TEMA 8: LÍMITES Y CONTINUIDAD

1. LÍMITE DE UNA FUNCIÓN

1.1. Límite finito de una función

Decimos que: $\boxed{\lim_{x\to+\infty} f(x)=L \text{, si } \forall\varepsilon>0 \Rightarrow \exists x_0 / \forall x'>x_0 \Rightarrow \left|f(x')-L\right|<\varepsilon}$

Decimos que: $\boxed{\lim_{x\to-\infty} f(x)=L \text{, si } \forall\varepsilon>0 \Rightarrow \exists x_0 / \forall x'<x_0 \Rightarrow \left|f(x')-L\right|<\varepsilon}$

1.2. Límite infinito de una función

Dada una función $f(x)$:

- $\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ si $\forall k>0 \Rightarrow \exists x_0 / \forall x'>x_0 \Rightarrow f(x')>k$
- $\lim_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$ si $\forall h<0 \Rightarrow \exists x_0 / \forall x'>x_0 \Rightarrow f(x')<h$
- $\lim_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$ si $\forall k>0 \Rightarrow \exists x_0 / \forall x'<x_0 \Rightarrow f(x')>k$
- $\lim_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$ si $\forall h<0 \Rightarrow \exists x_0 / \forall x'<x_0 \Rightarrow f(x')<h$

2. OPERACIONES CON LÍMITES

Si $f(x)$ y $g(x)$ son dos funciones y existen sus límites se cumple que[1]:

$\lim_{x\to\infty}\left[f(x)\pm g(x)\right]=\lim_{x\to\infty} f(x)\pm\lim_{x\to\infty} g(x)$	$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\lim_{x\to\infty} f(x)}{\lim_{x\to\infty} g(x)}$, siempre que $\lim_{x\to\infty} g(x)\neq 0$
$\lim_{x\to\infty}\left[f(x)\cdot g(x)\right]=\lim_{x\to\infty} f(x)\cdot\lim_{x\to\infty} g(x)$	
$\lim_{x\to\infty}\sqrt[p]{f(x)}=\sqrt[p]{\lim_{x\to\infty} f(x)}$	$\lim_{x\to\infty}\left(f(x)\right)^p=\left(\lim_{x\to\infty} f(x)\right)^p$
$\lim_{x\to\infty}\left[\log_a f(x)\right]=\log_a\left[\lim_{x\to\infty} f(x)\right]$	
$\lim_{x\to\infty} f(x)^{g(x)}=\left(\lim_{x\to\infty} f(x)\right)^{\lim_{x\to\infty} g(x)}$, si $\lim_{x\to\infty} f(x)\neq 0$ y $\lim_{x\to\infty} g(x)\neq 0$	

SUMA Y RESTA	PRODUCTO	COCIENTE	POTENCIA
$(+\infty)\pm k=+\infty$ $(-\infty)\pm k=-\infty$ $(+\infty)+(+\infty)=+\infty$ $(-\infty)+(-\infty)=-\infty$ $-(-\infty)=+\infty$	$k\cdot(+\infty)=\begin{cases}+\infty\leftrightarrow k>0\\-\infty\leftrightarrow k<0\end{cases}$ $k\cdot(-\infty)=\begin{cases}-\infty\leftrightarrow k>0\\+\infty\leftrightarrow k<0\end{cases}$ $(+\infty)\cdot(+\infty)=+\infty$ $(+\infty)\cdot(-\infty)=-\infty$ $(-\infty)\cdot(-\infty)=+\infty$	$\frac{k}{\pm\infty}=\frac{0}{\pm\infty}=0$ $\frac{k}{0}=\begin{cases}+\infty\leftrightarrow k>0\\\text{indeterminacion}\leftrightarrow k=0\\-\infty\leftrightarrow k<0\end{cases}$ $\frac{+\infty}{0}=+\infty$ $\frac{-\infty}{0}=-\infty$	$k^{+\infty}=\begin{cases}+\infty\leftrightarrow k>1\\0\leftrightarrow 0\leq k<1\end{cases}$ $k^{-\infty}=\begin{cases}0\leftrightarrow k>1\\+\infty\leftrightarrow 0\leq k<1\end{cases}$ $(+\infty)^k=\begin{cases}+\infty\leftrightarrow k>0\\0\leftrightarrow k<0\end{cases}$ $(+\infty)^{+\infty}=+\infty$ $(+\infty)^{-\infty}=0$

$\sqrt[n]{+\infty}=+\infty$	$\sqrt[n]{-\infty}=\begin{cases}-\infty \text{ si } n \text{ impar}\\\text{No existe si } n \text{ par}\end{cases}$

[1] Si escribimos $\lim_{x\to\infty} f(x)$ significa que los resultados son válidos para $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ y $\lim_{x\to-\infty} f(x)$

3. CÁLCULO DE LÍMITES DE FUNCIONES

FUNCIONES CON POTENCIAS

$$\lim_{x\to+\infty} x^n = \begin{cases} +\infty & \text{si } n>0 \\ 1 & \text{si } n=0 \\ 0 & \text{si } n<0 \end{cases}$$

$$\lim_{x\to-\infty} x^n = \begin{cases} +\infty & \text{si } n>0 \text{ y n par} \\ -\infty & \text{si } n>0 \text{ y n impar} \\ 1 & \text{si } n=0 \\ 0 & \text{si } n<0 \end{cases}$$

FUNCIONES POLINÓMICAS

Son de la forma: $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_3x^3 + a_2x^2 + a_2x^2 + a_1x + a_0$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \begin{cases} +\infty & \text{si el coeficiente del término de mayor grado } (a_n) \text{ es positivo} \\ -\infty & \text{si el coeficiente del término de mayor grado } (a_n) \text{ es negativo} \end{cases}$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \begin{cases} +\infty \\ -\infty \\ -\infty \\ +\infty \end{cases}$$

	a_n	**Grado Polinomio**
$+\infty$	>0	Par
$-\infty$	>0	Impar
$-\infty$	<0	Par
$+\infty$	<0	Impar

FUNCIONES EXPONENCIALES

$$\lim_{x\to+\infty} a^x = \begin{cases} +\infty & \text{si } a>1 \\ 0 & \text{si } 0<a<1 \\ \text{No existe} & \text{si } a<0 \end{cases}$$

$$\lim_{x\to-\infty} a^x = \begin{cases} 0 & \text{si } a>1 \\ +\infty & \text{si } 0<a<1 \\ \text{No existe} & \text{si } a<0 \end{cases}$$

FUNCIONES RACIONALES *(cociente de polinomios)*

Son de la forma: $f(x) = \dfrac{a_k x^k + ... + a_1 x + a_0}{b_p x^p + ... + b_1 x + b_0}$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } k<p \\ \dfrac{a_k}{b_p} & \text{si } k=p \\ +\infty & \text{si } k>p \text{ y } \dfrac{a_k}{b_p}>0 \\ -\infty & \text{si } k>p \text{ y } \dfrac{a_k}{b_p}<0 \end{cases}$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } k<p \\ \dfrac{a_k}{b_p} & \text{si } k=p \\ -\infty & \text{si } k>p \text{ y } \dfrac{a_k}{b_p}>0 \\ +\infty & \text{si } k>p \text{ y } \dfrac{a_k}{b_p}<0 \end{cases}$$

FUNCIONES IRRACIONALES *(funciones con radicales)*

Resolvemos las indeterminaciones que obtengamos.

Recuerda:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} f(-x)$$

4. LÍMITE DE UNA FUNCIÓN EN UN PUNTO

1. Se empieza sustituyendo la x por el punto.
2. Si se obtiene un resultado numérico, ese es el valor del límite.
3. Si se llega a una indeterminación, seguiremos otros caminos.
4. Si el resultado es ∞ hallamos los límites laterales[2].
5. Si los límites laterales coinciden, ese será el límite de la función.
6. Si los límites laterales son distintos, decimos que no existe límite.

7. INDETERMINACIONES

$\dfrac{\infty}{\infty}$	Suele aparecer al calcular límites de cocientes de polinomios o donde aparecen radicales. Desaparece dividiendo numerador y denominador por la potencia de mayor grado.
$\infty-\infty$	Diferencia de radicales ➔ Multiplicar y dividir por el conjugado[3] Diferencia de cocientes de polinomios ➔ Realizamos la resta de cocientes
1^{∞}	Si $\lim_{x\to\infty} f(x)=1$ y $\lim_{x\to\infty} g(x)=\infty$ se cumple que➔ $\lim_{x\to\infty} f(x)^{g(x)} = e^{\lim_{x\to\infty}[f(x)-1]\cdot g(x)}$
$\dfrac{0}{0}$	Suele aparecer al calcular límites de cocientes de funciones $f(x)/g(x)$, en un punto c tal que $f(c)=g(c)=0$ Se factoriza (factor común, identidades notables, Ruffini, ecuación de 2º grado) y se simplifica

8. CONTINUIDAD DE UNA FUNCIÓN

8.1. Continuidad en un punto.

Definición: $\boxed{f \text{ continua en } a \iff \lim_{x\to a} f(x) = f(a)}$

Definición

1º $\exists f(a)$

2º $\exists \lim_{x\to a} f(x) \begin{cases} \exists \lim_{x\to a^+} f(x) \\ \exists \lim_{x\to a^-} f(x) \end{cases}$

3º Los dos valores anteriores coinciden

---

2 Límites laterales $\begin{cases} \lim_{x\to a^+} f(x) \\ \lim_{x\to a^-} f(x) \end{cases}$

3 El conjugado de $a+b$ es $a-b$

8.2. Continuidad lateral

Continuidad por la derecha	f continua en $a^+ \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to a^+} f(x) = f(a)$
Continuidad por la izquierda	f continua en $a^- \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to a^-} f(x) = f(a)$
Continuidad en un punto	Si una función es continua por la derecha e izquierda en un punto, es continua en dicho punto.

8.3. Discontinuidad en un punto

Definición	Una función es discontinua en un punto cuando no existe límite en él o, existiendo, no coincide con el valor de la función en el mismo.
Definición	Si una función no es continua en un punto $x = a$, diremos que es discontinua en dicho punto

TIPOS DE DISCONTINUIDAD

DISCONTINUIDAD EVITABLE		$\left.\begin{array}{l}\exists \lim\limits_{x\to a^+} f(x) \\ \exists \lim\limits_{x\to a^-} f(x)\end{array}\right\} \lim\limits_{x\to a^+} f(x) = \lim\limits_{x\to a^-} f(x) \neq f(a)$
DISCONTINUIDAD INEVITABLE	Discontinuidad de salto finito	$\left.\begin{array}{l}\exists \lim\limits_{x\to a^+} f(x) \\ \exists \lim\limits_{x\to a^-} f(x)\end{array}\right\} \lim\limits_{x\to a^+} f(x) \neq \lim\limits_{x\to a^-} f(x)$ Salto de f en a ➔ $\left\lvert \lim\limits_{x\to a^+} f(x) - \lim\limits_{x\to a^-} f(x) \right\rvert$
	Discontinuidad de salto infinito	a) Los limites laterales son $+\infty$ y $-\infty$ b) Los limites laterales son $+\infty$ o $-\infty$ c) Uno de los límites laterales es finito y el otro $\pm\infty$

8.4. Continuidad en un intervalo

INTERVALO ABIERTO	Una función es continua en un intervalo abierto $]a,b[$ si lo es en cada uno de sus puntos.
INTERVALO CERRADO	Una función es continua en un intervalo cerrado $[a,b]$ si lo es en todos los punto de $]a,b[$ y además es continua por la derecha en a y es continua por la izquierda en b

9. TEOREMAS

9.1. Teorema de Bolzano *(Teorema de las raíces)*

Si una función es continua en un intervalo $\left[a,b\right]$ y toma valores de signo opuesto en los extremos, entonces existe al menos un punto interior c del intervalo en el que $f(c)=0$.

$$\left.\begin{array}{c} f \text{ continua en } \left[a,b\right] \\ f(a)\cdot f(b)<0 \end{array}\right\} \exists c \in \left[a,b\right] / \ f(c)=0$$

9.2. Teorema de Weierstrass *(Teorema del máximo-mínimo)*

Si una función es continua en un intervalo cerrado $\left[a,b\right]$, tiene máximo y mínimo en ese intervalo.

9.3. Teorema de Darboux

Si una función es continua en el intervalo $\left[a,b\right]$, la función toma en ese intervalo todos los valores comprendidos entre el máximo y el mínimo.