FICHA BLOQUE 2. FUNCIONES Y ECUACIONES EXPOENCIALES Y LOGARTÍTMICAS

SOLUCIONES

1. Resuelve dos de las siguientes ecuaciones:

a) $2^{2x} - 3 \cdot 2^{x+1} + 8 = 0$

b) $\log_2 x = 4\log_2 3 - \dfrac{1}{3}\log_2 27$

c) $2^{x+1} + 2^{x} + 2^{x-1} = 28$

$2^x \cdot 2 + 2^x + \dfrac{2^x}{2} = 28$

$2^x \left(2 + 1 + \dfrac{1}{2}\right) = 28$

$2^x \cdot \dfrac{7}{2} = 28 \qquad 2^x = 2^3 \qquad x = 3$

d) $2 - 3^{-x} + 3^{x+1} = 0$

$2 - \dfrac{1}{3^x} + 3 \cdot 3^x = 0$

$3^x = t$

$2 - \dfrac{1}{t} + 3 \cdot t = 0$

$3t^2 + 2t - 1 = 0$

$t_1 = -1 \qquad 3^x = -1 \qquad$ sin solución

$t_2 = \dfrac{1}{3} \qquad 3^x = \dfrac{1}{3} \qquad x = -1$

e) $4^{x-1}+2^{x+2}=48$

$2^{2x-2}+2^{x+2}=48$ $\qquad \dfrac{2^{2x}}{4}+4\cdot 2^{x}-48=0$ $\qquad t=2^{x}$

$t^2+16t-192=0$ $\qquad \begin{cases} t=8 \\ t=-24 \end{cases}$

$8=2^{x}$ $\qquad x=3$

f) $e^{x}-5e^{-x}+4e^{-3x}=0$

$e^{x}-\dfrac{5}{e^{x}}+\dfrac{4}{e^{3x}}=0$ $\qquad e^{4x}-5e^{2x}+4=0$ $\qquad e^{2x}=t$

$t^2-5t+4=0$ $\qquad t_1=1 \quad e^{2x}=1 \qquad x=0$

$\qquad t_2=4 \quad e^{2x}=4 \quad \ln e^{2x}=\ln 4 \qquad x=\dfrac{\ln 4}{2}$

g) $2^{4x}-2^{2x}-12=0$

$2^{2x}=t$

$t^2-t-12=0$ $\qquad t_1=4 \quad 2^{2x}=4 \qquad x=1$

$\qquad t_2=-3 \quad 2^{2x}=-3 \qquad \nexists$

h) $\log x+\log(x+3)=2\log(x+1)$

$\log[x(x+3)]=\log(x+1)^2$

$x(x+3)=(x+1)^2$

$x^2+3x=x^2+2x+1$ $\qquad x=1$

i) $2\log x - 2\log(x+1) = 0$

$$\log x^2 - \log(x+1)^2 = \log 1$$

$$\log \frac{x^2}{(x+1)^2} = \log 1 \qquad \frac{x^2}{(x+1)^2} = 1$$

$$2x + 1 = 0 \qquad x = -\frac{1}{2} \qquad \text{Sin solución}$$

j) $\log_5 x + \dfrac{\log_5 125}{\log_5 x} = \dfrac{7}{2}$

$$(\log_5 x)^2 - \frac{7}{2}\log_5 x + \log_5 125 = 0$$

$$2(\log_5 x)^2 - 7\log_5 x + 6 = 0 \qquad \log_5 x = t$$

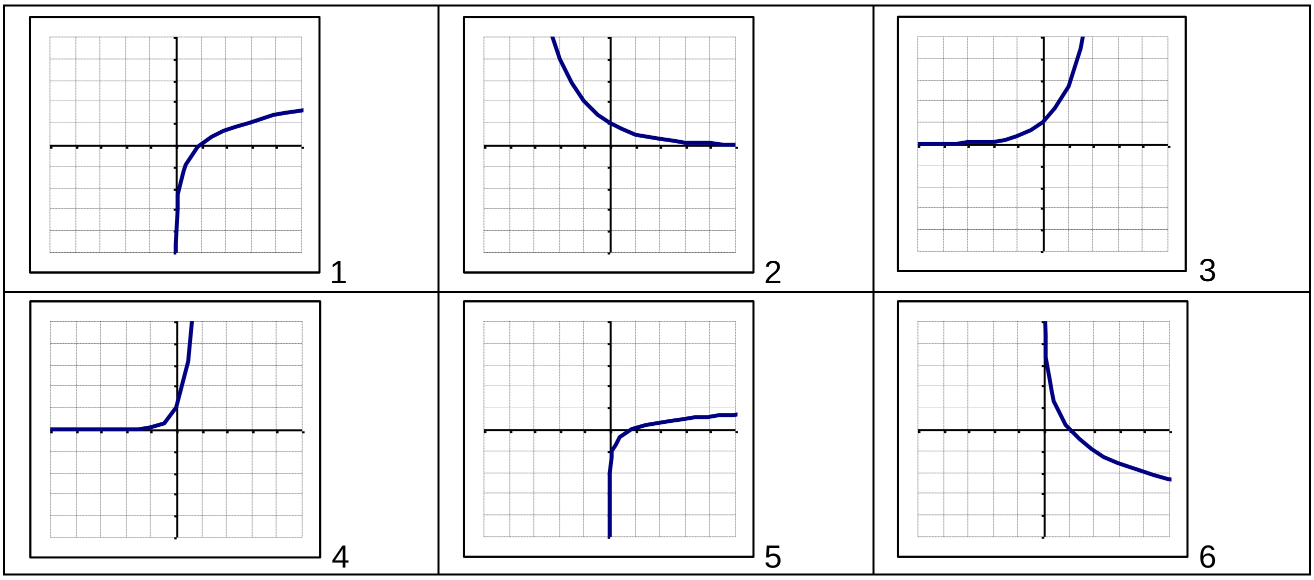
$$2t^2 - 7t + 6 = 0 \qquad t = 2 \qquad t = \frac{3}{2}$$

$$\log_5 x = 2 \qquad x = 25$$

$$\log_5 x = \frac{3}{2} \qquad x = \sqrt{5^3} = 5\sqrt{5}$$

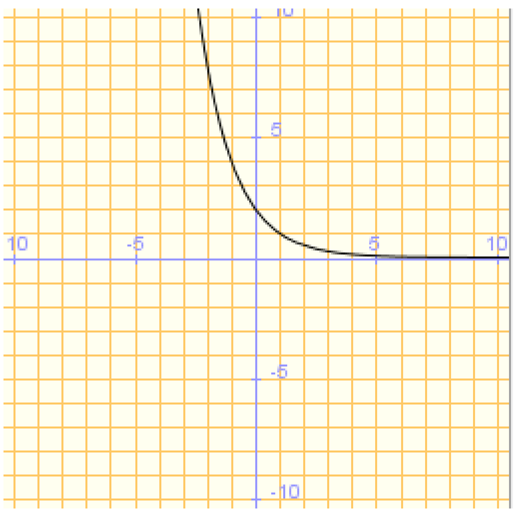
2. Forma las parejas gráfica – ecuación.

$y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$	2
$y=e^x$	3
$y=10^x$	4
$y=\ln x$	1
$y=\log_{0,5} x$	6
$y=\log x$	5



3. Dibuja la gráfica de la siguiente función:

$$y = 2^{1-x}$$



4. El número de bacterias en un cultivo al cabo de t horas, a partir del instante actual, viene dado por $N(t) = 1000 \cdot 4^t$

a) Razona si el nº de bacterias está aumentando o disminuyendo.
b) ¿Cuántas bacterias hay actualmente?
c) ¿Cuántas habrá dentro de media hora?
d) ¿Cuántas había hace una hora?
e) ¿Cuánto tiempo debe transcurrir para que el cultivo cuente con 4.096.000 bacterias?
f) ¿Cuánto tiempo debe transcurrir aproximadamente para que el cultivo cuente con un millón de bacterias?

5. La masa de madera de un bosque aumenta en un 40% cada 100 años. Si tomamos como unidad de masa vegetal (biomasa) la que había en el año 1800, que consideramos instante inicial, y como unidad de tiempo 100 años, la función M = $1{,}4^t$ nos da la cantidad de masa vegetal, M, en un instante cualquiera, t expresado en siglos a partir de 1800 (razona por qué).

a) Averigua cuándo habrá una masa de madera triple que en 1800 ($1{,}4^t = 3$) y cuándo había la tercera parte. Observa que los dos periodos de tiempo son iguales.

$M = 1{,}4^t$

a) • Buscamos el valor de t para el cual $1{,}4^t = 3$:

$$1{,}4^t = 3 \rightarrow ln\,(1{,}4)^t = ln\,(3) \rightarrow t\,ln\,(1{,}4) = ln\,(3) \rightarrow t = \frac{ln\,3}{ln\,1{,}4} \approx 3{,}27$$

Cuando pasen $3{,}27 \cdot 100 = 327$ años, se habrá triplicado la masa de madera. Esto es, en el año $1800 + 327 = 2127$.

• Buscamos el valor de t para el cual $1{,}4^t = \frac{1}{3} = 3^{-1}$:

$$1{,}4^t = 3^{-1} \rightarrow ln\,(1{,}4)^t = ln\,(3)^{-1} \rightarrow t\,ln\,(1{,}4) = -ln\,(3) \rightarrow t = -\frac{ln\,3}{ln\,1{,}4} \approx -3{,}27$$

Hace $3{,}27 \cdot 100 = 327$ años, había la tercera parte de masa de madera. Esto es, en el año $1800 - 327 = 1473$.

b) Calcula la cantidad de madera que habrá, o había, en 1900, 1990, 2000, 1600 y 1550.

b) $1900 \rightarrow t = 1 \rightarrow M = 1{,}4^1 = 1{,}4$

$$1990 \rightarrow t = \frac{1990 - 1800}{100} = 1{,}9 \rightarrow M = 1{,}4^{1{,}9} \approx 1{,}90$$

$$2000 \rightarrow t = \frac{2000 - 1800}{100} = 2 \rightarrow M = 1{,}4^2 = 1{,}96$$

$$1600 \rightarrow t = \frac{1600 - 1800}{100} = -2 \rightarrow M = 1{,}4^{-2} \approx 0{,}51$$

$$1550 \rightarrow t = \frac{1550 - 1800}{100} = -2{,}5 \rightarrow M = 1{,}4^{-2{,}5} \approx 0{,}43$$

6. Una población de insectos crece según la función $y = 1 + 0{,}5 \cdot 2^{0{,}4x}$ (x = tiempo en días; y = número de insectos en miles).

a) ¿Cuál es la población inicial?

a) La población inicial se calcula haciendo $x = 0$.

$$y(0) = 1 + 0{,}5 \cdot 2^{0{,}4 \cdot 0} = 1 + 0{,}5 = 1{,}5$$

La población inicial es de 1 500 insectos.

b) Calcula cuánto tarda en duplicarse.

b) Se duplicará al llegar a 3 000 insectos, es decir:

$$3 = 1 + 0{,}5 \cdot 2^{0{,}4x} \rightarrow 2^{0{,}4x} = \frac{2}{0{,}5} \rightarrow 2^{0{,}4x} = 4 \rightarrow 2^{0{,}4x} = 2^2 \rightarrow 0{,}4x = 2 \rightarrow x = \frac{2}{0{,}4} \rightarrow x = 5$$

Por tanto, la población de insectos se duplicará en 5 días.

7. La función $f(t) = 0{,}3\ (1/2)^{6}$ indica el nivel de alcohol en la sangre (en mg/ml) desde que alcanza su nivel máximo ($t = 0$). Calcula cuánto tiempo tendría que esperar una persona para poder conducir si el mínimo legal fuera 0,06 mg/ml de alcohol en sangre.

Buscamos el valor de t que haga $f(t) = 0{,}06$.

$$0{,}3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^t = 0{,}06 \rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^t = 0{,}2 \rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^t = \frac{1}{5} \rightarrow 2^t = 5 \rightarrow t \simeq 2{,}32\ h$$

Tendría que esperar 2 horas y 19 minutos, aproximadamente.

8. La concentración de alcohol en la sangre de una persona puede medirse. Recientes investigaciones médicas sugieren que el riesgo R (dado con un porcentaje) de tener un accidente al conducir un vehículo puede presentarse por medio de la ecuación $R=6.e^{kx}$ donde x es la concentración variable de alcohol en la sangre y k es una constante.

a) Suponiendo que una concentración de alcohol en la sangre de 0,04 da como resultado un riesgo del 10% (R=10) de tener un accidente. Encuentra la constante k de la ecuación.(Solución:k=12,77)
b) Con este valor k, ¿cuál es el riesgo si la concentración es de 0,17? (Solución: 52,6%)
c) Con este mismo valor de k, ¿qué concentración de alcohol corresponde a un riesgo del 100%? (Solución: 0,22)

9. Supongamos que el porcentaje R de personas que responden al anuncio de un producto nuevo en un periódico y que lo compran después de t días, viene dado por la fórmula
$R(t) = 50 - 100 {*} e^{-0{,}3t}$

a) ¿Qué porcentaje de personas ha respondido y comprado después de 5 días?
(Solución: %) 27 68, % ≈ 28

b) ¿Qué porcentaje ha respondido y comprado después de 10 días?
(Solución: 45,021 ≈ 45 %)