NOMBRE Y APELLIDOS____

FECHA _______________ **CURSO:** _______________ **BLOQUE GEMOTERÍA**

Ejercicio nº 1.-

Escribe la ecuación del plano, π, que contiene al punto P (3, 0, –2) y a la recta

$$r: \begin{cases} x = 3 + 2\lambda \\ y = 1 - \lambda \\ z = 1 + \lambda \end{cases}$$

Solución:

- Buscamos un punto y un vector dirección de r :

$$R(3, 1, 1) \in r; \quad \vec{d}_r(2, -1, 1) \,//\, r$$

- El vector $\vec{d}_r$ y el vector $\overrightarrow{PR}(0, 1, 3)$ serán paralelos al plano que buscamos. Un vector normal a π es:

$$\vec{d}_r \times \overrightarrow{PR} = (2, -1, 1) \times (0, 1, 3) = (-4, -6, 2) \,//\, (2, 3, -1)$$

- La ecuación del plano será:

$2 \cdot (x - 3) + 3 \cdot (y - 0) - 1 \cdot (z + 2) = 0$, es decir:

$\pi: 2x + 3y - z - 8 = 0$

Ejercicio nº 2.-

Dadas las rectas $r: \begin{cases} 2x - 3y + z - 2 = 0 \\ -3x + 2y + 2z + 1 = 0 \end{cases}$ **y** $s: \begin{cases} x = 3 - 2\lambda \\ y = -1 + \lambda \\ z = -2 + 2\lambda \end{cases}$ **y el punto** $P(1,\ 0,\ -5)$;

calcula el ángulo que forma la recta r **con el plano,** π**, perpendicular a** s **que pasa por** P**.**

Solución:

- Un vector dirección de r es:

$$\vec{d}_r = (2, -3, 1) \times (-3, 2, 2) = (-8, -7, -5) \parallel (8, 7, 5) = \vec{d}$$

- Un vector normal al plano π es:

$$\vec{n} = \vec{d}_s = (-2, 1, 2)$$

- Si llamamos α al ángulo que forman r y π, tenemos que:

$$\cos\left(90^\circ - \alpha\right) = \frac{\vec{d} \cdot \vec{n}}{\left|\vec{d}\right| \cdot \left|\vec{n}\right|} = \frac{-16+7+10}{\sqrt{138} \cdot \sqrt{9}} = \frac{1}{3\sqrt{138}} \approx 0{,}028 \quad \rightarrow$$

$$\rightarrow \quad 90^\circ - \alpha = 88^\circ\ 22'\ 26'' \quad \rightarrow \quad \alpha = 1^\circ\ 37'\ 34''$$

<u>Ejercicio nº 3.-</u>

Calcula la distancia entre las rectas:

$$r : \frac{x+1}{3} = \frac{y-2}{4} = \frac{z+1}{0} \quad \text{y} \quad s : \begin{cases} x = -5 + \lambda \\ y = 2 - \lambda \\ z = 3 + 4\lambda \end{cases}$$

Solución:

- Buscamos un punto y un vector dirección de cada recta:

$$R\left(-1,\ 2,\ -1\right) \in r;\ \vec{d}_r\left(3, 4,\ 0\right) \mathbin{//} r$$

$$S\left(-5,\ 2,\ 3\right) \in s;\ \vec{d}_s\left(1, -1,\ 4\right) \mathbin{//} s$$

$$\vec{RS}\left(-4,\ 0, 4\right)$$

- La distancia entre las dos rectas es igual al volumen del paralelepípedo definido por

  $\vec{RS}, \vec{d}_r, \vec{d}_s$, dividido entre el área del paralelogramo definido por $\vec{d}_r$ y $\vec{d}_s$:

$$dist(r, s) = \frac{|[\overline{RS}, \vec{d}_r, \vec{d}_s]|}{|\vec{d}_r \times \vec{d}_s|}$$

$$\left[\overline{RS}, \vec{d}_r, \vec{d}_s\right] = \begin{vmatrix} -4 & 0 & 4 \\ 3 & 4 & 0 \\ 1 & -1 & 4 \end{vmatrix} = -92$$

$$\left|\vec{d}_r \times \vec{d}_s\right| = \left|(3, 4, 0) \times (1, -1, 4)\right| = \left|(16, -12, -7)\right| = \sqrt{16^2 + (-12)^2 + (-7)^2} = \sqrt{449}$$

Por tanto:

$$dist(r, s) = \frac{92}{\sqrt{449}} \approx 4{,}34$$

<u>Ejercicio nº 4.-</u>

a) Escribe la ecuación del plano, π, que pasa por los puntos *P* (2, 1, –1), *Q* (1, 0, 3) y *R* (–3, 1, 1).

b) Calcula el área del triángulo cuyos vértices son los puntos de corte del plano π con los ejes coordenados.

Solución:

a) Un vector normal al plano es:

$$\vec{PQ} \times \vec{PR} = (-1, -1, 4) \times (-5, 0, 2) = (-2, -18, -5) \parallel (2, 18, 5)$$

La ecuación del plano buscado será $2(x-1) + 18y + 5(z-3) = 0$, es decir:

$$2x + 18y + 5z - 17 = 0$$

b) Hallamos los puntos de corte de π con los ejes coordenados:

$$\text{– Con el eje } X \rightarrow y = z = 0 \rightarrow x = \frac{17}{2} \rightarrow \text{Punto } A\left(\frac{17}{2}, 0, 0\right)$$

$$\text{– Con el eje } Y \rightarrow x = z = 0 \rightarrow y = \frac{17}{18} \rightarrow \text{Punto } B\left(0, \frac{17}{18}, 0\right)$$

$$\text{– Con el eje } Z \rightarrow x = y = 0 \rightarrow z = \frac{17}{5} \rightarrow \text{Punto } C\left(0, 0, \frac{17}{5}\right)$$

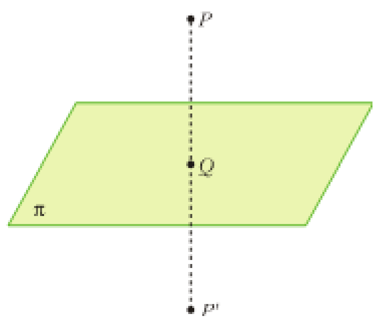
$$\overrightarrow{AB}\left(-\frac{17}{2}, \frac{17}{18}, 0\right); \ \overrightarrow{AC}\left(-\frac{17}{2}, 0, \frac{17}{5}\right)$$

$$\text{Área} = \frac{1}{2}\left|\vec{AB} \times \vec{AC}\right| = \frac{1}{2}\left|\left(\frac{289}{90}, \frac{289}{10}, \frac{289}{36}\right)\right| \approx 15{,}08 \text{ u}^2$$

Ejercicio nº 5.-

Obtén el punto simétrico de $P\,(2, -1, 3)$ respecto al plano π: $3x + 2y + z - 5 = 0$.

Solución:



- Hallamos la ecuación de la recta, r, que pasa por P y es perpendicular a π:

$$r: \begin{cases} x = 2 + 3\lambda \\ y = -1 + 2\lambda \\ z = 3 + \lambda \end{cases}$$

- Obtenemos el punto, Q, de intersección de r y π:

$$3\,(2 + 3\lambda) + 2\,(-1 + 2\lambda) + (3 + \lambda) - 5 = 0 \quad \rightarrow$$

$$\rightarrow\ 6 + 9\lambda - 2 + 4\lambda + 3 + \lambda - 5 = 0 \ \rightarrow\ 14\lambda + 2 = 0 \ \rightarrow\ \lambda = -\frac{1}{7}$$

$$Q\left(\frac{11}{7}, -\frac{9}{7}, \frac{20}{7}\right)$$

- Si llamamos P' al simétrico de P respecto de π, Q es el punto medio de PP':

$P'\ (x, y, z)$

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{x+2}{2} = \dfrac{11}{7} \quad \to \quad x = \dfrac{8}{7} \\[2ex] \dfrac{y-1}{2} = -\dfrac{9}{7} \quad \to \quad y = -\dfrac{11}{7} \\[2ex] \dfrac{z+3}{2} = \dfrac{20}{7} \quad \to \quad z = \dfrac{19}{7} \end{array}\right\} P'\left(\frac{8}{7}, -\frac{11}{7}, \frac{19}{7}\right)$$

<u>Ejercicio nº 6.-</u>

Obtén el lugar geométrico de los puntos que equidistan de los planos

π: $3x - 2y + 4z - 1 = 0$ y σ: $4x + 2y - 3z + 2 = 0$.

¿Qué obtienes?

Solución:

Si $P\ (x, y, z)$ es un punto del lugar geométrico, tenemos que:

dist $(P, \pi) =$ *dist* (P, σ), es decir:

$$\frac{|3x-2y+4z-1|}{\sqrt{29}} = \frac{|4x+2y-3z+2|}{\sqrt{29}} \rightarrow |3x-2y+4z-1| = |4x+2y-3z+2| \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{cases} 3x-2y+4z-1 = 4x+2y-3z+2 \rightarrow x+4y-7z+3=0 \\ 3x-2y+4z-1 = -4x-2y+3z-2 \rightarrow 7x+z+1=0 \end{cases}$$

Obtenemos los planos bisectores de los ángulos diedros formados por π y σ. Los planos obtenidos son perpendiculares entre sí y se cortan en la misma recta que π y σ.

Ejercicio nº 7.-

Estudia la posición relativa del plano $\pi: x+ay-z=b$ y la recta $r: \begin{cases} x+y-z=3 \\ 3x-y+z=1 \end{cases}$ en función de los valores de *a* y *b*.

Solución:

Las coordenadas del vector normal de π son $\vec{n}(1, a, -1)$. Las coordenadas del vector dirección de r son:

$$\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & -1 \\ 3 & -1 & 1 \end{vmatrix} = (0, -4, -4) \text{ paralelo a } \vec{u}(0, 1, 1)$$

La recta r será paralela o estará contenida en π si $\vec{n} \perp \vec{u}$:

$$\vec{n} \cdot \vec{u} = 0 \;\rightarrow\; (1, a, -1) \cdot (0, 1, 1) = 0 \;\rightarrow\; a - 1 = 0 \;\rightarrow\; a = 1$$

Además, estará contenida en π si cualquier punto de r está en π:

$P(1, 2, 0) \in r \;\rightarrow\; 1 + 2 - 0 = b \;\rightarrow\; b = 3$

Por tanto:

$$\text{Si } a = 1 \begin{cases} b = 3 \;\rightarrow\; r \text{ está contenida en } \pi. \\ b \neq 3 \;\rightarrow\; r \text{ es paralela a } \pi. \end{cases}$$

Si $a \neq 1$ y b cualquiera $\rightarrow$ r y π se cortan en un punto.