EXAMEN DE SELECTIVIDAD JUNIO 2013. MATEMÁTICAS II

OPCIÓN A

Problema A.1. Se tiene el sistema de ecuaciones S: $\begin{cases} 2x+5y=a \\ -x-4y=b \\ 2x+y=c \end{cases}$, donde a,b y c son tres números reales.

Obtener **razonadamente**, **escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado.**

a) La relación que debe verificar los números a, b y c para que el sistema sea compatible (4 puntos)

Por el teorema de Rouché-Frobenius.

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{Si } \operatorname{rg}(A)=rg(A^*)=\text{nº de incógnitas}\rightarrow \text{SCD} \\ \text{Si } \operatorname{rg}(A)=rg(A^*)<\text{nº de incógnitas}\rightarrow \text{SCI} \\ \text{Si } \operatorname{rg}(A)\neq rg(A^*)\rightarrow SI \end{array}}$$

$$\begin{cases} 2x+5y=a \\ -x-4y=b \\ 2x+y=c \end{cases}$$

Del sistema obtenemos la matriz de coeficientes(A) y la matriz Ampliada(A*).

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -1 & -4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \qquad A^*=\begin{pmatrix} 2 & 5 & a \\ -1 & -4 & b \\ 2 & 1 & c \end{pmatrix}$$

rg(A) = ?

$$A_1=2\rightarrow rg(A)\geq 1$$

$$A_2=\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -1 & -4 \end{pmatrix}\rightarrow |A_2|=\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ -1 & -4 \end{vmatrix}=-8+5=-3\rightarrow rg(A)=2\ \forall\Re$$

rg(A*)= ?

$$A^*=\begin{pmatrix} 2 & 5 & a \\ -1 & -4 & b \\ 2 & 1 & c \end{pmatrix}$$

$$|A^*|=\begin{vmatrix} 2 & 5 & a \\ -1 & -4 & b \\ 2 & 1 & c \end{vmatrix}=(-8c-a+10b)-(-8a+2b-5c)=0\rightarrow -3c+7a+8b=0$$

Entonces el rg(A*) = 2 cuando **-3c+7a+8b=0**

Solución: **La relación que deben verificar para que el sistema sea compatible es**

$$-3c + 7a + 8b = 0$$

CON WIRIS

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 5 & a \\ -1 & -4 & b \\ 2 & 1 & c \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 5 & a \\ -1 & -4 & b \\ 2 & 1 & c \end{pmatrix}$$

$$|A| \rightarrow 7 \cdot a + 8 \cdot b - 3 \cdot c$$

b) La solución del sistema cuando a=-1, b=2 y c= 3. (2 puntos)

Sustituimos el valor de las incógnitas en el sistema y nos queda,

$$\begin{cases} 2x + 5y = 1 \\ -x - 4y = 2 \\ 2x + y = 3 \end{cases}$$

Ahora utilizamos Gauss para solucionar el sistema resultante:

$$\begin{pmatrix} 2 & 5 & -1 \\ -1 & -4 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{matrix} 2 \cdot \mathrm{F2} + \mathrm{F1} \\ \mathrm{F3} - \mathrm{F1} \end{matrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 5 & -11 \\ 0 & -3 & 3 \\ 0 & -4 & 4 \end{pmatrix} \rightarrow \left.\begin{matrix} 2x + 5y = -1 \\ -3y = 3 \end{matrix}\right\} \rightarrow \begin{matrix} y = -1 \\ 2x + 5 \cdot (-1) = -1 \rightarrow 2x = 4 \rightarrow x = 2 \end{matrix}$$

Solución: $(x, y) = (2, -1)$

CON WIRIS

$$\text{resolver}\left\{\begin{bmatrix} 2x + 5y = -1 \\ -x - 4y = 2 \\ 2x + y = 3 \end{bmatrix}\right\} \rightarrow \{\{x = 2, y = -1\}\}$$

c) La solución del sistema cuando los números a,b y c verifican la relación a=c=-2b .
(2 puntos)

Sustituimos el valor a y c en el sistema y nos queda,

$$\begin{cases} 2x+5y=-2b \\ -x-4y=b \\ 2x+y=-2b \end{cases}$$

Ahora utilizamos Gauss para solucionar el sistema resultante:

$$\begin{pmatrix} 2 & 5 & -2b \\ -1 & -4 & b \\ 2 & 1 & -2b \end{pmatrix} \begin{matrix} 2\cdot \mathrm{F2}+\mathrm{F1} \\ \mathrm{F3}-\mathrm{F1} \end{matrix} \to \begin{pmatrix} 2 & 5 & -2b \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \end{pmatrix} \to \left.\begin{matrix} 2x+5y=-2b \\ -3y=0 \end{matrix}\right\} \to \begin{matrix} y=\dfrac{0}{-3}=0 \\ 2x+5\cdot 0=-2b \\ 2x=-2b \to x=-b \end{matrix}$$

Solución: $(x,y)=(-b,0), b\in R$

CON WIRIS

$$\text{resolver}\begin{Bmatrix} 2x+5y=-2b \\ -x-4y=b \\ 2x+y=-2b \end{Bmatrix} \to \{\{b=-x, x=x, y=0\}\}$$

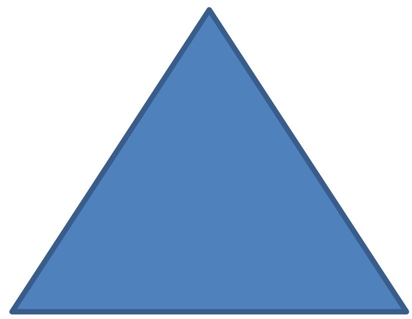
Problema A.2. Sean $O=(0,0,0),\ A=(1,0,1), B=(2,1,0),\ C=(0,2,3)$ Obtener **razonadamente**,

.

escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado.

a) El área del triángulo de vértices O,A,B, (3 puntos) y el volumen del tetaedro de vértices O,A,B y C.(2puntos)

Cálculo del ára del triángulo



$$AT_{OAB}=\frac{\left|\vec{OA}\,x\,\vec{OB}\right|}{2}$$

Calculamos los vectores

$$\vec{OA}=A=(1,0,1)$$
$$\vec{OB}=B=(2,1,0)$$

Calculamos el producto vectorial y su respectivo módulo

$$\vec{OA}\,x\,\vec{OB}=\begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix}=-i+2j+k=(-1,2,1)$$
$$\left|\vec{OA}\,x\,\vec{OB}\right|=\sqrt{(-1)^2+2^2+1^2}=\sqrt{6}$$

Solución:

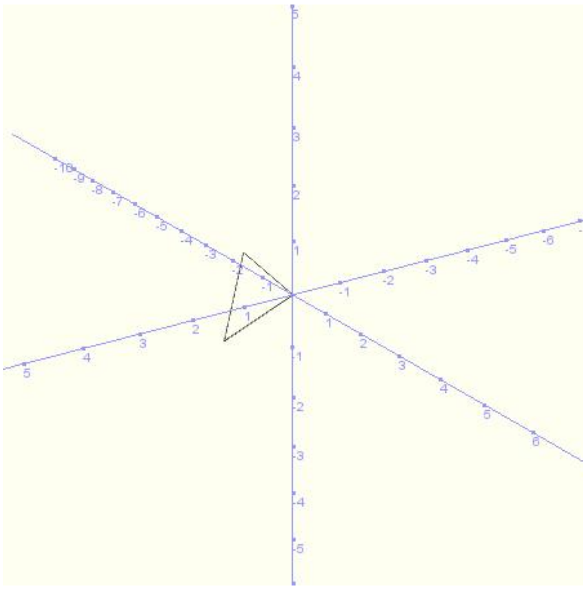
$$A_{OAB}=\frac{\left|\vec{OA}\,x\,\vec{OB}\right|}{2}=\frac{\sqrt{6}}{2}u.a$$

CON WIRIS

1) Primero pintamos los puntos en un eje de coordenadas. Utilizamos el siguiente comando

$$\text{dibujar3d}\left(\text{polígono}\left(\left(\text{punto}(0{,}0{,}0), \text{punto}(1{,}0{,}1), \text{punto}(2{,}1{,}0)\right)\right)\right)$$

Y nos queda:



2) Ahora calculamos el producto vectorial con el siguiente comando:

$$\text{producto\_vectorial}([1{,}0{,}1], [2{,}1{,}0])$$

Y nos proporciona:

$$\text{producto\_vectorial}([1,0,1],[2,1,0]) \rightarrow [-1,2,1]$$

3) Calculamos la norma del producto vectorial con el siguiente comando:

$$\|\text{producto\_vectorial}([1{,}0{,}1], [2{,}1{,}0])\|$$

Y nos proporciona:

$$\|\text{producto\_vectorial}([1,0,1],[2,1,0])\| \rightarrow \sqrt{6}$$

4) Finalmente calculamos su área

$$A = \|\text{producto\_vectorial}([1,0,1],[2,1,0])\| \rightarrow \sqrt{6}$$

$$AT = A/2 \rightarrow \frac{\sqrt{6}}{2}$$

Cálculo del volumen del tetraedro

$$V_T = \frac{1}{6}\left|\left[OA, OB, OC\right]\right|$$

1) Obtenemos los vectores OA, OB, OC

$$\vec{OA} = A = (1,0,1)$$
$$\vec{OB} = B = (2,1,0)$$
$$\vec{OC} = C = (0,2,3)$$

2) Calculamos el volumen

$$V_T = \frac{1}{6}\cdot\left|\left[OA, OB, OC\right]\right| = \frac{1}{6}\cdot\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \end{vmatrix} = \frac{1}{6}\cdot(3+4) = \frac{7}{6}u.a$$

Con WIRIS

1) Utilizamos los siguiente comandos

$$1/6\cdot\left|\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}\right| \rightarrow \frac{7}{6}$$

b) La distancia del vértice C al plano que contiene al triángulo OAB. (3 puntos)

Calculamos la ecuación del plano π

1ª Posibilidad

$$\pi \subset \vec{OA} \text{ y } \vec{OB} \to \vec{OA} \text{ x } \vec{OB} = n_\pi = (-1,2,1) \to -x+2y+z+D=0$$

$$\pi \subset O \to -0+2\cdot 0+0+D=0 \to D=0$$

$$\vec{OA}\,x\,\vec{OB} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -i+2j+k=(-1,2,1)$$

$$\pi: -x+2y+z=0$$

$$C=(-1,2,3)$$

$$d(C,\pi)=\frac{|AX_0+BY_0+CZ_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}=\frac{|0-1\cdot 0+2\cdot 2+1\cdot 3+0|}{\sqrt{(-1)^2+2^2+1^2}}=\frac{7}{\sqrt{6}}=\frac{7\sqrt{6}}{6}u.a.$$

2ª Posibilidad

$$\pi: \begin{cases} O=(0,0,0) \\ \text{vectores directores } \vec{u}=\vec{OA}=(1,0,1) \\ \qquad\qquad\qquad\quad \vec{v}=\vec{OB}=(2,1,0) \end{cases}$$

$$\begin{vmatrix} x-0 & y-0 & z-0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -x+2y+z=0 \to \pi: -x+2y+z=0$$

$$C=(-1,2,3)$$

$$d(C,\pi)=\frac{|AX_0+BY_0+CZ_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}=\frac{|0-1\cdot 0+2\cdot 2+1\cdot 3+0|}{\sqrt{(-1)^2+2^2+1^2}}=\frac{7}{\sqrt{6}}=\frac{7\sqrt{6}}{6}u.a.$$

CON WIRIS

P=plano(punto(0,0,0),punto(1,0,1),punto(2,1,0)) → $-x+2\cdot y+z=0$

C=punto(0,2,3) → (0,2,3)

distancia(C,P) → $\frac{7\cdot\sqrt{6}}{6}$

c) La distancia del punto C' al plano que contiene al triángulo OAB, siendo C' el punto medio del segmento de extremos O y C. (2 puntos)

Dados $O = (0{,}0{,}0)$ y $C = (0{,}2{,}3)$

$$C' = PM_{OC} = \left(\frac{0+2}{2}, \frac{0+2}{2}, \frac{0+3}{2}\right) = \left(0{,}1, \frac{3}{2}\right)$$

$$d(C',\pi) = \frac{|AX_0 + BY_0 + CZ_0 + D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}} = \frac{|-1\cdot 0 + 2\cdot 1 + 1\cdot 3/2 + 0|}{\sqrt{(-1)^2+2^2+1^2}} = \frac{|2+3/2|}{\sqrt{6}} = \frac{|7/2|}{\sqrt{6}} = \frac{7}{2\cdot\sqrt{6}} = \frac{7\cdot\sqrt{6}}{12}$$

CON WIRIS

P=plano(punto(0,0,0),punto(1,0,1),punto(2,1,0)) → $-x+2\cdot y+z=0$

O=(0,0,0) → 0,0,0

C=(2,1,0) → 2,1,0

PMOC=punto_medio(punto(0,0,0),punto(0,2,3)) → $\left(0,1,\frac{3}{2}\right)$

distancia(PMOC,P) → $\frac{7\cdot\sqrt{6}}{12}$

Problema A.3. Se estudió el movimiento de un meteorito del sistema solar durante un mes. Se obtuvo que la ecuación de su trayectoria T es y^2=2x+9, siendo -4,5<x<8 e y>0, estando situado el Sol en el punto (0,0). Obtener **razonadamente**, **escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado.**

a) La distancia del meteorito al Sol desde un punto P de su trayectoria cuya abcisa es x (3 puntos)

En primer lugar representamos la trayectoria del meteorito

1) Construimos una tabla de valores, a partir de su ecuación

   $$y^2 = 2x+9 \rightarrow y = \sqrt{2x+9}$$

   $$Dom\ \mathrm{y} = [-4{,}5;+\infty[$$

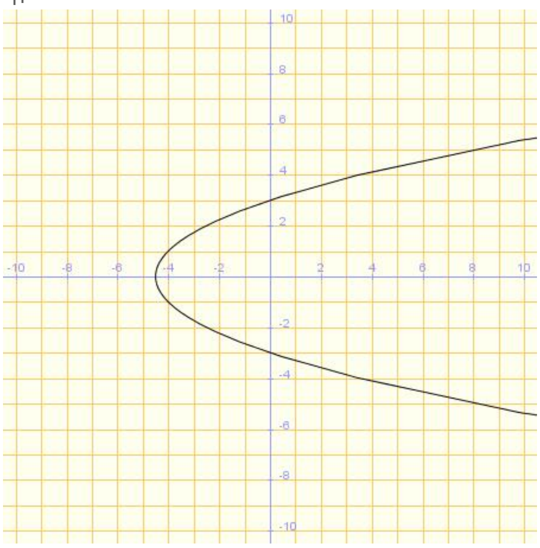
x	y
-4,5	$y = \sqrt{2\cdot(-4{,}5)+9} = 0$
0	$y = \sqrt{2\cdot 0+9} = \pm 3$
8	$y = \sqrt{2\cdot 8+9} = \sqrt{25} = \pm 5$

2) Construimos su gráfica

   Con WIRIS

   $y^2 = 2x+9$

   dibujar$(y^2=2x+9)$



Entonces un punto cualquiera de la trayectoria del meteorito cuyo valor de la abcisa sea x es de la forma:

$$P = \left(x, \sqrt{2x+9}\right) \rightarrow \text{siendo la distancia entre dos puntos } d(X,Y) = \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$$
$$S = (0{,}0)$$

$$d(P,S) = \sqrt{\left(\sqrt{2x+9}-0\right)^2+(x-0)^2} = \sqrt{x^2+2x+9}, -4{,}5 \le x \le 8$$

b) El punto P de la trayectoria T donde el meteorito alcanza la distancia mínima al Sol (5 puntos)

Buscamos un punto que minimice la expresión analítica de la d(P,C), por lo tanto debemos de minimizar la función $y=\sqrt{x^2+2x+9}, -4{,}5 \le x \le 8$

$$y=\sqrt{x^2+2x+9}$$

$$y'=\frac{1}{2\sqrt{x^2+2x+9}}\cdot 2x+2=\frac{2(x+1)}{2\sqrt{x^2+2x+9}}=\frac{x+1}{\sqrt{x^2+2x+9}}\rightarrow \frac{x+1}{\sqrt{x^2+2x+9}}=0$$

$$x+1=0\cdot \frac{x+1}{\sqrt{x^2+2x+9}}\rightarrow x+1=0\rightarrow x=-1$$

$dom\, y'=\Re$, puesto que el denominador no se anula para ningún valor real.

	-4,5	-1	8
y'	**-**	**+**	
y	**Decreciente** ↘	**creciente** ↗	

$$(-4{,}5;-1)-2;\ y'=\frac{-2+1}{\sqrt{(-2)^2+2\cdot(-2)+9}}=\frac{-1}{\sqrt{4-4+9}}=\frac{-1}{3}$$

$$(-1;8)2;\ y'=\frac{2+1}{\sqrt{2^2+2\cdot 2+9}}=\frac{3}{\sqrt{17}}$$

Entonces $x=-1$ es un mínimo relativo

Para x = -1 $\rightarrow y^2=2\cdot(-1)+9=7\rightarrow y=\pm\sqrt{7}$

Entonces el punto de la trayectoria T donde el meteorito alcanza la distancia mínima es

$$(x,y)=\left(-1,\pm\sqrt{7}\right)$$

Con WIRIS

$g(x)=\sqrt{2x+9} \rightarrow x\mapsto\sqrt{2\cdot x+9}$

$f(x)=\sqrt{x^2+2x+9} \rightarrow x\mapsto\sqrt{x^2+2\cdot x+9}$

$f'(x) \rightarrow \frac{x+1}{\sqrt{x^2+2\cdot x+9}}$

$\text{resolver}(f'(x)=0) \rightarrow \{\{x=-1\}\}$

$g(-1) \rightarrow \sqrt{7}$

c) Distancia mínima del meteorito al Sol. (2 puntos)

La distancia mínima del meteorito al sol se calcula sustituyendo en $y = \sqrt{x^2 + 2x + 9}, -4{,}5 \le x \le 8$

Para x=-1 $y = \sqrt{(-1)^2 + 2 \cdot (-1) + 9} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$

El valor de la distancia mínima del meteorito al sol es $2\sqrt{2}$

Con WIRIS

$d(S,T) = \sqrt{x^2 + 2x + 9}$

$d(x) = \sqrt{x^2 + 2x + 9} \rightarrow x \mapsto \sqrt{x^2 + 2 \cdot x + 9}$

$d(-1) \rightarrow 2 \cdot \sqrt{2}$

OPCIÓN B

Problema B.1. Dadas las matices $A=\begin{pmatrix}-2 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 0\\ 4 & 2 & -2\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}2 & 1 & 2\\ 0 & -1 & 5\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}$, Obtener **razonadamente**, el valor de los determinantes, **escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado.**

a) $|A+B|$ y $\left|\frac{1}{2}(A+B)^{-1}\right|$ **(4 puntos)**

$$A+B=\begin{pmatrix}0 & 1 & 2\\ 1 & 0 & 5\\ 4 & 2 & 0\end{pmatrix}$$

$$|A+B|=\begin{vmatrix}0 & 1 & 2\\ 1 & 0 & 5\\ 4 & 2 & 0\end{vmatrix}=(0+4+20)-(0+0+0)=24$$

$$\left|\frac{1}{2}(A+B)^{-1}\right|=\left(\frac{1}{2}\right)^3\cdot\left|(A+B)^{-1}\right|=\left(\frac{1}{2}\right)^3\cdot\frac{1}{|A+B|}=\frac{1^3}{2^3}\cdot\frac{1}{24}=\frac{1}{8}\cdot\frac{1}{24}=\frac{1}{192}$$

Por las propiedades de los determinantes tenemos :

1) $|A^{-1}|=\frac{1}{|A|}\rightarrow\left|(A+B)^{-1}\right|=\frac{1}{|A+B|}$

2) $|x\cdot A_{nxn}|=x^n\cdot|A_{nxn}|\rightarrow\left|\frac{1}{2}(A+B)^{-1}\right|=\left(porque\ (A+B)_{3x3}\right)\left(\frac{1}{2}\right)^3\cdot\left|(A+B)^{-1}\right|$

CON WIRIS

$$A=\begin{pmatrix}-2 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 0\\ 4 & 2 & -2\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}-2 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 0\\ 4 & 2 & -2\end{pmatrix}$$

$$B=\begin{pmatrix}2 & 1 & 2\\ 0 & -1 & 5\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}2 & 1 & 2\\ 0 & -1 & 5\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}$$

$$A+B\rightarrow\begin{pmatrix}0 & 1 & 2\\ 1 & 0 & 5\\ 4 & 2 & 0\end{pmatrix}$$

$$|A+B|\rightarrow 24$$

$$\left|\frac{1}{2}\cdot(A+B)^{-1}\right|\rightarrow\frac{1}{192}$$

Otra posibilidad, mucho más tediosa y no recomendable.

$$\left|\frac{1}{2}(A+B)^{-1}\right| = \left(\frac{1}{2}\right)^{3} \cdot \left|(A+B)^{-1}\right| = \frac{1}{8}\cdot\frac{1}{24} = \frac{1}{192}$$

$$(A+B)^{-1} = \frac{1}{|A+B|}\begin{pmatrix} Adj_{11} & Adj_{12} & Adj_{13} \\ Adj_{21} & Adj_{22} & Adj_{23} \\ Adj_{31} & Adj_{32} & Adj_{33} \end{pmatrix}^{t} = \frac{1}{|A+B|}\begin{pmatrix} Adj_{11} & Adj_{21} & Adj_{31} \\ Adj_{12} & Adj_{22} & Adj_{32} \\ Adj_{13} & Adj_{23} & Adj_{33} \end{pmatrix}$$

$$Adj_{11} = (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 0 & 5 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = -10 \qquad Adj_{12} = (-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} = 20 \qquad Adj_{13} = (-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = 2$$

$$Adj_{21} = (-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = 4 \qquad Adj_{22} = (-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} = -8 \qquad Adj_{23} = (-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = 4$$

$$Adj_{31} = (-1)^{3+1}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 5 \end{vmatrix} = 5 \qquad Adj_{32} = (-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = 2 \qquad Adj_{33} = (-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1$$

$$(A+B)^{-1} = \frac{1}{24}\begin{pmatrix} -10 & 4 & 5 \\ 20 & -8 & 2 \\ 2 & 4 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5/12 & 1/6 & 5/24 \\ 5/6 & -1/3 & 1/12 \\ 1/12 & 1/6 & -1/24 \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} -5/12 & 1/6 & 5/24 \\ 5/6 & -1/3 & 1/12 \\ 1/12 & 1/6 & -1/24 \end{vmatrix} = \frac{1}{24}$$

b) $\left|(A+B)^{-1}\cdot A\right|$ y $\left|A^{-1}\cdot(A+B)\right|$ **(3 puntos)**

$$\left|(A+B)^{-1}\cdot A\right| = \left|(A+B)^{-1}\right|\cdot|A| = \frac{1}{|A+B|}\cdot|A| = \frac{|A|}{|A+B|} = \frac{4}{24} = \frac{1}{6}$$

$$\left|A^{-1}\cdot(A+B)\right| = \left|A^{-1}\right|\cdot\left|(A+B)\right| = \frac{1}{|A|}\cdot\left|(A+B)\right| = \frac{1}{4}\cdot 24 = 6$$

Por las propiedades de los determinantes tenemos :

1) $|A\cdot B| = |A|\cdot|B| \to \left|(A+B)^{-1}\right|\cdot|A|$

2) $\left|A^{-1}\right| = \dfrac{1}{|A|} \to \left|(A+B)^{-1}\right| = \dfrac{1}{|A+B|}$

Cálculos

$$|A| = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & -2 \end{pmatrix} = (4+0+0)-(0+0+0) = 4$$

CON WIRIS

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & -2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\left|(A+B)^{-1}\cdot A\right| \rightarrow \frac{1}{6}$$

$$\left|A^{-1}\cdot(A+B)\right| \rightarrow 6$$

c) $\left|2\cdot ABA^{-1}\right|$ y $\left|A^3B^{-1}\right|$ **(3 puntos)**

$$\left|2\cdot ABA^{-1}\right| = 2^3\cdot|A|\cdot|B|\cdot\left|A^{-1}\right| = 8\cdot|A|\cdot|B|\cdot\frac{1}{|A|} = 8\cdot 4\cdot(-4)\cdot\frac{1}{4} = -32$$

$$\left|A^3\cdot B^{-1}\right| = \left|A^3\right|\cdot\left|B^{-1}\right| = |A|^3\cdot\frac{1}{|B|} = 4^3\cdot\frac{1}{(-4)} = -4^2 = -16$$

Cálculos

$$|B| = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = (-4+0+0)-(0+0+0) = -4$$

CON WIRIS

$$A=\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & -2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

$$B=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$|2\cdot A\cdot B\cdot A^{-1}| \rightarrow -32$$

$$|A^3\cdot B^{-1}| \rightarrow -16$$

Problema B.2. Dados los puntos A=(1,0,1), B=(2,-1,0), C=(0,1,1) y P=(0,-3,2) se pide calcular **razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado.**

a) La distancia del punto P al punto A. (2 puntos)

Dados dos puntos cualesquiera $A=(x_1,y_1,z_1)$ y $B=(x_2,y_2,z_2)$ la distancia entre ellos es :

$$d(A,B)=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$$

$$\begin{cases} P=(0,-3,2) \\ A=(1,0,1) \end{cases} \rightarrow d(P,A)=\sqrt{(1-0)^2+(0-(-3))^2+(1-2)^2}=\sqrt{1+9+1}=\sqrt{11}$$

CON WIRIS

A=punto(1,0,1) → (1,0,1)
P=punto(0,−3,2) → (0,−3,2)
distancia(A,P) → $\sqrt{11}$

b) La distancia del punto P a la recta que pasa por los puntos A y B. (4 puntos).

Primero calculamos la ecuación de la recta (r) que pasa por los puntos A y B

$$\begin{cases} A=(1,0,1) \\ \vec{AB}=B-A=(2,-1,0)-(1,0,1)=(1,-1,-1) \end{cases} \rightarrow r:\begin{cases} x=1+\lambda \\ y=-\lambda \\ z=1-\lambda \end{cases}$$

Y ahora la distancia del punto P a la recta se calcula mediante la siguiente fórmula :

$$d(P,r)=\frac{\left|\vec{AP}\,x\,\vec{v_r}\right|}{\left|\vec{v_r}\right|}=\frac{\sqrt{32}}{\sqrt{3}}=\frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\cdot\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}=\frac{4\sqrt{6}}{3}$$

$$\begin{cases} P=(0,-3,2) \\ A=(1,0,1)A=(1,0,1) \\ \vec{AP}=P-A=(0,-3,2)-(1,0,1)=(-1,-3,1) \\ \vec{v_r}=(1,-1,-1) \end{cases} \rightarrow \vec{AP}\,x\,\vec{v_r}=\begin{vmatrix} i & j & k \\ -1 & -3 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix}=4i+0j+4k=(4,0,4)$$

$$\left|\vec{AP}\,x\,\vec{v_r}\right|=\sqrt{4^2+0^2+4^2}=\sqrt{32}$$

$$\left|\vec{v_r}\right|=\sqrt{1^2+(-1)^2+(-1)^2}=\sqrt{3}$$

CON WIRIS

P=punto(0,−3,2) → (0,−3,2)
A=punto(1,0,1) → (1,0,1)
B=punto(2,−1,0) → (2,−1,0)
r=recta(A,B) → $-x-y+1=0 \cap -x-2\cdot y+z=0$
distancia(P,r) → $\frac{4\cdot\sqrt{6}}{3}$

c) La distancia del punto P al plano que pasa por los puntos A, B y C.(4 puntos).

Primero calculamos la ecuación del plano (π) que pasa por los puntos A, B y C

$$\begin{cases} A=(1,0,1) \\ \vec{AB}=B-A=(2,-1,0)-(1,0,1)=(1,-1,-1) \\ \vec{AC}=C-A=(0,1,1)-(1,0,1)=(-1,1,0) \end{cases} \rightarrow \pi : \begin{vmatrix} x-1 & y & z-1 \\ 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = (x-1)\cdot 1 + y\cdot 1 + (z-1)\cdot 0 = 0$$

$$\pi : x+y-1=0$$

Y ahora la distancia del punto $P=(p_1, p_2, p_3)$ al plano $\pi : Ax+By+Cz+D=0$ se calcula mediante la siguien

$$d(P,\pi)=\frac{|Ap_1+Bp_2+Cp_3+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$

Dado $P=(0,-3,2)$ y $\pi : x+y-1=0$

$$d(P,\pi)=\frac{|1\cdot 0+1\cdot(-3)+0\cdot 2-1|}{\sqrt{1^2+1^2+0^2}}=\frac{|-4|}{\sqrt{2}}=\frac{4}{\sqrt{2}}\cdot\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=\frac{4\sqrt{2}}{2}=2\sqrt{2}$$

CON WIRIS

P=punto(0,−3,2) → (0,−3,2)
A=punto(1,0,1) → (1,0,1)
B=punto(2,−1,0) → (2,−1,0)
C=punto(0,1,1) → (0,1,1)
p=plano(A,B,C) → $x+y-1=0$
distancia(P,p) → $2\cdot\sqrt{2}$

Problema B.3. Dada la función f definida por f(x) = sen x, para cualquier valor real x, se pide obtener **razanamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado.**

a) La ecuación de la recta tangente a la curva y=f(x) en el punto de abcisa x=π/6 (4puntos).

Para calcular la ecuación de la recta tangente utilizamos la ecuación punto - pendiente:

$$\begin{cases} y = y_0 + m \cdot (x - x_0) \\ x_0 = \dfrac{\pi}{6} \\ y_0 = f\left(\dfrac{\pi}{6}\right) = sen\dfrac{\pi}{6} = \dfrac{1}{2} \\ m = y'\left(\dfrac{\pi}{6}\right) = \cos\dfrac{\pi}{6} = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ y' = \cos x \end{cases} \rightarrow r: y = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \left(x - \frac{\pi}{6}\right)$$

CON WIRIS

$$f(x) = sen(x) \rightarrow x \mapsto sen(x)$$

$$f\left(\frac{\pi}{6}\right) \rightarrow \frac{1}{2}$$

$$f' \rightarrow x \mapsto \cos(x)$$

$$f'\left(\frac{\pi}{6}\right) \rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$r = recta\left(punto\left(\frac{\pi}{6}, \frac{1}{2}\right), \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \rightarrow y = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot x - \frac{\pi \cdot \sqrt{3}}{12} + \frac{1}{2}$$

b) La ecuación de la recta normal a la curva y=f(x) en el punto de abcisa x= π/3. Se recuerda que la recta normal a una curva en un punto P es la recta que paso por ese punto P y es perperdicular a la recta tangente a la curva en el punto P (3 puntos).

Para calcular la ecuación de la recta normal utilizamos la ecuación punto - pendiente:

$$\begin{cases} y = y_0 + m \cdot (x - x_0) \\ x_0 = \dfrac{\pi}{3} \\ y_0 = f\left(\dfrac{\pi}{3}\right) = sen\dfrac{\pi}{3} = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ m_{r.n.} = \dfrac{-1}{m_{r.t}} = \dfrac{-1}{1/2} = -2 \\ m = y'\left(\dfrac{\pi}{3}\right) = \cos\dfrac{\pi}{3} = \dfrac{1}{2} \\ y' = \cos x \end{cases} \rightarrow s: y = \frac{\sqrt{3}}{2} - 2 \cdot \left(x - \frac{\pi}{3}\right)$$

CON WIRIS

$f(x)=sen(x) \rightarrow x \mapsto sen(x)$

$f\left(\frac{\pi}{3}\right) \rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2}$

$f' \rightarrow x \mapsto cos(x)$

$f'\left(\frac{\pi}{3}\right) \rightarrow \frac{1}{2}$

$r=recta\left(punto\left(\frac{\pi}{6},\frac{1}{2}\right),-2\right) \rightarrow y=-2\cdot x+\frac{\pi}{3}+\frac{1}{2}$

c) El ángulo formado por las recta determinadas en los apartados a) y b). (3 puntos)

Para calcular el ángulo que forman las rectas r y s utilizamos la siguiente fórmula :

$$tg\alpha=\left|\frac{m_r-m_s}{1+m_r\cdot m_s}\right|$$

Dadas las pendientes $m_r=\frac{\sqrt{3}}{2}$ y $m_s=-2$

$$tg\alpha=\left|\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}+2}{1+\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot(-2)}\right|=\left|\frac{\frac{\sqrt{3}+4}{2}}{1-\sqrt{3}}\right|$$

$$tg\alpha=\left|\frac{\frac{\sqrt{3}+4}{2}}{1-\sqrt{3}}\right|=\left|\frac{\sqrt{3}+4}{2-2\sqrt{3}}\right|$$

$$tg\alpha=\frac{\sqrt{3}+4}{2\sqrt{3}-2}\cdot\frac{2\sqrt{3}+2}{2\sqrt{3}+2}=\frac{6+2\sqrt{3}+8\sqrt{3}+8}{8}=\frac{10\sqrt{3}+14}{8}=\frac{5\sqrt{3}+7}{4}$$

$$tg\alpha=\frac{5\sqrt{3}+7}{4}\rightarrow\alpha=artg\left(\frac{5\sqrt{3}+7}{4}\right)=75{,}67^o$$

CON WIRIS

$vr=\left[\frac{\sqrt{3}}{2},1\right] \rightarrow \left[\frac{\sqrt{3}}{2},1\right]$

$vs=[-2,1] \rightarrow [-2,1]$

$a=ángulo\_orientado(vr,vs) \rightarrow 1.8209$

$g=convertir(a,{}^{o}) \rightarrow 104.33\,^{o}$

$180^{o}-g \rightarrow 75.672\,^{o}$