NOMBRE Y APELLIDOS____

FECHA ________________ **CURSO:** ________________ **BLOQUE GEMOTERÍA**

Ejercicio nº 1.-

a) Calcula el valor de *m* para que las siguientes rectas sean coplanarias:

$$r:\begin{cases} x = 3 - \lambda \\ y = m + \lambda \\ z = 2 + 2\lambda \end{cases} \qquad s: \frac{x-1}{1} = \frac{y}{-1} = \frac{z+2}{3}$$

b) ¿Cuál será la posición relativa de *r* y *s* para ese valor de *m*?

Solución:

a) Buscamos un punto y un vector dirección de cada recta:

$$\text{de } r \;\rightarrow\; R(3, m, 2) \in r;\; \vec{d}_r(-1, 1, 2) \,//\, r$$

$$\text{de } s \;\rightarrow\; S(1, 0, -2) \in s;\; \vec{d}_s(1, -1, 3) \,//\, s$$

Para que sean coplanarias, los vectores $\overrightarrow{RS}$, $\vec{d}_r$ y $\vec{d}_s$ han de ser linealmente dependientes, es decir, su producto mixto ha de ser cero:

$$\dot{RS} = (-2, -m, -4)$$

$$\left[\overline{RS}, \vec{d}_r, \vec{d}_s\right] = \begin{vmatrix} -2 & -m & -4 \\ -1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 3 \end{vmatrix} = -5m - 10 = 0 \quad \rightarrow \quad m = -2$$

b) Como $\vec{d}_r$ y $\vec{d}_s$ no tienen la misma dirección (pues sus coordenadas no son proporcionales), las rectas se cortarían en un punto, serían secantes.

<u>Ejercicio nº 2.-</u>

Determina la ecuación del plano que contiene a la recta $r: \begin{cases} 3x + y - 4z + 1 = 0 \\ -2x - y + z + 1 = 0 \end{cases}$ y es ortogonal al plano $\pi: 5x - 2y + 4z - 2 = 0$.

Solución:

- Buscamos un punto de la recta r:

$$y = 0 \;\; \rightarrow \;\; x = 1,\; z = 1 \;\; \rightarrow \;\; R\,(1, 0, 1) \in r$$

- Un vector dirección de r es:

$$\vec{d}_r = (3, 1, -4) \times (-2, -1, 1) = (-3, 5, -1)$$

- Un vector normal a π es $\vec{n}(5, -2, 4)$.

- Un vector normal al plano que buscamos es:

$$\vec{d}_r \times \vec{n} = (-3, 5, -1) \times (5, -2, 4) = (18, 7, -19)$$

- La ecuación del plano buscado será:

$18 \cdot (x - 1) + 7 \cdot (y - 0) - 19 \cdot (z - 1) = 0$, es decir:

$18x + 7y - 19z + 1 = 0$

<u>Ejercicio nº 3.-</u>

Halla la distancia de la recta $r: \begin{cases} x = -1 + \lambda \\ y = 2 - 2\lambda \\ z = 3 - \lambda \end{cases}$ **al plano** $\pi: 2x + y = 4$.

Solución:

- Estudiamos la posición relativa de r y π:

$\vec{d}_r(1, -2, -1) \,//\, r; \;\; \vec{n}(2, 1, 0) \perp \pi$

$$\vec{d}_r \cdot \vec{n} = 2 - 2 = 0 \quad \rightarrow \quad \vec{d}_r \perp \vec{n}$$

La recta y el plano son paralelos (o, quizás, la recta esté contenida en el plano).

- La distancia de r a π es igual a la distancia de cualquier punto de r al plano π:

$R\,(-1, 2, 3) \in r$; $\pi: 2x + y - 4 = 0$

$$dist\,(r, \pi) = dist\,(R, \pi) = \frac{|-2+2-4|}{\sqrt{4+1}} = \frac{4}{\sqrt{5}} \approx 1{,}79$$

(La recta y el plano son paralelos).

<u>Ejercicio nº 4.-</u>

Dados los puntos $A\,(-2, 0, 1)$, $B\,(1, -3, 2)$, $C\,(-1, 4, 5)$ y $D\,(3, 1, -2)$, calcula:

a) El área del triángulo de vértices A, B y C.

b) El volumen del tetraedro de vértices A, B, C y D.

Solución:

a) $\vec{AB}\,(3, -3, 1)$; $\vec{AC}\,(1, 4, 4)$

$$\text{Área} = \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\right| = \frac{1}{2}\left|(-16, -11, 15)\right| = \frac{1}{2}\sqrt{(-16)^2 + (-11)^2 + 15^2} =$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{602} = 12{,}27 \text{ u}^2$$

b) $\vec{AB}(3, -3, 1)$; $\vec{AC}(1, 4, 4)$; $\vec{AD}(5, 1, -3)$

$$\left[\vec{AB}, \vec{AC}, \vec{AD}\right] = \begin{vmatrix} 3 & -3 & 1 \\ 1 & 4 & 4 \\ 5 & 1 & -3 \end{vmatrix} = -136 \quad \rightarrow \quad \text{Volumen} = 136 \text{ u}^3$$

<u>Ejercicio nº 5.-</u>

Determina la posición relativa de las rectas:

$$r: \begin{cases} x = 2 - \lambda \\ y = 3 + 2\lambda \\ z = -1 + \lambda \end{cases} \quad \text{y} \quad s: \frac{x+2}{3} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-1}{2},$$

y halla la ecuación de la perpendicular común.

Solución:

- Posición relativa:

$$R(2, 3, -1) \in r;\ \vec{d}_r(-1, 2, 1) \,//\, r$$

$$S(-2, 1, 1) \in s;\ \vec{d}_s(3, 1, 2) \,//\, s$$

$$\dot{RS}(-4, -2, 2)$$

$$\left[\overline{RS}, \vec{d}_r, \vec{d}_s\right] = \begin{vmatrix} -4 & -2 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -36 \neq 0 \ \rightarrow \ \text{Las rectas se cruzan.}$$

- Perpendicular común:

  - Un punto genérico de r es $R(2 - \lambda, 3 + 2\lambda, -1 + \lambda)$.
  - Un punto genérico de s es $S(-2 + 3\mu, 1 + \mu, 1 + 2\mu)$.
  - Un vector genérico de origen en r y extremo en s es:

$$\dot{RS}(\lambda + 3\mu - 4, -2\lambda + \mu - 2, -\lambda + 2\mu + 2)$$

Este vector debe ser perpendicular a r y a s:

$$\left.\begin{array}{l} \overrightarrow{RS} \cdot \vec{d}_r = 0 \ \rightarrow \ -6\lambda + \mu + 2 = 0 \\ \overrightarrow{RS} \cdot \vec{d}_s = 0 \ \rightarrow \ -\lambda + 14\mu - 10 = 0 \end{array}\right\} \lambda = \frac{38}{83};\ \mu = \frac{62}{83}$$

$$\text{Así}:\ R\left(\frac{128}{83},\frac{325}{83},\frac{-45}{83}\right);\ S\left(\frac{20}{83},\frac{145}{83},\frac{207}{83}\right)$$

$$\overrightarrow{RS}\left(\frac{-108}{83},\frac{-180}{83},\frac{252}{83}\right) // (3, 5, -7)$$

Por tanto, las ecuaciones de la perpendicular común son:

$$p:\begin{cases} x=\dfrac{128}{83}+3\lambda \\[2ex] y=\dfrac{325}{83}+5\lambda \\[2ex] z=\dfrac{-45}{83}-7\lambda \end{cases}$$

<u>Ejercicio nº 6.-</u>

Halla el lugar geométrico de los puntos que equidistan de los planos:

$$\pi:\ x+y+2z-1=0 \quad \text{y} \quad \sigma:\ 2x-y+z+4=0$$

¿Qué obtienes?

Solución:

Si $P\ (x, y, z)$ es un punto del lugar geométrico, debe tenerse que:

$$dist\ (P, \pi) = dist\ (P, \sigma)$$

$$\frac{|x+y+2z-1|}{\sqrt{6}} = \frac{|2x-y+z+4|}{\sqrt{6}}$$

$$|x+y+2z-1| = |2x-y+z+4|$$

$$\begin{cases} x+y+2z-1 = 2x-y+z+4 & \rightarrow \quad x-2y-z+5=0 \\ x+y+2z-1 = -2x+y-z-4 & \rightarrow \quad 3x+3z+3=0 \quad \rightarrow \quad x+z+1=0 \end{cases}$$

Obtenemos los planos bisectores de los ángulos diedros formados por π y σ. Los planos obtenidos son perpendiculares entre sí y se cortan en la misma recta que π y σ.

Ejercicio nº 7.-

Calcula razonadamente el ortocentro de un triángulo cuyos vértices son los puntos de corte con los ejes coordenados del plano de ecuación $2x + y - 3z = 6$.

Solución:

Calculamos los vértices del triángulo:

Eje $OX \ \rightarrow \ y = z = 0 \ \rightarrow \ x = 3 \ \rightarrow \ A(3, 0, 0)$

Eje $OY \;\rightarrow\; x = z = 0 \;\rightarrow\; y = 6 \;\rightarrow\; B(0,\ 6,\ 0)$

Eje $OZ \;\rightarrow\; x = y = 0 \;\rightarrow\; z = -2 \;\rightarrow\; C(0,\ 0,\ -2)$

El ortocentro (punto en el que se cortan las alturas del triángulo) se obtiene mediante la intersección de los planos que pasan por cada vértice y son perpendiculares al lado opuesto, con el plano del triángulo.

- Plano que pasa por C y es perpendicular al lado AB:

$$\vec{n} = \overrightarrow{AB}(-3, 6, 0) \text{ paralelo a } (-1, 2, 0)$$

$$(-1)(x - 0) + 2(y - 0) + 0(z + 2) = 0 \;\rightarrow\; 2y - x = 0$$

- Plano que pasa por B y es perpendicular al lado AC:

$$\vec{n} = \overrightarrow{AC}(-3, 0, -2)$$

$$(-3)(x - 0) + 0(x - 6) - 2(z - 0) = 0 \;\rightarrow\; -3x - 2z = 0 \;\rightarrow\; 3x + 2z = 0$$

Resolvemos el sistema formado por las dos ecuaciones obtenidas más la ecuación del plano del triángulo:

$$\left\{\begin{array}{l} -x + 2y = 0 \;\rightarrow\; x = 2y \\ 3x + 2z = 0 \;\rightarrow\; \left.\begin{array}{l} 6y + 2z = 0 \\ 5y - 3z = 6 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{l} 3y + z = 0 \\ 5y - 3z = 6 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{l} 9y + 3z = 0 \\ \underline{5y - 3z = 6} \end{array}\right\} \\ 2x + y - 3z = 6 \;\rightarrow \\ \qquad 14y \quad = 6 \;\rightarrow\; y = \dfrac{6}{14} = \dfrac{3}{7} \end{array}\right.$$

$$x = 2y = \frac{6}{7}$$

$$3y + z = 0 \;\rightarrow\; z = -3y = -\frac{9}{7}$$

Por tanto, el ortocentro es el punto $\left(\frac{6}{7}, \frac{3}{7}, -\frac{9}{7}\right)$.