

EJERCICIOS RESUELTOS DE GEOMETRÍA

Ejercicio nº 1.-

- a) Halla el punto medio del segmento de extremos $P(3, -2)$ y $Q(-1, 5)$.
 b) Halla el simétrico del punto $P(3, -2)$ con respecto a $Q(-1, 5)$.

Solución:

a) El punto medio es:

$$M = \left(\frac{3+(-1)}{2}, \frac{-2+5}{2} \right) = \left(1, \frac{3}{2} \right)$$

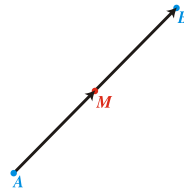
b) Llamamos $P'(x, y)$ al simétrico de P con respecto a Q . Q es el punto medio del segmento que une P y P' . Entonces:

$$\left. \begin{array}{l} \frac{3+x}{2} = -1 \rightarrow x = -5 \\ \frac{-2+y}{2} = 5 \rightarrow y = 12 \end{array} \right\} P'(-5, 12)$$

Ejercicio nº 2.-

El punto medio del segmento AB es $M(2, -1)$. Halla las coordenadas de A , sabiendo que $B(-3, 2)$.

Solución:



Si llamamos $A(x, y)$, tenemos que:

$\vec{AM} = \vec{MB}$, es decir

$$\left. \begin{array}{l} (2-x, -1-y) = (-3-2, 2-(-1)) \\ (2-x, -1-y) = (-5, 3) \\ 2-x = -5 \rightarrow x = 7 \\ -1-y = 3 \rightarrow y = -4 \end{array} \right\} \text{ Por tanto } A(7, -4)$$

Ejercicio nº 3.-

Escribe las ecuaciones paramétricas de la recta que pasa por los puntos $P(-1, 3)$ y $Q(-2, 8)$.

Solución:

Vector posición: $\overline{OP}(-1, 3)$
 Vector dirección: $PQ(-1, 5)$
 Ecuaciones paramétricas:

$$\begin{cases} x = -1 - t \\ y = 3 + 5t \end{cases}$$

Ejercicio nº 4.-

Dadas las rectas:

$$r: \begin{cases} x = 2 - t \\ y = 6 + 4t \end{cases} \quad s: \begin{cases} x = 4 + 2t \\ y = -2 - 8t \end{cases}$$

averigua su posición relativa (si se cortan, di en qué punto).

Solución:

Cambiamos el parámetro en la recta s :

$$r: \begin{cases} x = 2 - t \\ y = 6 + 4t \end{cases} \quad s: \begin{cases} x = 4 + 2k \\ y = -2 - 8k \end{cases}$$

Igualamos:

$$\left. \begin{array}{l} 2 - t = 4 + 2k \\ 6 + 4t = -2 - 8k \end{array} \right\} \begin{array}{l} -2 - 2k = t \\ 6 + 4(-2 - 2k) = -2 - 8k \\ 6 - 8 - 8k = -2 - 8k \\ 0 = 0k \end{array}$$

Infinitas soluciones \rightarrow Se trata de la misma recta; r y s coinciden.

Ejercicio nº 5.-

Averigua si estas dos rectas son perpendiculares. Si no lo fueran, halla el ángulo que forman:

$$r: \begin{cases} x = 1 - 2t \\ y = 1 + 3t \end{cases} \quad s: \begin{cases} x = 3 + 4t \\ y = -2 - 6t \end{cases}$$

Solución:

Vector dirección de $r \rightarrow (-2, 3)$

Vector dirección de $s \rightarrow (4, -6)$

Llamamos α al ángulo formado:

$$\cos \alpha = \frac{|(-2,3) \cdot (4,-6)|}{\sqrt{4+9} \cdot \sqrt{16+36}} = \frac{|-8-18|}{\sqrt{13} \cdot \sqrt{52}} = \frac{26}{\sqrt{13} \cdot 2\sqrt{13}} = \frac{26}{26} = 1 \rightarrow \alpha = 0^\circ \text{ (luegon son perpendiculares).}$$

Ejercicio nº 6.-

Averigua la ecuación implícita de la recta que pasa por el punto $P(2, -2)$ y cuya pendiente es $m = -3$.

Solución:

Escribimos la ecuación punto-pendiente y operamos:

$$y = -2 - 3(x - 2) \rightarrow y = -2 - 3x + 6 \rightarrow 3x + y - 4 = 0$$

Ejercicio nº 7.-

Halla la ecuación implícita de la recta perpendicular a $2x + y - 3 = 0$ que pasa por el punto $P(1, 1)$.

Solución:

Obtenemos la pendiente de la recta dada:

$$2x + y - 3 = 0 \rightarrow y = -2x + 3 \rightarrow \text{pendiente} = -2$$

La pendiente de la perpendicular es:

$$\frac{-1}{-2} = \frac{1}{2}$$

La ecuación de la recta buscada será:

$$y = 1 + \frac{1}{2}(x - 1) \rightarrow 2y = 2 + x - 1 \rightarrow x - 2y + 1 = 0$$

Ejercicio nº 8.-

Halla la distancia de P a Q y de P a r , siendo:

$$P(-1, -1), Q(2, -3) \text{ y } r: 3x - y + 6 = 0$$

Solución:

$$\text{dist}(P, Q) = |\overrightarrow{PQ}| = \sqrt{3^2 + (-2)^2} = \sqrt{9+4} = \sqrt{13}$$

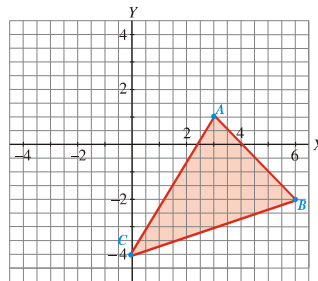
$$\text{dist}(P, r) = \frac{|3 \cdot (-1) - (-1) + 6|}{\sqrt{9+1}} = \frac{|-3+1+6|}{\sqrt{10}} = \frac{4}{\sqrt{10}} = \frac{4\sqrt{10}}{10} = \frac{2\sqrt{10}}{5}$$

Ejercicio nº 9.-

Halla el área del triángulo de vértices:

$$A(3, 1) \quad B(6, -2) \quad C(0, -4)$$

Solución:



1.º) Tomamos el lado BC como base del triángulo:

$$\text{base} = |\overrightarrow{BC}| = \sqrt{36+4} = \sqrt{40}$$

2.º) La altura es la distancia de A a la recta que pasa por B y C . Hallamos la ecuación de dicha recta:

$$\text{pendiente} = \frac{-4+2}{0-6} = \frac{-2}{-6} = \frac{1}{3}$$

$$y = -4 + \frac{1}{3}x \rightarrow 3y = -12 + x \rightarrow r: x - 3y - 12 = 0$$

Por tanto:

$$\text{altura} = \text{dist}(A, r) = \frac{|3-3-12|}{\sqrt{1+9}} = \frac{12}{\sqrt{10}}$$

3.º) El área del triángulo es:

$$\text{Área} = \frac{\text{base} \cdot \text{altura}}{2} = \frac{\sqrt{40} \cdot \frac{12}{\sqrt{10}}}{2} = 12 \text{ u}^2$$

Ejercicio nº 10.-

La ecuación explícita de la recta r es $y = mx + n$ y la implícita $Ax + By + C = 0$ con $B \neq 0$. Expresa m y n en función de A , B y C .

Solución:

Despejamos y de la expresión $Ax + By + C = 0 \rightarrow By = -Ax - C \rightarrow y = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B}$

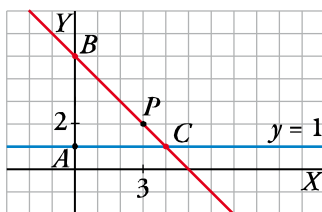
Como $y = mx + n$ es la misma recta que la anterior se tiene:

$$m = -\frac{A}{B} \text{ y } n = -\frac{C}{B}$$

Ejercicio nº 11.-

Halla la ecuación de una recta que pasa por el punto $P(3, 2)$ y forma con el eje de ordenadas y la recta $y = 1$ un triángulo isósceles. Calcula el área de dicho triángulo.

Solución:



Para calcular la ecuación de la recta que pasa por P nos faltaría otro punto B o C , dos de los vértices del triángulo ABC , o la pendiente. Los vértices del triángulo son de la forma:

$$A(0, 1), B(0, b), C(c, 1)$$

Por ser un triángulo isósceles $\rightarrow \text{dist}(A, C) = \text{dist}(A, B) \rightarrow c = b - 1$

$$\text{Por otro lado, } \overline{BC} = (c, 1 - b) = (b - 1, 1 - b) \rightarrow m = \frac{1 - b}{b - 1} = \frac{-(b - 1)}{b - 1} = -1$$

Luego la ecuación de la recta que pasa por $P(3, 2)$ y tiene $m = -1$ es:

$$y = 2 - 1(x - 3) \rightarrow y = 2 - x + 3 \rightarrow x + y - 5 = 0$$

Calculamos el vértice C punto de intersección de las rectas $\begin{cases} y = 1 \\ x + y - 5 = 0 \end{cases}$:

$$x + 1 - 5 = 0 \rightarrow x = 4 \rightarrow C(4, 1)$$

Luego $B(0, c + 1) = (0, 5)$.

$$A_{\text{TRIÁNGULO}} = \frac{\overline{AC} \cdot \overline{AB}}{2} = \frac{4 \cdot 4}{2} = 8 \text{ u}^2$$