FICHA BLOQUE 2. RESOLUCIÓN DE TRIÁNGULOS Y FÓRMULAS MATEMÁTICAS

1. **Resuelve las siguiente ecuaciones:**

a) $\operatorname{sen} 2x \cdot \cos x = 6 \cdot \operatorname{sen}^3 x$

$$2 sen\, x \cdot \cos x \cdot \cos x = 6 sen^3 x$$

$$sen\, x \left(\cos^2 x - 3 sen^2 x \right) = 0$$

$$sen\, x = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0° + 360° k \\ x = 180° + 360° k \end{cases} \Rightarrow x = 0° + 180° k$$

$$\cos^2 x - 3 sen^2 x = 0 \qquad \cos^2 x = 3 sen^2 x$$

$$tg^2 x = \frac{1}{3} \qquad tg x = \pm \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$tg\, x = \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow x = 30° + 180° k$$

$$tg\, x = -\frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow x = 150° + 180° k$$

b) $4\cos 2x + 3\cos x = 1$

$$4\cos 2x = 1 - 3\cos x$$
$$4\left(\cos^2 x - sen^2 x\right) = 1 - 3\cos x$$
$$4\cos^2 x - 4 sen^2 x = 1 - 3\cos x$$
$$4\cos^2 x - 4\left(1 - \cos^2 x\right) = 1 - 3\cos x$$
$$4\cos^2 x - 4 + 4\cos^2 x = 1 - 3\cos x$$
$$8\cos^2 x + 3\cos x - 5 = 0$$
$$\cos x = \frac{-3 \pm \sqrt{9+160}}{16} = \frac{-3 \pm \sqrt{169}}{16} = \frac{-3 \pm 13}{16} = \begin{cases} \frac{5}{8} \\ -1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \cos x = \frac{5}{8} \quad \rightarrow \quad \begin{cases} x = 51^\circ 19' 4'' + 360^\circ k \\ x = 308^\circ 40' 56'' + 360^\circ k \end{cases} \\ \cos x = -1 \quad \rightarrow \quad x = 180^\circ + 360^\circ k \end{cases}$$

siendo $k \in \mathbf{Z}$

c) $\cos x + \cos 2x + \cos 3x = 0$

d) $2tg\, x - 3cotg\, x - 1 = 0$

Solución:

$$2tg\, x - \frac{3}{tg\, x} - 1 = 0 \qquad\qquad 2tg^2 x - tg\, x - 3 = 0$$

$$tg\, x = \frac{1 \pm \sqrt{1+24}}{4} = \frac{1 \pm 5}{4}$$

$$tg\, x = \frac{3}{2} \qquad\qquad x = 56^\circ 18' 35'' + 180^\circ k$$

$$tg\, x = -1 \qquad\qquad x = 135^\circ + 180^\circ k$$

e) $\cos^2 x - 3sen^2 x = 0$

Solución:

$1 - sen^2 x - 3sen^2 x = 0 \qquad 1 - 4sen^2 x = 0$

$sen^2 x = \dfrac{1}{4} \qquad sen\, x = \pm\dfrac{1}{2}$

$$x = \arcsin\frac{1}{2} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 30^\circ + 360^\circ k \\ x_2 = 150^\circ + 360^\circ k \end{cases}$$

$$x = \arcsin\left(-\frac{1}{2}\right) \Rightarrow \begin{cases} x_3 = 210^\circ + 360^\circ k \\ x_4 = 330^\circ + 360^\circ k \end{cases}$$

f) $sen^2 x - \cos^2 x = \dfrac{1}{2}$

Solución:

$sen^2 x - \cos^2 x = \dfrac{1}{2} \qquad \cos^2 x - sen^2 x = -\dfrac{1}{2} \qquad \cos 2x = -\dfrac{1}{2}$

$$2x = \begin{cases} 120^\circ + 360^\circ k \\ 240^\circ + 360^\circ k \end{cases} \Rightarrow x = \begin{cases} 60^\circ + 180^\circ k \\ 120^\circ + 180^\circ k \end{cases}$$

g) $\boldsymbol{senx\, sen2x + 2sen^2 x = 0}$

Solución:

$$sen\,x \cdot sen\,2x + 2sen^2 x = 0$$
$$sen\,x \cdot 2sen\,x\,cos\,x + 2sen^2 x = 0$$
$$2sen^2 x\,cos\,x + 2sen^2 x = 0$$
$$2sen^2 x(cos\,x + 1) = 0$$

$$\begin{cases} 2sen^2 x = 0 \quad \rightarrow \quad sen\,x = 0 \quad \rightarrow \quad \begin{cases} x = 0^\circ + 360^\circ k \\ x = 180^\circ + 360^\circ k \end{cases} \\ cos\,x + 1 = 0 \quad \rightarrow \quad cos\,x = -1 \quad \rightarrow \quad x = 180^\circ + 360^\circ k \end{cases}$$

Por tanto, las soluciones son:

$$\begin{cases} x = 360^\circ k \\ x = 180^\circ + 360^\circ k \end{cases} \quad \text{siendo } k \in \mathbf{Z}$$

h) **2sen x + cos x = 1 8**

2. Demuestra que:

$$\frac{\boldsymbol{senx}}{\boldsymbol{1+cosx}}+\frac{\boldsymbol{1+cosx}}{\boldsymbol{senx}}=\frac{\boldsymbol{4+4cosx}}{\boldsymbol{2senx+sen2x}}$$

Solución:

$$\frac{sen\,x}{1+cos\,x}+\frac{1+cos\,x}{sen\,x}=\frac{sen^2\,x+(1+cos\,x)^2}{(1+cos\,x)sen\,x}=$$

$$=\frac{sen^2\,x+1+2\,cos\,x+cos^2\,x}{sen\,x+sen\,x\,cos\,x}=\frac{1+1+2\,cos\,x}{sen\,x+\frac{2\,sen\,x\,cos\,x}{2}}=$$

$$=\frac{2+2cos\,x}{sen\,x+\frac{sen\,2x}{2}}=\frac{2+2cos\,x}{\frac{2sen\,x+sen\,2x}{2}}=\frac{4+4cos\,x}{2sen\,x+sen\,2x}$$

$$\frac{\boldsymbol{cos\,x}}{\boldsymbol{sen\,x}}=\frac{\boldsymbol{1-tg^2\,\frac{x}{2}}}{\boldsymbol{2\,tg\,\frac{x}{2}}}$$

Solución:

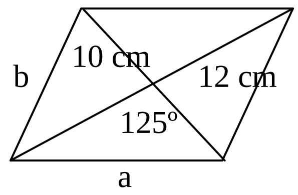
Sabemos que $tg\,\frac{x}{2}=\sqrt{\frac{1-cos\,x}{1+cos\,x}}$

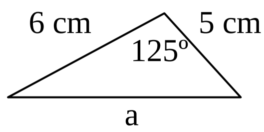
$$\frac{1-tg^2\,\frac{x}{2}}{2\,tg\,\frac{x}{2}}=\frac{1-\frac{1-cos\,x}{1+cos\,x}}{2\cdot\sqrt{\frac{1-cos\,x}{1+cos\,x}}}=\frac{\frac{2\,cos\,x}{1+cos\,x}}{\frac{2\sqrt{1-cosx}}{\sqrt{1+cos\,x}}}=\frac{2\,cos\,x\sqrt{1+cos\,x}}{2(1+cos\,x)\sqrt{1-cos\,x}}=$$

$$=\frac{cos\,x\cdot\left(\sqrt{1+cos\,x}\right)^2}{(1+cos\,x)\sqrt{1-cos\,x}\cdot\sqrt{1+cos\,x}}=\frac{cos\,x(1+cos\,x)}{(1+cos\,x)\sqrt{1-cos^2x}}=\frac{cos\,x}{\sqrt{sen^2x}}=\frac{cos\,x}{sen\,x}$$

3. Las diagonales de un paralelogramo miden 10 y 12 cm. Uno de los ángulos que forman éstas al cortarse es de 125º. Halla el perímetro.

Solución:

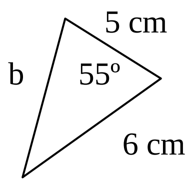




1) Para hallar el valor del lado a utilizamos el Teorema del Coseno:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos \hat{A} = 6^2 + 5^2 - 2 \cdot 6 \cdot 5 \cdot \cos 125º = 36 + 25 - 60 \cdot \cos 125 = 95{,}415$$
$$a = \sqrt{95{,}415} = 9{,}768$$

2) Para hallar el valor del lado b utilizamos el Teorema del Coseno:

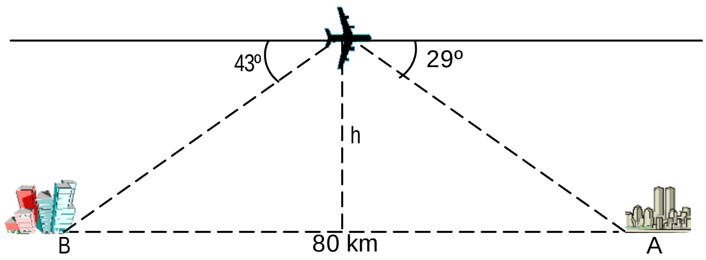


$$b^2 = a^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos \hat{B} = 6^2 + 5^2 - 2 \cdot 6 \cdot 5 \cdot \cos 55º = 36 + 25 - 60 \cdot \cos 55º = 26{,}585$$
$$a = \sqrt{95{,}415} = 5{,}1561$$

3) Hallamos el Perímetro del paralelogramo

$$P = 2 \cdot 9{,}768 + 2 \cdot 5{,}1561 = 63{,}482cm$$

4. Un avión vuela entre dos ciudades, A y B, que distan 80 km. Las visuales desde el avión a A y a B forman ángulos de 29° y 43° con la horizontal, respectivamente. ¿A qué altura está el avión?



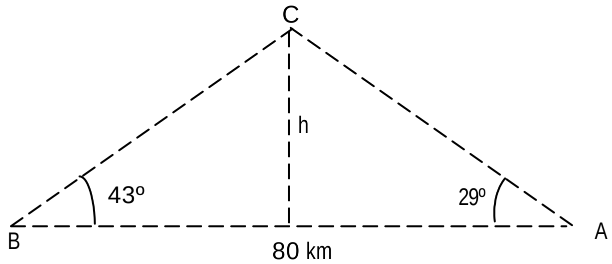
<u>Solución</u>

Aplicamos el teorema del seno, para calcular la distancia a cada ciudad:

C = 180º - (29º + 43º) = 108º

$\frac{AB}{\text{sen}\,108^{o}} = \frac{AC}{\text{sen}\ 43^{o}}$ $\quad AC = \frac{80 \cdot \text{sen}\ 43^{o}}{\text{sen}\,108^{o}}$ $\quad$ 57,36 km

$\frac{AB}{\text{sen}\,108^{o}} = \frac{BC}{\text{sen}\ 29^{o}}$ $\quad BC = \frac{80 \cdot \text{sen}\ 29^{o}}{\text{sen}\,108^{o}}$ $\quad$ 40, 78 km



Para calcular la altura:

$$sen\ 29^{\circ} = \frac{h}{AC} \rightarrow h = AC \cdot sen 29^{\circ} = 27{,}81 km$$

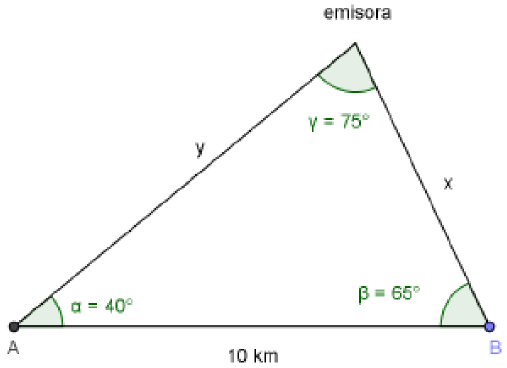
5. Para localizar una emisora clandestina, dos receptores, A y B, que distan entre sí 10 km, orientan sus antenas hacia el punto donde está la emisora. Estas direcciones forman con AB ángulos de 40° y 65°. ¿A qué distancia de A y B se encuentra la emisora?

Teorema del seno

$$\frac{10}{sen\ 75°} = \frac{x}{sen\ 40°} = \frac{y}{sen\ 65°}$$

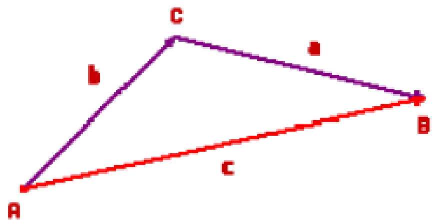
$$\frac{10}{sen\ 75°} = \frac{x}{sen\ 40°} \rightarrow x = \frac{10\ \cdot sen\ 40°}{sen 75°}$$

$$x\ \cong\ 6{,}65\ km$$



$$\frac{10}{sen\ 75°} = \frac{y}{sen\ 65°} \rightarrow y = \frac{10 \cdot sen\ 65°}{sen 75°};\ \ y \cong\ 9{,}38\ km$$

6. En un entrenamiento de fútbol se coloca el balón en un punto situado a 5 m y 8 m de cada uno de los postes de la portería, cuyo ancho es de 7 m. ¿Bajo qué ángulo se ve la portería desde ese punto?



Tenemos que calcular la medida de $\hat{A}$, siendo AC = 13 m AB = 17m y BC = 7m .

Aplicando el teorema del coseno:

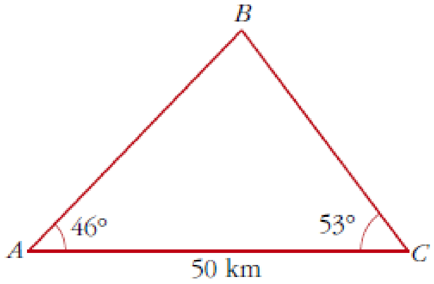
$$a^2 = b^2 + c^2 - 2\ .\ b\ .\ c\ .\ \cos\ \hat{A}\ \Rightarrow\ 7^2 = 13^2 + 17^2 - 2.\ 13\ .\ 17\ .\ \cos\ \hat{A}$$

de donde $\cos\ \hat{A} = \dfrac{49-169-289}{-442} = 0{,}925339$

$$\hat{A} = \text{arc cos } 0{,}925339\ \Rightarrow\ \hat{A} = 55°\ 31'$$

7. Un barco B pide socorro y se reciben sus señales en dos estaciones de radio, A y C, que distan entre sí 50 km. Desde las estaciones se miden los siguientes ángulos: BAC = 46° y BCA = 53°. ¿A qué distancia de cada estación se encuentra el barco?

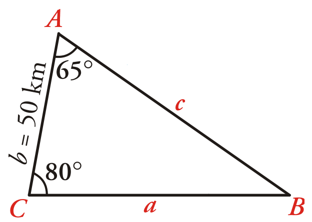
$\hat{B} = 180° - 46° - 53° = 81°$



- $\dfrac{a}{sen\ \hat{A}} = \dfrac{b}{sen\ \hat{B}} \rightarrow a = \dfrac{b\ sen\ \hat{A}}{sen\ \hat{B}} = \dfrac{50 \cdot sen\ 46°}{sen\ 81°} = 36{,}4$ km
- $\dfrac{c}{sen\ \hat{C}} = \dfrac{b}{sen\ \hat{B}} \rightarrow c = \dfrac{b\ sen\ \hat{C}}{sen\ \hat{B}} = \dfrac{50 \cdot sen\ 53°}{sen\ 81°} = 40{,}4$ km

8. En dos estaciones de radio, *A* y *C*, que distan entre sí 50 km, son recibidas señales que manda un barco, *B*. Si consideramos el triángulo de vértices *A*, *B* y *C*, el ángulo en *A* es de 65° y el ángulo en *C* es de 80°. ¿A qué distancia se encuentra el barco de cada una de las dos estaciones de radio?

Solución:



Hallamos el ángulo $\hat{B}$:

$\hat{B} = 180° - \left(\hat{A} + \hat{C}\right) = 35°$

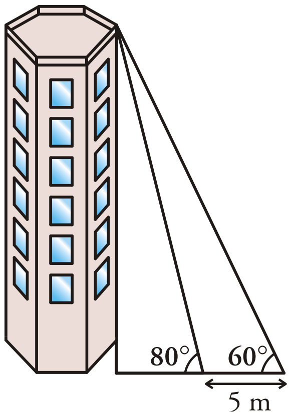
Hallamos los valores de a y c aplicando el teorema de los senos:

$$\frac{a}{sen 65°} = \frac{50}{sen 35°} \rightarrow a = \frac{50 sen 65°}{sen 35°} = 79 \text{ km}$$

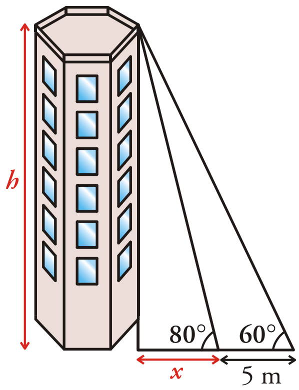
$$\frac{c}{sen 80°} = \frac{50}{sen 35°} \rightarrow c = \frac{50 sen 80°}{sen 35°} = 85{,}85 \text{ km}$$

Por tanto, el barco está a 79 km de la estación C y a 85,85 km de la estación A.

9. Para medir la altura de una torre nos situamos en un punto del suelo y vemos el punto más alto de la torre bajo un ángulo de 60°. Nos acercamos 5 metros a la torre en línea recta y el ángulo es de 80°. Halla la altura de la torre.



Solución:



$$\left.\begin{aligned} tg\,80^\circ &= \frac{h}{x} \\ tg\,60^\circ &= \frac{h}{x+5} \end{aligned}\right\} \qquad \left.\begin{aligned} h &= x\,tg\,80^\circ \\ h &= (x+5)\,tg\,60^\circ \end{aligned}\right\}$$

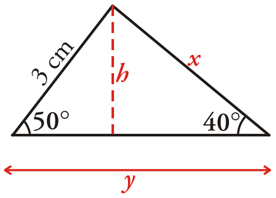
$$x\ tg\,80^\circ = (x+5)\,tg\,60^\circ$$
$$x\ tg\,80^\circ = x\ tg60^\circ + 5\ tg\,60^\circ$$
$$x\,tg\,80^\circ - x\,tg\,60^\circ = 5\,tg\,60^\circ$$
$$x\left(tg\,80^\circ - tg\,60^\circ\right) = 5\,tg\,60^\circ$$

$$x = \frac{5\,tg\,60^\circ}{tg\,80^\circ - tg\,60^\circ} = 2{,}20\ \text{ m}$$

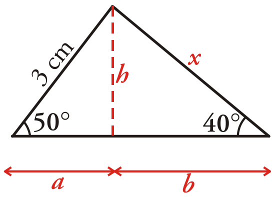
$$h = x \cdot tg\,80^\circ = 12{,}47\ \text{ m}$$

La torre tiene una altura de 12,47 metros.

10. Halla los valores de *x*, *y*, *h* en el siguiente triángulo:



Solución:



$$sen 50^\circ = \frac{h}{3} \quad \rightarrow \quad h = 3 sen 50^\circ = 2{,}30 \text{ cm}$$

$$cos 50^\circ = \frac{a}{3} \quad \rightarrow \quad a = 3 cos 50^\circ = 1{,}93 \text{ cm}$$

Si consideramos el otro triángulo, tenemos que:

$$sen 40^\circ = \frac{h}{x} = \frac{2{,}30}{x} \quad \rightarrow \quad x = \frac{2{,}30}{sen 40^\circ} = 3{,}58 \text{ cm}$$

$$cos 40^\circ = \frac{b}{x} = \frac{b}{3{,}58} \quad \rightarrow \quad b = 3{,}58 \cdot cos 40^\circ = 2{,}74$$

Por tanto:

$$x = 3{,}58 \text{ cm}$$
$$y = a + b = 1{,}93 + 2{,}74 = 4{,}67 \text{ cm}$$
$$h = 2{,}30 \text{ cm}$$

11. Si *sen* a = 0,35 y 0° < a < 90° halla (sin calcular a):

a) $sen\left(180^\circ - \alpha\right)$ **b)** $cos\left(180^\circ + \alpha\right)$

Solución:

Necesitamos saber cuánto vale *cos* a:

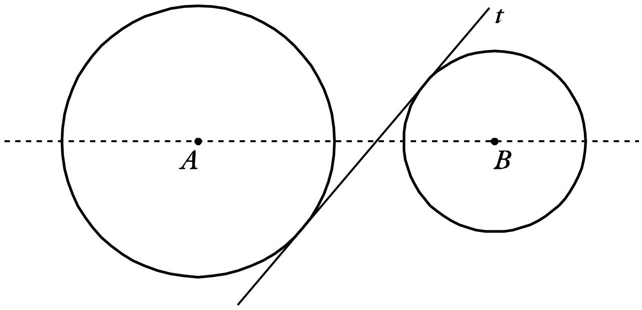
$$sen^2\alpha + cos^2\alpha = 1 \quad \rightarrow \quad 0{,}35^2 + cos^2\alpha = 1$$

$$0{,}1225 + \cos^2\alpha = 1 \quad \rightarrow \quad \cos^2\alpha = 0{,}8775$$

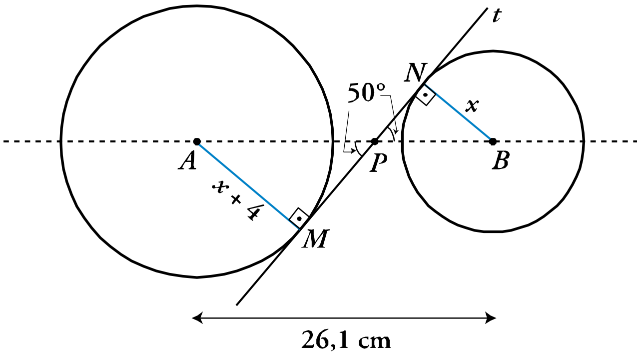
$$cos\,\alpha = 0{,}94 \;\; \text{(es positivo, pues } 0^\circ < \alpha < 90^\circ\text{)}$$

Por tanto, $cos\left(180^\circ + \alpha\right) = -cos\,\alpha = -0{,}94$

12. Las circunferencias de la figura tienen radios que se diferencian en 4 cm. El ángulo que forma la tangente a las circunferencias con la línea que une sus centros es de 50°. Sabiendo que la distancia entre sus centros es de 26,1 cm, calcula los radios de las circunferencias.



Solución:



Llamamos:

$x \;\rightarrow$ Radio de la circunferencia pequeña

$x + 4 \;\rightarrow$ Radio de la otra circunferencia

En el triángulo AMP se cumple: $sen\,50^\circ = \dfrac{x+4}{\overline{AP}}$

En el triángulo BNP se cumple: $sen\,50^\circ = \dfrac{x}{\overline{PB}} = \dfrac{x}{\overline{AB}-\overline{AP}} = \dfrac{x}{26{,}1-\overline{AP}}$

Resolvemos el sistema formado:

$$\left.\begin{array}{l} sen\,50^\circ = \dfrac{x+4}{\overline{AP}} \\ sen\,50^\circ = \dfrac{x}{26{,}1-\overline{AP}} \end{array}\right\} \begin{array}{l} \rightarrow\; x+4 = \overline{AP}\,sen\,50^\circ \\ \rightarrow\; x = \left(26{,}1-\overline{AP}\right)sen\,50^\circ \;\rightarrow\; x = 26{,}1 sen\,50^\circ - \overline{AP}\,sen\,50^\circ \rightarrow \end{array}$$

$$\rightarrow\; x = 26{,}1 sen\,50^\circ - x - 4 \;\rightarrow\; 2x \approx 16 \;\rightarrow\; x \approx 8 \text{ cm} \;\rightarrow\; x + 4 = 12 \text{ cm}$$

Por tanto, los radios de las circunferencias miden 8 cm y 12 cm.