TEMA 6. PUNTOS, RECTAS Y PLANOS EN EL ESPACIO.

1. INTRODUCCIÓN

Los inventores de la Geometría Analítica, **Descartes y Fermat** (siglo XVIII), se interesaron por el estudio de superficies, pero dedicaron poca atención a ello, centrándose casi exclusivamente en el estudio de curvas planas. Fue en el siglo XVIII cuando se desarrolló la geometría analítica del espacio. **Clairut, Euler y Lagrange** fueron pioneros.

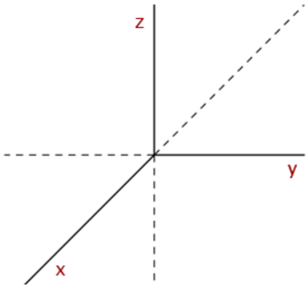
Por su extraordinario nivel de geómetra y su vocación pedagógica, puede considerarse a **Monge** (1746-1818) como el auténtico padre de la geometría analítica tridimensional: entre sus muchos libros, publicó uno para sus alumnos de la Escuela Politécnica de París, en el que desarrolló la geometría analítica del espacio prácticamente como se encuentra en la actualidad.

Extraordinario geómetra y magnifico pedagogo, Monge, sin embargo, no fue un buen escritor de libros de texto. Este deficiencia fue largamente compensada por algunos de sus discípulos, entre los que destaca **Lacroix** (1765-1843).

2. SISTEMA DE REFERENCIA EN EL ESPACIO.

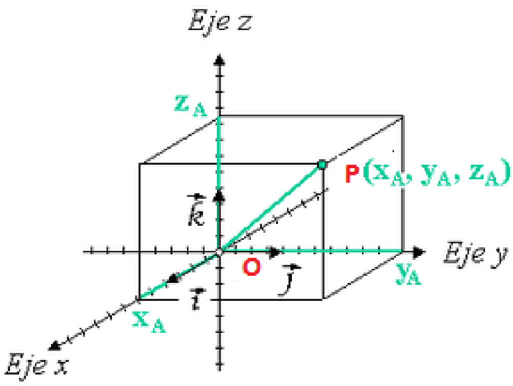
DEF 1: Un **sistema de coordenadas tridimensional** se construye trazando un eje Z, perpendicular en el **origen de coordenadas** a los ejes X e Y.

Cada **punto** viene determinado por **tres coordenadas** P(x, y, z).



Los ejes de coordenadas determinan tres planos coordenados: XY, XZ e YZ. Estos planos coordenados dividen al espacio en ocho regiones llamadas **octantes**, en el primer octante las tres coordenadas son positivas.

DEF 2: Un **sistema de coordenadas** es un conjunto de valores y puntos que permiten definir unívocamente la posición de cualquier punto de un espacio euclídeo.



Sistema de Coordenadas Cartesianas Espaciales

Un sistema de referencia en el espacio consiste en el conjunto $\Re = \left\{O, \left(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)\right\}$ formado:

- Un punto fijo, O , llamado **ORIGEN.**
- Una **base** $\left(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$ para los vectores.
- Y a cada punto se le asocia el vector $\vec{OP}$ de coordenadas del espacio (x_A, y_A, z_A)

3. APLICACIONES DE LOS VECTORES A PROBLEMAS GEOMÉTRICOS.

Coordenadas del vector que une dos puntos

$$\vec{OP}+\vec{PQ}=\vec{OQ}\rightarrow\vec{PQ}=\vec{OQ}-\vec{OP}=(x_2,y_2,z_2)-(x_1,y_1,z_1)=(x_2-x_1,y_2-y_1,z_2-z_1)$$

Ejemplo:

Si P y Q son P(3, 4, -7), Q(-1,5,0),las coordenadas de $\vec{PQ}$ y las de $\vec{QQ}$ son:

$$\vec{PQ}=Q-P=(-1,5,0)-(3,4,-7)=(-4,1,7)$$

$$\vec{QP}=Q-P=(4,-1,-7)$$

Coordenadas del punto medio de un segmento

Sean A (x_1, y_1, z_1) y B (x_2, y_2, z_2) los extremos de un segmento, el **punto_medio** del segmento viene dado por:

$$M\left(\frac{x_1+x_2}{2},\frac{y_1+y_2}{2},\frac{z_1+z_2}{2}\right)$$

Ejemplo

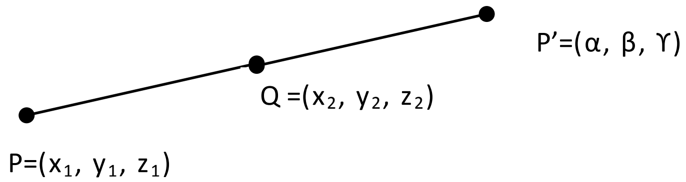
Dados los puntos A(3, −2, 5) y B(3, 1, 7) , hallar las coordenadas del punto medio del segmento que determinan.

$$M\left(\frac{3+3}{2},\frac{-2+1}{2},\frac{5+7}{2}\right) \qquad M\left(3,-\frac{1}{2},6\right)$$

Simétrico de un de un punto respecto de otro

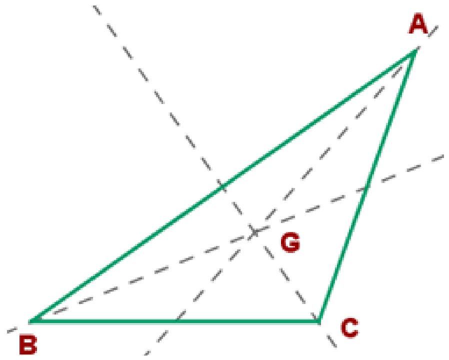
El simétrico de P respecto de Q es P' si Q es el punto medio del segmento PP'. Por tanto, si $P=(x_1,y_1,z_1)$ y $Q=(x_2,y_2,z_2)$, las coordenadas de $P'=(\alpha,\beta,\gamma)$ se obtienen a partir de las siguientes igualdades:

$$\frac{x_1+\alpha}{2}=x_2 \qquad \frac{y_1+\beta}{2}=y_2 \qquad \frac{z_1+\gamma}{2}=z_2$$



Coordenadas del baricentro de un triángulo

Sean A (x_1, y_1, z_1), B (x_2, y_2, z_2) y C (x_3, y_3, z_3) los vértices de un triángulo, las **coordenadas del baricentro** son:



$$G\left(\frac{x_1+x_2+x_3}{3},\frac{y_1+y_2+y_3}{3},\frac{z_1+z_2+z_3}{3}\right)$$

Ejemplo

Sean A = (2, 1, 0), B = (1, 1, 1) y C = (4, 1, −2) los vértices de un triángulo. Determinar las coordenadas del **baricentro**.

$$G\left(\frac{1+3-1}{3},\frac{-1+2+4}{3},\frac{3-2+1}{3}\right) \qquad G\left(1,\frac{5}{3},\frac{2}{3}\right)$$

Puntos alineados

Tres o más puntos están alineados si están en una **misma recta**, y por tanto el **rango de los vectores** determinados por ellos es **1**.

Ejemplo

Comprobar si los **puntos** A(2,3,1), B(5,4,3) y C(2, 1, 2) están **alineados**.

$$\overrightarrow{AB}=(5-2,4-3,3-1)=(3,1,2)$$

$$\overrightarrow{AC}=(2-2,1-3,2-1)=(0,-2,1)$$

$$\begin{pmatrix}3 & 1 & 2\\ 0 & -2 & 1\end{pmatrix} \qquad \begin{vmatrix}3 & 1\\ 0 & -2\end{vmatrix}\neq 0$$

$$rang\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)=2$$

Los puntos no están alineados.

Puntos coplanarios

Dos o más **vectores** son **coplanarios** si son **linealmente dependientes**, y por tanto sus **componentes** son **proporcionales** y su **rango** es **2**.

Dos o más **puntos** son **coplanarios**, si los **vectores** determinados por ellos también son **coplanarios**.

Los puntos coplanarios están en un mismo plano.

Ejemplo

Comprobar si los **puntos** A(1, 2, 3), B(4, ,7, 8), C(3, 5, 5), D(−1, −2, −3) y E(2, 2, 2) son **coplanarios**.

Los **puntos** A, B, C, D y E son **coplanarios** si:

$$rang\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AE}\right)=2$$

$$\overrightarrow{AB}=(4-1,7-2,8-3)=(3,5,5)$$

$$\overrightarrow{AC}=(3-1,5-2,5-3)=(2,3,2)$$

$$\overrightarrow{AD}=(-1-1,-2-2,-3-3)=(-2,-4,-6)$$

$$\overrightarrow{AE}=(2-1,2-2,2-3)=(1,0,-1)$$

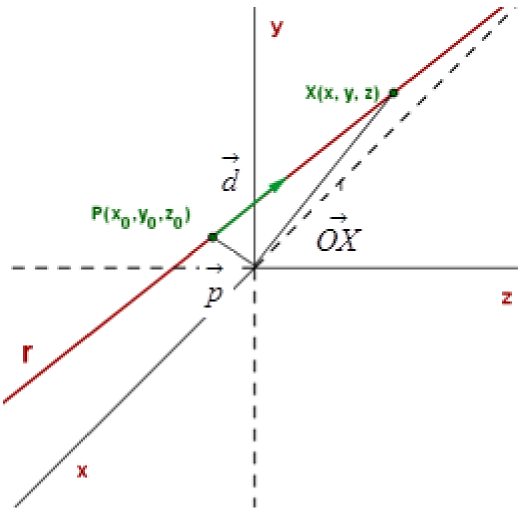
$$\begin{pmatrix} 3 & 5 & 5 \\ 2 & 3 & 2 \\ -2 & -4 & 6 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad \begin{vmatrix} 3 & 5 & 5 \\ 2 & 3 & 2 \\ -2 & -4 & 6 \end{vmatrix} \neq 0$$

$$rang\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AE}\right)=3$$

Los puntos A, B, C, D y E no son coplanarios.

4. ECUACIONES DE LA RECTA.

Ecuación vectorial de la recta



Sea P(x_0, y_0, z_0) es un punto de la recta r y $\vec{d}$ su vector director, el vector $\vec{PX}$ tiene igual dirección que $\vec{d}$, luego es igual a $\vec{d}$ multiplicado por un escalar:

$$\vec{PX} = \lambda \vec{d}$$

$$\vec{OX} = \vec{OP} + \vec{PX}$$

$$(x, y, z) = (x_0, y_0, z_o) + \lambda(d_1, d_3, d_3)$$

Ecuaciones paramétricas de la recta

Operando en la ecuación vectorial de la recta llegamos a la igualdad:

$$(x, y, z) = (x_o + \lambda d_1, y_o + \lambda d_2, z_o + \lambda d_3)$$

Esta igualdad se verifica si:

$$\begin{cases} x = x_o + \lambda d_1 \\ y = y_o + \lambda d_2 \\ z = z_o + \lambda d_3 \end{cases}$$

Ecuaciones continuas de la recta

Despejando e igualando λ en las ecuaciones paramétricas se tiene:

$$\boxed{\frac{x-x_o}{d_1}=\frac{y-y_0}{d_2}=\frac{z=z_o}{d_3}}$$

Ecuaciones implícitas o general de la recta

Una recta puede venir determinada por la intersección de los planos.

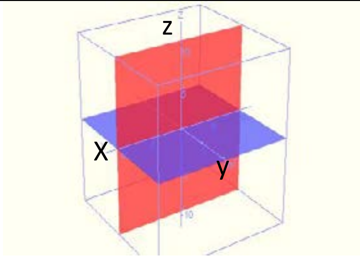
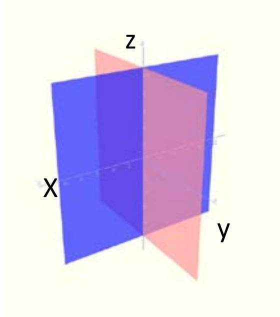
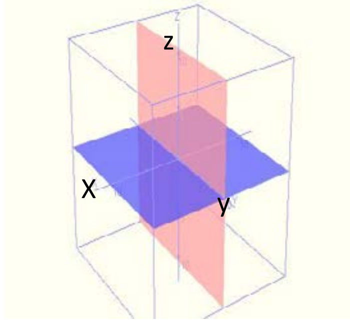
Al resolver las siguientes igualdades obtenemos:

$$\boxed{\begin{array}{c}\dfrac{x-x_o}{d_1}=\dfrac{y-y_0}{d_2}\\ \dfrac{x-x_o}{d_1}=\dfrac{z=z_o}{d_3}\end{array}}$$

$$\begin{cases} Ax+By+Cz+D=0 \\ A'x+B'y+C'z+D'=0 \end{cases}$$

Si en las **ecuaciones continuas de la recta** quitamos denominadores y pasamos todo al primer miembro, obtenemos también las **ecuaciones implícitas**.

Rectas

Recta del Eje X	Recta del Eje Y	Recta del Eje Z
		
$r:\begin{cases} x=\lambda \\ y=0 \\ z=0 \end{cases}$	$\pi:\begin{cases} x=0 \\ y=\lambda \\ z=0 \end{cases}$	$\pi:\begin{cases} x=0 \\ y=0 \\ z=\lambda \end{cases}$
dibujar3d(y=0,{color=rojo}) dibujar3d(z=0,{color=rojo})	dibujar3d(x=0,{color=rojo}) dibujar3d(z=0,{color=rojo})	dibujar3d(x=0,{color=rojo}) dibujar3d(y=0,{color=rojo})

Ejemplos

1. Hallar las **ecuaciones paramétricas**, en forma **continua** e **implícitas** de la recta que pasa por el punto A = (1, 2, 1) y cuyo vector director es $\vec{d} = (4,5,-1)$.

$$\begin{cases} x = 1 + 4\lambda \\ y = 2 - 5\lambda \\ z = 1 - \lambda \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 1 + 4\lambda & \lambda = \dfrac{x-1}{4} \\ y = 2 + 5\lambda & \lambda = \dfrac{y-2}{5} \\ z = 1 - \lambda & \lambda = \dfrac{z-1}{-1} \end{cases}$$

$$\frac{x-1}{4} = \frac{y-2}{5} = \frac{z-1}{-1}$$

$$\frac{x-1}{4} = \frac{y-2}{5} \qquad \frac{x-1}{4} = \frac{z-1}{-1}$$

$$\begin{cases} 5x - 4y + 13 = 0 \\ -x - 4z + 3 = 0 \end{cases}$$

2. Hallar las **ecuaciones paramétricas**,en forma **continua** e **implícita** de la recta que pasa por los puntos A(1, 0, 1) y B(0, 1, 1).

$$\overrightarrow{AB} = (0-1, 1-0, 1-1) = (-1, 1, 0)$$

$$\begin{cases} x = 1 - \lambda \\ y = \lambda \\ z = 1 \end{cases}$$

$$\frac{x-1}{-1} = \frac{y}{1} = \frac{z-1}{0}$$

$$\frac{x-1}{-1} = \frac{y}{1} \qquad \frac{x-1}{-1} = \frac{z-1}{0} \qquad \begin{cases} x + y - 1 = 0 \\ -z + 1 = 0 \end{cases}$$

3. Sea r la recta de ecuación:

$$r \equiv \frac{x-1}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z-1}{3}$$

¿Pertenecen a r los puntos A(0, −2, −2) y B(3, 2, 6)?

$$\frac{0-1}{1} = \frac{-2}{2} = \frac{-2-1}{3} \qquad A \in r$$

$$\frac{3-1}{1} \neq \frac{2}{2} \neq \frac{6-1}{3} \qquad B \notin r$$

4. Dada la recta r:

$$r \equiv \begin{cases} 2x + y + z = 0 \\ x - y - 2z \end{cases}$$

Hallar las **ecuaciones** en forma **continua** y **paramétrica**.

$$\begin{cases} 2x + y + z = 0 \\ x - y - 2z \end{cases}$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} -z & 1 \\ 2z & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}} = \frac{z}{3} \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & -z \\ 1 & 2z \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}} = \frac{5z}{-3}$$

$z = 0 \qquad x = 0 \qquad y = 0 \qquad A(0,0,0)$

$z = 3 \qquad x = 1 \qquad y = -5 \qquad B(1,-5,3)$

$$\overrightarrow{AB} = (1,-5,3)$$

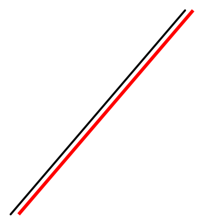
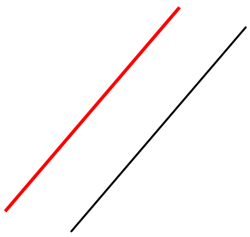
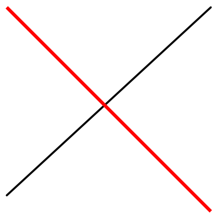
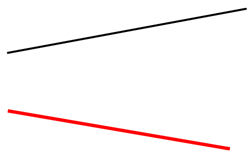
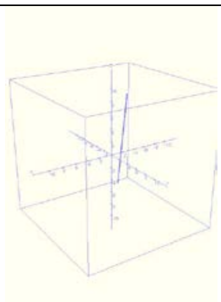
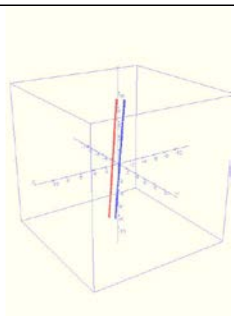
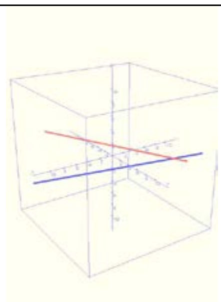
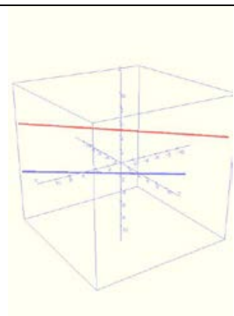
$$\begin{cases} x = \lambda \\ y = -5\lambda \\ z = 3\lambda \end{cases} \qquad \frac{x}{1} = \frac{y}{-5} = \frac{z}{3}$$

5. POSICIONES RELATIVAS DE DOS RECTAS.

Nos dan dos rectas, r y s, determinadas cada una de ellas por un vector posición y un vector dirección.

$$r:\begin{cases}\vec{p}(p_1, p_2, p_3)\\ \vec{d}(d_1, d_2, d_3)\end{cases} \qquad s:\begin{cases}\vec{p}(p'_1, p'_2, p'_3)\\ \vec{d}(d'_1, d'_2, d'_3)\end{cases}$$

Pueden darse uno de estos casos:

Coinciden	**Son paralelas**	**Se cortan**	**Se cruzan**
			
Misma dirección **Un punto en común**	**Misma dirección** **Ningún punto común.**	**Distinta dirección** **Un punto en común**	**Distinta dirección** **Ningún punto en común.**
			

Para ver cuál es la posición relativa de dos rectas, empezaremos por comprobar si $\vec{d} // \vec{d}'$. Para ello, basta con observar si

(d_1, d_2, d_3) es igual a $k(d'_1, d'_2, d'_3)$ para algún valor de k

Si: $\dfrac{d_1}{d'_1} = \dfrac{d_2}{d'_2} = \dfrac{d_3}{d'_3} \to \vec{d} // \vec{d}'$	COINCIDENTES	$P \in r \to P \in s$
	PARALELAS	$P \in r \to P \notin s$
Si : $\dfrac{d_1}{d'_1} \neq \dfrac{d_2}{d'_2} \neq \dfrac{d_3}{d'_3} \to \vec{d}$ no $// \vec{d}'$	SE CORTAN	$\det(M^*) = 0$
	SE CRUZAN	$\det(M^*) \neq 0$

$$M^* = \begin{pmatrix} d_1 & d'_1 & p'_1 - p_1 \\ d_2 & d'_2 & p'_2 - p_2 \\ d_3 & d'_3 & p'_3 - p_3 \end{pmatrix}$$

Estudio de las posiciones relativas de dos rectas mediante rangos

OPCIÓN A

$$r:\begin{cases} x = p_1 + \lambda d_1 \\ y = p_2 + \lambda d_2 \\ z = p_3 + \lambda d_3 \end{cases} \qquad s:\begin{cases} x = p'_1 + \lambda d'_1 \\ y = p'_2 + \lambda d'_2 \\ z = p'_3 + \lambda d'_3 \end{cases}$$

$$M = \begin{pmatrix} d_1 & d'_1 \\ d_2 & d'_2 \\ d_3 & d'_3 \end{pmatrix} \quad M = \begin{pmatrix} d_1 & d'_1 & p'_1 - p_1 \\ d_2 & d'_2 & p'_2 - p_2 \\ d_3 & d'_3 & p'_3 - p_3 \end{pmatrix}$$

**También ecuación vectorial o continua*

OPCIÓN B

$$r:\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A'_1x + B'_1y + C'_1z + D'_1 = 0 \end{cases}$$

$$M = \begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A'_1 & B'_1 & C'_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A'_2 & B'_2 & C'_2 \end{pmatrix}$$

$$s:\begin{cases} A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \\ A'_2x + B'_2y + C'_2z + D'_2 = 0 \end{cases}$$

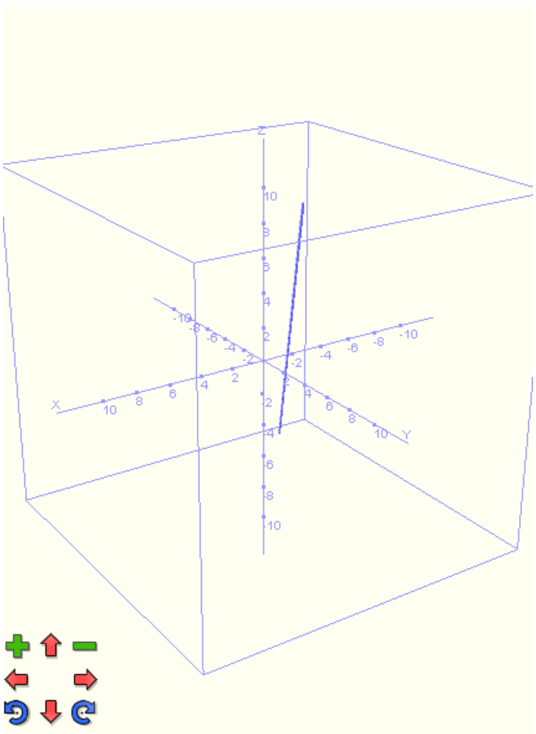
$$M^* = \begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 & D_1 \\ A'_1 & B'_1 & C'_1 & D'_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & D_2 \\ A'_2 & B'_2 & C'_2 & D'_2 \end{pmatrix}$$

Opción	A		B	
Rango	M	M*	M	M*
COINCIDENTES	1	1	2	2
	SCI		SCI	
PARALELAS	1	2	2	3
	SI		SI	
SECANTES (se cortan)	2	2	3	3
	SCD		SCD	
SE CRUZAN	2	3	3	4
	SI		SI	

WIRIS

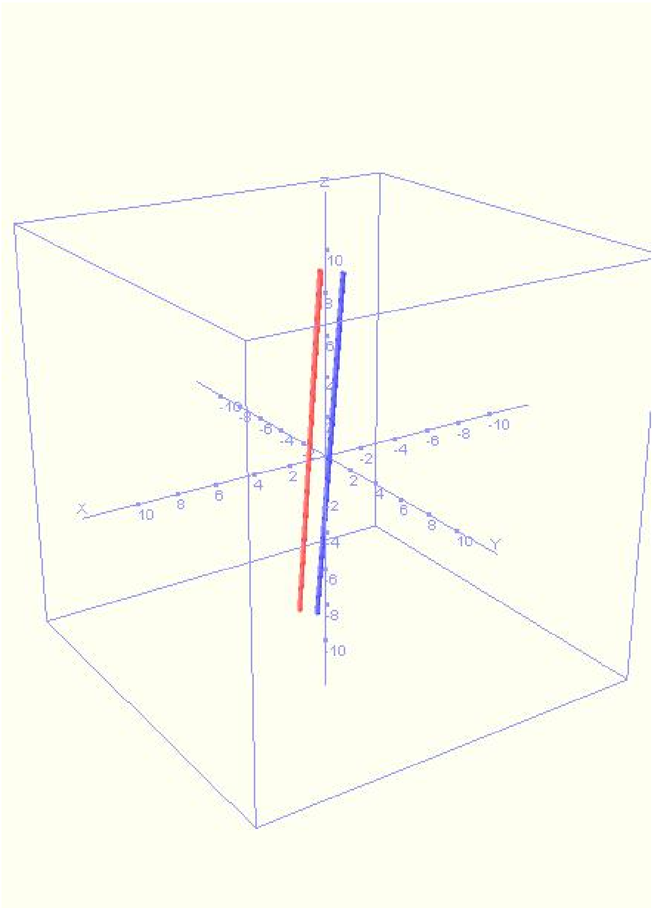
Rectas coincidentes

```
A:=punto(1,5,10) → punto(1,5,10)
v=[3,5,7] → [3,5,7]
r= recta (A,v) → 5·x−3·y+10=0∩15·x−23·y+10·z=0
dibujar3d(r,{color=rojo,anchura_linea=2}) → tablero1

B:=punto(1,5,10) → punto(1,5,10)
u=[6,10,14] → [6,10,14]
s= recta (B,u) → 5·x−3·y+10=0∩15·x−23·y+10·z=0
dibujar3d(r,{color=azul,anchura_linea=2}) → tablero1
```



Rectas paraleleas

```
A:=punto(1,2,3) → punto(1,2,3)
v=[2,4,10] → [2,4,10]
r = recta(A,v) → −5·x+z+2=0∩−2·x+y=0
dibujar3d(r,{color=azul,anchura_linea=4}) → tablero1

B:=punto(2,2,5) → punto(2,2,5)
u=[2,4,10] → [2,4,10]
s= recta(B,u) → −2·x+y+2=0∩−5·y+2·z=0
dibujar3d(s,{color=rojo,anchura_linea=4}) → tablero1
```



Recta que se cortan

A :=punto(2/3,1,−5/3) ➞ punto$\left(\frac{2}{3},1,\frac{-5}{3}\right)$

v=[−5,3,1] ➞ [−5,3,1]

r = recta(A,v) ➞ $-3\cdot x-5\cdot y+7=0\cap 18\cdot x+23\cdot y+21\cdot z=0$

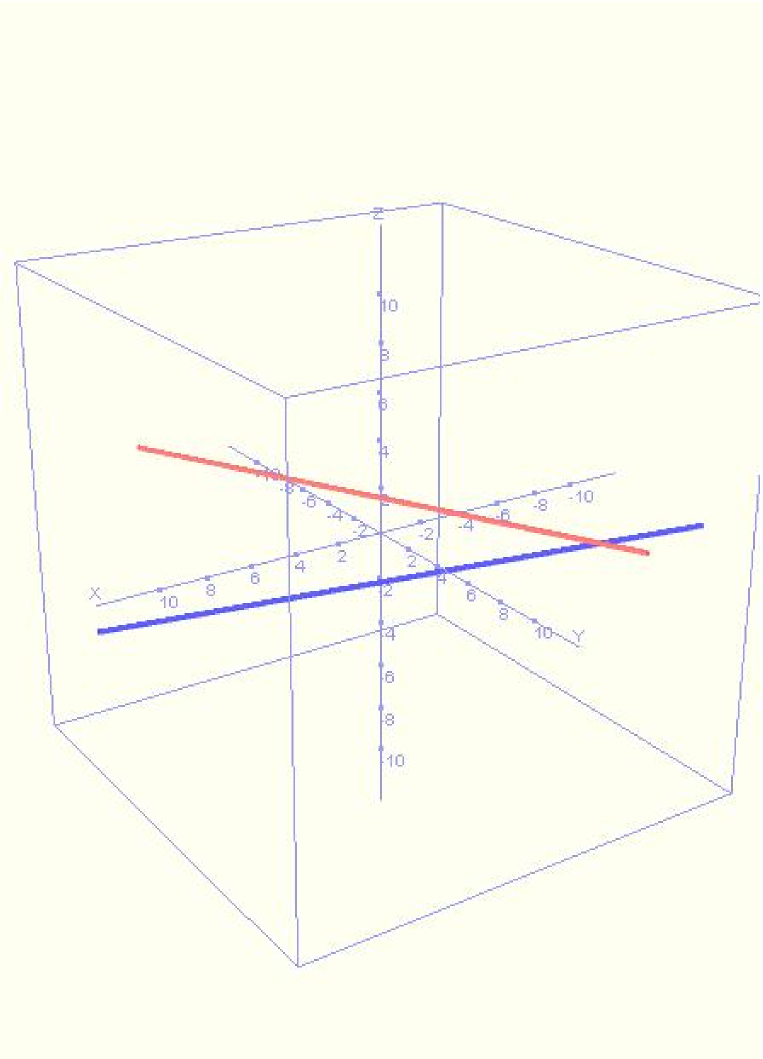
dibujar3d(r,{color=azul,anchura_linea=4}) ➞ tablero1

B :=punto(1/3,0,5/3) ➞ punto$\left(\frac{1}{3},0,\frac{5}{3}\right)$

u=[−1,2,0] ➞ [−1,2,0]

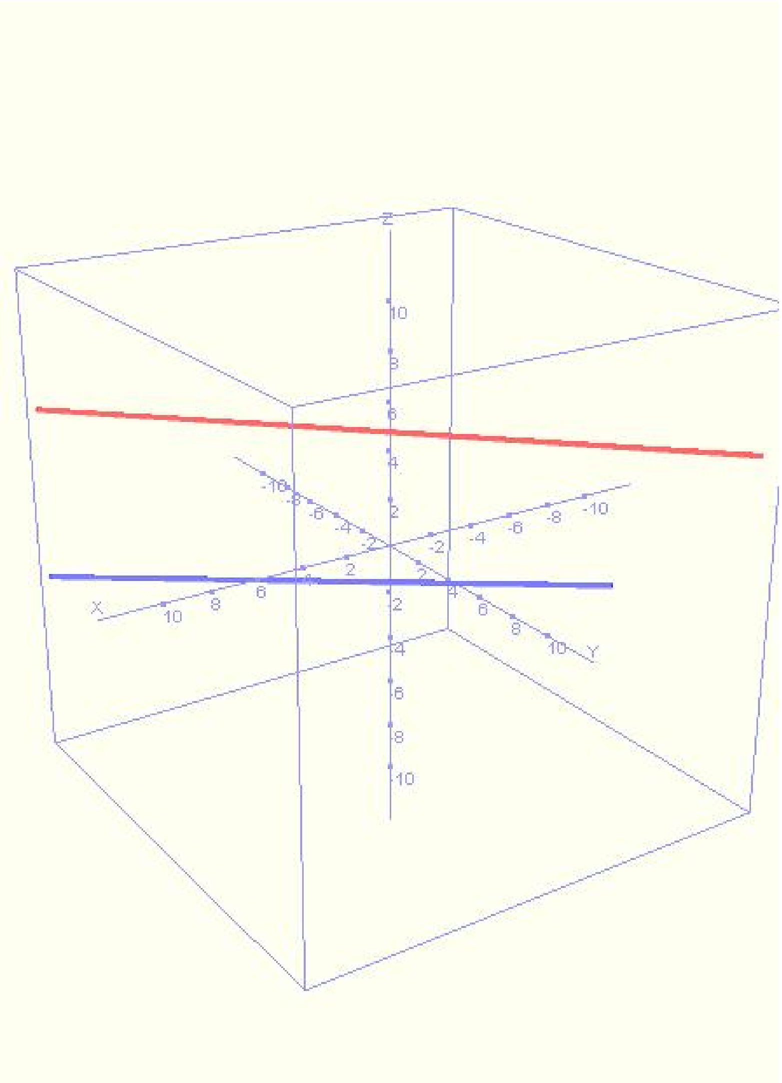
s= recta(B,u) ➞ $-6\cdot x-3\cdot y+2=0\cap -10\cdot x-5\cdot y+2\cdot z=0$

dibujar3d(s,{color=rojo,anchura_linea=4}) ➞ tablero1



Recta que se cruzan

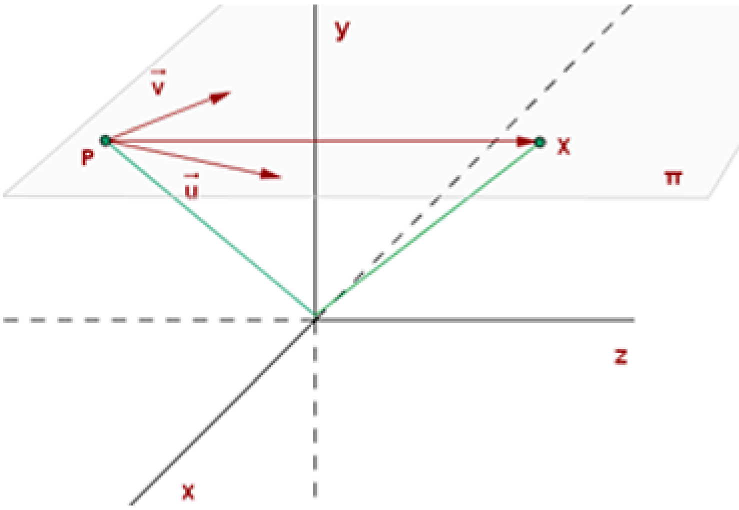
```
A:=punto(2,3,0) → punto(2,3,0)
v=[-3,5,1] → [-3,5,1]
r = recta(A,v) → -5·x-3·y+19=0∩3·x-2·y+19·z=0
dibujar3d(r,{color=azul,anchura_linea=4}) → tablero1

B:=punto(1,0,5) → punto(1,0,5)
u=[-1,1,0] → [-1,1,0]
s= recta(B,u) → -x-y+1=0∩-5·x-5·y+z=0
dibujar3d(s,{color=rojo,anchura_linea=4}) → tablero1
```



6. ECUCACIONES DEL PLANO.

Ecuación vectorial

Un **plano** queda determinado por un **punto P** y un **par de vectores** con distinta dirección.



Para que el punto P pertenezca al plano π el vector $\vec{PX}$ tiene que ser coplanario(dependiente) con $\vec{u}$ y $\vec{v}$.

$$\vec{PX} = \lambda \vec{u} + \mu \vec{v}$$

$$\vec{OX} = \vec{OP} + \vec{PX}$$

$$\boxed{(x, y, z) = (x_0, y_0, z_0) + \lambda(u_1, u_2, u_3) + \mu(v_1, v_2, v_3)}$$

Ecuaciones paramétricas del plano

Operando en la ecuación vectorial del plano llegamos a la igualdad:

$$(x, y, z) = (x_0 + u_1\lambda + v_1\mu, y_0 + u_2\lambda + v_2\mu, z_0 + u_3\lambda + v_3\mu)$$

Esta igualdad se verifica si:

$$\boxed{\begin{cases} x = x_0 + u_1\lambda + v_1\mu \\ y = y_0 + u_2\lambda + v_2\mu \\ z = z_0 + u_3\lambda + v_3\mu \end{cases}}$$

Ecuación general o implícita del plano

Un punto está en el plano π si tiene solución el sistema:

$$\begin{aligned} x - x_0 &= u_1 \lambda + v_1 \mu \\ y - y_0 &= u_2 \lambda + v_2 \mu \\ z - z_0 &= u_3 \lambda + v_3 \mu \end{aligned}$$

Este sistema tiene que ser compatible determinado en las incógnitas λ y μ· Por tanto el determinante de la matriz ampliada del sistema con la columna de los términos independientes tiene que ser igual a cero.

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & u_1 & v_1 \\ y - y_0 & u_2 & v_2 \\ z - z_0 & u_3 & v_3 \end{vmatrix} = 0$$

Desarrollamos el determinante.

$$\begin{vmatrix} u_2 & v_2 \\ u_3 & v_3 \end{vmatrix}(x - x_0) - \begin{vmatrix} u_1 & v_1 \\ u_3 & v_3 \end{vmatrix}(y - y_0) + \begin{vmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{vmatrix}(z - z_0) = 0$$

Damos los valores:

$$A = \begin{vmatrix} u_2 & v_2 \\ u_3 & v_3 \end{vmatrix} \qquad B = -\begin{vmatrix} u_1 & v_1 \\ u_3 & v_3 \end{vmatrix} \qquad C = \begin{vmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{vmatrix}$$

Sustituimos:

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$$

Realizamos las operaciones y le damos a D el valor:

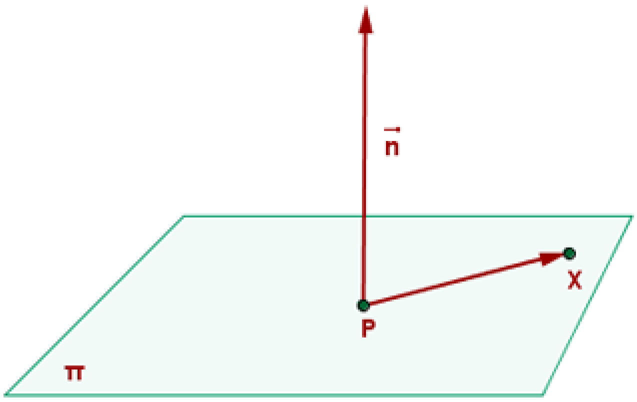
$$D = -Ax_0 - By_0 - Cz_0$$

Obtenemos la **ecuación general de plano**:

$$\boxed{Ax + By + Cz + D = 0}$$

Vector normal

El vector $\vec{n} = (a,b,c)$ es un **vector normal** al plano, es decir, **perpendicular al plano**.



Conocemos: P(x_0, y_0, z_0) es un punto del plano.

$\vec{n} = (a,b,c)$, vector normal (perpendicular) al plano.

Si $X \in Plano \to \vec{PX} = (x - x_0, y - y_0, z - z_0)$ es perpendicular al vector $\vec{n}$, y por tanto el producto escalar es cero $\vec{PX} \cdot \vec{n} = 0$. Es decir:

$$(x - x_0, y - y_0, z - z_0) \cdot (a,b,z) = 0$$

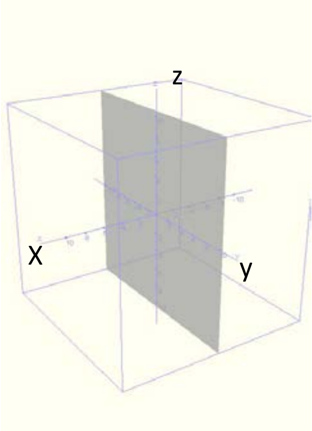
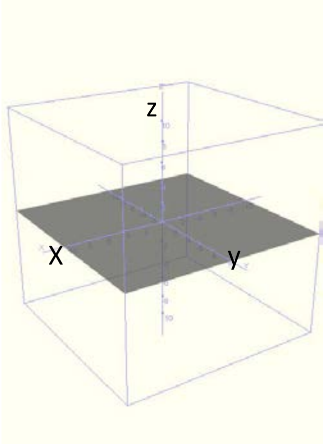
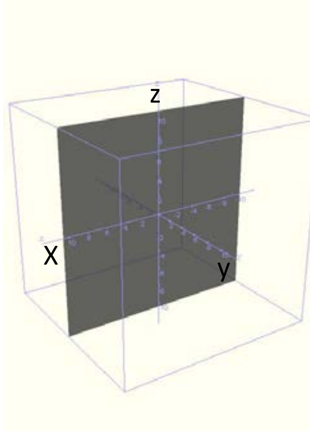
$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$$

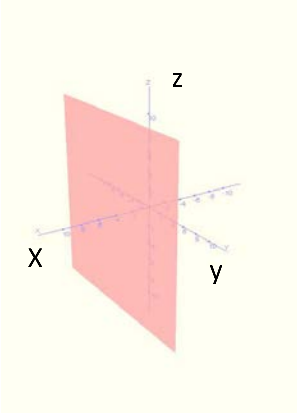
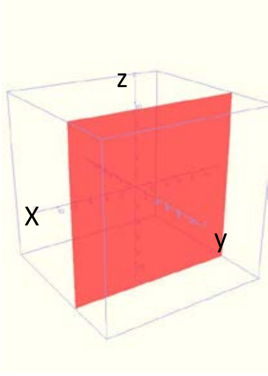
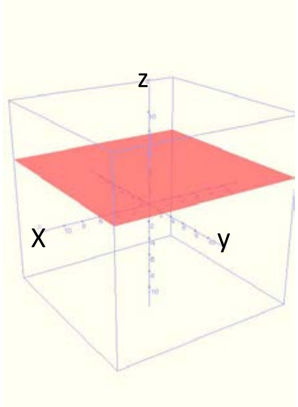
$$ax - ax_0 + by - by_0 + cz - cz_0 = 0$$
$$ax + by + cz - ax_0 - by_o - cz_0 = 0$$

$$\boxed{\Pi : ax + by + cz + d = 0} \qquad d = -ax_0 - by_o - cz_0$$

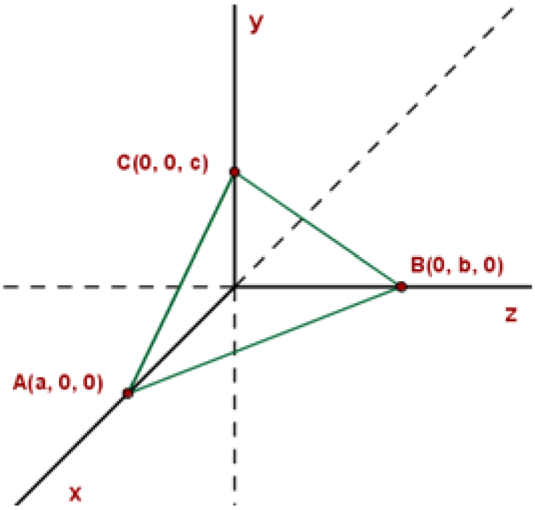
Recíprocamente: si conocemos la ecuación implícita de un plano $\Pi : ax + by + cz + d = 0$, sabemos que (a,b,c) es perpendicular a el plano

Planos

Plano YZ	Plano XY	Plano XZ
		
$\pi:\begin{cases} x=0 \\ y=\lambda \\ z=\mu \end{cases}$	$\pi:\begin{cases} x=\lambda \\ y=\mu \\ z=0 \end{cases}$	$\pi:\begin{cases} x=\lambda \\ y=0 \\ z=\mu \end{cases}$
dibujar3d(x=0,{color=rojo})	dibujar3d(z=0,{color=rojo})	dibujar3d(y=0,{color=rojo})

Plano YZ	Plano XY	Plano XZ
		
$\pi:\begin{cases} x=4 \\ y=\lambda \\ z=\mu \end{cases}$	$\pi:\begin{cases} x=\lambda \\ y=\mu \\ z=4 \end{cases}$	$\pi:\begin{cases} x=\lambda \\ y=4 \\ z=\mu \end{cases}$
dibujar3d(x=4,{color=rojo})	dibujar3d(z=4,{color=rojo})	dibujar3d(y=4,{color=rojo})

Ecuación canónica o segmentaria del plano



Sean los puntos A(a, 0, 0), B(0, b, 0) y C(0, 0, c), la ecuación canónica viene dada por:

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$$

$$a=\frac{-D}{A} \qquad b=\frac{-D}{B} \qquad c=\frac{-D}{C}$$

Ejercicios

1. Hallar las ecuaciones paramétricas e implícitas del plano que pasa por el punto A(1, 1, 1) y tiene como vectores directores a $\vec{u}=(1,-1,1)$ y $\vec{v}=(2,3,-1)$.

$$\begin{cases} x=1+\lambda+2\mu \\ y=1-\lambda+3\mu \\ z=1+\lambda-\mu \end{cases}$$

$$\begin{vmatrix} x-1 & 1 & 2 \\ y-1 & -1 & 3 \\ z-1 & 1 & -1 \end{vmatrix}=0$$

$$-2x+3y+5z-6=0$$

2. Hallar las ecuaciones paramétricas e implícitas del plano que pasa por los puntos A(−1, 2, 3) y B(3, 1, 4) y contiene al vector $\vec{u} = (0, 0, 1)$.

$$\overrightarrow{AB} = (3+1, 1-2, 4-3) = (4, -1, 1)$$

$$\begin{cases} x = -1 + 4\lambda \\ y = 2 - \lambda \\ z = 3 + \lambda + \mu \end{cases}$$

$$\begin{vmatrix} x+1 & 4 & 0 \\ y-2 & -1 & 0 \\ z-3 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \qquad -x - 4y + 7 = 0$$

3. Hallar las ecuaciones paramétricas e implícitas del plano que pasa por los puntos A(−1, 1, −1), B(0, 1, 1) y C(4, −3, 2).

$$\overrightarrow{AB} = (0+1, 1-1, 1+1) = (1, 0, 2)$$

$$\overrightarrow{AC} = (4+1, -3-1, 2+1) = (5, -4, 3)$$

$$\begin{cases} x = -1 + \lambda + 5\mu \\ y = 1 - 4\mu \\ z = -1 + 2\lambda + 3\mu \end{cases}$$

$$\begin{vmatrix} x+1 & 1 & 5 \\ y-1 & 0 & -4 \\ z+1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 0 \qquad 8x + 7y - 4z - 3 = 0$$

4. Sea π el plano de ecuaciones paramétricas:

$$\begin{cases} x = 1 + \lambda + \mu \\ y = 2 - \lambda + 2\mu \\ z = 4\lambda - 3\mu \end{cases}$$

Se pide comprobar si los puntos A (2, 1, 9/2) y B(0, 9, −1) pertenecen al plano.

$$\begin{vmatrix} x-1 & 1 & 1 \\ y-2 & -1 & 2 \\ z & 4 & -3 \end{vmatrix} = 0 \qquad -5x+7y+3z-9=0$$

$$-5\cdot 2+7\cdot 1+3\cdot\frac{9}{2}-9\neq 0 \qquad A\notin\pi$$

$$-5\cdot 0+7\cdot 9+3\cdot(-1)-9\neq 0 \qquad B\notin\pi$$

5. Hallar la ecuación segmentaria del plano que pasa por los puntos A(1, 1, 0), B(1, 0, 1) y C(0, 1, 1).

$$\overrightarrow{AB}=(1-1,0-1,1-0)=(0,-1,1)$$

$$\overrightarrow{AC}=(0-1,1-1,1-0)=(-1,0,1)$$

$$\begin{vmatrix} x-1 & 0 & -1 \\ y-1 & -1 & 0 \\ z & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \qquad -x-y-z+2=0$$

Dividiendo por −2 obtenemos la **ecuación segmentaria**:

$$\frac{x}{2}+\frac{y}{2}+\frac{z}{2}=1$$

6. Hallar la ecuación de la recta r, que pasa por el punto (1, 0, 0) y es perpendicular al plano x − y − z + 2 = 0.

Por ser la recta perpendicular al plano, el vector normal del plano, $\vec{n}=(1,-1,-1)$, será el vector director de la recta que pasa por el punto (1, 0, 0).

$$\frac{x-1}{1}=\frac{y}{-1}=\frac{z}{-1}$$

7. Hallar la ecuación del plano que pasa por el punto A(2, 0, 1 y contiene a la recta de ecuación:

$$\frac{x-1}{2}=\frac{y+3}{1}=\frac{z}{-1}$$

De la ecuación de la recta obtenemos el punto B y el vector $\vec{u}$.

$B(1,-3,0) \qquad \overrightarrow{AB} = (1-2,-3-0,0-1) = (-1,-3,-1)$

$A(2,0,1) \qquad \vec{u} = (2,1,-1) \qquad \overrightarrow{AB} = (-1,-3,-1)$

$$\begin{vmatrix} x-2 & 2 & -1 \\ y & 1 & -3 \\ z-1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 0 \qquad 4x - 3y + 5z - 13 = 0$$

7. POSICIONES RELATIVAS DE PLANOS Y RECTAS.

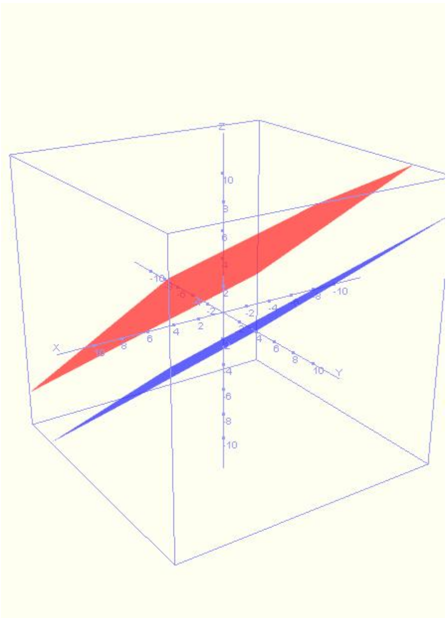
DOS PLANOS

	Rango	M	M*	**Otra forma**
$\pi : Ax+By+Cz+D=0$ $\pi' : A'x+B'y+C'z+D'=0$	**PLANOS COINCIDENTES**	1	1	Si $\frac{A}{A'}=\frac{B}{B'}=\frac{C}{C'}=\frac{D}{D'}$
		SCI 2 parámetros		
$M=\begin{pmatrix} A & B & C \\ A' & B' & C' \end{pmatrix}$	**PLANOS PARALELOS**	1	2	Si $\frac{A}{A'}=\frac{B}{B'}=\frac{C}{C'}\neq\frac{D}{D'}$
		SI		
$M^*=\begin{pmatrix} A & B & C & D \\ A' & B' & C' & D' \end{pmatrix}$	**PLANOS SECANTES** Se cortan en una recta	2	2	Si $\frac{A}{A'}\neq\frac{B}{B'}\neq\frac{C}{C'}$
		SCI 1 parámetro		

WIRIS

Planos paralelos

```
p = plano(x−3y+4z−11=0) → x−3·y+4·z−11=0
q = plano(4x−12y+16z+40=0) → x−3·y+4·z+10=0
dibujar3d(p,{color=rojo}) → tablero1
dibujar3d(q,{color=azul}) → tablero1
```



Planos secantes (se cortan en una recta)

$p = plano(x-3y+4z-11=0) \rightarrow x-3\cdot y+4\cdot z-11=0$

$dibujar3d(p,\{color=rojo\}) \rightarrow tablero1$

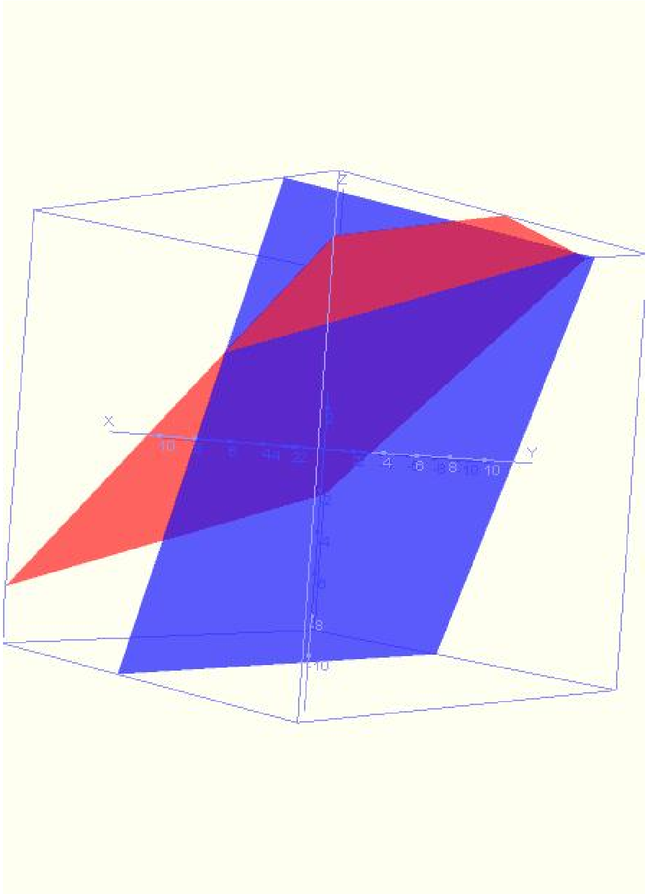
$A:=punto(5,2,-3) \rightarrow punto(5,2,-3)$

$v=[7,0,0] \rightarrow [7,0,0]$

$u=[1,2,5] \rightarrow [1,2,5]$

$q=plano(A,u,v) \rightarrow 5\cdot y-2\cdot z-16=0$

$dibujar3d(q,\{color=azul\}) \rightarrow tablero1$



UN PLANO Y UNA RECTA

		Rango	M	M*
$r:\left.\begin{array}{r} x=p_1+\lambda u_1 \\ y=p_2+\lambda u_2 \\ z=p_3+\lambda u_3 \end{array}\right\}$ $\pi:\left.\begin{array}{r} x=q_1+\mu v_1+\alpha w_1 \\ y=q_2+\mu v_2+\alpha w_2 \\ z=q_3+\mu v_3+\alpha w_3 \end{array}\right\}$	$M^*=\left(\begin{array}{ccc\|c} u_1 & v_1 & w_1 & q_1-p_1 \\ u_2 & v_2 & w_2 & q_2-p_2 \\ u_3 & v_3 & w_3 & q_3-p_3 \end{array}\right)$	**RECTA CONTENIDA EN EL PLANO**	2	2
			SCI	
		RECTA Y PLANO PARALELOS	2	3
			SI	
$r:\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0 \\ A'_1x+B'_1y+C'_1z+D'_1=0 \end{cases}$ $\pi: Ax+By+Cz+D=0$	$M^*=\left(\begin{array}{ccc\|c} A_1 & B_1 & C_1 & D_1 \\ A'_1 & B'_1 & C'_1 & D'_1 \\ A & B & C & D \end{array}\right)$	**RECTA CORTA AL PLANO**	3	3
			SCD	

Otra forma:		
$r:\left.\begin{array}{r} x=p_1+\lambda u_1 \\ y=p_2+\lambda u_2 \\ z=p_3+\lambda u_3 \end{array}\right\}$	$\pi: Ax+By+Cz+D=0$	
Se sustituyen las coordenadas del punto genérico de la recta en la ecuación del plano: $A(p_1+\lambda u_1)+B(p_2+\lambda u_2)+C(p_3+\lambda u_3)+D=0 \Rightarrow a\lambda=b$		
$a\lambda=b\rightarrow$	$a\neq 0\rightarrow SCD\rightarrow$ Solución única	**SE CORTAN**
	$a=0, b\neq 0\rightarrow SI\rightarrow \nexists$ solución	**PARALELAS**
	$a=0, b=0\rightarrow SCI\rightarrow$ Infinitas soluciones	**CONTENIDA**

Una recta r (de vector dirección $\vec{d}$) es paralela o está contenida en un plano π de vector normal n cuando $\vec{d}\perp\vec{n}$, y solo en este caso $\vec{d}\cdot\vec{n}=0$.

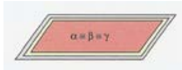
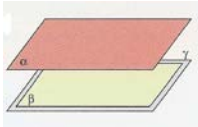
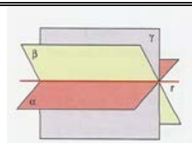
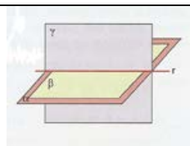
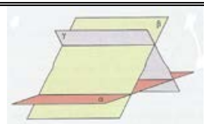
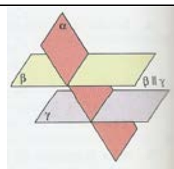
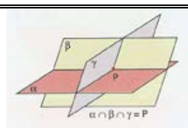
POSICIONES RELATIVAS DE TRES PLANOS

<table>
<tr><th rowspan="2"></th><th colspan="2">Rango</th><th rowspan="2"></th><th rowspan="2"></th></tr>
<tr><th>M</th><th>M*</th></tr>
<tr><td rowspan="8">$\pi : Ax + By + Cz + D = 0$

$\alpha : A'x + B'y + C'z + D' = 0$

$\beta : A''x + B''y + C''z + D'' = 0$

$M = \begin{pmatrix} A & B & C \\ A' & B' & C' \\ A'' & B'' & C'' \end{pmatrix}$

$M^* = \left(\begin{array}{ccc|c} A & B & C & D \\ A' & B' & C' & D' \\ A'' & B'' & C'' & D'' \end{array}\right)$</td><td>1</td><td>1
SCI</td><td>**TRES PLANOS COINCIDENTES**</td><td></td></tr>
<tr><td rowspan="2">1</td><td rowspan="2">2
SI</td><td>**TRES PLANOS PARALELOS**</td><td></td></tr>
<tr><td>**DOS PLANOS COINCIDENTES Y PARALELOS A UN TERCERO**</td><td></td></tr>
<tr><td rowspan="2">2</td><td rowspan="2">2
SCI</td><td>**TRES PLANOS SE CORTAN EN UNA RECTA**</td><td></td></tr>
<tr><td>**DOS PLANOS COINDICENTES CORTAN A UN TERCERO**</td><td></td></tr>
<tr><td rowspan="2">2</td><td rowspan="2">3
SI</td><td>**TRES PLANOS SE CORTAN DOS A DOS**</td><td></td></tr>
<tr><td>**DOS PLANOS PARALELOS CORTADOS POR UN TERCERO**</td><td></td></tr>
<tr><td>3</td><td>3
SCD</td><td>**TRES PLANOS SE CORTAN EN UN PUNTO**</td><td></td></tr>
<tr><td colspan="5">***Cuando al estudiar los rangos nos encontramos con dos posibles posiciones de los planos, tenemos que estudiar las posiciones de los planos dos a dos para comprobar cuál de las dos opciones se está dando.***</td></tr>
</table>

AUTOEVALUACIÓN

1 **Conociendo $A(-4, 3, 3)$ y $B(6, 3, -2)$, calcula:**

a) El punto medio de AB.

b) El punto simétrico de B respecto de A.

c) El punto Q:

Resolución

a) $M_{AB} = \left(\dfrac{-4+6}{2}, \dfrac{3+3}{2}, \dfrac{3-2}{2}\right) = \left(1, 3, \dfrac{1}{2}\right)$

b) Llamamos $S(\alpha, \beta, \gamma)$ al punto simétrico de B respecto de A. Así:

$$\left.\begin{array}{lll} \dfrac{6+\alpha}{2} = -4 & \to & \alpha = -14 \\ \dfrac{3+\beta}{2} = 3 & \to & \beta = 3 \\ \dfrac{-2+\gamma}{2} = 3 & \to & \gamma = 8 \end{array}\right\} S(-14, 3, 8)$$

c) $\overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AQ} = \overrightarrow{OA} + \dfrac{2}{5}\overrightarrow{AB} = (-4, 3, 3) + \dfrac{2}{5}(10, 0, -5) = (-4, 3, 3) + (4, 0, -2) = (0, 3, 1)$

Por lo tanto, $Q(0, 3, 1)$.

2 **Dados los puntos $A(1, 3, -2)$, $B(-5, 4, 1)$ y $C(7, 2, 4)$:**

a) Determina la recta r que pasa por A y B.

b) Halla m y n para que $P(3, m, n)$ pertenezca a r.

c) Determina la ecuación del plano π que pasa por A, B y C.

d) Halla k para que $Q(k, 7, -1)$ pertenezca a π.

e) ¿Cuál es la posición relativa de r y π?

Resolución

a) $\overrightarrow{AB}(-6, 1, 3)$, $r: \begin{cases} x = 1 - 6\lambda \\ y = 3 + \lambda \\ z = -2 + 3\lambda \end{cases}$

b) Sustituyendo $P(3, m, n)$ en las ecuaciones de r:

$$\begin{cases} 3 = 1 - 6\lambda \to \lambda = \dfrac{-1}{3} \\ m = 3 + \lambda \longrightarrow m = 3 + \left(\dfrac{-1}{3}\right) = \dfrac{8}{3} \\ n = -2 + 3\lambda \longrightarrow n = -2 + 3 \cdot \left(\dfrac{-1}{3}\right) \to n = -3 \end{cases}$$

Así, $m = \dfrac{8}{3}$ y $n = -3$, luego $P\left(3, \dfrac{8}{3}, -3\right)$.

c) $\overrightarrow{AB}(-6, 1, 3)$; $\overrightarrow{AC}(6, -1, 6)$

Hallamos un vector perpendicular a $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$:

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = (-6, 1, 3) \times (6, -1, 6) = (9, 54, 0) \,//\, (1, 6, 0)$$

Por tanto, la ecuación de π será:

$$(x - 1) + 6(y - 3) + 0(z + 2) = 0$$

$$x + 6y - 19 = 0$$

- Otra forma de hacerlo sería:

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-3 & z-2 \\ -6 & 1 & 3 \\ 6 & -1 & 6 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow x + 6y - 19 = 0$$

Por supuesto, llegaríamos a la misma solución.

- Otra forma:

$$\pi\colon ax + by + cz + d = 0$$

$$\left.\begin{array}{l} A \in \pi \rightarrow \quad a + 3b - 2c + d = 0 \\ B \in \pi \rightarrow -5a + 4b + \ \ c + d = 0 \\ C \in \pi \rightarrow \quad 7a + 2b + 4c + d = 0 \end{array}\right\}$$

Resolviendo el sistema se obtiene una solución indeterminada:

$$a = \lambda \quad b = 6\lambda \quad c = 0 \quad d = -19\lambda$$

Haciendo $\lambda = 1$ se llega a la ecuación anterior:

$$x + 6y - 19 = 0$$

d) Si $Q(k, 7, -1) \in \pi$, tiene que cumplir su ecuación:

$$k + 6 \cdot 7 - 19 = 0 \Rightarrow k = -23 \rightarrow Q(-23, 7, -1) \in \pi$$

e) Como r pasa por A y B, y π pasa por A, B y C, obviamente r está contenida en π.

3 $r\colon \dfrac{x-17}{7} = \dfrac{y-1}{0} = \dfrac{z-8}{2}$ $\qquad s\colon \begin{cases} x = 15 + 4\lambda \\ y = -2 - \lambda \\ z = 19 + k\lambda \end{cases}$

Halla la posición relativa de las rectas r y s (si se cortan, di en qué punto):

a) Para $k = 2$. **b) Para $k = 5$.**

Resolución

a) $k = 2$

$$\left.\begin{array}{l} \vec{d}_r(7, 0, 2);\ R(17, 1, 8) \in r \\ \vec{d}_s(4, -1, 2);\ S(15, -2, 19) \in s \end{array}\right\} \overrightarrow{SR}(2, 3, -11)$$

Veamos el rango de estos tres vectores:

$$\begin{vmatrix} 7 & 0 & 2 \\ 4 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & -11 \end{vmatrix} = 77 + 24 + 4 - 42 = 63 \neq 0$$

Los tres vectores son linealmente independientes. Las rectas, por tanto, se cruzan.

b) $k = 5$

$$\left.\begin{array}{l} \vec{d}_r(7, 0, 2);\ R(17, 1, 8) \in r \\ \vec{d}_s(4, -1, 5);\ S(15, -2, 19) \in s \end{array}\right\} \ \overrightarrow{SR}\,(2, 3, -11)$$

Veamos el rango de estos tres vectores:

$$\begin{vmatrix} 7 & 0 & 2 \\ 4 & -1 & 5 \\ 2 & 3 & -11 \end{vmatrix} = 0$$

El vector $\overrightarrow{SR}$ depende linealmente de $\vec{d}_r$ y $\vec{d}_s$. Las rectas, por tanto, se cortan.

Expresamos r en paramétricas e igualamos coordenada a coordenada:

$$r: \begin{cases} x = 17 + 7\mu \\ y = 1 \\ z = 8 + 2\mu \end{cases} \rightarrow \left\{\begin{array}{r} 17 + 7\mu = 15 + 4\lambda \\ 1 = -2 - \lambda \\ 8 + 2\mu = 19 + 5\lambda \end{array}\right\} \text{ El sistema tiene solución: } \lambda = -3;\ \mu = -2$$

Sustituimos $\lambda = -3$ en s:

$$\left.\begin{array}{l} x = 15 + 4\,(-3) = 3 \\ y = -2 - (-3) = 1 \\ z = 19 + 5(-3) = 4 \end{array}\right\} \text{ Se cortan en el punto } (3, 1, 4)$$

Se obtiene el mismo punto sustituyendo $\mu = -2$ en las ecuaciones de r.

4 Determina las ecuaciones de la recta que corta a r y a s y es paralela a t:

$$r: \begin{cases} x = 2 + \lambda \\ y = -3 - \lambda \\ z = 6 + \lambda \end{cases} \qquad s: \begin{cases} x = 3 \\ y = \lambda \\ z = -9 - \lambda \end{cases} \qquad t: \begin{cases} x = 8 - \lambda \\ y = 5 + \lambda \\ z = -6 + 2\lambda \end{cases}$$

Resolución

Tomamos un punto genérico de r, $R(2 + \lambda, -3 - \lambda, 6 + \lambda)$, y otro de s, $S(3, \mu, -9 - \mu)$.

Forzamos al vector $\overrightarrow{RS}$ a que sea paralelo al vector director de t, $(-1, 1, 2)$, haciendo que sus coordenadas sean proporcionales.

$$\overrightarrow{RS} = (1 - \lambda, 3 + \lambda + \mu, -15 - \lambda - \mu) \mathbin{//} (-1, 1, 2)$$

$$\left\{\begin{array}{l} \dfrac{1 - \lambda}{-1} = \dfrac{3 + \lambda + \mu}{1} \\ \dfrac{1 - \lambda}{-1} = \dfrac{-15 - \lambda - \mu}{2} \end{array}\right\} \text{ La solución de este sistema es: } \lambda = -3,\ \mu = -4$$

Para $\lambda = -3$ obtenemos el punto $(-1, 0, 3)$, que pertenece a r y a la recta buscada. Por tanto, la ecuación de esta es:

$$\begin{cases} x = -1 - \lambda \\ y = \lambda \\ z = 3 + 2\lambda \end{cases}$$

5 Considera el punto $P(2, 0, 1)$ y las rectas:

$$r_1: \begin{cases} x = 1 \\ y = 5 + \lambda \\ z = 2 + 2\lambda \end{cases} \qquad r_2: \begin{cases} x = 7 - \lambda \\ y = -15 + 3\lambda \\ z = 7 \end{cases}$$

Halla una recta s que pasa por P y corta a r_1 y a r_2.

Resolución

La recta pedida, s, será la intersección de dos planos:

- π_1, que contiene a P y a r_1.
- π_2, que contiene a P y a r_2.

El vector director de la recta r_1, $\vec{d}_1(0, 1, 2)$, es paralelo al plano y el vector que va desde el punto P al punto $R_1(1, 5, 2)$ de la recta r_1, $\overrightarrow{PR}_1(-1, 5, 1)$, también lo es. Por lo tanto, el plano π_1 será:

$$\begin{vmatrix} x-2 & y & z-1 \\ -1 & 5 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 0 \to 9(x-2) + 2y - (z-1) = 0 \qquad \pi_1: 9x + 2y - z - 17 = 0$$

De la misma forma, π_2 vendrá dado así:

$$\begin{vmatrix} x-2 & y & z-1 \\ 5 & -15 & 6 \\ -1 & 3 & 0 \end{vmatrix} = 0 \to -18(x-2) - 6y = 0 \qquad \pi_2: 3x + y - 6 = 0$$

s es la intersección de los planos π_1 y π_2:

$$\left.\begin{array}{l} 9x + 2y - z - 17 = 0 \\ 3x + y \quad\;\; - 6 = 0 \end{array}\right\} \to \left.\begin{array}{l} x = \lambda \\ y = 6 - 3\lambda \\ z = -5 + 3\lambda \end{array}\right\}$$

6 Describe y representa cada una de las siguientes figuras:

a) $y = 3$ **b)** $\begin{cases} x = 0 \\ y = 3 \\ z = \lambda \end{cases}$ **c)** $\begin{cases} x = 0 \\ y = 3 \\ z = 0 \end{cases}$ **d)** $\begin{cases} x = 0 \\ z = 0 \end{cases}$ **e)** $\begin{cases} x = \lambda \\ y = \mu \\ z = 0 \end{cases}$ **f)** $x = y = z$

Resolución

a) Plano

b) Recta

c) Punto

d) Recta

e) Plano

f) Recta