EJEMPLOS. FUNCIONES.LÍMITES.DERIVADAS

Ejercicio nº 1.-

Halla el dominio de definición de las siguientes funciones:

a) $y = \dfrac{3}{(x-5)^2}$

b) $y = \sqrt{2x-4}$

Solución:

a) $(x-5)^2 = 0 \;\Rightarrow\; x = 5 \;\rightarrow\; \text{Dominio} = \mathbb{R} - \{5\}$

b) $2x - 4 \geq 0 \;\Rightarrow\; 2x \geq 4 \;\Rightarrow\; x \geq 2 \;\rightarrow\; \text{Dominio}[2, +\infty)$

Ejercicio nº 2.-

Calcula los siguientes límites y representa gráficamente los resultados que obtengas:

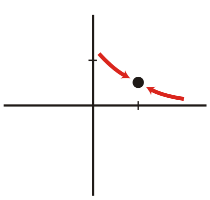
a) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{1}{x^2+1}$

b) $\lim\limits_{x \to -3} \dfrac{x+5}{x+3}$

c) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2+2x-3}{x^2-1}$

Solución:

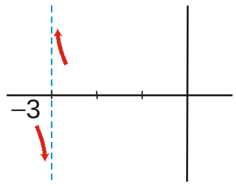
a) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{1}{x^2+1} = \dfrac{1}{1+1} = \dfrac{1}{2}$



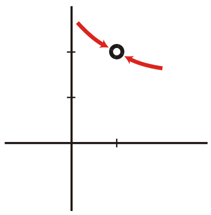
b) $\lim\limits_{x \to -3} \dfrac{x+5}{x+3}$

Hallamos los límites laterales:

$$\lim_{x \to -3^-} \frac{x+5}{x+3} = -\infty$$
$$\lim_{x \to -3^+} \frac{x+5}{x+3} = +\infty$$



c) $\lim_{x \to 1} \frac{x^2+2x-3}{x^2-1} = \lim_{x \to 1} \frac{(x-1)(x+3)}{(x-1)(x+1)} = \lim_{x \to 1} \frac{x+3}{x+1} = \frac{4}{2} = 2$



Ejercicio nº 3.-

Calcula los siguientes límites y representa las ramas que obtengas:

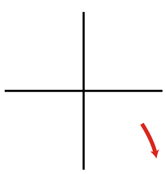
a) $\lim_{x \to +\infty} (3-x)^3$

b) $\lim_{x \to +\infty} \frac{3x^2+3x}{x^2-1}$

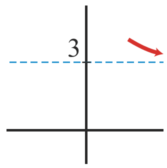
c) $\lim_{x \to -\infty} \frac{x^3}{x+1}$

Solución:

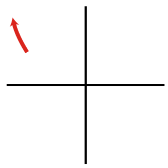
a) $\lim_{x \to +\infty} (3-x)^3 = -\infty$



b) $\lim_{x \to +\infty} \frac{3x^2+3x}{x^2-1} = 3$



c) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x^3}{x+1} = +\infty$



Ejercicio nº 4.-

Calcula $f'(x)$ en cada caso:

a) $f(x) = \dfrac{-3x^5 + 2x}{7} + \sqrt{6x}$

b) $f(x) = x^4 \arccos x$

c) $f(x) = e^{\frac{x^2+1}{x-1}}$

Solución:

a) $f'(x) = \dfrac{-15x^4 + 2}{7} + \dfrac{6}{2\sqrt{6x}} = \dfrac{-15x^4 + 2}{7} + \dfrac{3}{\sqrt{6x}}$

b) $f'(x) = 4x^3 \arccos x + x^4 \cdot \dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}} = 4x^3 \arccos x - \dfrac{x^4}{\sqrt{1-x^2}}$

c) $f'(x) = e^{\frac{x^2+1}{x-1}} \cdot \dfrac{2x(x-1) - (x^2+1)}{(x-1)^2} = e^{\frac{x^2+1}{x-1}} \cdot \dfrac{2x^2 - 2x - x^2 - 1}{(x-1)^2} = e^{\frac{x^2+1}{x-1}} \cdot \dfrac{x^2 - 2x - 1}{(x-1)^2}$

Ejercicio nº 5.-

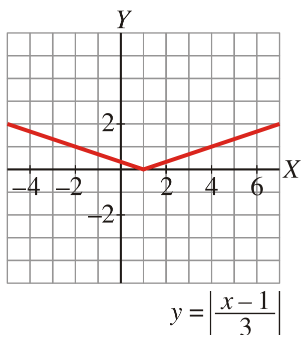
Representa gráficamente:

a) $y = \left| \dfrac{x-1}{3} \right|$

b) $y = 2^{-x}$

Solución:

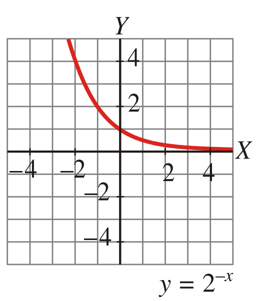
a) Sobre la recta $y = \dfrac{x-1}{3}$, hallamos su valor absoluto:



b) Hacemos una tabla de valores:

x	–2	–1	0	1	2
y	4	2	1	1/2	1/4

La gráfica sería:



<u>Ejercicio nº 6.-</u>

Dada la función:

$$f(x) = \begin{cases} 1 - x^2 & \text{si} \quad x \le 0 \\ x + 1 & \text{si} \quad x > 0 \end{cases}$$

a) Estudia su continuidad.
b) Dibuja su gráfica.

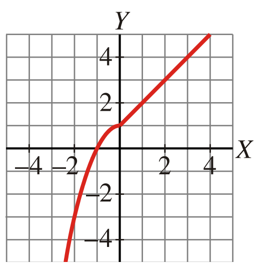
Solución:

a) · Si $x \neq 0$ la función es continua.
· Si $x = 0$:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^-} \left(1 - x^2\right) = 1 \\ \lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} (x + 1) = 1 \\ f(0) = 1 \end{array}\right\} \text{ También es continua en } x = 0.$$

Es una función continua.

b) · Si $x \leq 0$, es un trozo de parábola.
· Si $x > 0$, es un trozo de recta.
· La gráfica es:



<u>Ejercicio nº 7.-</u>

Una cierta población crece de acuerdo con la ecuación $y = 1 + k \cdot e^{at}$ donde t es el tiempo en meses e y es el número de individuos en miles.

a) Calcula k y a sabiendo que $y(0) = 1{,}2$ y que $y(10) = 1 + 0{,}2e \approx 1{,}54$
b) Representa la función obtenida con los valores de k y a que has hallado.

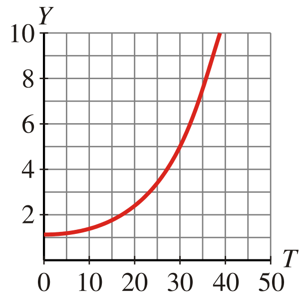
Solución:

a) $y(0) = 1{,}2 \quad \Rightarrow \quad 1{,}2 = 1 + k \cdot 1 \quad \Rightarrow \quad k = 0{,}2$

$y(10) = 1 + 0{,}2e \quad \Rightarrow \quad 1 + 0{,}2e = 1 + 0{,}2e^{10a} \quad \Rightarrow \quad 10a = 1 \quad \Rightarrow \quad a = 0{,}1$

Por tanto: $y = 1 + 0{,}2e^{0{,}1t}$

b)



$y = 1 + 0{,}2e^{0{,}1t}$

Ejercicio nº 8.-

Halla la derivada de la función $f(x) = 3x^2$ en $x = 1$, aplicando la definición de derivada.

Solución:

$$f'(1) = \lim_{h\to 0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{3(1+h)^2-3}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{3(1+h^2+2h)-3}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{3+3h^2+6h-3}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{3h^2+6h}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{h(3h+6)}{h} = \lim_{h\to 0}(3h+6) = 6$$

Ejercicio nº 9.-

Halla la ecuación de la recta tangente a la curva $f(x) = 2x^2 + 3x - 1$ en el punto de abscisa
$x = 1$.

Solución:

- $f'(x) = 4x + 3$
- La pendiente de la recta es $f'(1) = 7$.
- Cuando $x = 1$, $y = 4$.
- La recta será:

$$y = 4 + 7(x-1) = 4 + 7x - 7 = 7x - 3$$

Ejercicio nº 10.-

Estudia el crecimiento y el decrecimiento de la siguiente función:

$$f(x)=\frac{x^2-3x}{4}$$

Solución:

- $f'(x)=\dfrac{2x-3}{4}$

· Estudiamos el signo de la derivada:

$$f'(x)=0 \quad \Rightarrow \quad 2x-3=0 \quad \Rightarrow \quad x=\frac{3}{2}$$
$$f'(x)>0 \quad \Rightarrow \quad \frac{2x-3}{4}>0 \quad \Rightarrow \quad 2x-3>0 \quad \Rightarrow \quad x>\frac{3}{2}$$
$$f'(x)<0 \quad \Rightarrow \quad \frac{2x-3}{4}<0 \quad \Rightarrow \quad 2x-3<0 \quad \Rightarrow \quad x<\frac{3}{2}$$

La función es decreciente en $\left(-\infty,\ \dfrac{3}{2}\right)$ y creciente en $\left(\dfrac{3}{2},\ +\infty\right)$. Tiene un mínimo en $x=\dfrac{3}{2}$.

<u>Ejercicio nº 11.-</u>

Averigua cuáles son las asíntotas de la siguiente función y representa gráficamente la posición de la curva respecto a ellas:

$$f(x)=\frac{x}{x^2-9}$$

Solución:

· Asíntota horizontal: $y=0$

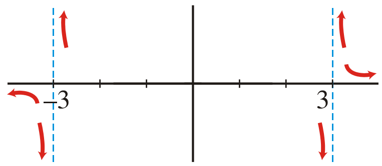
$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{x^2-9}=0; \quad \lim_{x\to-\infty}\frac{x}{x^2-9}=0$$

- Asíntotas verticales: $x=-3;\quad x=3$

$$\lim_{x\to-3^-}\frac{x}{x^2-9}=-\infty; \quad \lim_{x\to-3^+}\frac{x}{x^2-9}=+\infty$$

$$\lim_{x\to 3^-} \frac{x}{x^2-9} = -\infty; \qquad \lim_{x\to 3^+} \frac{x}{x^2-9} = +\infty$$

· Representación:



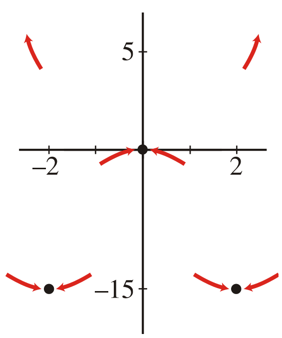
Ejercicio nº 12.-

Determina los puntos de tangente horizontal de la función $f(x) = x^4 - 8x^2 + 1$. Represéntalos gráficamente.

Solución:

- $f'(x) = 4x^3 - 16x = 4x(x^2-4) = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 0 \rightarrow \text{ Punto: } (0, 1) \\ x = -2 \rightarrow \text{ Punto: } (-2, -15) \\ x = 2 \rightarrow \text{ Punto: } (2, -15) \end{cases}$

- $\lim_{x\to -\infty} (x^4 - 8x^2 + 1) = +\infty; \qquad \lim_{x\to +\infty} (x^4 - 8x^2 + 1) = +\infty$



Mínimo en $(-2, -15)$ y en $(2, -15)$, y máximo en $(0, 1)$.

Ejercicio nº 13.-

a) Dibuja la gráfica de la siguiente función:

$$f(x) = x^3 + 2x^2 + x$$

b) A partir de la gráfica, di cuál es el dominio de $f(x)$, estudia su continuidad y di cuáles son los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de la función.

Solución:

a) • $\lim\limits_{x\to -\infty}\left(x^3+2x^2+x\right)=-\infty;\qquad \lim\limits_{x\to +\infty}\left(x^3+2x^2+x\right)=+\infty$

· Puntos de corte con los ejes:

$$\text{Con el eje } X \ \rightarrow\ x^3+2x^2+x=x\left(x^2+2x+1\right)=0\ \rightarrow\ \begin{cases} x=0 \ \rightarrow\ \text{Punto }(0,0) \\ x=-1\ \rightarrow\ \text{Punto }(-1,0)\end{cases}$$

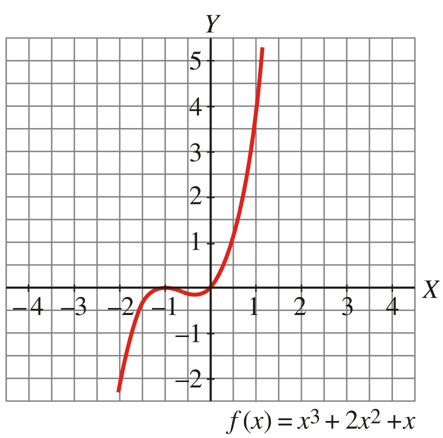
$$\text{Con el eje } Y \ \rightarrow\ x=0\ \rightarrow\ y=0\ \rightarrow\ \text{Punto}(0,0)$$

· Puntos singulares:

$$f'(x)=3x^2+4x+1=0\ \rightarrow\ x=\frac{-4\pm\sqrt{16-12}}{6}=\frac{-4\pm 2}{6}\ \rightarrow$$

$$\rightarrow\ \begin{cases} x=-1\ \rightarrow\ \text{Punto }(-1,0) \\ x=\dfrac{-2}{6}=\dfrac{-1}{3}\ \rightarrow\ \text{Punto}\left(-\dfrac{1}{3},\ \dfrac{-4}{27}\right)\end{cases}$$

· Gráfica:



b) • Dominio $=\mathbb{R}$

· Es una función continua.

- Creciente en $(-\infty,-1)\cup(0,+\infty)$ y decreciente en $(-1,\ 0)$.

Ejercicio nº 14.-

a) Representa gráficamente la función:

$$f(x)=\frac{2x^2+4x+2}{x^2+2x-3}$$

b) A partir de la gráfica, estudia la continuidad y los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de $f(x)$.

Solución:

a) · Dominio:

$$x^2+2x-3=0 \quad\Rightarrow\quad \frac{-2\pm\sqrt{4+12}}{2}=\frac{-2\pm 4}{2} \quad\to\quad \begin{cases} x=-3 \\ x=1 \end{cases}$$

$$\text{Dominio } = \mathbb{R}-\{-3,1\}$$

· Puntos de corte con los ejes:

$$\text{Con el eje } X \quad\to\quad y=0 \quad\to\quad 2x^2+4x+2=0$$

$$x=\frac{-4\pm\sqrt{16-16}}{4}=-1 \quad\to\quad \text{Punto}\left(-1,\ 0\right)$$

$$\text{Con el eje } Y \quad\to\quad x=0 \quad\to\quad y=-\frac{2}{3} \quad\to\quad \text{Punto}\left(0,\ \frac{-2}{3}\right)$$

· Asíntotas verticales: x = -3 y x = 1

$$\lim_{x\to -3^-} f(x)=\lim_{x\to -3^-}\frac{2x^2+4x+2}{(x+3)(x-1)}=+\infty; \qquad \lim_{x\to -3^+} f(x)=-\infty$$

$$\lim_{x\to 1^-} f(x)=-\infty; \qquad \lim_{x\to 1^+} f(x)=+\infty$$

· Asíntota horizontal: y = 2

$$\lim_{x\to -\infty} f(x)=2; \quad \lim_{x\to +\infty} f(x)=2$$

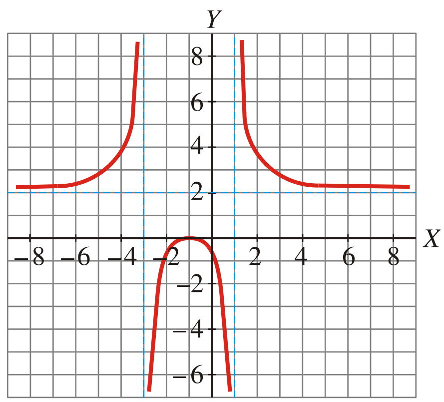
· Puntos singulares:

$$f'(x)=\frac{(4x+4)(x^2+2x-3)-(2x^2+4x+2)(2x+2)}{(x^2+2x-3)^2}=$$

$$=\frac{(2x+2)(2x^2+4x-6-2x^2-4x-2)}{(x^2+2x-3)^2}=\frac{-8(2x+2)}{(x^2+2x-3)^2}=\frac{-16(x+1)}{(x^2+2x-3)^2}$$

$f'(x)=0 \quad \Rightarrow \quad x=-1 \quad \to \quad$ Punto$(-1,\ 0)$

· Gráfica:



$f(x)=\dfrac{2x^2+4x+2}{x^2+2x-3}$

b) · Continuidad:

Si $x \neq -3$ y $x \neq 1$, es continua.

Es discontinua en x = -3 y en x =1, pues tiene dos ramas infinitas (asíntotas verticales).

- Creciente en $(-\infty,-3)\cup(-3,-1)$ y decreciente en $(-1,1)\cup(1,+\infty)$.

Ejercicio nº 15.-

Calcula el dominio de definición de la función:

$$f(x)=\sqrt{\frac{2x^3+3x}{4-x}}$$

Solución:

Buscamos los valores de x tales que $\dfrac{2x^3+3x}{4-x}\geq 0.$

Para que un cociente sea positivo, numerador y denominador han de tener el mismo signo:

Ambos positivos:

$$\begin{cases} 2x^3+3x\geq 0 \;\rightarrow\; x\left(2x^2+3\right)\geq 0 \;\rightarrow\; x\geq 0 \;\text{ ya que }\; 2x^2+3>0 \;\text{ siempre} \\ 4-x>0 \;\rightarrow\; x<4 \end{cases}$$

La solución de este sistema es [0, 4).

Ambos negativos:

$$\begin{cases} 2x^3+3x\leq 0 \;\rightarrow\; x\left(2x^3+3\right)\leq 0 \;\rightarrow\; x\leq 0 \;\text{ pues }\; 2x^3+3>0 \;\text{ siempre} \\ 4-x<0 \;\rightarrow\; x>4 \end{cases}$$

Este sistema no tiene solución.

Por tanto: *Dom f* = [0, 4)