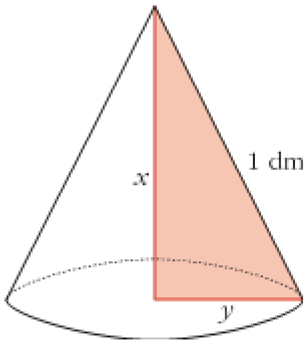
PROBLEMAS DE REPASO

1. La hipotenusa de un triángulo rectángulo mide 1 dm. Hacemos girar el triángulo alrededor de uno de sus catetos. Determina la longitud de los catetos de forma que el cono engendrado de esta forma tenga volumen máximo.

Solución:



Si llamamos x e y a las longitudes de cada uno de los catetos, sabemos que:

$$x^2 + y^2 = 1 \rightarrow y^2 = 1 - x^2$$

El volumen del cono es:

$$V = \frac{\pi}{3}\, y^2 x = \frac{\pi}{3}\left(1 - x^2\right)x = \frac{\pi}{3}\left(x - x^3\right);\quad 0 \le x \le 1$$

Buscamos x para que el volumen sea máximo:

$$V' = \frac{\pi}{3}\left(1 - 3x^2\right)$$

$$V' = 0 \quad \rightarrow \quad 1 - 3x^2 = 0 \quad \rightarrow \quad x^2 = \frac{1}{3} \quad \rightarrow \quad x = \sqrt{\frac{1}{3}} \quad \text{(la raíz negativa no vale)}$$

Veamos que es un máximo:

$$V'' = \frac{\pi}{3}(-6x),\quad V''\left(\sqrt{\frac{1}{3}}\right) < 0 \quad \rightarrow \quad \text{en } x = \sqrt{\frac{1}{3}} \text{ hay un máximo } \left(V(0) = V(1) = 0\right)$$

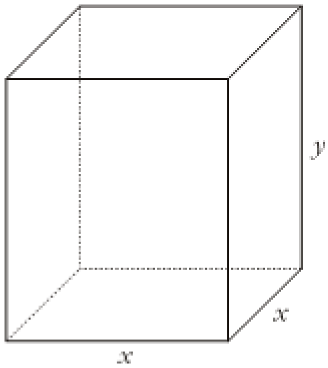
Por tanto, el máximo se alcanza cuando los catetos miden:

$$x = \sqrt{\frac{1}{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3} \approx 0{,}58 \text{ dm} \quad \text{(el que será la altura del cono)}$$

$$y = \sqrt{\frac{2}{3}} = \frac{\sqrt{6}}{3} \approx 0{,}82 \text{ dm}$$

2. **Un depósito abierto de latón con base cuadrada y capacidad para 4 000 litros, ¿qué dimensiones debe tener para que su fabricación sea lo más económica posible?**

Solución:



Llamamos x al lado de la base e y a la altura del depósito. Así, el volumen es:

$$V = x^2 y = 4\,000 \text{ dm}^3 \quad \rightarrow \quad y = \frac{4\,000}{x^2}$$

La superficie total del depósito (recordemos que está abierto) será:

$$A = 4xy + x^2 = 4x \cdot \frac{4\,000}{x^2} + x^2 = \frac{16\,000}{x} + x^2; \quad x > 0$$

Buscamos x para que A sea mínima:

$$A' = \frac{-16\,000}{x^2} + 2x = \frac{-16\,000 + 2x^3}{x^2}$$

$A' = 0 \rightarrow -16\,000 + 2x^3 = 0 \rightarrow 2x^3 = 16\,000 \rightarrow$

$$\rightarrow \quad x^3 = \frac{16\,000}{2} = 8\,000 \quad \rightarrow \quad x = \sqrt[3]{8\,000} = 20 \text{ dm}$$

Veamos que es un mínimo:

$$A'' = \frac{32\,000}{x^3} + 2, \quad A''(20) > 0 \quad \rightarrow \quad \text{en } x = 20 \text{ hay mínimo}$$

Por tanto, el lado de la base debe medir $x = 20$ dm y la altura, $y = 10$ dm.

3. **Un transportista va de una ciudad *A* a otra *B* a una velocidad constante de *x* km/h por una carretera en la que debe cumplirse que 35 £ *x*£ 55. El precio del carburante es de 0,6 euros el litro y el consumo es de (10 + x^2)/120 litros por hora. El conductor cobra 8 euros por hora y la distancia entre *A* y *B* es de 300 km. Halla la velocidad a la que debe ir para que el viaje resulte lo más económico posible.**

Solución:
La velocidad es *x*km/h y la distancia es de 300 km; por tanto, como *x* es constante,

tardará $\frac{300}{x}$ horas en llegar. Así, el coste será:

$$C(x) = 8 \cdot \frac{300}{x} + \left(10 + \frac{x^2}{120}\right) 0{,}6 \cdot \frac{300}{x} = \frac{300}{x}\left(8 + 6 + \frac{x^2}{200}\right) = \frac{300}{x}\left(14 + \frac{x^2}{200}\right) =$$

$$= \frac{4\,200}{x} + \frac{3x}{2}, \quad x > 0$$

Además, ha de ser $35 \le x \le 55$.
Buscamos *x* para que *C* (*x*) sea mínimo:

$$C'(x) = \frac{-4\,200}{x^2} + \frac{3}{2} = \frac{-8400 + 3x^2}{2x^2}$$

$$C'(x) = 0 \quad \to \quad -8400 + 3x^2 = 0 \quad \to \quad x^2 = \frac{8400}{3} = 2\,800 \quad \to$$

$$\to \quad x \approx 52{,}92 \quad \text{(la raíz negativa no vale)}$$

Veamos que es un mínimo:

$$C''(x) = \frac{8400}{x^3}$$

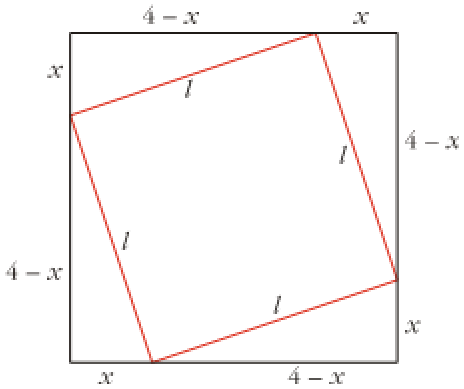
$C''(52{,}92) > 0 \to$ en $x = 52{,}92$ hay un mínimo

C (35) = 172,5 euros; *C* (52,92) = 158,75 euros; *C* (55)= 158,86

Por tanto, deberá ir a 52,92 km/h (el coste en este caso será de 158,75 euros).

4. El lado de un cuadrado tiene una longitud de 4 metros. Entre todos los cuadrados inscritos en el cuadrado dado, halla el de área mínima.

Solución:



Si llamamos x a la distancia de uno de los vértices del cuadrado inscrito, al vértice más próximo del cuadrado original (como indica la figura), tenemos que el área del cuadrado inscrito será:

$\text{Área} = l^2 = x^2 + (4-x)^2;\ 0 \leq x \leq 4$

Buscamos x para que el área sea mínima:

$A(x) = x^2 + (4-x)^2$

$A'(x) = 2x + 2(4-x) \cdot (-1) = 2x - 8 + 2x = 4x - 8$

$A'(x) = 0 \rightarrow 4x - 8 = 0 \rightarrow x = 2$

Comprobamos que es el mínimo:

$A''(x) = 4,\ A''(2) = 4 > 0 \rightarrow$ en $x = 2$ hay mínimo

$A(0) = A(4) = 16$

Por tanto, el mínimo se alcanza en $x = 2$, que corresponde al cuadrado de lado:

$l = \sqrt{4+4} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2} \approx 2{,}83$ metros

cuya área es de 8 m^2.

5. Una huerta tiene actualmente 24 árboles, que producen 600 frutos cada uno. Se calcula que, por cada árbol adicional plantado, la producción de cada árbol disminuye en 15 frutos. ¿Cuál debe ser el número total de árboles que debe tener la huerta para que la producción sea máxima? ¿Cuál será esa producción?

Llamamos x al número de árboles que se plantan. Tenemos que el número de frutos sería:

$f(x) = (24 + x)(600 - 15x) = -15x^2 + 240x + 14\,400$

Buscamos x para que $f(x)$ sea máxima:

$f'(x) = -30x + 240$

$$f'(x) = 0 \;\rightarrow\; -30x + 240 = 0 \;\rightarrow\; x = \frac{240}{30} = 8 \;\rightarrow\; x = 8$$

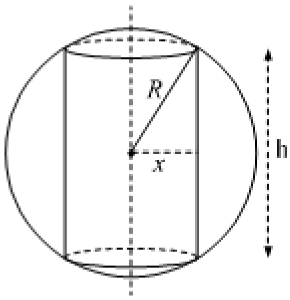
Veamos que es un máximo:

$f''(x) = -30$; $f''(8) = -30 < 0 \rightarrow$ en $x = 8$ hay máximo. (Como $f(x)$ corresponde a una parabola invertida, en $x = 8$ está el máximo absoluto).

Por tanto, se deben plantar 8 árboles. Así, habrá un total de $24 + 8 = 32$ árboles, que producirán 15 360 frutos.

6. Halla el radio de la base y la altura de un cilindro inscrito en una esfera de radio *R* para que el área lateral del cilindro sea máxima.

Solución:



Llamamos x al radio de la base del cilindro y h a su altura.

Expresamos h, en función de x y R:

$$\left(\frac{h}{2}\right)^2 + x^2 = R^2 \;\rightarrow\; \frac{h^2}{4} + x^2 = R^2 \;\rightarrow\; h^2 = 4\left(R^2 - x^2\right) \;\rightarrow\; h = 2\sqrt{R^2 - x^2} \quad 0 < x < R$$

$$\text{Área lateral} = \text{perímetro de la base} \cdot \text{altura} = A(x) = 2\pi x \cdot 2\sqrt{R^2 - x^2} = 4\pi x\sqrt{R^2 - x^2}$$

Buscamos x para que el área sea máxima:

$$A'(x) = 4\pi\sqrt{R^2 - x^2} + 4\pi x \cdot \frac{-2x}{2\sqrt{R^2 - x^2}} = 4\pi\sqrt{R^2 - x^2} - \frac{4\pi x^2}{\sqrt{R^2 - x^2}} = \frac{4\pi\left(R^2 - x^2\right) - 4\pi x^2}{\sqrt{R^2 - x^2}} =$$

$$= \frac{4\pi\left(R^2 - 2x^2\right)}{\sqrt{R^2 - x^2}} = 0 \;\rightarrow\; R^2 - 2x^2 = 0 \;\rightarrow\; x^2 = \frac{R^2}{2} \;\rightarrow\; x = \frac{\sqrt{2}}{2}R$$

$A' > 0$ a la izquierda de $x = \frac{\sqrt{2}}{2}R$ y $A' < 0$ a la derecha de dicho valor; por tanto, en $x = \frac{\sqrt{2}}{2}R$ hay un máximo. En este caso, la altura del cilindro es:

$$h = 2\sqrt{R^2 - x^2} = 2\sqrt{R^2 - \frac{R^2}{2}} = 2\sqrt{\frac{R^2}{2}} = \frac{2}{\sqrt{2}}R = \sqrt{2}R$$

7. Dibuja la gráfica de la siguiente función:

$$\boldsymbol{f(x) = \frac{4x}{(x+2)^2}}$$

Solución:

• *Dominio* = $\mathbb{R} - \{-2\}$

• *Simetrías:*

$$f(-x) = \frac{-4x}{(-x+2)^2}$$

No es par ni impar: no es simétrica respecto al eje *Y* ni respecto al origen.

• *Asíntotas verticales:*

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to -2^-} f(x) = -\infty \\ \lim\limits_{x \to -2^+} f(x) = -\infty \end{array}\right\} \; x = -2 \quad \text{es asíntota vertical.}$$

• *Asíntota horizontal:*

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0 \quad (f(x) < 0 \;\rightarrow\; \text{curva por debajo}) \\ \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0 \quad (f(x) > 0 \;\rightarrow\; \text{curva por encima}) \end{array}\right\} \; y = 0 \text{ es asíntota horizontal.}$$

• *Puntos singulares. Crecimiento y decrecimiento:*

$$f'(x) = \frac{4(x+2)^2 - 4x \cdot 2(x+2)}{(x+2)^4} = \frac{4(x+2) - 8x}{(x+2)^3} = \frac{-4x+8}{(x+2)^3}$$

$$f'(x) = 0 \;\rightarrow\; -4x + 8 \;\rightarrow\; x = 2$$

Signo de $f'(x)$:

$$\begin{array}{ccccc} f' < 0 & & f' > 0 & & f' < 0 \\ \searrow & -2 & \nearrow & 2 & \searrow \end{array}$$

$f(x)$ es decreciente en $(-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$; es creciente en $(-2, 2)$.

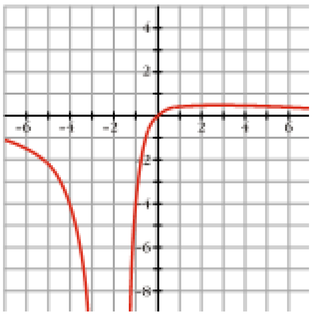
Tiene un máximo en $\left(2, \frac{1}{2}\right)$.

• *Cortes con los ejes:*

Con el eje $Y \rightarrow x = 0 \rightarrow y = 0 \rightarrow$ Punto (0, 0)

Con el eje $X \rightarrow y = 0 \rightarrow x = 0 \rightarrow$ Punto (0, 0)

• *Gráfica*:



8. Estudia y representa esta función:
$f(x) = x^2 e^x$

Estudia y representa esta función:
$f(x) = x^2 e^x$

Solución:

• *Dominio* = $\mathbb{R}$

• *Asíntotas:*

No tiene asíntotas verticales.

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} x^2 e^{-x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{e^x} = 0$$

$y = 0$ es asíntota horizontal cuando $x \to -\infty$ ($f(x) > 0$).

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty \quad \to \quad \text{Rama parabólica}$$

• *Puntos singulares. Crecimiento y decrecimiento:*

$f'(x) = 2xe^x + x^2e^x = (2x + x^2)e^x$

$$f'(x) = 0 \;\to\; 2x + x^2 = 0 \;\to\; x(2+x) = 0 \;\to\; \begin{cases} x = 0 \\ x = -2 \end{cases}$$

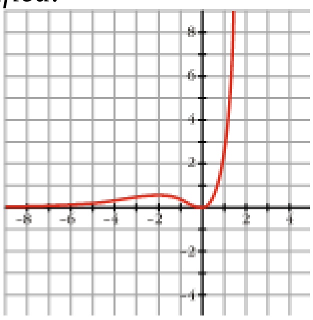
Signo de $f'(x)$:

$f(x)$ es creciente en $(-\infty, -2) \cup (0, +\infty)$; es decreciente en $(-2, 0)$. Tiene un máximo en

$\left(-2, \frac{4}{e^2}\right)$ y un mínimo en $(0, 0)$.

• Corta a los ejes en (0, 0).

• *Gráfica:*



9. Representa esta función:

$y = x^2 \ln x$

Representa esta función:

$y = x^2 \ln x$

Solución:

- *Dominio* = $(0, +\infty)$
- *Asíntotas:*

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = 0. \quad \text{No tiene asíntotas verticales.}$$

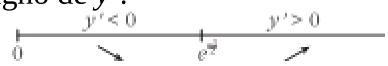
$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty \quad \to \quad \text{Rama parabólica}$$

- *Puntos singulares. Crecimiento y decrecimiento:*

$$y' = 2x \ln x + x^2 \cdot \frac{1}{x} = 2x \ln x + x = x(2 \ln x + 1)$$

$$y' = 0 \quad \to \quad x(2 \ln x + 1) = 0 \quad \to \quad \begin{cases} x = 0 \quad (\text{no vale}) \\ \ln x = -\dfrac{1}{2} \quad \to \quad x = e^{\frac{-1}{2}} \end{cases}$$

Signo de y':



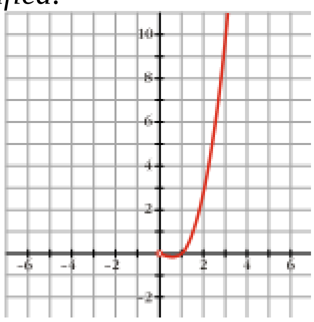
$f(x)$ es decreciente en $\left(0, e^{\frac{-1}{2}}\right)$ y es creciente en $\left(e^{\frac{-1}{2}}, +\infty\right)$. Tiene un mínimo en $\left(e^{\frac{-1}{2}}, \dfrac{-1}{2e}\right)$

- *Puntos de corte con los ejes:*

No corta al eje *Y*, pues no está definida en $x = 0$.

$$\text{Corta el eje } X \quad \to \quad y = 0 \quad \to \quad x^2 \ln x = 0 \quad \to \quad \begin{cases} x^2 = 0 \quad \to \quad x = 0 \quad (\text{no vale}) \\ \ln x = 0 \quad \to \quad x = 1 \quad \to \quad \text{Punto} \quad (1, 0) \end{cases}$$

- *Gráfica:*



10. Calcula las asíntotas de la siguiente función:

$$y = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

Solución:

• *Dominio:* $\mathbb{R}$

• *Asíntotas:*

No hay asíntotas verticales.

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -1$$

$y = -1$ es asíntota horizontal cuando $x \to -\infty$ ($f(x) < -1$).

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = 1$$

$y = 1$ es asíntota horizontal cuando $x \to +\infty$ ($f(x) < 1$).

11. Representa la función $f(x) = ln\,(2 - sen^2\, x)$.

Solución:

• *Dominio*:

Como $|sen\, x| \leq 1 \to 2 - sen^2 x \geq 1 \to f(x)$ está definida para todo $x \to$ Dominio = $\mathbb{R}$

Luego la función es continua en todo $\mathbb{R}$.

• *Simetrías:*

$f(-x) = f(x)$

Es par: simétrica respecto al eje Y.

• *Periodicidad:*

$sen\,(x + \pi) = -sen\, x$

$f(x + \pi) = ln\,(2 - sen^2\,(x + \pi)) = ln\,(2 - (-sen\, x)^2 = ln\,(2 - sen^2\, x) = f\,(x)$

$f(x)$ es periódica de periodo π. Luego para el estudio de $f(x)$ basta limitarse a estudiar el intervalo $[0, \pi)$ y prolongar por periodicidad.

• *Asíntotas:*

No hay.

• *Puntos singulares. Crecimiento y decrecimiento:*

$$f'(x) = \frac{-2\, sen\, x\, cos\, x}{2 - sen^2 x} = \frac{-sen\, 2x}{2 - sen^2 x} = \frac{sen\, 2x}{sen^2 x - 2}$$

$$f'(x) = 0 \quad \to \quad sen\, 2x = 0 \quad \to \quad x = 0,\ x = \frac{\pi}{2},\ x = \pi$$

Signo de $f'(x)$ (el denominador de $f'(x)$ siempre es negativo):

$f' > 0$		$f' < 0$		$f' > 0$	
$\nearrow$	0	$\searrow$	$\pi/2$	$\nearrow$	π

La función $f(x)$ decrece en $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ y crece en $\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$. Hay un mínimo en $\left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$ y un máximo en (0, *ln*2).

El resto de intervalos de crecimiento–decrecimiento y máximos–mínimos nos los da la periodicidad.

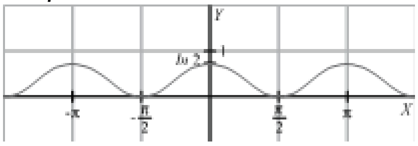
- *Puntos de corte con los ejes:*

  Con el eje $Y \rightarrow x = 0 \rightarrow y = ln\ 2 \rightarrow$ Punto (0, *ln* 2)

  Con el eje $X \rightarrow y = 0 \rightarrow ln\ (2 - sen^2\ x) = 0 \rightarrow 2 - sen^2\ x = 1 \rightarrow sen^2\ x = 1 \rightarrow$

$$\rightarrow \quad sen\ x = \pm 1 \quad \rightarrow \quad x = \frac{\pi}{2} \pm k\pi \ (k = 0, 1, 2, \ldots)$$

- *Gráfica:*



  Hemos usado la periodicidad para prolongar la gráfica.