PROBLEMAS DE REPASO

Halla las integrales siguientes:

$$\textbf{a)}\ \int\left(\frac{3}{1+x^2}+\frac{5}{4x+1}\right)dx \qquad \textbf{b)}\ \int\frac{e^{tgx}}{\cos^2 x}\,dx$$

Solución:

$$\text{a)}\ \int\left(\frac{3}{1+x^2}+\frac{5}{4x+1}\right)dx = 3\int\frac{1}{1+x^2}\,dx+\frac{5}{4}\int\frac{4}{4x+1}\,dx = 3arctgx+\frac{5}{4}\ ln\left|4x+1\right|+k$$

$$\text{b)}\ \int\frac{e^{tgx}}{cos^2 x}\,dx = \int\frac{1}{cos^2 x}\cdot e^{tgx}\,dx = e^{tgx}+k$$

Calcula la siguiente integral, utilizando la sustitución $\sqrt{x-1}=t$:

$$\int\frac{dx}{x\sqrt{x-1}}$$

Solución:

Hacemosel cambio $\sqrt{x-1}=t \quad\rightarrow\quad x-1=t^2 \quad\rightarrow\quad x=1+t^2 \quad\rightarrow\quad dx=2tdt$

$$\int\frac{dx}{x\sqrt{x-1}}=\int\frac{2tdt}{(1+t^2)\,t}=\int\frac{2dt}{1+t^2}=2arctg\,(t)+k=2arctg\,\sqrt{x-1}+k$$

<u>Ejercicio nº 3.-</u>

Halla estas integrales:

$$\textbf{a)}\ \int(x+5)\cos x\,dx \qquad \textbf{b)}\ \int(x^2+2x)\ln x\,dx$$

Solución:

$$\text{a)}\ \begin{cases} u=x+5 \quad\rightarrow\quad du=dx \\ dv=cos\,x\,dx \quad\rightarrow\quad v=sen\,x \end{cases}$$

$$\int(x+5)cosx\,dx=(x+5)senx-\int senx\,dx=(x+5)senx+cosx+k$$

$$\text{b)}\ \begin{cases} u=ln\,x \quad\rightarrow\quad du=\dfrac{1}{x}\,dx \\ dv=\left(x^2+2x\right)dx \quad\rightarrow\quad v=\dfrac{x^3}{3}+x^2 \end{cases}$$

$$\int\left(x^2+2x\right)\,lnx\,dx=\left(\frac{x^3}{3}+x^2\right)lnx-\int\left(\frac{x^3}{3}+x^2\right)\cdot\frac{1}{x}\,dx=\left(\frac{x^3}{3}+x^2\right)lnx-\int\left(\frac{x^2}{3}+x\right)dx=$$

$$= \left(\frac{x^3}{3} + x^2\right) lnx - \frac{x^3}{9} - \frac{x^2}{2} + k$$

Ejercicio nº 4.-

Las siguientes integrales se resuelven por cambio de variable. Indica, en cada caso, que cambio harías y cuál sería la expresión de *dx*.

a) $\int \sqrt{\frac{1+x}{2}}\, dx$

b) $\int \sqrt{1-4x^2}\, dx$

c) $\int \sqrt{(x-1)^2+4}\, dx$

Solución:

a) $\frac{1+x}{2} = t \quad \rightarrow \quad x = 2t - 1 \quad \rightarrow \quad dx = 2dt$

De este modo:

$$\int \sqrt{\frac{1+x}{2}}\, dx = \int 2\sqrt{t}\, dt$$

b) $x = \frac{1}{2}\, sen\ t \quad \rightarrow \quad dx = \frac{1}{2} cos\ t\ dt$

De este modo:

$$\int \sqrt{1-4x^2}\, dx = \int \sqrt{1-sen^2\, t} \cdot \frac{1}{2} cos\, t\ dt = \int \frac{1}{2} cos^2 t\ dt$$

c) $x - 1 = 2t \rightarrow x = 2t + 1 \rightarrow dx = 2dt$

Así:

$$\int \sqrt{(x-1)^2+4}\, dx = \int \sqrt{4t^2+4}\ 2\, dt = 4\int \sqrt{t^2+1}\, dt$$

Calcula estas integrales:

a) $\int \frac{2x-\sqrt{x}}{x^2}\, dx$ **b)** $\int \frac{x+lnx}{x}\, dx$

Solución:

a) $\int \frac{2x-\sqrt{x}}{x^2}\, dx = \int \left(\frac{2}{x} - \frac{\sqrt{x}}{x^2}\right) dx = \int \left(\frac{2}{x} - x^{-\frac{3}{2}}\right) dx = 2ln|x| - \frac{x^{-\frac{1}{2}}}{\frac{-1}{2}} + k = 2ln|x| + \frac{2}{\sqrt{x}} + k$

b) $\int \frac{x+lnx}{x}\, dx = \int \left(1 + \frac{lnx}{x}\right) dx = \int \left(1 + \frac{1}{x} \cdot lnx\right) dx = x + \frac{ln^2 x}{2} + k$

Resuelve las siguientes integrales:

a) $\int (x^2 + x + 1)\, e^x\, dx$ **b)** $\int x^2 lnx\, dx$

Solución:

a) $\begin{cases} u = x^2 + x + 1 \;\rightarrow\; du = (2x+1)\,dx \\ dv = e^x\,dx \;\rightarrow\; v = e^x \end{cases}$

$$\int (x^2+x+1)\,e^x\,dx = (x^2+x+1)e^x - \underbrace{\int (2x+1)\,e^x\,dx}_{I_1}$$

$$\begin{cases} u_1 = 2x+1 \;\rightarrow\; du_1 = 2dx \\ dv_1 = e^x\,dx \;\rightarrow\; v_1 = e^x \end{cases}$$

$$I_1 = (2x+1)\,e^x\,dx - 2\int e^x\,dx = (2x+1)\,e^x - 2e^x$$

Así:

$$\int (x^2+x+1)\,e^x\,dx = (x^2+x+1)\,e^x - (2x+1)\,e^x + 2e^x + k =$$

$$= (x^2+x+1-2x-1+2)\,e^x + k = (x^2-x+2)\,e^x + k$$

b) $\begin{cases} u = \ln x \;\rightarrow\; du = \dfrac{1}{x}\,dx \\ dv = x^2\,dx \;\rightarrow\; v = \dfrac{x^3}{3} \end{cases}$

$$\int x^2 \ln x\,dx = \frac{x^3}{3}\ln x - \int \frac{x^3}{3}\cdot\frac{1}{x}\,dx = \frac{x^3}{3}\ln x - \int \frac{x^2}{3}\,dx = \frac{x^3}{3}\ln x - \frac{x^3}{9} + k$$

Resuelve, mediante el método de sustitución, esta integral:

$$\int \frac{1+x}{1+\sqrt{x}}\,dx \qquad \text{(Haz } \sqrt{x} = t\text{)}$$

Solución:

Hacemos el cambio: $\sqrt{x} = t \;\rightarrow\; x = t^2 \;\rightarrow\; dx = 2t\,dt$

$$\int \frac{1+x}{1+\sqrt{x}}\,dx = \int \frac{1+t^2}{1+t}\cdot 2t\,dt = \int \frac{2t+2t^3}{1+t}\,dt = \int \left(2t^2 - 2t + 4 - \frac{4}{1+t}\right)dt =$$

$$= \frac{2t^3}{3} - t^2 + 4t - 4\ln|1+t| + k = \frac{2\sqrt{x^3}}{3} - x + 4\sqrt{x} - 4\ln\left|1+\sqrt{x}\right| + k$$

Calcula las siguientes integrales:

b) $\int \frac{dx}{\sqrt{9-2x^2}}$

Solución:

b) $$\int \frac{dx}{\sqrt{9-2x^2}} = \int \frac{\frac{1}{3}}{\sqrt{\frac{9}{9}-\frac{2x^2}{9}}}\,dx = \int \frac{\frac{1}{3}}{\sqrt{1-\left(\frac{\sqrt{2}}{3}x\right)^2}}\,dx = \frac{1}{\sqrt{2}}\int \frac{\frac{\sqrt{2}}{3}}{\sqrt{1-\left(\frac{\sqrt{2}}{3}x\right)^2}}\,dx = \frac{1}{\sqrt{2}}\,arcsen\,\frac{\sqrt{2}x}{3}+k$$