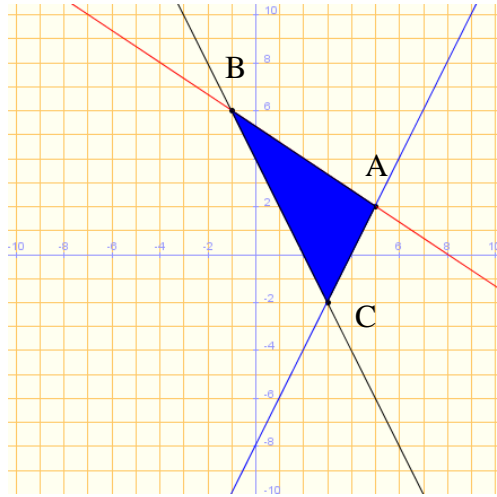


FICHA BLOQUE 2. GEOMETRÍA

1. Dado el triángulo de vértices A(5,2) , B(-1,6) y C(3,-2) , hallar las ecuaciones de las rectas mediana y mediatriz correspondientes al lado AB.



Para calcular la mediana (recta que une el vértice opuesto al lado AB (vértice C) con el punto medio del lado AB)

- 1) Calculamos el punto medio del lado AB

$$PM_{AB} = \left(\frac{5-1}{2}, \frac{2+6}{2} \right) = (2,4)$$

- 2) Calculamos la pendiente de la mediana, a partir de dos puntos

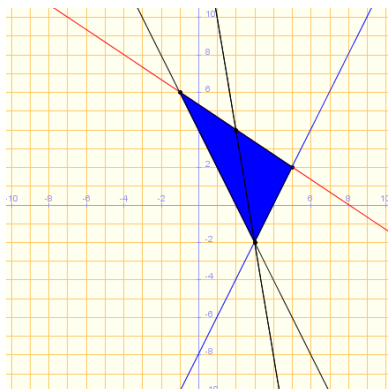
$$\left. \begin{array}{l} PM_{AB} = (2,4) \\ C = (3,-2) \end{array} \right\} \rightarrow m_{PM_{AB},C} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{4 - (-2)}{2 - 3} = \frac{6}{-1} = -6$$

- 3) Calculamos la ecuación de la mediana que pasa por (3,-2) y tiene como pendiente $m = -6$

$$y = -2 - 6 \cdot (x - 3)$$

$$y = -2 - 6x + 18$$

$$y = -6x + 16$$



Para calcular la mediatriz (recta perpendicular al lado AB (vértice C) que pasa por el punto medio del lado AB)

- 1) Calculamos el punto medio del lado AB

$$PM_{AB} = \left(\frac{5-1}{2}, \frac{2+6}{2} \right) = (2,4)$$

- 2) Calculamos la pendiente del lado AB

$$\left. \begin{array}{l} A = (5,2) \\ B = (-1,6) \end{array} \right\} \rightarrow m_{A,B} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2-6}{5-(-1)} = \frac{-4}{6} = -\frac{2}{3}$$

- 3) Calculamos la pendiente de la mediatriz

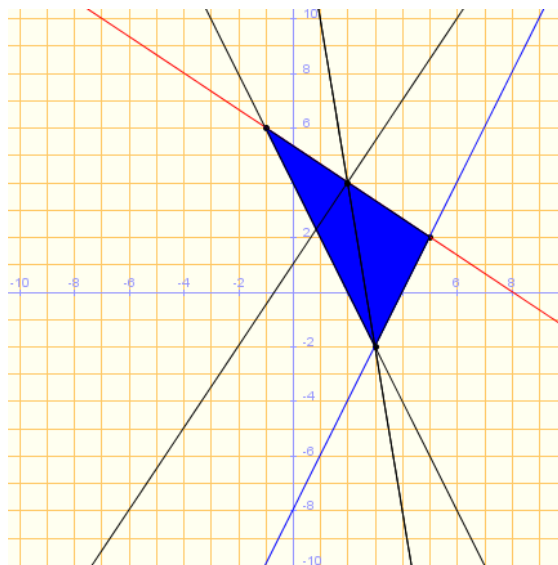
$$m_{mediatriz} = \frac{-1}{m_{A,B}} = \frac{-1}{-\frac{2}{3}} = \frac{3}{2}$$

- 4) Calculamos la ecuación de la mediatriz que pasa por (2,4) y tiene como pendiente $m= 3/2$

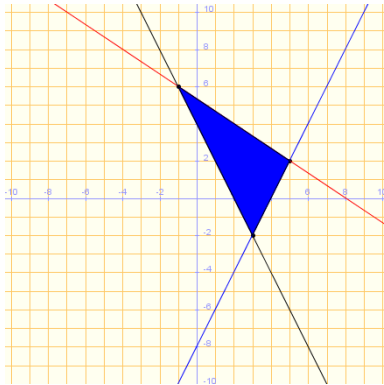
$$y = 4 + \frac{3}{2} \cdot (x - 2)$$

$$y = 4 + \frac{3}{2}x - 3$$

$$y = \frac{3}{2}x + 1$$



2. Halla el área del triángulo de vértices A(5,2) , B(-1,6) y C(3,-2).



Con WIRIS

T=triangulo(punto (5,2), punto (-1,6), punto (3,-2)) → (5,2) - (-1,6) - (3,-2)
 área(T) → 16|

Área = 16

3. Una recta pasa por el punto P(-5,2) y forma un ángulo de 45° con la recta 5x-6y+1=0 . Halla la ecuación de dicha recta

Sea s: y = mx + n la recta pedida. Como la recta pasa por el punto (-5,2), entonces 2 = -5m + n. Utilizando la fórmula del Ángulo comprendido entre dos rectas tenemos que:

$$\tan(s, r) = \frac{m_s - m_r}{1 + m_s \cdot m_r}$$

Dada la recta 5x-6y+1=0 → m_r =5/6

$$\tan 45^\circ = \frac{m_s - 5/6}{1 + 5/6 \cdot m_s}$$

$$1 = \frac{m_s - 5/6}{1 + 5/6 \cdot m_s}$$

$$1 \cdot (1 + 5/6 \cdot m_s) = m_s - 5/6$$

$$1 + 5/6 \cdot m_s = m_s - 5/6$$

$$5/6 \cdot m_s - m_s = -5/6 - 1$$

$$-1/6 m_s = -11/6$$

$$m_s = 11$$

Entonces como 2 = -5m + n → 2 = -5*11 + n → 2 = -55 + n → n=57

Ecuación de la recta que pasa por punto P(-5,2) y forma un ángulo de 45° con la recta 5x-6y+1=0 es

$$y = 11x + 57$$

4. Dados los puntos $A(2, -1)$, $B(-3, 4)$ y $C(0, -8)$:

- a) Halla el punto medio del segmento de extremos A y B .
- b) Halla el simétrico de B con respecto a C .

Solución:

a) El punto medio es:

$$M = \left(\frac{2 + (-3)}{2}, \frac{-1 + 4}{2} \right) = \left(-\frac{1}{2}, \frac{3}{2} \right)$$

b) Llamamos $B'(x, y)$ al simétrico de B con respecto a C . Si B' es simétrico de B respecto de C , tiene que cumplirse que:

$$\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{CB'}$$

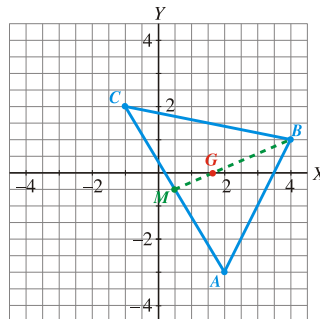
$$\left. \begin{array}{l} \overrightarrow{BC} = (3, -12) \\ \overrightarrow{CB'} = (x - 0, y + 8) \end{array} \right\} \text{Entonces } \left\{ \begin{array}{l} x = 3 \\ y + 8 = -12 \end{array} \right. \left. \begin{array}{l} x = 3 \\ y = -20 \end{array} \right.$$

Por tanto:

$$B'(3, -20)$$

5. Halla las coordenadas del baricentro del triángulo de vértices $A(2, -3)$, $B(4, 1)$ y $C(-1, 2)$.

Solución:



Llamamos $G(x, y)$ al baricentro y $M(a, b)$ al punto medio del lado AC . Sabemos que:

$$2\overrightarrow{GM} = \overrightarrow{BG}$$

Hallamos M :

$$M = \left(\frac{2 + (-1)}{2}, \frac{-3 + 2}{2} \right) = \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right)$$

Entonces:

$$\left. \begin{array}{l} \overrightarrow{GM} = \left(\frac{1}{2} - x, -\frac{1}{2} - y \right) \\ \overrightarrow{BG} = (x - 4, y - 1) \end{array} \right\} \left. \begin{array}{l} 2\left(\frac{1}{2} - x, -\frac{1}{2} - y \right) = (x - 4, y - 1) \\ (1 - 2x, -1 - 2y) = (x - 4, y - 1) \end{array} \right.$$

$$1 - 2x = x - 4 \rightarrow 5 = 3x \rightarrow x = \frac{5}{3}$$

$$-1 - 2y = y - 1 \rightarrow 0 = 3y \rightarrow y = 0$$

El baricentro es:

$$G\left(\frac{5}{3}, 0\right)$$

6. Escribe las ecuaciones paramétricas de la recta que pasa por el punto $P(3, -1)$ y es paralela a la recta:

$$s: \begin{cases} x = 2 - 3t \\ y = 4 + t \end{cases}$$

Solución:

Vector posición: $\overline{OP}(3, -1)$

Vector dirección: $(-3, 1)$

Ecuaciones paramétricas:

$$\begin{cases} x = 3 - 3t \\ y = -1 + t \end{cases}$$

7. Dadas las rectas:

$$r: \begin{cases} x = 1 + t \\ y = -2 - 2t \end{cases} \quad s: \begin{cases} x = -1 - 3t \\ y = 2 + 6t \end{cases}$$

averigua su posición relativa. Si se cortan, di cuál es el punto de corte:

Solución:

Cambiamos el parámetro en la recta s :

$$r: \begin{cases} x = 1 + t \\ y = -2 - 2t \end{cases} \quad s: \begin{cases} x = -1 - 3k \\ y = 2 + 6k \end{cases}$$

Igualamos:

$$\left. \begin{array}{l} 1 + t = -1 - 3k \\ -2 - 2t = 2 + 6k \end{array} \right\} \begin{array}{l} t = -2 - 3k \\ -2 - 2(-2 - 3k) = 2 + 6k \rightarrow -2 + 4 + 6k = 2 + 6k \rightarrow 0 = 0k \end{array}$$

Infinitas soluciones \rightarrow Se trata de la misma recta; r y s coinciden.

8. Dadas las rectas r y s , determina el ángulo que forman:

$$r: \begin{cases} x = -2 + 2t \\ y = 4 + 4t \end{cases} \quad s: \begin{cases} x = -4 + 2t \\ y = 5 - t \end{cases}$$

Solución:

Vector direcció de $r \rightarrow (2, 4)$
 Vector direcció de $s \rightarrow (2, -1)$

Llamamos α al ángulo que forman r y s :

$$\cos\alpha = \frac{|(2, 4) \cdot (2, -1)|}{\sqrt{4+16} \cdot \sqrt{4+1}} = \frac{|4-4|}{\sqrt{20} \cdot \sqrt{5}} = 0 \rightarrow \alpha = 90^\circ$$

Es decir, las rectas son perpendiculares.

9. Halla la ecuación implícita de la recta cuyas ecuaciones paramétricas son:

$$r: \begin{cases} x = -3 + 2t \\ y = 1 - 3t \end{cases}$$

Solución:

Multiplicamos por 3 la primera ecuación y por 2 la segunda, y sumamos:

$$\begin{cases} 3(x = -3 + 2t) \\ 2(y = 1 - 3t) \end{cases} \left\{ \begin{array}{l} 3x = -9 + 6t \\ 2y = 2 - 6t \\ \hline 3x + 2y = -7 \end{array} \right.$$

La ecuación implícita es $3x + 2y + 7 = 0$.

10. Escribe la ecuación implícita de la recta que pasa por $P(-1, 2)$ y es paralela a $3x - y + 4 = 0$.

Solución:

Obtenemos la pendiente de la recta dada:

$$3x - y + 4 = 0 \rightarrow y = 3x + 4 \rightarrow \text{pendiente} = 3$$

La recta paralela tiene la misma pendiente; su ecuación será:

$$y = 2 + 3(x + 1) \rightarrow y = 2 + 3x + 3 \rightarrow 3x - y + 5 = 0$$

11. Halla la distancia del punto $P(2, -1)$ a la recta:

$$r: \begin{cases} x = -3 + 2t \\ y = 1 + 4t \end{cases}$$

Solución:

Expresamos r en forma implícita:

$$\begin{cases} -2(x = -3 + 2t) \\ y = 1 + 4t \end{cases} \left\{ \begin{array}{l} -2x = 6 - 4t \\ \hline y = 1 + 4t \\ \hline -2x + y = 7 \rightarrow 2x - y + 7 = 0 \end{array} \right.$$

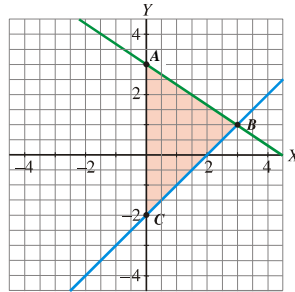
Hallamos la distancia de P a r :

$$\text{dist}(P,r) = \frac{|2 \cdot 2 - (-1) + 7|}{\sqrt{4+1}} = \frac{|4+1+7|}{\sqrt{5}} = \frac{12}{\sqrt{5}} = \frac{12\sqrt{5}}{5}$$

12. Calcula los vértices y el área del triángulo cuyos lados están sobre las rectas:

$$r: x - y - 2 = 0 \quad s: 2x + 3y - 9 = 0 \quad t: x = 0$$

Solución:



1.º) Los vértices del triángulo son los puntos de corte de las rectas:

$$\left. \begin{array}{l} x - y - 2 = 0 \\ 2x + 3y - 9 = 0 \end{array} \right\} \begin{array}{l} x = y + 2 \\ 2(y + 2) + 3y - 9 = 0 \\ 2y + 4 + 3y - 9 = 0 \rightarrow 5y = 5 \rightarrow y = 1 \\ x = 3 \end{array}$$

Punto $B(3, 1)$

$$\left. \begin{array}{l} x - y - 2 = 0 \\ x = 0 \end{array} \right\} y = -2 \quad \text{Punto } C(0, -2)$$

$$\left. \begin{array}{l} 2x + 3y - 9 = 0 \\ x = 0 \end{array} \right\} y = 3 \quad \text{Punto } A(0, 3)$$

2.º) Tomamos el lado AC como base del triángulo:

$$\text{base} = |\overline{AC}| = 5$$

3.º) La altura es la distancia de B a la recta que pasa por A y por C (que es el eje Y). Por tanto:

$$\text{altura} = 3$$

4.º) El área del triángulo es:

$$\text{Área} = \frac{5 \cdot 3}{2} = \frac{15}{2} = 7,5 \text{ u}^2$$

13. Prueba que si las rectas $ax + by + c = 0$ y $a'x + b'y + c' = 0$ son paralelas, se cumple que $ab' - a'b = 0$.

Solución:

Pendiente de la recta $ax + by + c = 0 \rightarrow m = \frac{-a}{b}$

Pendiente de la recta $a'x + b'y + c' = 0 \rightarrow m' = \frac{-a'}{b'}$

Por ser paralelas, las pendientes coinciden:

$$m = m' \rightarrow -\frac{a}{b} = -\frac{a'}{b'} \rightarrow ab' = a'b \rightarrow ab' - a'b = 0$$

14. La diagonal mayor de un rombo mide el doble que la diagonal menor y tiene por extremos los puntos $B(3, 1)$ y $D(-5, -3)$. Halla los vértices A y C y el área del rombo.

Solución:

$$\overline{BD} = (-8, -4) \rightarrow |\overline{BD}| = \sqrt{64 + 16} = \sqrt{80} = 4\sqrt{5}$$

Como esta diagonal mide el doble que la diagonal menor $\rightarrow |\overline{AC}| = \frac{4\sqrt{5}}{2} = 2\sqrt{5}$

Por tanto \rightarrow Área del rombo $= \frac{|\overline{BD}| \cdot |\overline{AC}|}{2} = \frac{4\sqrt{5} \cdot 2\sqrt{5}}{2} = 20 \text{ u}^2$

Los otros dos vértices están en la perpendicular a \overline{BD} . Calculamos la ecuación de la recta BD :

Vector director $(-2, -1)$.

Punto que pertenece a BD , por ejemplo $B(3, 1)$.

$$\frac{x-3}{-2} = \frac{y-1}{-1} \rightarrow -x+3 = -2y+2 \rightarrow x-2y-1=0$$

Calculamos la ecuación de la recta que pasa por A y C , perpendicular a BD :

Vector director $(1, -2)$.

La recta AC pasa por el punto medio, M , del segmento \overline{BD} .

$$M = \left(\frac{3-5}{2}, \frac{1-3}{2} \right) = (-1, -1)$$

$$\frac{x+1}{1} = \frac{y+1}{-2} \rightarrow -2x-2 = y+1 \rightarrow 2x+y+3=0$$

Los puntos A y C serán los (x, y) que estén en AC y cuya distancia a M sea

$$\frac{|\overline{AC}|}{2} = \frac{2\sqrt{5}}{2} = \sqrt{5}.$$

$$(x, y) \in \text{recta } AC \rightarrow 2x + y + 3 = 0 \rightarrow y = -3 - 2x \left. \begin{array}{l} \\ \end{array} \right\} \rightarrow$$

$$\text{dist}((x, y), M) = \sqrt{5} \rightarrow \sqrt{(x+1)^2 + (y+1)^2} = \sqrt{5} \rightarrow (x+1)^2 + (y+1)^2 = 5$$

$$\rightarrow (x+1)^2 + (-3-2x+1)^2 = 5 \rightarrow (x+1)^2 + (-2-2x)^2 = 5 \rightarrow$$

$$\rightarrow x^2 + 2x + 1 + 4 + 8x + 4x^2 - 5 = 0 \rightarrow 5x^2 + 10x = 0 \rightarrow 5x(x+2) = 0 \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{cases} x=0 \rightarrow y=-3 \\ x=-2 \rightarrow y=1 \end{cases}$$

Los vértices A y C son; $A(-2, 1)$ y $B(0, -3)$.

