FICHA BLOQUE 2. LIMITES Y CONTINUIDAD

1. Calcula los siguientes límites:

a)
$$\lim_{x\to 5}\frac{x^2-25}{x^2-10x+25}=\frac{0}{0}=INDT \rightarrow \text{Debemos de descomponer en factores los polinomios}$$
$$\lim_{x\to 5}\frac{x^2-25}{x^2-10x+25}=\lim_{x\to 5}\frac{(x+5)(x-5)}{(x-5)(x-5)}=\lim_{x\to 5}\frac{x+5}{x-5}=\frac{5+5}{5-5}=\frac{10}{0}=+\infty$$

b)
$$\lim_{x\to+\infty}\frac{2x-1}{1+3x}=\frac{\infty}{\infty}=INDT$$
$$\lim_{x\to+\infty}\frac{2x-1}{1+3x}=\frac{2}{3}$$

c) $$\lim_{x\to-\infty}\frac{3x^2}{x-1}=\frac{\infty}{-\infty}=-\infty$$

2. Calcula los siguientes límites:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{3x}{5+3x}=\frac{\infty}{\infty}=INDT$$
$$\lim_{x\to+\infty}\frac{3x}{5+3x}=\frac{3}{3}=1$$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{3x}{5+3x}=\frac{-\infty}{-\infty}=\frac{\infty}{\infty}=INDT$$
$$\lim_{x\to-\infty}\frac{3x}{5+3x}=\frac{3}{3}=1$$

3. Calcula los siguientes límites:

a) $$\lim_{x\to+\infty}\frac{-x^4+2x}{4-3x^4}$$

b) $$\lim_{x\to-\infty}\frac{3x^2-2x+1}{x^2-1+x^3}$$

Solución:

a) $$\lim_{x\to+\infty}\frac{-x^4+2x}{4-3x^4}=\frac{-1}{-3}=\frac{1}{3}$$

b) $$\lim_{x\to-\infty}\frac{3x^2-2x+1}{x^2-1+x^3}=0$$

4. Estudia la continuidad de la siguiente función:

$$f(x)=\begin{cases} 3x-5 & si\ \ x\leq 4 \\ x^{2}+1 & si\ \ x>4 \end{cases}$$

Solución

$$f(x)=\begin{cases} 3x-5 & si\ \ x\leq 4 \rightarrow \text{contínua en } \Re \\ x^{2}+1 & si\ \ x>4 \rightarrow \text{contínua en } \Re \end{cases}$$

Solo hay duda en la continuidad de la función en el punto $x = 4$

En $x = 4$

1) $f(4)=3\cdot 4-5=12-5=7$

2) $\exists \lim\limits_{x\to 4} f(x) \rightarrow \begin{cases} \lim\limits_{x\to 4^{+}} x^{2}+1=4^{2}+1=16+1=17 \\ \lim\limits_{x\to 4^{-}} 3x-5=3\cdot 4-5=7 \end{cases} \rightarrow \lim\limits_{x\to 4^{+}} x^{2}+1\neq \lim\limits_{x\to 4^{-}} 3x-5 \rightarrow \textit{No}\ \text{existe} \lim\limits_{x\to 4} f(x)$

3) $\lim\limits_{x\to 4^{+}} x^{2}+1\neq \lim\limits_{x\to 4^{-}} 3x-5 \rightarrow f(x)$ es discontínua de salto fínito

Por lo tanto la función $f(x)$ es contínua en $\Re - \{4\}$

5. Estudia la continuidad de la siguiente función:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x+2} & \text{si } x \le -1\\ x^2-x & \text{si } -1 \le x < 2\\ 2 & \text{si } x \ge 2\end{cases}$$

Solución

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x+2} \quad \text{si } x \le -1 & \rightarrow \text{Contínua en } \Re - \{-2\}\\ x^2-x \quad \text{si } -1 \le x < 2 & \rightarrow \text{Contínua en } \Re\\ 2 \qquad \text{si } x \ge 2 & \rightarrow \text{Contínua en } \Re\end{cases}$$

Solo hay duda en la continuidad de la función en el punto $x = -1$ y en $x = 2$

En $x = -1$

$1)\, f(-1) = \dfrac{1}{-1+2} = 1$

$$2) \exists \lim_{x\to -1} f(x) \rightarrow \begin{cases}\lim\limits_{x\to -1^+} x^2 - x = (-1)^2 - (-1) = 1+1 = 2\\ \lim\limits_{x\to -1^-} \dfrac{1}{x+2} = \dfrac{1}{-1+2} = 1\end{cases} \rightarrow \lim_{x\to --1^+} x^2 - x \ne \lim_{x\to -1^-} \frac{1}{x+2} \rightarrow \textit{No} \text{ existe } \lim_{x\to -1} f(x)$$

$$3) \lim_{x\to --1^+} x^2 - x \ne \lim_{x\to -1^-} \frac{1}{x+2} \rightarrow f(x) \text{ es discontínua de salto fínito}$$

En $x = 2$

$1)\, f(2) = 2$

$$2) \exists \lim_{x\to 2} f(x) \rightarrow \begin{cases}\lim\limits_{x\to 2^+} 2\\ \lim\limits_{x\to 2^-} x^2 - x = 2^2 - 2 = 4 - 2 = 2\end{cases} \rightarrow \lim_{x\to --1^+} x^2 - x = \lim_{x\to -1^-} \frac{1}{x+2} \rightarrow \exists \lim_{x\to -1} f(x) = 2$$

$$3)\, f(2) = \lim_{x\to --1^+} x^2 - x = \lim_{x\to -1^-} \frac{1}{x+2} = 2 \rightarrow f(x) \text{ es contínua en } x = 2$$

Por lo tanto la función $f(x)$ es contínua en $\Re - \{-2,-1\}$

6. Halla el valor de k para que f(x) sea continua en x=1.

$$\boldsymbol{f(x)=\begin{cases}2x+1 & \text{si} \quad x\le 1\\ k & \text{si} \quad x>1\end{cases}}$$

Solución:

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}(2x+1)=3\\ \lim\limits_{x\to 1^+} f(x) \;=k\\ f(1)=3\end{array}\right\}$$

Para que sea continua en $x=1$, $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=f(1)$.

Ha de ser $k=3$.

7. Calcula el dominio y las asíntotas, si las tiene, de la función $y=\dfrac{x^3}{x^2-1}$

Solución

El dominio por definición son los valores Reales donde la función existe, es decir su imagen toma valores reales. En las funciones Racionales (Cociente de polinomios), los valores que anulan el denominador hace que no exista la función.

$$x^2-1=0\rightarrow x=\pm\sqrt{1}=\pm 1$$

Dom y = R – {+-1}

Asíntotas Verticales (donde faya el dominio)

$$\lim_{x\to+1}\frac{x^3}{x^2-1}=\frac{1}{0}=+\infty\rightarrow x=1 \text{ hay una asintota vertical}$$
$$\lim_{x\to-1}\frac{x^3}{x^2-1}=\frac{-1}{0}=-\infty\rightarrow x=-1 \text{ hay una asintota vertical}$$

Asíntotas Horizontales

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^3}{x^2-1}=\frac{\infty}{\infty}=INDT$$
$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^3}{x^2-1}=+\infty\rightarrow \text{No hay asintotas horizontales}$$

Asíntotas Oblicuas (y=mx+n)

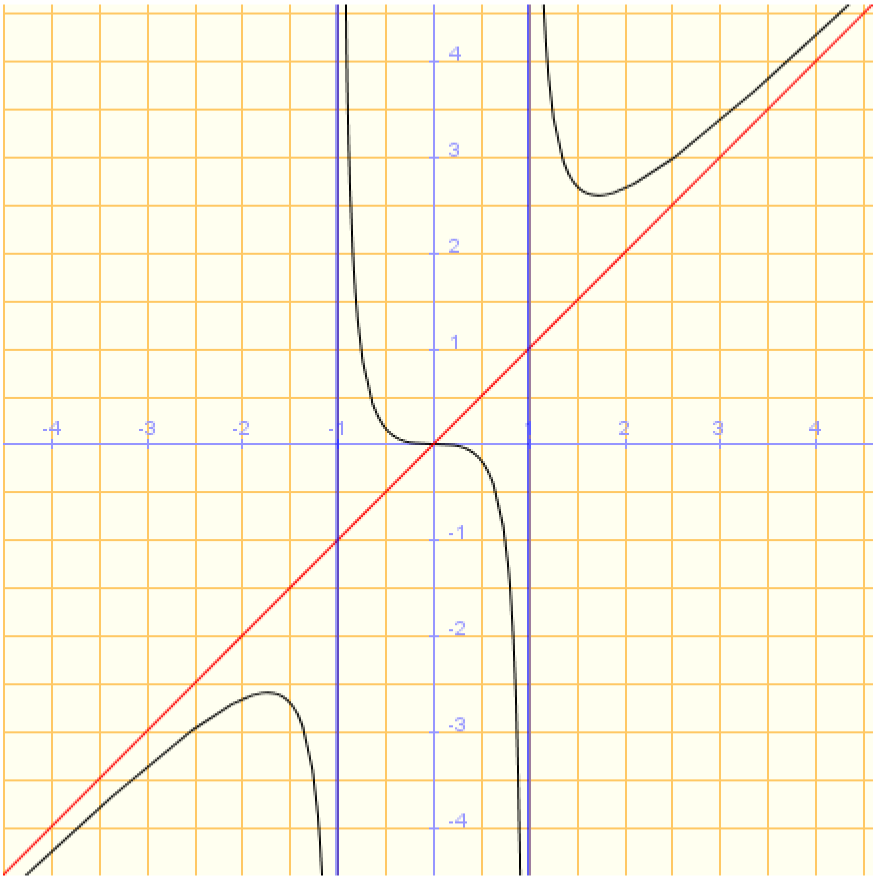
$$m=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}$$
$$n=\lim_{x\to+\infty}f(x)-mx$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{x^3}{x^2-1}}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^3}{x^2-1}:\frac{x}{1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^3}{x\cdot(x^2-1)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^3}{x^3-x}=1$$
$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^3}{x^2-1}-x=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^3}{x^2-1}-\frac{x\cdot(x^2-1)}{x^2-1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^3-x^3+x}{x^2-1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{x^2-1}=0$$

Hay una asintota oblicua en $y=x$

En WIRIS

```
dibujar(y=x^3/(x^2-1))
dibujar(y=x,{color=rojo})
dibujar(x=1,{color=azul})
dibujar(x=-1,{color=azul})
```


-4
-3
-2
-1
1
2
3
4
4
3
2
1
-1
-2
-3
-4

Calcula el dominio y las asíntotas, si las tiene, de la función $y=\dfrac{2x^2}{(x+2)^2}$

Solución:

- $(x+2)^2=0 \to x=-2$

Dom y = R – {-2}

Asíntotas Verticales

$$\lim_{x\to -2}\frac{2x^2}{(x+2)^2}=\frac{8}{0}=+\infty \to x=-2 \text{ hay una asíntota vertical}$$

Asíntotas horizontales

$$\lim_{x\to +\infty}\frac{2x^2}{(x+2)^2}=\frac{\infty}{\infty}=INDT$$

$$\lim_{x\to +\infty}\frac{2x^2}{(x+2)^2}=\lim_{x\to +\infty}\frac{2x^2}{x^2+4x+4}=\frac{2}{1}=2 \to \text{En y} = 2 \text{ hay una asíntota horizontal}$$

Asíntotas Oblicuas

$$m=\lim_{x\to +\infty}\frac{f(x)}{x}$$

$$n=\lim_{x\to +\infty}f(x)-mx$$

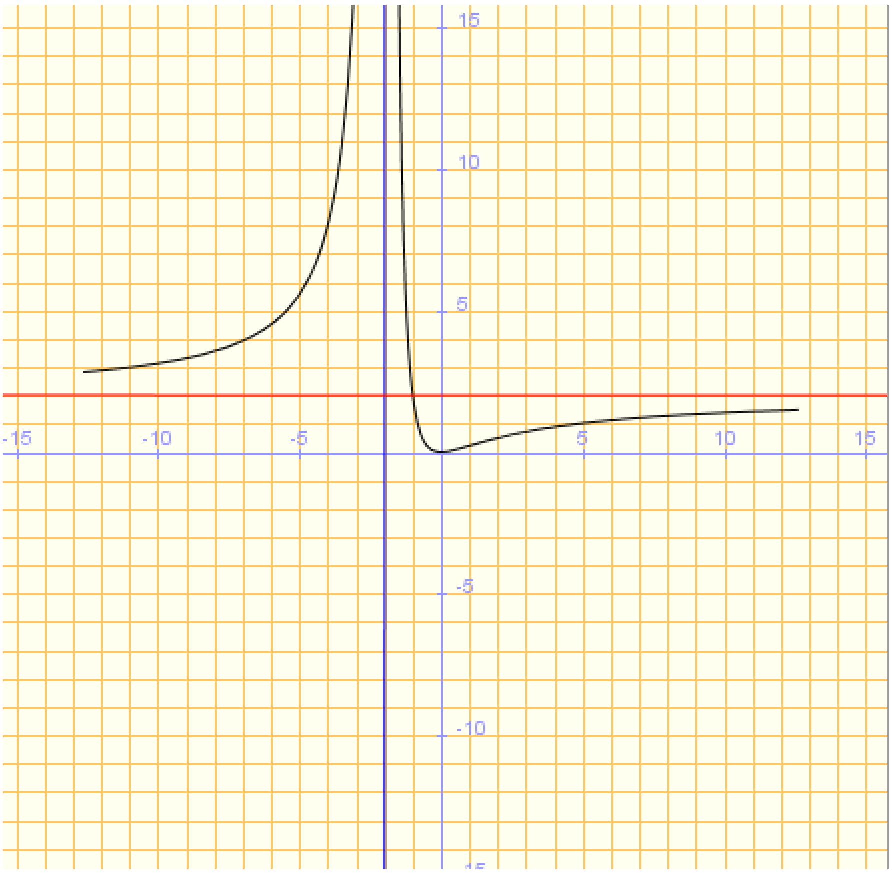
$$m=\lim_{x\to +\infty}\frac{\frac{2x^2}{(x+2)^2}}{x}=\lim_{x\to +\infty}\frac{2x^2}{(x+2)^2}:\frac{x}{1}=\lim_{x\to +\infty}\frac{2x^2}{x\cdot(x+2)^2}=\lim_{x\to +\infty}\frac{2x^2}{x\cdot(x^2+4x+4)}=\lim_{x\to +\infty}\frac{2x^2}{x^3+4x^2+4x}=0$$

$$n=\lim_{x\to +\infty}\frac{2x^2}{(x+2)^2}-0=\lim_{x\to +\infty}\frac{2x^2}{(x+2)^2}=2$$

Hay una asintota oblicua en $y=2$ (Que coincide con la asíntota horizontal)

En WIRIS

```
dibujar(y=2x^2/(x+2)^2)
dibujar(x=-2,{color=azul})
dibujar(y=2,{color=rojo})
```


15
10
5
-15
-10
-5
5
10
15
-5
-10

9. Calcula el dominio y las asintotas, si las tiene, de la función $y=\dfrac{x^3}{x^2+1}$

Solución:

$$x^2+1=0\rightarrow x=\pm\sqrt{-1}=\text{No tiene solución Real}$$

$$dom y=\Re$$

Asíntotas Verticales

No hay asíntotas Verticales

Asíntotas horizontales

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^3}{x^2+1}=\frac{\infty}{\infty}=INDT$$
$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^3}{x^2+1}=+\infty\rightarrow \text{No hay una asíntota horizontal}$$

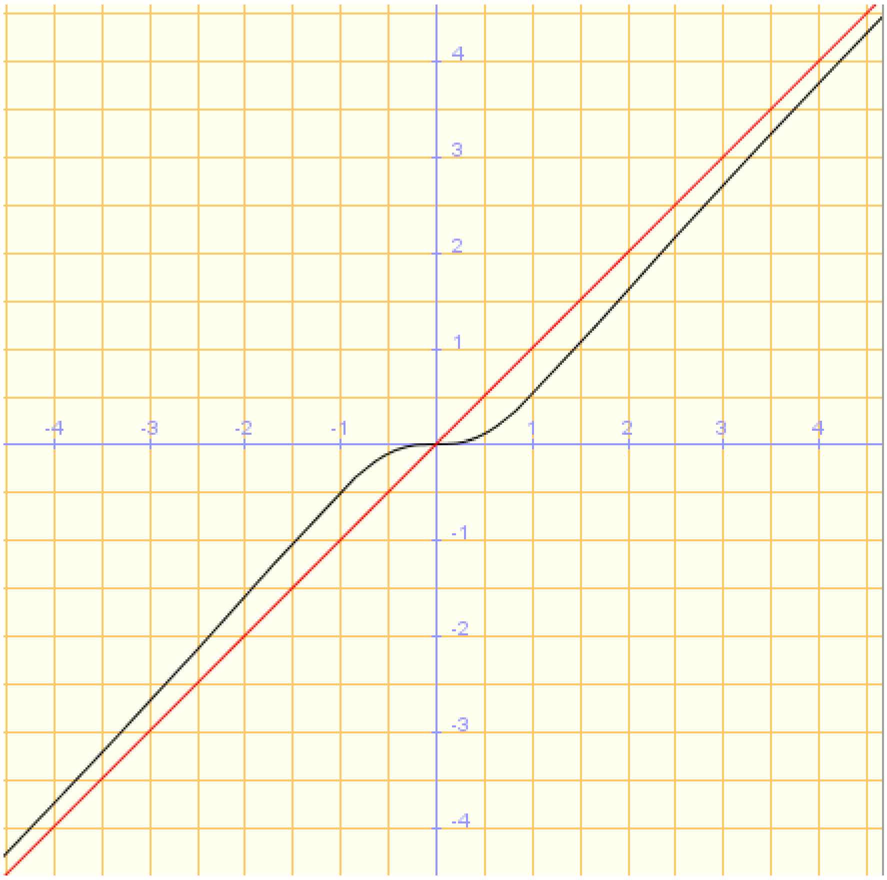
Asíntotas Oblicuas

$$m=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}$$
$$n=\lim_{x\to+\infty}f(x)-mx$$
$$m=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{x^3}{x^2+1}}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^3}{x^2+1}:\frac{x}{1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^3}{x\cdot(x^2+1)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^3}{x^3+x}=1$$
$$n=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^3}{x^2+1}-x=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^3}{x^2+1}-\frac{x\cdot(x^2+1)}{x^2+1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^3-x^3-x}{x^2+1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{-x}{x^2+1}=0$$

Hay una asintota oblicua en $y=x$

En WIRIS

$$\text{dibujar}\left(y=\frac{x^3}{x^2+1}\right)\rightarrow \text{tablero1}$$
$$\text{dibujar}(y=x,\{color=rojo\})\rightarrow \text{tablero1}$$



4
3
2
1
-4
-3
-2
-1
1
2
3
4
-1
-2
-3
-4