FICHA BLOQUE 2. VECTORES

1. Dos vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ cumplen que $|\vec{u}|=5,\ |\vec{v}|=2$ y $\left(\widehat{\vec{u},\vec{v}}\right)=45°$. Calcula:

a) $\vec{u}\cdot(-\vec{v})$

b) $(-2\vec{u})\cdot(3\vec{v}+\vec{u})$

Solución:

a) $\vec{u}\cdot(-\vec{v})=-\vec{u}\cdot\vec{v}=-|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|\cdot\cos\left(\widehat{\vec{u},\vec{v}}\right)=-5\cdot 2\cdot \cos 45°=-10\cdot\dfrac{\sqrt{2}}{2}=-5\sqrt{2}$

b) $(-2\vec{u})\cdot(3\vec{v}+\vec{u})=(-2\vec{u})\cdot(3\vec{v})+(-2\vec{u})\cdot\vec{u}=-6\vec{u}\cdot\vec{v}-2\vec{u}\cdot\vec{u}=-6\left(5\sqrt{2}\right)-2\cdot|\vec{u}|^2\cdot\underbrace{\cos 0°}_{1}=$

$=-30\sqrt{2}-2\cdot 5^2=-30\sqrt{2}-50\approx -92,43$

2. Dados los vectores $\vec{a}(4,-1)$ y $\vec{b}(2,-3)$ calcula un vector $\vec{u}$ perpendicular a $\vec{b}$ tal que $\vec{a}\cdot\vec{u}=10$.

Solución:

Llamamos x, y a las coordenadas del vector $\vec{u}$.
Por ser $\vec{u}$ y $\vec{b}$ perpendiculares, su producto escalar es cero:

$\vec{u}\cdot\vec{b}=0\ \rightarrow\ (x,y)\cdot(2,-3)=0\ \rightarrow\ 2x-3y=0$

Además $\vec{a}\cdot\vec{u}=10\ \rightarrow\ (4,-1)\cdot(x,y)=10\ \rightarrow\ 4x-y=10$

Resolvemos el sistema:

$$\left.\begin{array}{l}2x-3y=0\\4x-y=10\end{array}\right\}\ \rightarrow\ \begin{array}{r}-4x+6y=0\\4x-y=10\\\hline 5y=10\end{array}\ \rightarrow\ y=2$$

$4x-y=10\ \rightarrow\ 4x-2=10\ \rightarrow\ 4x=12\ \rightarrow\ x=3$

El vector $\vec{u}$ tiene como coordenadas $x=3, y=2\ \rightarrow\ \vec{u}(3,2)$.

3. **Dados los vectores $\vec{a}(3,5)$ y $\vec{b}(4,-2)$ calcula un vector de la misma dirección que $\vec{b}$ y cuyo módulo sea igual a la proyección de $\vec{a}$ sobre $\vec{b}$.**

Solución:

Un vector de la misma dirección que $\vec{b}(4,-2)$ será de la forma $\vec{v}=\lambda\vec{b}=(4\lambda,-2\lambda)$ siendo $\lambda\in\mathbb{R}-\{0\}$.

Calculamos la proyección de $\vec{a}$ sobre $\vec{b}$:

$$proy_{\vec{b}}(\vec{a})=\frac{\vec{a}\bullet\vec{b}}{|\vec{b}|}=\frac{(3,5)\bullet(4,-2)}{\sqrt{4^2+(-2)^2}}=\frac{12-10}{\sqrt{20}}=\frac{2}{\sqrt{20}}=\frac{2}{2\sqrt{5}}=\frac{1}{\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{5}}{5}$$

Entonces:

$$|\vec{v}|=proy_{\vec{b}}\vec{a}\ \rightarrow\ \sqrt{(4\lambda)^2+(-2\lambda)^2}=\sqrt{16\lambda^2+4\lambda^2}=\sqrt{20\lambda^2}=\frac{\sqrt{5}}{5}\ \rightarrow\ 2\sqrt{5\lambda^2}=\frac{\sqrt{5}}{5}\ \rightarrow\ \lambda=\pm\frac{1}{10}$$

Así: $\vec{v}_1\left(\frac{4}{10},\frac{-2}{10}\right)\rightarrow v_1\left(\frac{2}{5},\frac{-1}{5}\right)$

$\vec{v}_2\left(\frac{-4}{10},\frac{2}{10}\right)\rightarrow \vec{v}_2\left(\frac{-2}{5},\frac{1}{5}\right)$

4. Resuelve

a) Calcula m de modo que el producto escalar de $\vec{a}(3,-2)$ y $\vec{b}(m,5)$ sea igual a 5.

b) Calcula la proyección de $\vec{a}$ sobre $\vec{c}$, siendo $\vec{c}(1,-3)$.

Solución:

a) $\vec{a}\bullet\vec{b}=5\ \rightarrow\ (3,-2)\bullet(m,5)=5\ \rightarrow\ 3m+(-2)\cdot5=5\ \rightarrow\ 3m-10=5\ \rightarrow\ 3m=15\ \rightarrow\ m=5$

b) $proy_{\vec{c}}(\vec{a})=\dfrac{\vec{a}\bullet\vec{c}}{|\vec{c}|}=\dfrac{(3,-2)\bullet(1,-3)}{\sqrt{1+9}}=\dfrac{3\cdot1+(-2)(-3)}{\sqrt{10}}=\dfrac{3+6}{\sqrt{10}}=\dfrac{9}{\sqrt{10}}=\dfrac{9\sqrt{10}}{10}$

5. Si $\vec{a}\left(\frac{1}{4}, -3\right)$ y $\vec{b}(4, 2)$, calcula:

a) Un vector unitario con la misma dirección y sentido que $\vec{b}$.

b) El ángulo formado por $\vec{a}$ y $\vec{b}$.

Solución:

a) Hallamos el módulo de $\vec{b}$:

$$|\vec{b}| = \sqrt{4^2 + 2^2} = \sqrt{16+4} = \sqrt{20}$$

El vector unitario con la misma dirección y sentido que $\vec{b}$ será:

$$\left(\frac{4}{\sqrt{20}}, \frac{2}{\sqrt{20}}\right) = \left(\frac{4}{2\sqrt{5}}, \frac{2}{2\sqrt{5}}\right) = \left(\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}\right)$$

b) $$cos\left(\vec{a}, \vec{b}\right) = \frac{\vec{a} \bullet \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{\left(\frac{1}{4}, -3\right) \bullet (4, 2)}{\sqrt{\frac{1}{16} + 9} \cdot \sqrt{20}} = \frac{1-6}{\sqrt{\frac{145}{16}} \cdot \sqrt{20}} = \frac{-5}{\frac{\sqrt{145}}{4} \cdot 2\sqrt{5}} = \frac{-5}{\frac{\sqrt{5^2 \cdot 29}}{2}} =$$

$$= \frac{-5}{\frac{5\sqrt{29}}{2}} = \frac{-2}{\sqrt{29}} \approx -0{,}371 \rightarrow \left(\vec{a}, \vec{b}\right) \approx 111{,}8^\circ$$

6. Considera dos vectores $\vec{x}\,(a, 3)$ e $\vec{y}\,(-1, b)$. Halla los valores de a y b para que $\vec{x}$ e $\vec{y}$ sean perpendiculares y que $|\vec{x}| = 5$.

Solución:

1.º) Para que $\vec{x}$ e $\vec{y}$ sean perpendiculares, su producto escalar ha de ser cero, es decir :

$$\vec{x} \bullet \vec{y} = (a, 3) \bullet (-1, b) = -a + 3b = 0 \quad \rightarrow \quad b = \frac{a}{3}$$

2.º) Hallamos el módulo de $\vec{x}$ e igualamos a 5 :

$$|\vec{x}| = \sqrt{a^2 + 3^2} = \sqrt{a^2 + 9} = 5 \quad \rightarrow \quad a^2 + 9 = 25 \quad \rightarrow$$

$$\rightarrow \; a^2 = 25 - 9 = 16 \quad \rightarrow \quad a = \pm\sqrt{16} \rightarrow \begin{cases} a = 4 \quad \rightarrow \quad b = \frac{4}{3} \\ a = -4 \quad \rightarrow \quad b = -\frac{4}{3} \end{cases}$$

Por tanto, hay dos posibilidades:

$$a_1 = 4,\; b_1 = \frac{4}{3};\; a_2 = -4,\; b_2 = -\frac{4}{3}$$

7. Sabiendo que $|\vec{u}|=3$ y $\vec{u}=-5\vec{v}$ calcula $\vec{u}\cdot\vec{v}$. (Recuerda que el ángulo entre u y v es de 180º)

Solución:

Puesto que $\vec{u}=-5\vec{v}$, $\vec{u}$ y $\vec{v}$ son vectores que tienen la misma dirección pero sentido opuesto $\rightarrow \left(\vec{u},\ \vec{v}\right)=180°$

$$\left.\begin{array}{l} \vec{u}\cdot\vec{v}=|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|\cdot\underbrace{\cos 180°}_{-1}=-|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|=-3|\vec{v}| \\ \vec{u}=-5\vec{v}\ \rightarrow\ \vec{u}\cdot\vec{v}=\left(-5\vec{v}\right)\cdot\vec{v}=-5|\vec{v}|^2 \end{array}\right\}\rightarrow -3|\vec{v}|=-5|\vec{v}|^2\ \rightarrow$$

$$\rightarrow\ 5|\vec{v}|^2-3|\vec{v}|=0\ \rightarrow\ |\vec{v}|\left(5|\vec{v}|-3\right)=0\ \rightarrow\ 5|\vec{v}|-3=0\ \rightarrow\ |\vec{v}|=\frac{3}{5}$$

$|\vec{v}|\neq 0$ puesto que $|\vec{u}|=3\neq 0$ y $\vec{u}=-5\vec{v}$

Por tanto: $\vec{u}\cdot\vec{v}=-3|\vec{v}|=-3\cdot\dfrac{3}{5}=\dfrac{-9}{5}$

8. Prueba que si $\vec{a}$ es perpendicular a $\vec{b}$ entonces $|\vec{a}+\vec{b}|^2=|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2$.

Solución:

$$\left|\vec{a}+\vec{b}\right|^2=\left(\vec{a}+\vec{b}\right)\cdot\left(\vec{a}+\vec{b}\right)=\vec{a}\cdot\vec{a}+2\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}+\left|\vec{b}\right|^2$$

Por ser $\vec{a}\ \perp\ \vec{b}$, el producto escalar de $\vec{a}$ y $\vec{b}$ es cero $\rightarrow\ \vec{a}\cdot\vec{b}=0$

Por tanto, $\left|\vec{a}+\vec{b}\right|^2=|\vec{a}|^2+2\cdot 0+\left|\vec{b}\right|^2=|\vec{a}|^2+\left|\vec{b}\right|^2$.

9. Dados los vectores $\vec{u}\left(-1,\dfrac{4}{3}\right)$ y $\vec{v}(2,-3)$, calcula $|\vec{u}|,|\vec{v}|$ y $\left(\vec{u},\vec{v}\right)$.

Solución:

$$|\vec{u}|=\sqrt{(-1)^2+\left(\frac{4}{3}\right)^2}=\sqrt{1+\frac{16}{9}}=\sqrt{\frac{25}{9}}=\frac{5}{3}$$

$$|\vec{v}|=\sqrt{2^2+(-3)^2}=\sqrt{4+9}=\sqrt{13}$$

Para calcular el ángulo que forman $\vec{u}$ y $\vec{v}$ aplicamos la definición de producto escalar:

$$\vec{u}\cdot\vec{v}=|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|\cdot\cos\left(\vec{u},\vec{v}\right)\ \rightarrow\ \cos\left(\vec{u},\vec{v}\right)=\frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|}=\frac{\left(-1,\frac{4}{3}\right)\cdot(2,-3)}{\frac{5}{3}\cdot\sqrt{13}}=$$

$$= \frac{(-1)\cdot 2 + \frac{4}{3}\cdot(-3)}{\frac{5}{3}\sqrt{13}} = \frac{-2-4}{\frac{5}{3}\sqrt{13}} = \frac{-6}{\frac{5}{3}\sqrt{13}} = \frac{-18}{5\sqrt{13}} = \frac{-18\sqrt{13}}{5\cdot 13} = \frac{-18\sqrt{13}}{65} \approx -0{,}998$$

Luego $\left(\vec{u},\vec{v}\right) \approx 176{,}82°$.

10. **Dados los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$ tales que $|\vec{a}| = 2$, $|\vec{b}| = 6$ y el ángulo que forman $\vec{a}$ y $\vec{b}$ es de 60°. Halla $|\vec{a}+\vec{b}|$ y $|\vec{a}-\vec{b}|$.**

Solución:

$$|\vec{a}+\vec{b}|^2 = \left(\vec{a}+\vec{b}\right)\bullet\left(\vec{a}+\vec{b}\right) = \vec{a}\bullet\vec{a} + 2\vec{a}\bullet\vec{b} + \vec{b}\bullet\vec{b} = |\vec{a}|^2 + 2\vec{a}\bullet\vec{b} + |\vec{b}|^2$$

$$\vec{a}\bullet\vec{b} = |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot \cos 60° = 2\cdot 6\cdot\frac{1}{2} = 6$$

Luego:

$$|\vec{a}+\vec{b}|^2 = 2^2 + 2\cdot 6 + 6^2 = 4+12+36 = 52 \rightarrow |\vec{a}+\vec{b}| = \sqrt{52}$$

Análogamente:

$$|\vec{a}-\vec{b}|^2 = \left(\vec{a}-\vec{b}\right)\bullet\left(\vec{a}-\vec{b}\right) = \vec{a}\bullet\vec{a} + 2\vec{a}\bullet\vec{b} + \vec{b}\bullet\vec{b} = |\vec{a}|^2 - 2\vec{a}\bullet\vec{b} + |\vec{b}|^2 =$$

$$= 2^2 - 2\cdot 6 + 6^2 = 4-12+36 = 28 \rightarrow |\vec{a}-\vec{b}| = \sqrt{28} = 2\sqrt{7}$$