NOMBRE Y APELLIDOS____

FECHA _______________ **CURSO:** _______________ **BLOQUE GEMOTERÍA**

Ejercicio nº 1.-

Halla la ecuación del plano que contiene a estas rectas:

$$r:\begin{cases} x+y=1 \\ z=2 \end{cases} \qquad s:\begin{cases} x=1+\lambda \\ y=-2\lambda \\ z=2+\lambda \end{cases}$$

Solución:

- Veamos que r y s se cortan en un punto. Para ello, sustituimos las ecuaciones de s en las de r:

$$\left.\begin{array}{l} 1+\lambda-2\lambda=1 \;\rightarrow\; \lambda=0 \\ 2+\lambda=2 \;\rightarrow\; \lambda=0 \end{array}\right\} \text{Se cortan en el punto } (1,0,2).$$

- Un vector de dirección de r es:

$$\vec{d}_r=(1,1,0)\times(0,0,1)=(1,-1,0)$$

- Un vector dirección de s es:

$$\vec{d}_s=(1,-2,1)$$

- Un vector normal al plano buscado es:

$$\vec{d}_r \times \vec{d}_s = (1, -1, 0) \times (1, -2, 1) = (-1, -1, -1) \,//\, (1, 1, 1)$$

- Por tanto, el plano que contiene a r y a s es:

$1 \cdot (x-1) + 1 \cdot (y-0) + 1 \cdot (z-2) = 0$, es decir:

$x + y + z - 3 = 0$

Ejercicio nº 2.-

Considera los planos π: $2x + ay + 4z - 1 = 0$ y σ: $ax + 2y + 4z - 3 = 0$.

a) Calcula el ángulo que forman π y σ cuando $a = 1$.

b) Halla a para que π y σ sean paralelos.

c) Determina el valor de a para que π y σ sean perpendiculares.

Solución:

a) Un vector normal a π es $\vec{n}_1(2, 1, 4)$.

Un vector normal a σ es $\vec{n}_2(1, 2, 4)$.

Si llamamos α al ángulo que forman π y σ, tenemos que:

$$\cos\alpha = \frac{\vec{n}_1 \bullet \vec{n}_2}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|} = \frac{2+2+16}{\sqrt{21}\cdot\sqrt{21}} = \frac{20}{21} \approx 0{,}952 \quad \rightarrow \quad \alpha = 17^\circ\ 45'\ 10''$$

b) Sus vectores normales han de ser proporcionales:

$$\frac{2}{a} = \frac{a}{2} = \frac{4}{4} \quad \rightarrow \quad a = 2$$

c) Sus vectores normales han de ser perpendiculares:

$$(2, a, 4) \bullet (a, 2, 4) = 2a + 2a + 16 = 4a + 16 = 0 \quad \rightarrow \quad a = -4$$

<u>Ejercicio nº 3.-</u>

Dados el punto $P(2, 0, -3)$, la recta $r: \begin{cases} x = 2 + \lambda \\ y = -3 + \lambda \\ z = 2 - 2\lambda \end{cases}$ y el plano $\pi: x + 2y + 2z - 1 = 0$,

calcula la distancia entre:

a) P y π

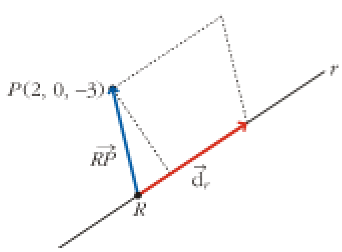
b) ***P*** **y** ***r***

Solución:

a) $dist(P, \pi) = \dfrac{|2+0-6-1|}{\sqrt{1+4+4}} = \dfrac{5}{3} \approx 1{,}67$

b) Hallamos un punto y un vector dirección de la recta r :

$$R(2, -3, 2) \in r; \ \vec{d}_r(1, 1, -2) \parallel r$$



La distancia de P a r es igual al área del paralelogramo determinado por

$\overrightarrow{RP}$ y $\vec{d}_r$, dividido entre la base de dicho paralelogramo.

$$\text{Área} = \left|\overrightarrow{RP} \times \vec{d}_r\right| = |(0, 3, -5) \times (1, 1, -2)| = |(-1, -5, -3)| = \sqrt{1+25+9} = \sqrt{35}$$

$$\text{Base} = \left|\vec{d}_r\right| = |(1, 1, -2)| = \sqrt{1+1+4} = \sqrt{6}$$

Por tanto:

$$dist(P, r) = \frac{\sqrt{35}}{\sqrt{6}} \approx 2{,}42$$

Ejercicio nº 4.-

Halla el volumen del tetraedro determinado por los ejes coordenados y el plano

π: $3x - 2y - 4z + 2 = 0$.

Solución:

Obtenemos los puntos de corte del plano π con los ejes coordenados:

$$- \text{Con el eje } X \;\rightarrow\; y = z = 0 \;\rightarrow\; x = -\frac{2}{3} \;\rightarrow\; \text{Punto } A\left(-\frac{2}{3}, 0, 0\right)$$

$$- \text{Con el eje } Y \;\rightarrow\; x = z = 0 \;\rightarrow\; y = 1 \;\rightarrow\; \text{Punto } B\,(0, 1, 0)$$

$$- \text{Con el eje } Z \;\rightarrow\; x = y = 0 \;\rightarrow\; z = \frac{1}{2} \;\rightarrow\; \text{Punto } C\left(0, 0, \frac{1}{2}\right)$$

El cuarto vértice del tetraedro es el origen $D\,(0, 0, 0)$.

$$\overrightarrow{DA}\left(-\frac{2}{3}, 0, 0\right); \ \overrightarrow{DB}(0, 1, 0); \ \overrightarrow{DC}\left(0, 0, \frac{1}{2}\right)$$

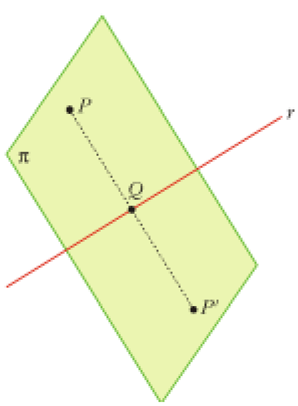
$$\left[\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DB}, \overrightarrow{DC}\right] = \begin{vmatrix} -\frac{2}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{vmatrix} = \frac{-1}{3}$$

$$\text{Volumen} = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{18} \text{ u}^3$$

Ejercicio nº 5.-

Halla el punto simétrico de $P(-2, 1, 5)$ respecto a la recta $r: \dfrac{x-2}{1} = \dfrac{y+3}{-2} = \dfrac{z-1}{1}$.

Solución:



- Hallamos la ecuación del plano, π, que pasa por P y es perpendicular a r:

$1 \cdot (x + 2) - 2 \cdot (y - 1) + 1 \cdot (z - 5) = 0$, es decir:

π: $x - 2y + z - 1 = 0$

- Hallamos el punto, Q, de intersección de r y π:

$$r: \begin{cases} x = 2 + \lambda \\ y = -3 - 2\lambda \\ z = 1 + \lambda \end{cases} \qquad \begin{array}{l} (2+\lambda) - 2(-3-2\lambda) + (1+\lambda) - 1 = 0 \rightarrow \\ \rightarrow 2 + \lambda + 6 + 4\lambda + 1 + \lambda - 1 = 0 \rightarrow \\ \rightarrow 6\lambda + 8 = 0 \rightarrow \lambda = \frac{-8}{6} = \frac{-4}{3} \end{array}$$

$$Q\left(\frac{2}{3}, \frac{-1}{3}, \frac{-1}{3}\right)$$

- El punto Q es el punto medio de PP', siendo P' el simétrico de P respecto a r:

Si $P'(x, y, z)$:

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{x-2}{2}=\dfrac{2}{3} \quad\to\quad x=\dfrac{10}{3}\\[3em] \dfrac{y+1}{2}=\dfrac{-1}{3} \quad\to\quad y=\dfrac{-5}{3}\\[3em] \dfrac{z+5}{2}=\dfrac{-1}{3} \quad\to\quad z=\dfrac{-17}{3}\end{array}\right\} P'\left(\dfrac{10}{3}, \dfrac{-5}{3}, \dfrac{-17}{3}\right)$$

<u>Ejercicio nº 6.-</u>

Halla el lugar geométrico de los puntos, *P*, tales que la distancia de *P* a *A* sea igual al triple de la distancia de *P* a *B*, siendo *A* (–1, 0, 0) y *B* (1, 0, 0). Identifica la figura resultante.

Solución:

Si $P(x, y, z)$ es un punto del lugar geométrico, tenemos que:

$dist\,(P, A) = 3\,dist\,(P, B)$, es decir:

$$\sqrt{(x+1)^2+y^2+z^2} = 3\sqrt{(x-1)^2+y^2+z^2}$$

$$(x+1)^2+y^2+z^2 = 9\,[(x-1)^2+y^2+z^2]$$

$$x^2+2x+1+y^2+z^2 = 9\,[x^2-2x+1+y^2+z^2]$$

$$x^2+2x+1+y^2+z^2=9x^2-18x+9+9y^2+9z^2$$

$$8x^2+8y^2+8z^2-20x+8=0$$

$$x^2+y^2+z^2-\frac{5}{2}x+1=0$$

$$\left(x-\frac{5}{4}\right)^2+y^2+z^2=\frac{9}{16}$$

Se trata de una esfera de centro $\left(\frac{5}{4},0,0\right)$ y radio $\frac{3}{4}$.

Ejercicio nº 7.-

Dados los vectores $\vec{u}(-1,1,2)$ y $\vec{v}(1,0,-1)$, haya el conjunto de vectores que, siendo perpendiculares a $\vec{u}$, sean coplanarios con $\vec{u}$ y $\vec{v}$.

Solución:

Buscamos un vector $\vec{w}(x,y,z)$ que cumpla lo siguiente:

1) $\vec{w}\perp\vec{u} \rightarrow \vec{u}\bullet\vec{w}=0 \rightarrow (-1,1,2)\bullet(x,y,z)=0 \rightarrow -x+y+2z=0$

2) Sea coplanario con $\vec{u}$ y $\vec{v}$, esto es:

$$\left[\vec{u},\vec{v},\vec{w}\right]=0 \rightarrow \begin{vmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ x & y & z \end{vmatrix} = -x+2y-y-z=0 \rightarrow -x+y-z=0$$

Resolvemos el sistema formado por las dos ecuaciones obtenidas:

$$\left.\begin{array}{l} -x+y+2z=0 \\ -x+y-z=0 \end{array}\right\} \rightarrow z=0 \rightarrow -x+y=0 \rightarrow x=y$$

Los vectores $\vec{w}$ que buscamos son de la forma $(\lambda,\lambda,0)$ con $\lambda\neq 0$.