  resolviendo la ecuación:

$$x^2 - 4x - 5 = 0 \rightarrow x = \frac{4 \pm \sqrt{16+20}}{2} = \frac{4 \pm \sqrt{36}}{2} = \frac{4 \pm 6}{2} = \begin{matrix} x=5 \\ x=-1 \end{matrix}$$

Por tanto:

$$x^4 - 4x^3 - 5x^2 = x^2(x-5)(x+1)$$

**3. Calcula:**

$$\frac{2x+1}{x-1} + \frac{3x}{x+1} - \frac{5x^2}{x^2-1}$$

**Solución:**

$$\frac{x+1}{x} - \frac{x}{x+1} - \frac{2x+2}{x^2+x} = \frac{(x+1)^2}{x^2+x} - \frac{x^2}{x^2+x} - \frac{2x+2}{x^2+x} = \frac{x^2+2x+1-x^2-2x-2}{x^2+x} = \frac{-1}{x^2+x}$$

**4. Opera y simplifica:**

$$\left( \frac{1}{2x-1} - \frac{1}{2x} \right) \cdot \frac{(2x-1)^2}{3x}$$

**Solución:**

$$\begin{aligned} \left( \frac{1}{2x-1} - \frac{1}{2x} \right) \cdot \frac{(2x-1)^2}{3x} &= \frac{2x - (2x-1)}{(2x-1) \cdot 2x} \cdot \frac{(2x-1)^2}{3x} = \frac{2x-2x+1}{2x(2x-1)} \cdot \frac{(2x-1)^2}{3x} = \\ &= \frac{1}{2x(2x-1)} \cdot \frac{(2x-1)^2}{3x} = \frac{2x-1}{6x^2} \end{aligned}$$

**5. Resuelve estas ecuaciones:**

a)  $x^4 - 37x^2 + 36 = 0$

b)  $\frac{2x^2-1}{2} + \frac{x-1}{6} = \frac{x-1}{3}$

**Solución:**

a)  $x^4 - 37x^2 + 36 = 0$

Cambia  $x^2 = z \rightarrow x^4 = z^2$

$$z^2 - 37z + 36 = 0$$

$$z = \frac{37 \pm \sqrt{1369 - 144}}{2} = \frac{37 \pm \sqrt{1225}}{2} = \frac{37 \pm 35}{2} \rightarrow \begin{cases} z = 36 \\ z = 1 \end{cases}$$

$$z = 36 \rightarrow x^2 = 36 \rightarrow x = \pm\sqrt{36} \rightarrow x = \pm 6$$

$$z = 1 \rightarrow x^2 = 1 \rightarrow x = \pm\sqrt{1} \rightarrow x = \pm 1$$

Hay cuatro soluciones:  $x_1 = -6, x_2 = -1, x_3 = 1, x_4 = 6$

$$b) \frac{2x^2 - 1}{2} + \frac{x-1}{6} = \frac{x-1}{3}$$

$$\frac{6x^2 - 3}{6} + \frac{x-1}{6} = \frac{2x-2}{6}$$

$$6x^2 - 3 + x - 1 = 2x - 2$$

$$6x^2 - x - 2 = 0$$

**6. Halla las soluciones de las ecuaciones:**

$$a) \frac{x-2}{6} - \frac{x+1}{3} = \frac{1-x}{2}$$

$$b) \frac{5}{4x^2} - \frac{1}{3} = \frac{3}{6x^2}$$

$$c) \frac{2 \cdot (2x+1)}{2x-1} - \frac{3 \cdot (2x-1)}{2x+1} + 5 = 0$$

$$\frac{x-2}{6} - \frac{x+1}{3} = \frac{1-x}{2}$$

$$\frac{x-2}{6} - \frac{2x+2}{6} = \frac{3-3x}{6}$$

$$x-2-(2x+2)=3-3x$$

$$x-2-2x-2=3-3x$$

$$-x-4=3-3x$$

$$-x+3x=3+4$$

$$2x=7$$

$$x = \frac{7}{2}$$

$$\frac{5}{4x^2} - \frac{1}{3} = \frac{3}{6x^2}$$

$$\frac{30}{24x^2} - \frac{8x^2}{24x^2} = \frac{12}{24x^2}$$

$$30 - 8x^2 = 12$$

$$30 - 12 = 8x^2$$

$$8 = 8x^2$$

$$1 = x^2$$

$$\pm \sqrt{1} = x$$

$$\pm 1 = x$$

$$\frac{2 \cdot (2x+1)}{2x-1} - \frac{3 \cdot (2x-1)}{2x+1} + 5 = 0$$

$$\frac{2 \cdot (2x+1) \cdot (2x-1)}{(2x+1) \cdot (2x-1)} - \frac{3 \cdot (2x-1) \cdot (2x+1)}{(2x+1) \cdot (2x-1)} + \frac{5 \cdot (2x-1) \cdot (2x-1)}{(2x+1) \cdot (2x-1)} = 0$$

$$2 \cdot (2x+1) \cdot (2x-1) - 3 \cdot (2x-1) \cdot (2x+1) + 5 \cdot (2x+1) \cdot (2x-1) = 0$$

Recordar  $(a+b) \cdot (a-b) = a^2 - b^2$

$$2 \cdot (4x^2 - 1) - 3 \cdot (4x^2 - 1) + 5 \cdot (4x^2 - 1) = 0$$

$$8x^2 - 2 - 12x^2 + 3 + 20x^2 - 5 = 0$$

$$16x^2 - 4 = 0$$

$$16x^2 = 4$$

$$x^2 = \frac{4}{16} \rightarrow x = \pm \sqrt{\frac{4}{16}} = \pm \frac{2}{4}$$

6. Halla la solución de estos sistemas:

$$\text{a) } \left. \begin{aligned} \frac{x+y}{2} + x &= 4 \\ \frac{2x-y}{2} + x - y &= 1 \end{aligned} \right\}$$

$$\text{b) } \left. \begin{aligned} 3xy &= 5 \\ 2x + \frac{1}{3}(y-1) &= 2 \end{aligned} \right\}$$

**Solución:**

$$\text{a) } \left. \begin{aligned} \frac{x+y}{2} + x &= 4 \\ \frac{2x-y}{2} + x - y &= 1 \end{aligned} \right\} \rightarrow \left. \begin{aligned} \frac{x+y}{2} + \frac{2x}{2} &= \frac{8}{2} \\ \frac{2x-y}{2} + \frac{2x}{2} - \frac{2y}{2} &= \frac{2}{2} \end{aligned} \right\} \rightarrow \left. \begin{aligned} x+y+2x &= 8 \\ 2x-y+2x-2y &= 2 \end{aligned} \right\} \rightarrow$$

$$\rightarrow \left. \begin{aligned} 3x+y &= 8 \\ 4x-3y &= 2 \end{aligned} \right\} \rightarrow y = 8 - 3x$$

$$4x - 3y = 2 \rightarrow 4x - 3(8 - 3x) = 2 \rightarrow 4x - 24 + 9x = 2 \rightarrow 13x = 26 \rightarrow x = 2$$

$$y = 8 - 3x = 8 - 6 = 2$$

La solución es:  $x = 2$ ;  $y = 2$

$$\text{b) } \left. \begin{aligned} 3xy &= 5 \\ 2x + \frac{1}{3}(y-1) &= 2 \end{aligned} \right\} \rightarrow \left. \begin{aligned} 3xy &= 5 \\ 6x + y - 1 &= 6 \end{aligned} \right\} \rightarrow \left. \begin{aligned} 3xy &= 5 \\ 6x + y &= 7 \end{aligned} \right\}$$

Despejamos  $y$  de la 2.<sup>a</sup> ecuación:  $y = 7 - 6x$

Sustituimos en la primera:

$$3x(7 - 6x) = 5 \rightarrow 21x - 18x^2 = 5 \rightarrow 18x^2 - 21x + 5 = 0$$

7. Averigua la solución de los siguientes sistemas de ecuaciones:

$$\text{a) } \left. \begin{array}{l} \frac{2y+x-2}{4} - x = -3 \\ x - (y+1) = 3 \end{array} \right\}$$

$$\text{b) } \left. \begin{array}{l} \frac{5}{x} - \frac{2}{3y} = -2 \\ x + 2y = 1 \end{array} \right\}$$

**Solución:**

$$\text{a) } \left. \begin{array}{l} \frac{2y+x-2}{4} - x = -3 \\ x - (y+1) = 3 \end{array} \right\} \rightarrow \left. \begin{array}{l} \frac{2y+x-2}{4} - \frac{4x}{4} = \frac{-12}{4} \\ x - y - 1 = 3 \end{array} \right\} \rightarrow$$

$$\rightarrow \left. \begin{array}{l} 2y+x-2-4x = -12 \\ x-y = 4 \end{array} \right\} \rightarrow \left. \begin{array}{l} -3x+2y = -10 \\ x-y = 4 \end{array} \right\} \rightarrow x = 4+y$$

$$-3(4+y) + 2y = -10 \rightarrow -12 - 3y + 2y = -10 \rightarrow -y = 2 \rightarrow y = -2$$

$$x = 4 + y = 4 - 2 = 2$$

La solución es:  $x = 2$ ;  $y = -2$

$$\text{b) } \left. \begin{array}{l} \frac{5}{x} - \frac{2}{3y} = -2 \\ x + 2y = 1 \end{array} \right\}$$

Despejamos  $x$  de la 2.<sup>a</sup> ecuación:  $x = 1 - 2y$ ; y sustituimos en la primera:

$$\rightarrow \frac{5}{1-2y} - \frac{2}{3y} = -2 \rightarrow \frac{5 \cdot 3y}{3y(1-2y)} - \frac{2(1-2y)}{3y(1-2y)} = \frac{-2 \cdot 3y(1-2y)}{3y \cdot (1-2y)} \rightarrow$$

$$\rightarrow 15y - 2 + 4y = -6y + 12y^2 \rightarrow 12y^2 - 25y + 2 = 0$$

$$y = \frac{25 \pm \sqrt{625 - 96}}{24} = \frac{25 \pm \sqrt{529}}{24} = \frac{25 \pm 23}{24} = f \frac{48}{24} = 2$$

$$, \frac{2}{24} = \frac{1}{12}$$

Calculamos, en cada caso, el valor de  $x$  sustituyendo en la ecuación  $x = 1 - 2y$ :

$$- \text{ Si } y = 2 \rightarrow x = 1 - 4 = 3$$

$$- \text{ Si } y = \frac{1}{12} \rightarrow x = 1 - 2 \cdot \frac{1}{12} = 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$$

Las soluciones son:

$$x_1 = -3; \quad y_1 = 2$$

$$x_2 = \frac{5}{6}; \quad y_2 = \frac{1}{12}$$

8. Resuelve los siguientes sistemas: a) 
$$\left. \begin{aligned} x^2 - y^2 &= 55 \\ xy &= 24 \end{aligned} \right\}$$
 b) 
$$\left. \begin{aligned} x - 3y &< 0 \\ x &> 2 \\ y - 3x &> -1 \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} x^2 - y^2 &= 55 \\ xy &= 24 \end{aligned} \right\}$$

$$x^2 = 55 + y^2$$

$xy = 24 \rightarrow$  Elevamos al cuadrado a cada lado de la ecuación

$$(xy)^2 = 24^2$$

$x^2 \cdot y^2 = 576$  - Y sustituimos el valor de la  $x^2$

$$(55 + y^2) \cdot y^2 = 576$$

$$55y^2 + y^4 = 576$$

$y^4 + 55y^2 - 576 = 0$  Ahora hacemos un cambio de variable  $y^2 = h$

$$y^2 \cdot y^2 + 55y^2 - 576 = 0$$

$$h^2 + 55h - 576 = 0$$

$$h = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-55 \pm \sqrt{55^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-576)}}{2 \cdot 1} = \frac{-55 \pm \sqrt{3025 + 2304}}{2} = \frac{-5 \pm 73}{2} =$$

$$\frac{-55 + 73}{2} = \frac{18}{2} = 9$$

$$= \frac{-55 - 73}{2} = \frac{-128}{2} = -64$$

Desacemos el cambio de variable

$$y^2 = h \rightarrow y^2 = 9 \rightarrow y = \pm\sqrt{9} = \pm 3$$

$$y^2 = h \rightarrow y^2 = -64 \rightarrow y = \pm\sqrt{-64} \text{ No tiene solución real}$$

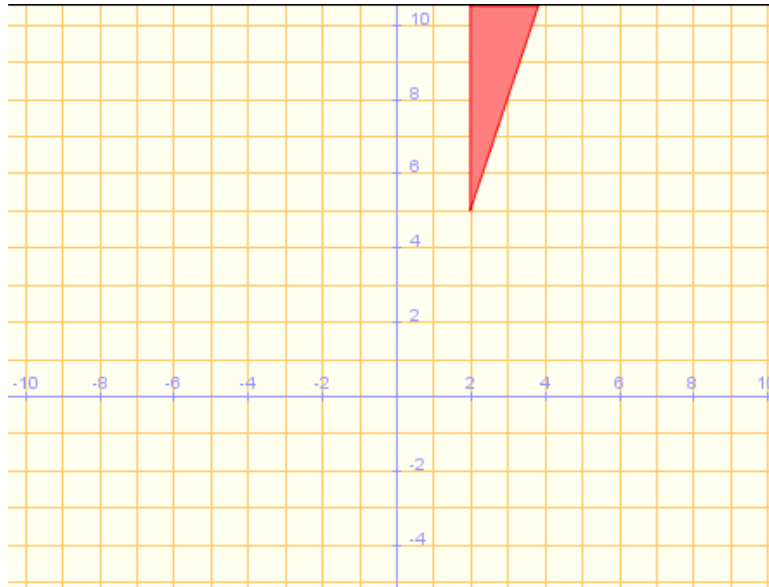
Y calculamos el valor de la  $x$

$$y = +3 \rightarrow x = \sqrt{55 + y^2} = \sqrt{55 + 3^2} = \sqrt{55 + 9} = \sqrt{64} = 8$$

$$y = -3 \rightarrow x = \sqrt{55 + y^2} = \sqrt{55 + (-3)^2} = \sqrt{55 + 9} = \sqrt{64} = 8$$

$$\left. \begin{array}{l} x - 3y < 0 \\ x > 2 \\ y - 3x > -1 \end{array} \right\}$$

Área que delimitan las tres inecuaciones:



9. Un grupo de amigos va a cenar a un restaurante. Cuando van a pagar observan que, si cada uno pone 20 euros, sobran 5 euros; y si cada uno pone 15 euros, faltan 20 euros. ¿Cuántos amigos son y cuál es el precio total que tienen que pagar?

Definimos las incógnitas

$x$  = número de amigos = 20

$y$  = precio total que tienen que pagar = 95 Euros

$$20x - 5 = y$$

$$15x + 20 = y$$

$$\begin{cases} 20x - 5 = y \\ 15x + 20 = y \rightarrow 15 \cdot 5 + 20 = 75 + 20 = 95 = y \end{cases}$$

Por igualación

$$20x - 5 = 15x + 20$$

$$20x - 15x = 20 + 5$$

$$5x = 25$$

$$x = \frac{25}{5} = 5$$

**Son 20 amigos y ponen 95 euros en total**

**10. Hemos comprado un pantalón y una camiseta por 44,1 euros. El pantalón tenía un 15% de descuento y la camiseta estaba rebajada un 10%. Si no tuvieran ningún descuento, habríamos tenido que pagar 51 euros. ¿Cuánto nos ha costado el pantalón y cuánto la camiseta?**

**Solución:**

Llamamos  $x$  al precio del pantalón sin el descuento e  $y$  al precio de la camiseta sin descuento. Así:

$$\left. \begin{array}{l} x + y = 51 \\ 0,85x + 0,9y = 44,1 \end{array} \right\} \rightarrow y = 51 - x$$

$$0,85x + 0,9y = 44,1 \rightarrow 0,85x + 0,9(51 - x) = 44,1 \rightarrow 0,85x - 0,9x = 44,1 - 45,9 \rightarrow$$

$$\rightarrow -0,05x = -1,8 \rightarrow x = 36$$

$$y = 51 - x = 51 - 36 = 15$$

El pantalón costaba 36 euros y la camiseta 15 euros, sin los descuentos.

Por tanto, el precio del pantalón (con descuento) ha sido de:

$$36 \cdot 0,85 = 30,6 \text{ euros}$$

y el de la camiseta (con descuento) ha sido de:

$$15 \cdot 0,9 = 13,5 \text{ euros}$$



**11. Resuelve e interpreta gráficamente esta inecuación:**

$$-3x + 1 > -5$$

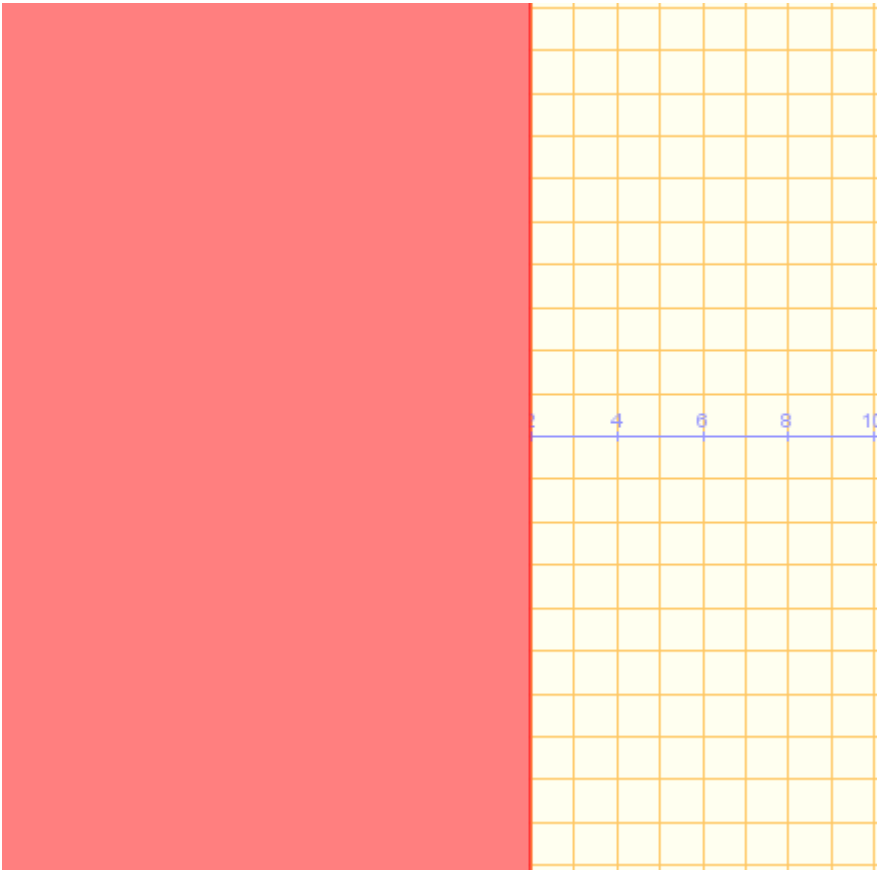
$$-3x + 1 > -5$$

$$-3x > -5 - 1$$

$-3x > -6 \rightarrow$  Si cambiamos los signos hay que cambiar el sentido de la desigualdad

$$3x < 6$$

$$x < 3$$



**12. Resuelve las siguientes ecuaciones:**

a)  $\sqrt{x+20} - \sqrt{x-1} = 3$

b)  $2x^4 - 3x^3 - 7x^2 + 12x - 4 = 0$

**Solución:**

a)  $\sqrt{x+20} - \sqrt{x-1} = 3 \rightarrow \sqrt{x+20} = 3 + \sqrt{x-1}$

Elevamos al cuadrado:

$$\begin{aligned}
 (\sqrt{x+20})^2 &= (3+\sqrt{x-1})^2 \rightarrow x+20=9+6\sqrt{x-1}+x-1 \rightarrow \\
 \rightarrow 12 &= 6\sqrt{x-1} \rightarrow 2 = \sqrt{x-1} \rightarrow x-1=4 \rightarrow x=5
 \end{aligned}$$

Comprobamos la solución:

$$\sqrt{5+20} - \sqrt{5-1} = \sqrt{25} - \sqrt{4} = 5 - 2 = 3$$

La solución es  $x = 5$ .

b)  $2x^4 - 3x^3 - 7x^2 + 12x - 4 = 0$

Aplicamos la regla de Ruffini:

$$\begin{array}{r|rrrrr}
 & 2 & -3 & -7 & 12 & -4 \\
 1 & & 2 & -1 & -8 & 4 \\
 \hline
 & 2 & -1 & -8 & 4 & \boxed{0} \\
 2 & & 4 & 6 & -4 & \\
 \hline
 & 2 & 3 & -2 & \boxed{0} & \\
 -2 & & -4 & 2 & & \\
 \hline
 & 2 & -1 & \boxed{0} & & \rightarrow 2x-1=0 \rightarrow x = \frac{1}{2}
 \end{array}$$

Las soluciones son:

$$x_1 = 1, x_2 = 2, x_3 = -2, x_4 = \frac{1}{2}$$

13. Calcula los siguientes límites y representa las ramas que obtengas:

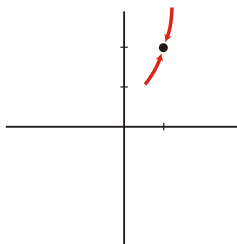
a)  $\lim_{x \rightarrow 1} (-x^2 + 3x^3)$

b)  $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{-1}{2x-6}$

c)  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x^2 - 4x + 4}$

**Solución:**

a)  $\lim_{x \rightarrow 1} (-x^2 + 3x^3) = 2$

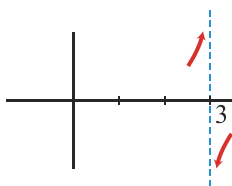


b)  $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{-1}{2x-6} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{-1}{2(x-3)}$

Hallamos los límites laterales:

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{-1}{2x-6} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{-1}{2x-6} = -\infty$$

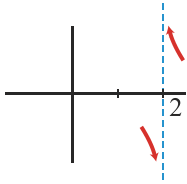


c)  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x^2 - 4x + 4} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(x+2)}{(x-2)^2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x+2}{x-2}$

Hallamos los límites laterales:

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x+2}{x-2} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x+2}{x-2} = +\infty$$



14. Halla los siguientes límites y representa gráficamente los resultados que obtengas:

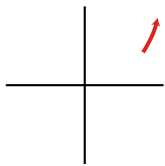
a)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (-2x + 3x^3)$

b)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x+1}{1+x^2}$

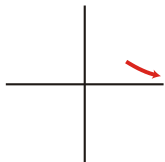
c)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x+1}{1+x^2}$

**Solución:**

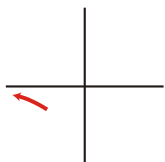
a)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (-2x + 3x^3) = +\infty$



b)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x+1}{1+x^2} = 0$



c)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x+1}{1+x^2} = 0$



**15. Halla la derivada de las funciones:**

a)  $f(x) = -x^7 + \frac{3}{4}x - 1$

b)  $f(x) = \frac{4x^3 - 3}{x^2 - 1}$

c)  $f(x) = e^{7x^4 - 3}$

**Solución:**

a)  $f'(x) = -7x^6 + \frac{3}{4}$

b)  $f'(x) = \frac{12x^2(x^2 - 1) - (4x^3 - 3)2x}{(x^2 - 1)^2} = \frac{12x^4 - 12x^2 - 8x^4 + 6x}{(x^2 - 1)^2} = \frac{4x^4 - 12x^2 + 6x}{(x^2 - 1)^2}$

c)  $f'(x) = e^{7x^4 - 3} \cdot (28x^3) = 28x^3 \cdot e^{7x^4 - 3}$

**16. Estudia la continuidad de la función:**

$$f(x) = \begin{cases} 2x + 3 & \text{si } x \leq 3 \\ x^2 + 3 & \text{si } x > 3 \end{cases}$$

**17. Estudia la continuidad de la función:**

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & \text{si } x \leq -1 \\ \frac{1}{x} & \text{si } -1 < x < 2 \\ \frac{3 - x}{2} & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$$