TEMA 9: DERIVADAS. TÉCNICAS DE DERIVACIÓN.

1. TASA DE VARIACIÓN MEDIA

$$T.V.M.([a,b]) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

2. DERIVADA DE UNA FUNCIÓN EN UN PUNTO. FUNCIÓN DERIVADA.

La derivada de una función en un punto es un número real (positivo, negativo o cero)

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \Rightarrow f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Función derivada de una función: $f'(x) = \lim_{h \to 0} \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h}$

Si derivamos una función derivada obtendremos la función de la derivada segunda y así sucesivamente.

$f'(x_0)$ significa la pendiente de la recta tangente a la gráfica de $y = f(x)$, en el punto de abcisa x_0.
Si existe $f'(x_0)$ se dice que f es derivable.

3. DERIVADAS LATERALES

Derivada por la derecha $\quad f'(x_0^+) = \lim_{h \to 0^+} \dfrac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$

Derivada por la izquierda $\quad f'(x_0^-) = \lim_{h \to 0^-} \dfrac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$

Para que exista la derivada de una función continua en un punto, sus derivadas laterales deben existir y ser iguales.

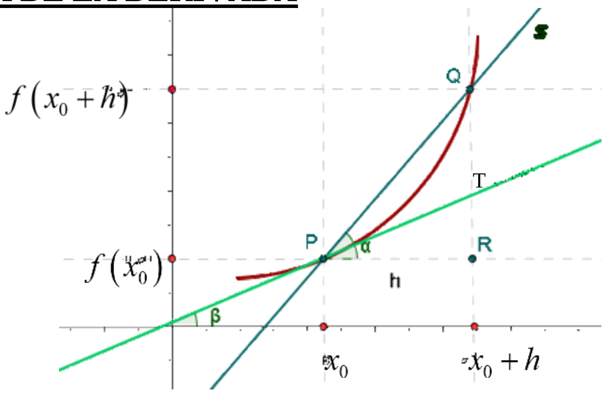
4. INTERPRETACIÓN GEOMÉTRICA DE LA DERIVADA

$y = f(x)$

$P(x_0, f(x_0))$

$Q(x_0 + h, f(x_0 + h))$

$$\hat{PQR} \left\langle \begin{array}{l} \tan\alpha = \dfrac{QP}{PR} \\ \tan\alpha = \dfrac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \end{array} \right.$$



Si $h \to 0$, entonces $QR \to TR$ y $\beta \to \alpha$

$$\tan\alpha = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = f'(x_0) \quad \Rightarrow \quad f'(x_0) = m = \tan\alpha$$

La derivada de una función es un punto es la pendiente de la recta tangente a la curva en dicho punto

Ecuación de la recta tangente a un punto en un punto

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$$

Ecuación de la recta normal a una función en un punto

$$y - f(x_0) = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0)$$

5. DERIVABILIDAD Y CONTINUIDAD.

Si una función es derivable en un punto, necesariamente es continua en él. Sin embargo, una función puede ser continua en un punto y <u>no</u> ser derivable.

6. OPERACIONES CON DERIVADAS

$[f(x)+g(x)]' = f'(x)+g'(x)$
$[kf(x)]' = k \cdot f'(x)$
$[f(x)\cdot g(x)]' = f'(x)\cdot g(x) + f(x)\cdot g'(x)$
$\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]' = \frac{f'(x)\cdot g(x) - f(x)\cdot g'(x)}{[g(x)]^2}$

7. REGLA DE LA CADENA

$$[(f\circ g)(x)]' = g'(f(x))\cdot f'(x)$$

8. ESTUDIO DE LA DERIVABILIDAD

Consideremos una función $f(x) = \begin{cases} f_1(x), x \le x_0 \\ f_2(x), x > x_0 \end{cases}$

En la que $f_1(x)$ es derivable en (a,x_0), y $f_2(x)$ es derivable en (x_0,b).

Entonces para estudiar si una función es derivable en x_0, daremos los siguientes pasos:

1º) Vemos si f es continua en x_0: ¿ $\lim_{x\to x_{0-}} f_1(x) = \lim_{x\to x_{0+}} f_2(x) = f(x_0)$?

2º) Calculamos $f(x_0^-) = \lim_{x\to x_{0-}} f'_1(x)$ y $f(x_0^+) = \lim_{x\to x+} f'_2(x)$

3º) ¿Es $f'(x_0^-) = f'(x_0^+)$? En caso afirmativo, este es el valor de $f'(x_0)$.

Entonces la función, $f(x)$ es derivable en (a,b)

9. NUEVAS TÉCNICAS DE DERIVACIÓN

Derivada de una función implícita.
Derivación logarítmica.