PROBLEMAS DE SELECTIVIDAD. BLOQUE ANÁLISIS

1. Dada la función f definida por

$$f(x) = x^2\, e^{-x}$$

Obtener **razonadamente**:

a) El dominio y el recorrido de la función f. *(2 puntos)*

b) Los valores de x donde la función $f(x) = x^2\, e^{-x}$ alcanza el máximo relativo y el mínimo relativo. *(2 puntos)*

c) Los intervalos de crecimiento y decrecimiento de dicha función f. *(2 puntos)*

d) Los valores de x donde la función $f(x) = x^2\, e^{-x}$ tiene los puntos de inflexión. *(2 puntos)*

e) La gráfica de la curva $y = x^2\, e^{-x}$, explicando con detalle la obtención de su asíntota horizontal. *(2 puntos)*

(Septiembre 2011)

2. Un coche recorre el arco de parábola Γ de ecuación $2y = 36 - x^2$, variando la x de -6 a 6. Se representa por $f(x)$ a la distancia del punto (0 , 9) al punto (x , y) del arco Γ donde está situado el coche. Se pide obtener **razonadamente**:

a) La expresión de $f(x)$. *(2 puntos)*

b) Los puntos del arco Γ donde la distancia $f(x)$ tiene mínimos relativos. *(2 puntos)*

c) Los valores máximo y mínimo de la distancia $f(x)$. *(2 puntos)*

d) El área de la superficie limitada por el arco de parábola Γ y el segmento rectilíneo que une los puntos (– 6 , 0) y (6 , 0). *(4 puntos)*

(Septiembre 2011)

3. Sea f la función definida por

$$f(x) = \frac{x}{x^2 - 3x + 2}$$

Obtener **razonadamente**:

a) El dominio y las asíntotas de la función $f(x)$. *(3 puntos)*

b) Los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función $f(x)$. *(4 puntos)*

c) La integral $\int f(x)\,dx = \int \frac{x}{x^2 - 3x + 2}\,dx$ *(3 puntos)*

(Junio 2011)

4. Se desea construir un campo rectangular con vértices A, B, C y D de manera que:

Los vértices A y B sean puntos del arco de la parábola $y = 4 - x^2$, $-2 \le x \le 2$, y el segmento de extremos A y B es horizontal.

Los vértices C y D sean puntos del arco de la parábola $y = x^2 - 16$, $-4 \le x \le 4$, y el segmento de extremos C y D es horizontal.

Los puntos A y C deben tener la misma abcisa, cuyo valor es el número real positivo x.

Los puntos B y D deben tener la misma abcisa, cuyo valor es el número real negativo $-x$.

Se pide obtener **razonadamente**:

a) La expresión $S(x)$ del área del campo rectangular en función del número real positivo x. *(4 puntos)*

b) El número real positivo x para el que el área $S(x)$ es máxima. *(4 puntos)*

c) El valor del área máxima. *(2 puntos)***(Junio 2011)**

5. Dadas las funciones $f(x) = x^3$ y $g(x) = 2x^2 - x$, se pide:

a) Obtener razonadamente los puntos de intersección A y B de las curvas $y = f(x)$ e $y = g(x)$. *(3 puntos)*

b) Demostrar que $f(x) \geq g(x)$ cuando $x \geq 0$. *(3 puntos)*

c) Calcular razonadamente el área de la superficie limitada por las dos curvas entre los puntos A y B. *(4 puntos)*

(Septiembre 2010)

6. Dos elementos de un escudo son una circunferencia y un triángulo. La circunferencia tiene centro (0,0) y radio 5. Uno de los vértices del triángulo es el punto A=(– 5,0). Los otros dos vértices del triángulo son los puntos de la circunferencia B=(x,y) y C=(x,– y). Se pide obtener razonadamente:

a) El área del triángulo en función de x. *(3 puntos)*

b) Los vértices B y C para los que es máxima el área del triángulo. *(5 puntos)*

c) El valor máximo del área del triángulo. *(2 puntos)*

(Septiembre 2010)

7. Se quiere construir un estadio vallado de 10000 metros cuadrados de superficie. El estadio está formado por un rectángulo de base x y dos semicírculos exteriores de diámetro x, de manera que cada lado horizontal del rectángulo es diámetro de uno de los semicírculos. El precio de un metro de valla para los lados verticales del rectángulo es de 1 euro y el precio de un metro de valla para las semicircunferencias es de 2 euros. Se pide obtener razonadamente:

a) La longitud del perímetro del campo en función de x. *(3 puntos)*

b) El coste f(x) de la valla en función de x. *(3 puntos)*

c) El valor de x para el que el coste de la valla es mínimo. *(4 puntos)*

(Junio 2010)

8. Dada la función polinómica $f(x) = 4 - x^2$, se pide obtener razonadamente:

a) La gráfica de la curva $y = 4 - x^2$. *(2 puntos)*

b) El punto P de esa curva cuya tangente es perpendicular a la recta de ecuación $x + y = 0$. *(3 puntos)*

c) Las rectas que pasan por el punto $(-2, 1)$ y son tangentes a la curva $y = 4 - x^2$, obteniendo los puntos de tangencia. *(5 puntos)*

(Junio 2010)

9. Se consideran las funciones reales $f(x) = 2x^2 + 12x - 6$ y $g(x) = (x - 2)(x^2 + 9)$. Se pide obtener razonadamente:

a) Las ecuaciones de las asíntotas a la gráfica de la función $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ *(1,6 puntos).*

b) La función $H(x) = \displaystyle\int \frac{f(x)}{g(x)}\,dx$ *que cumple* $H(3) = \dfrac{\pi}{3}$. *(1,7 puntos).*

(Septiembre 2009)

10. Dada la función real $f(x) = \dfrac{8}{1 + x^2}$, se pide calcular razonadamente:

a) Las derivadas primera y segunda de la función f (x). *(0,8 puntos).*

b) Los puntos de inflexión de la curva y = f (x). *(1 punto).*

c) La pendiente máxima de las rectas tangentes a la curva y = f (x) . *(1,5 puntos).*

(Septiembre 2009)

11. A las 7 de la mañana, una lancha *A* está situada a 150 km al este de otra lancha *B*. La lancha *A* navega hacia el oeste a una velocidad constante de 40 km/h y la lancha *B* se dirige hacia el norte a 30 km/h. Si se mantienen estos rumbos, averiguar razonadamente a qué hora estarán ambas lanchas a distancia mínima. *(3,3 puntos).*

(Septiembre 2009)

12. Una lámina metálica rectangular se dilata uniformemente por calentamiento, aumentando su base y su altura 0,2 mm por minuto. Averiguar la velocidad de crecimiento de la diagonal de dicha lámina cuando la base y la altura de la lámina miden, respectivamente, 8 y 6 cm. *(3,3 puntos).*

(Septiembre 2009)

13.

a) Determinar, razonadamente, el dominio y los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función $f(x)=\dfrac{1}{(3-x)(3+x)}$. *(1 punto).*

b) Obtener razonadamente los valores A y B tales que $\dfrac{1}{(3-x)(3+x)}=\dfrac{A}{3-x}+\dfrac{B}{3+x}$. *(1 punto).*

c) Calcular razonadamente el área de la superficie S limitada por la curva $y=\dfrac{1}{(3-x)(3+x)}$, el eje OX y las rectas de ecuaciones $x = -2$ y $x = 2$. *(1,3 puntos).*

(Junio 2009)

14. Dada la función real $f(x) = e^x - e^{-x}$, se pide calcular razonadamente:

a) La función $f(x) + f(-x)$. *(1,1 puntos).*

b) La integral $\int_{-a}^{a} f(x)\,dx$, donde a es un número real positivo. *(1,1 puntos).*

c) El punto de inflexión de f(x). *(1,1 puntos).*

(Junio 2009)

15. Se desea construir una bodega con forma de paralelepípedo de 100 m^3 de volumen de manera que el largo de su base sea 3/4 de la anchura x de su base. Se sabe que los precios de un metro cuadrado de suelo, de techo y de pared lateral son, respectivamente, 225 €/m^2, 300 €/m^2 y 256 €/m^2. Determinar razonadamente:

a) El valor x de la anchura de la base que minimiza el coste. *(2,3 puntos).*

b) Dicho coste mínimo. *(1 punto).*

(Junio 2009)

16. Un proveedor vende un producto a un comerciante al precio de 300 euros la unidad. El comerciante incrementa la cantidad de 300 euros e un 40% para obtener el precio de venta al público. El comerciante sabe que a ese precio venderá 50 unidades cada mes y que durante el mes de rebajas por cada 3 eros de reducción en el precio de venta de la unidad conseguirá un incremento de ventas de 5 unidades. Se pide determinar, razonadamente, el número de unidades que debe pedir al proveedor para venderlas en el mes de rebajas y el precio de venta de cada unidad, para maximizar sus beneficios durante ese periodo. *(2 puntos por obtener el número de unidades y 1,3 puntos por el precio de venta).*

(Junio 2009)

17. Dada la función f(t) = a t + b (con a y b constantes reales), se define $F(x) = x\int_1^{x+1} f(t)dt$. Se pide obtener razonadamente:

a) La integral $\int_1^{x+1} f(t)dt$ *(1,5 puntos).*

b) La expresión de la derivada *F´(x)* de la función *F(x)*. *(0,5 puntos).*

c) La relación entre los valores a y b para la que se verifica: F´´(0) = 0. *(1,3 puntos).*

(Septiembre 2008)

18. Para cada número real positivo α, se considera la función *g(x)* = $x^2 + \alpha$. Se pide calcular razonadamente:

a) El área de la región del plano limitada por el eje X, el eje Y, la recta $x = \sqrt{6}$ y la curva *y* = *g(x)*. *(2 puntos).*

b) El valor de α para el que la curva y = $x^2 + \alpha$ divide al rectángulo de vértices (0,0), ($\sqrt{6}$,0), ($\sqrt{6}$, 6 + α), (0, 6 + α) en dos regiones de igual área. *(1,3 puntos).*

(Septiembre 2008)

19. Un móvil se mueve con velocidad constante de 2m/s, en el primer cuadrante, sobre la recta x = 1, partiendo del punto M = (1,0) situado a 1 m del origen. Se pide obtener razonadamente:

a) Las coordenadas del punto M(t) donde está situado el móvil después de t segundos. *(1 punto).*

b) La función m(t) igual a la pendiente de la recta que pasa por el punto O = (0,0) y por el punto M(t). *(1,3 puntos).*

c) La derivada de la función m(t). *(1 punto).*

(Septiembre 2008)

20. En un terreno con forma de semicírculo de radio $\sqrt{50}$ metros, se dibuja un rectángulo que tiene dos vértices sobre la semicircunferencia del perímetro del terreno. Los otros dos vértices del rectángulo están sobre el segmento rectilíneo de dicho perímetro y distan x metros. Obtener razonadamente:

a) El área del rectángulo en función de x. *(1,3 puntos).*

b) El valor de x para el que es máxima el área del rectángulo. *(2 puntos).*

(Septiembre 2008)

21. Se considera, en el primer cuadrante, la región R del plano limitada por: el eje X, el eje Y, la recta x = 2 y la curva $y = \frac{1}{4+x^2}$.

a) Calcular razonadamente el área de la región R. *(1,5 puntos).*

b) Encontrar el valor de α para que la recta $x = \alpha$ divida la región R en dos partes A (izquierda) y B (derecha) tales que el área de A sea el doble que la de B. *(1,8 puntos).*

(Junio 2008)

22. Se considera la función real f (x) = $x^2 - 4$. Obtener, explicando el proceso de cálculo:

a) La gráfica de la curva *y = f(x)*. *(2 puntos).*

b) Los valores de *x* para los que está definida la función real *g(x) = ln f(x)*. *(1,3 puntos).*

c) Los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función *g(x)*, razonando si tiene, o no, máximo absoluto. *(1,3 puntos).*

(Junio 2008)

23. Una empresa decide lanzar una campaña de propaganda de uno de sus productos editando un texto que ocupa 18 cm^2 en hojas rectangulares impresas a una cara, con márgenes superior e inferior de 2 cm y laterales de 1 cm. Se pide calcular, razonadamente, las dimensiones de la hoja para las que el consumo de papel sea mínimo. *(3,3 puntos).*

(Junio 2008)

24. Una ventana tiene forma de trapecio rectangular. La base menor mide 20 cm y el lado oblicuo mide 40 cm. Hallar, razonadamente, el ángulo α que debe formar el lado oblicuo con la base mayor para que el área de la ventana sea máxima. *(3,3 puntos).*

(Junio 2008)

25. Se consideran las funciones reales $f(x) = 4x^2 + 2x + 10$ y $g(x) = x^3 + x^2 + 5x + 5$. Se pide:

a) Determinar las ecuaciones de las asíntotas a la gráfica de la función $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ *(1,6 puntos).*

b) Calcular la función $H(x) = \int \dfrac{f(x)}{g(x)}\,dx$ que cumple $H(0) = 0$. *(1,7 puntos).*

(Septiembre 2007)

26. Sea la función con dominio los números reales no nulos $f(x) = \dfrac{4}{x}$.

a) Calcular la ecuación de la recta tangente y de la recta normal a la gráfica de $f(x)$ en el punto de abscisa $x = 2$. *(1.8 puntos)* .

b) Determinar los puntos M y N de la gráfica de $f(x)$ para los que las rectas tangentes a la gráfica en M y N se cortan en el punto $(4, -8)$. *(1.5 puntos).*

(Septiembre 2007)

27. Se tienen dos programas informáticos A y B. Para procesar n datos, el programa A realiza un número de operaciones elementales no superior a $12 + n\sqrt[4]{n^3}$, mientras que el programa B ejecuta $n^2 - 2n + 10$operaciones elementales. Comprobar que cuando el número n de datos es grande, el programa A procesa los n datos con menos operaciones elementales que el programa B. *(3,3 puntos).*

(Septiembre 2007)

28. El borde de un estanque está formado por el arco de curva $y = 4 - x^2$ de extremos $(-2, 0)$ y $(2,0)$ y el segmento rectilíneo que une estos dos puntos. Un surtidor está situado en el punto de coordenadas $(0,2)$. Se pide:

a) Determinar, razonadamente, el punto del segmento rectilíneo del borde del estanque que está más próximo del surtidor. *(0,8 puntos).*

b) Determinar, razonadamente, los puntos del arco de curva del borde del estanque que están más próximos del surtidor. *(1,6 puntos).*

c) ¿Cuáles son los puntos del borde del estanque más próximos al surtidor? *(0,9 puntos).*

(Septiembre 2007)

29. . Se consideran las funciones reales $f(x) = 12x^3 - 8x^2 + 9x - 5$ y $g(x) = 6x^2 - 7x + 2$. Se pide:

a) Determinar las ecuaciones de las asíntotas a la gráfica de la función $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ *(1,6 puntos).*

b) Calcular la función $H(x) = \int \dfrac{f(x)}{g(x)}\,dx$ que cumple $H(1) = 1$. *(1,7 puntos).*

(Junio 2007)

30. Se considera la función real $f(x) = x^3 + a x^2 + b x + c$, donde a, b y c son parámetros reales.

a) Averiguar los valores de a y b para los que las rectas tangentes a la gráfica de $f(x)$ en los puntos de abscisas $x = 2$ y $x = 4$ son paralelas al eje OX. *(2 puntos).*

b) Con los valores de a y b hallados anteriormente, obtener el valor de c para el que se cumple que el punto de inflexión de la gráfica de $f(x)$ está en el eje OX. *(1,3 puntos).*

(Junio 2007)

31. Unos altos hornos producen al día x toneladas de acero de baja calidad y $\frac{40-5x}{10-x}$ toneladas de acero de alta calidad, siendo 8 toneladas la producción máxima diaria de acero de baja calidad. Si el precio de una tonelada de acero de baja calidad es 100 euros y el precio de una tonelada de acero de alta calidad es 250 euros, demostrar que se deben producir 5 toneladas por día de acero de baja calidad para que el valor de venta de la producción diaria sea máximo. *(3,3 puntos).*
(Junio 2007)

32. Hallar las dimensiones del cartel de área máxima con forma de rectángulo que tiene dos vértices sujetos a una estructura rígida parabólica de ecuación $y = 12 - x^2$, y los otros dos vértices están situados sobre el eje OX. *(3,3 puntos).*
(Junio 2007)

33. Dadas las funciones $f(x) = x^3 - 3x + 8$ y $g(x) = -3x$, se pide:
a) Calcular el máximo absoluto de la función $f(x)$ en el intervalo $[-3, 0]$ **(1 punto).**
b) Calcular el punto de corte de la curva $y = f(x)$ y la recta $y = g(x)$ **(1 punto).**
c) Obtener el área del recinto limitado por la curva $y = f(x)$ y las rectas $y = g(x)$, $x = -3$ y $x = 0$. **(1,3 puntos).**
(Septiembre 2006)

34. Un incendio se extiende en forma circular uniformemente. El radio del círculo quemado crece a la velocidad constante de 1,8 m/min.
a) Obtener el área quemada en función del tiempo t transcurrido desde el comienzo del incendio **(1,3 puntos).**
b) Calcular la velocidad de crecimiento del área del círculo quemado en el instante en que el radio alcance 45 m **(2 puntos).**
(Septiembre 2006)

35.
a) Obtener la derivada de la función $f(x) = ax + b + sen\ x$ **(0,5 puntos)**. **Calcular** a y b si $O = (0, 0)$ es un punto de la curva $y = ax + b + sen\ x$, cuya recta tangente en $O = (0, 0)$ es el eje OX **(1,8 puntos).**
b) Justificar que la función $g(x) = -\frac{2}{\pi}x + sen\ x$ se anula en dos puntos del intervalo $[0,\pi]$ **(0,5 puntos).**
c) Calcular esos dos puntos **(0,5 puntos).**
(Septiembre 2006)

36. Dos postes de 3m y 4 m se hallan clavados verticalmente en el suelo. Sus bases distan 5 m y, en el segmento que las une, hay un punto P que dista x metros de la base del poste más bajo. El extremo superior de cada poste se une con P mediante un segmento rectilíneo de cable. Se pide:
a) Obtener la expresión $f(x)$ de la longitud total de cable utilizado en ambos segmentos **(1,8 puntos).**
b) Demostrar que esa longitud total de cable es mínima cuando son iguales los valores absolutos de las pendientes de los dos segmentos considerados (**1 punto**). **Calcular** esa longitud mínima **(0,5 puntos).**
(Septiembre 2006)

37.
a) Dibujar razonadamente la gráfica de la función $g(x) = x^2 - 4$, cuando $-1 \le x \le 4$ *(1,1 puntos).*
b) Obtener razonadamente los valores máximo y mínimo absolutos de la función $f(x) = |x^2 - 4|$ en intervalo $[-1, 4]$ *(1,1 puntos).*
c) Calcular el área del recinto limitado por la curva de ecuación $y = f(x)$ y las rectas $x = -1$, $x = 4$ e $y = 0$ *(1,1 puntos).*
(Junio 2006)

38. Una persona camina a la velocidad constante de 3m/s alejándose horizontalmente en línea recta desde la base de un farol cuyo foco luminoso está a 10 m de altura. Sabiendo que la persona mide 1,70 m, calcular:

a) La longitud de la sombra cuando la persona está a 5 m de la base del farol *(2 puntos).*

b) La velocidad de crecimiento de la sombra a los t segundos de comenzar a caminar *(1,3 puntos).*

(Junio 2006)

39. Dada la función f(x) = ln x en el intervalo cerrado [1 , e], siendo e = 2,718281…:

a) Razonar que existe un punto P de la gráfica y = ln x en el que la recta tangente a ella es paralela a la recta que pasa por los puntos A = (1, 0) y B = (e, 1) *(1 punto).*

b) Obtener el punto P considerado en a) *(1,8 punto).*

c) Calcular la pendiente de la recta tangente a y = ln x en ese punto P *(0,5 puntos).*

(Junio 2006)

40. El coste del marco de una ventana rectangular es 12,50 € por metro lineal de los lados verticales y 8 € por metro lineal de los lados horizontales.

a) Calcular razonadamente las dimensiones que debe tener el marco de una ventana de 1 m^3 de superficie para que resulte lo más económico posible *(2,3 puntos).*

b) Calcular, además el coste de ese marco más económico posible considerado en a) *(1 punto).*

(Junio 2006)

41. a) El perímetro de un sector circular de radio R es 4 m. ¿Cuántos radianes α debe medir su ángulo central para que su área sea máxima? *(1,8 puntos).* (Nota: Perímetro = 2 R + R α ; Área=½α R^2)

b) El área de otro sector circular es 1 m^2. ¿Para qué radio es mínimo su perímetro? *(1,5 puntos).*

(Septiembre 2005)

42. El caudal de agua (es decir, el volumen por unidad de tiempo) que circula por una tubería cilíndrica es proporcional a la cuarta potencia de su radio. Para abastecer a una población, se han previsto tuberías de cierto radio, pero el fabricante las suministra de un radio que es un 0,5% menor. Estimar en qué porcentaje se reducirá el caudal real respecto del previsto. *(3,3 puntos).*

(Septiembre 2005)

43. Las coordenadas *x* e *y* de los puntos (6; 4,5), (3; 2,4), (9; 6,6) y (5; 10) son las calificaciones de cinco alumnos en Matemáticas y Física. a) Representar los 5 puntos en unos ejes OXY y dibujar aproximadamente la recta de regresión de y sobre x (*0,5 puntos*) y deducir razonadamente a cuál de los números -1, -0,5 ó 0,5 está más próximo el coeficiente de correlación (*1 punto*).

b) Calcular el coeficiente de correlación de los cuatro primeros alumnos *(0,3 puntos)*, explicando el resultado obtenido e interpretándolo gráficamente *(1,5 puntos).*

(Septiembre 2005)

44. En el plano se tiene la curva $y = x^2 + 2x - 1$. Encontrar razonadamente las ecuaciones de las rectas que pasan por el punto (2, 3) y son tangentes a dicha curva (*3,3 puntos*).

(Septiembre 2005)

45. El trazado de dos canales navegables en un mapa discurre según las rectas $y=x$ e $y=-x$. Dos lanchas motoras, A y B, salen al mismo tiempo de puntos situados sobre cada uno de los canales a distancias de 20 y 15 km, respectivamente, del punto P de confluencia de ambos. La lancha A se dirige a P con una velocidad de 30 km/h y la lancha B se dirige a ese mismo punto con velocidad 60 km/h. Se considera despreciable la anchura de los canales y la longitud de las lanchas y se pide calcular:

a) La distancia entre las lanchas en función del tiempo desde que inician su recorrido (*2,3 puntos*).

b) La distancia mínima a la que pueden estar las lanchas (*1 punto*).

(Septiembre 2005)

46. . El peso de los estudiantes de una universidad se distribuye normalmente, con media aritmética 65 kilos y desviación típica 1,5 kilos. Obtener razonadamente:

a) El tanto por ciento de estudiantes con peso entre 63,5 y 68 kilos (*1,5 puntos*).

b) La probabilidad de que al elegir al azar 3 estudiantes dos pesen más de 68 kilos (*1,8 puntos*).

(Septiembre 2005)

47. Dadas las curvas $y = (x - 1)^3$, $y = 5 - x^2$ calcular razonadamente:

a) Su punto de corte *(1,1 puntos)*. b) El área encerrada por ellas y el eje OY *(2,2 puntos)*.

(Junio 2005)

48. Probar que el volumen de cualquier cono recto inscrito en una esfera es menor que el 30% del volumen de la misma *(3,3 puntos)*.

(Junio 2005)

49. Cien alumnos prepararon un examen de matemáticas. Se representa por x el número de problemas hecho por cada alumno en la preparación y por y la calificación obtenida. Sabiendo que las medias aritméticas de esas variables fueron: $\bar{x} = 9{,}2$ e $\bar{y} = 7{,}5$, que el coeficiente de correlación entre esas variables fue 0,7 y que la desviación típica de la variable y fue el doble que la de la variable x, se pide obtener, razonadamente:

a) Las ecuaciones de las rectas de regresión de y sobre x y de x sobre y (*2 puntos*).

b) La calificación que la adecuada recta de regresión predice para un alumno que sólo hizo 6 problemas durante la preparación del examen (*1,3 puntos*).

(Junio 2005)

50. las constantes reales a y b para que $$f(x) = \begin{cases} x \ln x + a & si \quad x > 0 \\ b & si \quad x = 0 \\ \dfrac{sen\, ax}{x} & si \quad x < 0 \end{cases}$$

sea una función continua para todo valor real x (*3,3 puntos*).

(Junio 2005)

51. La concentración en sangre de un fármaco después de su toma es $C(t) = -0{,}29483\, t + 0{,}04253\, t^2 - 0{,}00035\, t^3$ mg/ml, donde t es el tiempo transcurrido en minutos. Se pide:

a) Calcular el periodo de tiempo durante el cual el fármaco actúa (*1,8 puntos*).

b) Determinar en qué instante la concentración del fármaco es máxima (*1,5 puntos*).

(Junio 2005)

52. De una urna que contiene 6 bolas blancas y 4 bolas negras se extraen bolas sucesivamente y sin devolución. Obtener razonadamente cuántas bolas hay que extraer para que:

a) La probabilidad de sacar al menos una bola blanca sea $\frac{29}{30}$ (*2,8 puntos*).

b) La probabilidad de sacar al menos una bola blanca sea 1 (*0,5 puntos*).

(Junio 2005)

53. Encontrar razonadamente el punto de la curva $y = \frac{1}{1+x^2}$ en el que la recta tangente a la curva tiene pendiente máxima y calcular el valor de esta pendiente. *(3,3 puntos)*
(Junio 2004)

54. En un plano, el trazado de una carretera discurre según la ecuación $y = \frac{x^2}{4} - x,$ siendo un río el eje OX. En el terreno entre el río y la carretera hay un pinar. Si expresamos las distancias en kilómetros, ¿cuánto vale el pinar si la hectárea se paga a 60 euros?
(Junio 2004)

Hallar todos los valores reales z tales que $\int_0^z \frac{-16}{x^2-2x-15}\,dx = \ln 25$ (*3,3 puntos*).
(Junio 2004)

55. Desde un punto N de la orilla del mar, un nadador debe alcanzar una boya que flota a 3 kilómetros de la costa y dista $3\sqrt{5}$ kilómetros del punto N. Si recorriendo la orilla (que se supone recta y plana), su velocidad media es de 5 kilómetros por hora y nadando, de 3 kilómetros por hora, ¿cuánto tiempo deberá caminar hasta lanzarse al mar, para alcanzar la boya en el menor tiempo posible? (3,3 puntos)
(Junio 2004)

56. Sea $f(x) = x^2 + m x$ (donde m es un parámetro real) y f´(x) la función derivada de f(x). Se pide:
a) Hallar el valor del parámetro m para que f(x) tenga un mínimo relativo en x = -3/4 *(1,5 puntos).*
b) Para el valor de m calculado en a), determinar el área de la región comprendida entre la curva y = f(x) y la recta de ecuación y = f´(x) *(1,8 puntos).*
(Septiembre 2004)

57. a) Se tiene inicialmente 10 bacterias en un cultivo de laboratorio y cada día se duplican. Averigua, razonadamente, el número de bacterias que habrá cuando hayan transcurrido 10 días (*1 punto*).
b) Para otro cultivo, sea P(t) el número de bacterias transcurrido el tiempo t medido en días. Averigua el aumento del número de bacterias al cabo de 10 días, sabiendo que P(0)=500, P(3)=1100 y que la derivada P´(t) es constante para $0 \le t \le 10$ *(2,3 puntos).*
(Septiembre 2004)

58. a) Obtener razonadamente la siguiente integral $\int \frac{4x+11}{(x+1)^2+1}\,dx$ (2,*3 puntos*).

b) Aplicando la regla de Barrow, calcular $\int_0^{\sqrt{3}-1} \frac{4x+11}{(x+1)^2+1}\,dx$ (1 *punto*).

(Septiembre 2004)

59. Determinar razonadamente la longitud del lado del cuadrado de área mínima cuyos vértices están situados sobre los lados de otro cuadrado de lado 16 cm (3,3 puntos).
(Septiembre 2004)

60. En una gran pradera se tiene que vallar una zona de 400 m^2, que debe tener forma de rectángulo. Cada metro de valla cuesta 100 euros. Si x es la medida en metros de uno de sus lados, se pide:
a) Obtener razonadamente la función F tal que F(x) sea el coste de la valla, indicando entre qué valores puede variar x *(1,3 puntos).*
b) Deducir razonadamente el valor de x para el que la función f(x) alcanza el valor mínimo *(2 puntos).*
(Septiembre 2003)

a) Dibujar la recta de ecuación $y = (2/\pi)\ x$ y la curva de ecuación $y = sen\ x$ cuando $-\pi/2 \leq x \leq \pi/2$; obtener razonadamente por cálculo integral el área limitada entre la recta y la curva *(1,6 puntos).*

b) Calcular la integral del producto de las dos funciones consideradas en el apartado anterior, es decir $\int (2/\pi)\ x\ sen\ x \quad dx$, indicando los pasos realizados *(1,7 puntos).*

(Junio 2003)

61. Sea T un triángulo de perímetro 60 cm. Uno de los lados del triángulo T mide x cm y los otros dos lados tienen la misma longitud.

a) Deducir razonadamente las expresiones de las funciones A y f tales que:

$A(x)$ = Área del triángulo T .

$f(x) = \{A(x)\}^2$ (*1,3 puntos*).

b) Obtener, razonadamente, el valor de x para el que $f(x)$ alcanza el valor máximo (*2 puntos*).

(Junio 2003)

62. Sea $f(x) = x^3 + a\ x^2 + b\ x + c$. Hallar a, b, c sabiendo que f alcanza un máximo es $x = -4$ y un mínimo en $x = 0$ y que $f(1) = 1$.

(Septiembre 2002)

63. Calcular, razonadamente, el área de la región limitada por las curvas $y = x^2$ e $y = \dfrac{2}{1+x^2}$

(Septiembre 2002)

64. Hallar el valor positivo de a para que $\displaystyle\int_0^{a-1} (x+1)\ dx = \frac{9}{2}$ (2 puntos).

Obtener, razonadamente, la integral que da el área de la superficie comprendida entre el eje OX, la curva y=x+1 y las rectas x=0 y x=2. (*1,3 puntos*)

(Junio 2002)

65. Considerar las funciones definidas para $x \geq 0,\quad f(x) = arcsen\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}} \quad y \quad g(x) = \arccos\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$.

Calcular $f'(x)$ y $g'(x)$ y expresarlas del modo más simplificado posible. (*2 puntos*)

Comparar los resultados y deducir justificadamente la diferencia entre $f(x)$ y $g(x)$. (*1,3 puntos*)

(Junio 2002)