FICHA BLOQUE 2: DERIVADAS

1. Calcula la derivada de las siguientes funciones simplificando al máximo las mismas:

a)

$$f(x) = \left(3x^2 + x\right)^4$$
$$f'(x) = 4\cdot\left(3x^2 + x\right)^3\cdot(6x+1)$$

b)

$$f(x) = \sqrt[3]{x}\cdot senx = x^{1/3}\cdot senx$$
$$f'(x) = 1/3x^{1/3-1}\cdot\cos x = 1/3x^{-2/3}\cdot\cos x = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}\cdot\cos x = \frac{\cos x}{3\sqrt[3]{x^2}}$$

c)

$$f(x) = e^{4x^3-2x}$$
$$f'(x) = e^{4x^3-2x}\cdot(8x-2)$$

d)

$$f(x) = \sqrt{\ln(x+2)} = \ln(x+2)^{1/2}$$
$$f'(x) = 1/2\ln(x+2)^{1/2-1}\cdot 1 = 1/2\ln(x+2)^{-1/2} = \frac{1}{2\cdot\sqrt{\ln(x+2)}}$$

2. La derivada de la función $f(x) = x^3 - 6x^2 + 3$ es $f'(x) = 3x^2 - 12x$. Utilizando la derivada, responde:

a) ¿En qué puntos tiene $f(x)$ tangente horizontal?

$$f'(x) = 3x^2 - 12x = 0 \rightarrow x\cdot(3x-12) = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ 3x - 12 = 0 \rightarrow x = 12/3 = 4 \end{cases}$$

Puntos Singulares

$\mathrm{x} = 0 \rightarrow \mathrm{f}(0) = +3$

$x = 4 \rightarrow \mathrm{f}(4) = (4)^3 - 6\cdot(4)^2 + 3 = 64 - 96 + 3 = -27$

En los puntos

(0,3)

(4,27)

b) ¿Es creciente o decreciente en x=-1? ES CRECIENTE

3. Halla la derivada de:

a) $f(x)=x^3-3x^2+\frac{1}{5}$

b) $f(x)=\cos x$

Solución:

a) $f'(x)=3x^2-6x$

b) $f'(x)=-\operatorname{sen} x$

4. Halla la función derivada de:

a) $f(x)=\dfrac{1-x^2}{x-3}$

b) $f(x)=x\ln x$

Solución:

a) $f'(x)=\dfrac{-2x(x-3)-\left(1-x^2\right)}{(x-3)^2}=\dfrac{-2x^2+6x-1+x^2}{(x-3)^2}=\dfrac{-x^2+6x-1}{(x-3)^2}$

b) $f'(x)=\ln x+x\cdot\dfrac{1}{x}=\ln x+1$

5. Halla la derivada de las siguientes funciones:

a) $f(x)=\sqrt{x}+\dfrac{2}{x}$

b) $f(x)=\dfrac{3x+1}{e^x}$

Solución:

a) $f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}-\dfrac{2}{x^2}$

b) $f'(x)=\dfrac{3e^x-(3x+1)e^x}{\left(e^x\right)^2}=\dfrac{e^x\left(3-3x-1\right)}{\left(e^x\right)^2}=\dfrac{2-3x}{e^x}$

6. Calcula la función derivada de:

a) $f(x)=\dfrac{(x+1)^2}{x^3}$

$$f'(x)=\frac{2\cdot(x+1)\cdot x^3-(x+1)^2\cdot 3x^2}{x^6}=\frac{2\cdot(x+1)\cdot x-(x+1)^2\cdot 3}{x^4}=\frac{2x^2+2x-(x^2+2x+1)\cdot 3}{x^4}=$$

$$=\frac{2x^2+2x-3x^2-6x-3}{x^4}=\frac{-x^2-4x-3}{x^4}$$

b) $f(x)=ln(3x^4-2x)$

Solución:

$$f'(x)=\frac{1}{3x^4-2x}\cdot(12x^3-2)=\frac{12x^3-2}{3x^4-2x}$$

c)

$$f(x)=\sqrt{x}\cdot sen^2x$$
$$f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}\cdot sen^2x+\sqrt{x}\cdot 2senx\cdot\cos x$$

d)

$$f(x)=sen^3(x^2+2)=(sen(x^2+2))^3$$
$$f'(x)=3(sen(x^2+2))^2\cdot\cos(x^2+2)\cdot 2x$$

7. Halla la ecuación de la recta tangente a la curva $f(x)=x^2+2x-1$ en el punto de abscisa $x=1$.

Solución:

- $f'(x)=2x+2$
- La pendiente de la recta es $f'(1)=4$.
- Cuando $x=1$, $y=2$.
- La recta será:

$$y=2+4(x-1)=2+4x-4=4x-2$$

8. Escribe la ecuación de la recta tangente a la curva $f(x) = x^3 - 2x$ en el punto de abscisa $x = 2$.

Solución:

- $f'(x) = 3x^2 - 2$
- La pendiente de la recta es $f'(2) = 10$.
- Cuando $x = 2$, $y = 4$.
- La ecuación de la recta será:

$$y = 4 + 10(x-2) = 4 + 10x - 20 = 10x - 16$$

9. Halla los puntos de tangente horizontal de la siguiente función y, con ayuda de las ramas infinitas, decide si son máximos o mínimos:

$$\boldsymbol{f(x) = x^3 + 6x^2 - 15x}$$

Solución:

$$f'(x) = 3x^2 + 15x = 0 \to x\cdot(3x+15) = 0 \to \begin{cases} x = 0 \\ 3x + 15 = 0 \to x = -15/3 = -5 \end{cases}$$

Puntos Singulares

$$x = 0 \to f(0) = 0$$

$$x = -5 \to f(-5) = (-5)^3 + 6\cdot(-5)^2 - 15\cdot(-5) = -125 + 150 + 75 = 100$$

(0,0)

(−5,100)

10. Estudia dónde crece y dónde decrece la función:

$$\boldsymbol{f(x) = 3 + 12x - 3x^2}$$

Solución:

- $f'(x) = 12 - 6x$
- Estudiamos el signo de la derivada:

$$12 - 6x = 0 \quad \to \quad x = 2$$
$$12 - 6x > 0 \quad \to \quad 12 > 6x \quad \to \quad 6x < 12 \quad \to \quad x < 2$$
$$12 - 6x < 0 \quad \to \quad 12 < 6x \quad \to \quad 6x > 12 \quad \to \quad x > 2$$

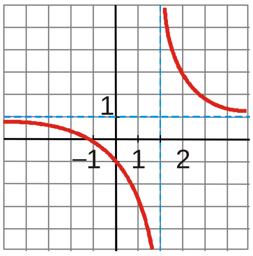
- La función es creciente en $(-\infty, 2)$, decreciente en $(2 +\infty)$, y tiene un máximo en $x = 2$.

11. Representa una función *f(x)*, de la que sabemos lo siguiente:

- **La derivada no se anula en ningún punto.**
- **La función es decreciente.**
- **Corta a los ejes en (-1, 0) y en (0, -1).**
- $\lim_{x \to 2^-} f(x) = -\infty; \qquad \lim_{x \to 2^+} f(x) = +\infty$
- **Tiene una asíntota horizontal en $y = 1$. Además:**

$$\begin{cases} \text{Si } x \to -\infty, \; y < 1 \\ \text{Si } x \to +\infty, \; y > 1 \end{cases}$$

Solución:



12. Representa una función polinómica *f(x)*, de la que sabemos lo siguiente:

- $\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty; \quad \lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$
- **Su derivada es 0 en $(-2, -2)$ y en $(0, 2)$.**
- **Corta los ejes en $(-3, 0)$, $(-1, 0)$, $(1, 0)$ y $(0, 2)$.**

Solución: