TEMA 5. VECTORES EN EL ESPACIO

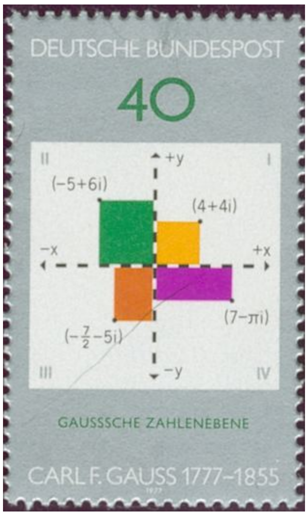
ÍNDICE

1. INTRODUCCIÓN

El concepto de vector fue utilizado desde finales del siglo XVII para representar y componer magnitudes con dirección y sentido, como son la fuerza y la velocidad.

A finales del siglo XVIII, **Lagrange** introdujo las coordenadas, con lo que aritmétizo las magnitudes vectoriales.

Joseph Louis Lagrange



Gauss utilizó los vectores para representar los números complejos.

Möbius (en 1827) se valió de los vectores para resolver problemas geométricos, dando también sentido a las coordenadas.

Entre 1832 y 1837, **Bellavitis** desarrolló un álgebra de vectores, equivalente al actual cálculo vectorial.

Hamilton, (1805-1865) utiliza por primera vez el nombre del vector.

Finalmente, **Grassmann,** entre 1844 y 1878, amplió la teoría de vectores, generalizándola a espacios n-dimensionales y definiendo los productos interno y externo de vectores.

2. VECTORES EN EL ESPACIO.

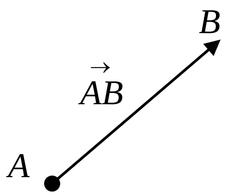
2.1. *Condiciones iniciales.*

Vector $\vec{AB}$. Origen A, extremo B.

$\left|\vec{AB}\right|$ = **Módulo** de $\vec{AB}$. Distancia de A a B.

Dirección de $\vec{AB}$ es la de la recta sobre la que están A y B y la de todas las rectas paralelas a ella.

Cada dirección admite dos **sentidos** opuestos: de A a B y de B a A.



2.2. *Producto de un vector por un número.*

DEF: El producto de un escalar $\lambda \neq 0$ por un vector $\vec{v}$ es otro vector $k \cdot \vec{v}$

a) $\left|k \cdot \vec{v}\right| = |k| \cdot \left|\vec{v}\right|$

b) Dado un vector $\vec{v} \rightarrow -\vec{v}$ es el opuesto de $\vec{v}$

2.3. *Vectores unitarios.*

DEF: Un vector es unitarios cunado su módulo es 1.

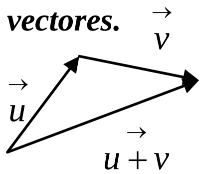
a) Dado un vector $\vec{v} \rightarrow \frac{1}{\left|\vec{v}\right|}\vec{v}$ es un vector unitario con la misma dirección y el mismo sentido que $\vec{v}$.

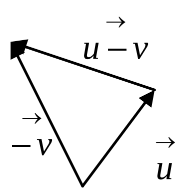
b) Dado un vector $\vec{v} \rightarrow \frac{-1}{\left|\vec{v}\right|}\vec{v}$ es un vector unitario con la misma dirección y el mismo sentido que $\vec{v}$.

2.4. *Suma y resta de vectores.*

$\vec{u} + \vec{v}$

$\vec{u} - \vec{v} = \vec{u} + \left(-\vec{v}\right)$





2.5. *Propiedades de las operaciones con vectores.*

Suma de vectores

1. Propiedad asociativa: $\left(\vec{u}+\vec{v}\right)+\vec{w}=\vec{u}+\left(\vec{v}+\vec{w}\right)$
2. Conmutativa: $\vec{u}+\vec{v}=\vec{v}+\vec{u}$
3. Vector nulo: $\vec{v}+\vec{0}=\vec{0}+\vec{v}$
4. Vector opuesto: $\vec{v}+\left(-\vec{v}\right)=\vec{0}$

Producto de escalares por vectores

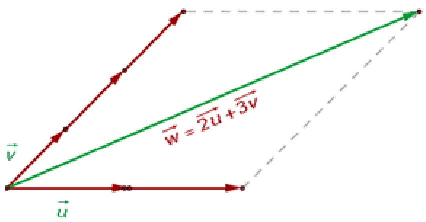
5. Propiedad asociativa: $a\cdot\left(b\cdot\vec{v}\right)=a\cdot b\cdot\vec{v}$
6. Distributiva I : $(a+b)\vec{v}=a\cdot\vec{v}+b\cdot\vec{v}$
7. Distributiva II: $(a+b)\vec{v}=a\cdot\vec{v}+b\cdot\vec{v}$
8. Producto por 1: $1\cdot\vec{v}=\vec{v}$

Todas las propiedades le confieren al conjunto de todos los vectores la estructura de ESPACIO VECTORIAL.

3. EXPRESIÓN ANALÍTICA DE UN VECTOR.

DEF: Dados los vectores $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3 ......, \vec{u}_2 \in V$ y los escalares $a_1, a_2, a_3 ...., a_n \in \Re$ llamamos **combinación lineal** al vector resultante:

$$\vec{v}=a_1\vec{u}_1+a_2\vec{u}_2+a_3\vec{u}_3+......+a_n\vec{u}_n$$



Cualquier vector se puede poner cómo combinación lineal de otros que tengan distinta dirección. $\vec{w}=2\vec{u}+3\vec{v}$. Esta combinación lineal es única.

DEF: Una combinación lineal es linealmente independiente si $a_1 = a_2 = a_3 = ... = a_n = 0$

DEF: Una combinación lineal es linealmente dependiente si alguno de los escalares $a_1, a_2, a_3 ...., a_n \in \Re$ es diferente de cero.

<u>**Ejemplo:**</u> Las cuaternas $(-4,9,34,18),(-2,5,8,4),(1,7,3,-1)$ y $(0,5,-1,-2)$ son dependientes porque $3(-2,5,8,4)+2(1,7,3,-1)-4(0,5,-1,-2)=(-4,9,34,18)$ y por tanto la cuaterna $(-4,9,34,18)$ es Combinación lineal del resto.

<u>**Ejemplo:**</u> Las cuaternas $(1,0,0,0),(0,1,0,0),(0,0,1,0)$ y $(0,0,0,1)$ son linealmente independientes porque ninguna de ellas se puede poner como combinación lineal de las demás.

<u>BASE</u>

Vectores coplanarios, son vectores que están en el mismo plano y son linealmente dependientes, pero tres **vectores no coplanarios** son independientes.

Tres vectores no coplanarios cualesquiera forman una **base** del espacio vectorial tridimensional.

$$B = \left(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}\right)$$

Si los tres vectores son perpendiculares entre sí, se dice que forman una base ortogonal. Si además tienen la misma longitud (se toma la unidad), se dice que la base es ortonormal.

<u>Coordenada de un vector respecto de una base</u>

Dada una base, $B = \left(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}\right)$, cualquier vector, $\vec{v}$, se puede poner de forma única como combinación lineal de sus elementos:

$$\vec{v} = a\vec{x} + b\vec{y} + c\vec{z}$$

donde:

$\vec{v} = (a,b,c)$ son las coordenadas del vector respecto la base.

Coordenadas de $B = \left(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}\right)$ son: $\vec{x} = (1,0,0)\, \vec{y} = (0,1,0), \vec{z} = (0,0,1)$

Operaciones con coordenadas:

Suma de vectores

Para sumar dos vectores se suman sus respectivas componentes.

$\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$ $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$

$$\boxed{\vec{u} + \vec{v} = (u_1 + v_1, u_2 + v_2, u_3 + v_3)}$$

El producto de un número real k $\in \mathbb{R}$ por un vector $\vec{u}$ es otro vector:

$$k \cdot \vec{u} = (ku_1, ku_2, ku_3)$$

PRODUCTO ESCALAR DE VECTORES.

3.1. *Productor escalar. Propiedades.*

El **producto escalar** de dos vectores es un número real que resulta al multiplicar el producto de sus módulos por el coseno del ángulo que forman.

$$\boxed{\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \cos \alpha}$$

Expresión analítica del producto escalar

$$\boxed{\vec{u} \cdot \vec{v} = u_1 . v_1 + u_2 . v_2 + u_3 . v_3}$$

Ejemplo

Hallar el producto escalar de dos vectores cuyas coordenadas en una base ortonormal son: (1, 1/2, 3) y (4, −4, 1).

(1, 1/2, 3) · (4, −4, 1) = 1 · 4 + (1/2) · (−4) + 3 · 1 = 4 −2 + 3 = 5

Vectores ortogonales

Dos vectores son ortogonales si su producto escalar es 0.

$$\boxed{\vec{u} \cdot \vec{v} = 0 u_1 . v_1 + u_2 . v_2 + u_3 . v_3 = 0}$$

Ejemplo: Calcular los valores x e y para que el vector (x, y, 1) sea ortogonal a los vectores (3, 2, 0) y (2, 1, −1).

$$(x, y, 1) \perp (3, 2, 0) \qquad 3x + 2y = 0$$

$$(x, y, 1) \perp (2, 1, -1) \qquad 2x + y - 1 = 0$$

$$x = 2 \qquad y = -3$$

3.2. *Módulo, ángulo y proyección. Interpretación geométrica.*

Expresión analítica del módulo de un vector

$$\boxed{|\vec{u}| = \sqrt{\vec{u} \cdot \vec{u}} = \sqrt{u_1 \cdot u_1 + u_2 \cdot u_2 + u_3 \cdot u_3} = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2}}$$

Ejemplo: Hallar el valor del módulo de un vector de coordenadas $\vec{u}$ = (−3, 2, 5) en una base ortonormal.

$$|\vec{u}| = \sqrt{(-3)^2 + 2^2 + 5^2} = \sqrt{9+4+25} = \sqrt{38}$$

Expresión analítica del ángulo de dos vectores

$$\boxed{\vec{u}\cdot\vec{v} = |\vec{u}|\cdot|\vec{v}|\cdot\cos\alpha}$$

$$\boxed{\cos\alpha = \frac{u_1 . v_1 + u_2 . v_2 + u_3 . v_3}{\sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2}\cdot\sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2}}}$$

Ejemplo: Determinar el ángulo que forman los vectores $\vec{u}$ = (1, 2, −3) y $\vec{v}$ = (−2, 4, 1).

$$\cos\alpha = \frac{-2+8-3}{\sqrt{1+4+9}\sqrt{4+16+1}} = \frac{3}{\sqrt{14}\sqrt{21}} = \frac{3}{7\sqrt{6}}$$

$$\alpha = \text{arc}\cos\left(\frac{3}{7\sqrt{6}}\right) = 79.92°$$

Propiedades del producto escalar

1. **Conmutativa**

$$\boxed{\vec{u}\cdot\vec{v} = \vec{v}\cdot\vec{u}}$$

2. **Asociativa**

$$\boxed{k\cdot(\vec{u}\cdot\vec{v}) = (k\cdot\vec{u})\cdot\vec{v}}$$

3. **Distributiva**

$$\boxed{\vec{u}\cdot(\vec{v}+\vec{w}) = \vec{u}\cdot\vec{v} + \vec{u}\cdot\vec{w}}$$

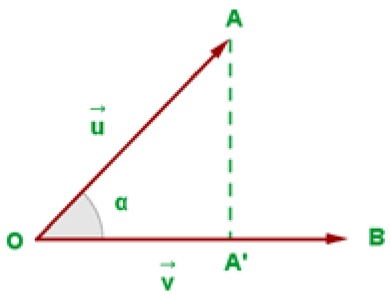
4. El producto escalar de un vector no nulo por sí mismo siempre es positivo.

$$\boxed{\vec{u} \neq 0 \Rightarrow \vec{u} \cdot \vec{u} > 0}$$

Interpretación geométrica del producto escalar

El producto escalar de dos vectores no nulos es igual al módulo de uno de ellos por la proyección del otro sobre él.

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \left|\vec{u}\right| \cdot \left|\vec{v}\right| \cdot \cos\left(\vec{u}, \vec{v}\right)$$



Por otra parte, tenemos:

$$\cos\left(\vec{u}, \vec{v}\right) = \frac{OA'}{\left|\vec{u}\right|} \quad \rightarrow \quad OA' = \left|\vec{u}\right| \cdot \cos\left(\vec{u}, \vec{v}\right)$$

Y como: $\vec{u} \cdot \vec{v} = \left|\vec{u}\right| \cdot \left|\vec{v}\right| \cdot \cos\left(\vec{u}, \vec{v}\right)$

nos queda:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \left|\vec{u}\right| \cdot \left|\vec{v}\right| \cdot \cos\left(\vec{u}, \vec{v}\right) = \left|\vec{v}\right| \cdot OA'$$

$OA' = \dfrac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\left|\vec{v}\right|}$ a lo que llamamos proyección de $\vec{u}$ sobre $\vec{v}$

OA' es la proyección del vector $\vec{u}$ sobre $\vec{v}$, que lo denotamos como:

$$\boxed{\operatorname{Proy}_{\vec{u}} \vec{v} = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\left|\vec{v}\right|}}$$

Y la proyección del vector $\vec{v}$ sobre $\vec{u}$, es:

$$\boxed{\operatorname{Proy}_{\vec{v}} \vec{u} = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\left|\vec{u}\right|}}$$

Ejemplo:

Dados los vectores

$\vec{u} = (2, -3, 5) \quad \vec{v} = (6, -1, 0)$

hallar:

1. Los módulos de $\vec{u}$ y $\vec{v}$.

$$\left|\vec{u}\right| = \sqrt{2^2 + (-3)^2 + 5^2} = \sqrt{38}$$
$$\left|\vec{v}\right| = \sqrt{6^2 + (-1)^2 + 0^2} = \sqrt{37}$$

2. El producto escalar de $\vec{u}$ y $\vec{v}$.

$\vec{u} \cdot \vec{v} = 2 \cdot 6 + (-3) \cdot (-1) + 5 \cdot 0 = 15$

3. El ángulo que forman.

$$\cos\left(\widehat{\vec{u},\vec{v}}\right) = \frac{15}{\sqrt{38}\sqrt{37}} = 0.4$$

$$\left(\widehat{\vec{u},\vec{v}}\right) = \text{arc}\cos 0.4 = 66.42°$$

4. La proyección del vector $\vec{u}$ sobre $\vec{v}$.

$$\text{Proy}_{\vec{u}}\vec{v} = \frac{15}{\sqrt{37}}$$

5. La proyección del vector $\vec{v}$ sobre $\vec{u}$.

$$\text{Proy}_{\vec{v}}\vec{u} = \frac{15}{\sqrt{38}}$$

6. El valor de m para que los vectores $\vec{u} = (2, -3, 5)$ y $(m, 2, 3)$ sean ortogonales.

$$2m - 6 + 15 = 0 \qquad m = -\frac{9}{2}$$

Cosenos directores

En una base ortonormal, se llaman cosenos directores del vector $\vec{u}$ = (x, y, z), a los cosenos de los ángulos que forma el vector $\vec{u}$ con los vectores de la base.

$$\cos\alpha = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

$$\cos\beta = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

$$\cos\gamma = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$$

Ejemplo

Determinar los cosenos directores del vector (1, 2, −3).

$$\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{1^2+2^2+(-3)^2}} = \frac{1}{\sqrt{14}}$$

$$\cos\beta = \frac{2}{\sqrt{1^2+2^2+(-3)^2}} = \frac{2}{\sqrt{14}}$$

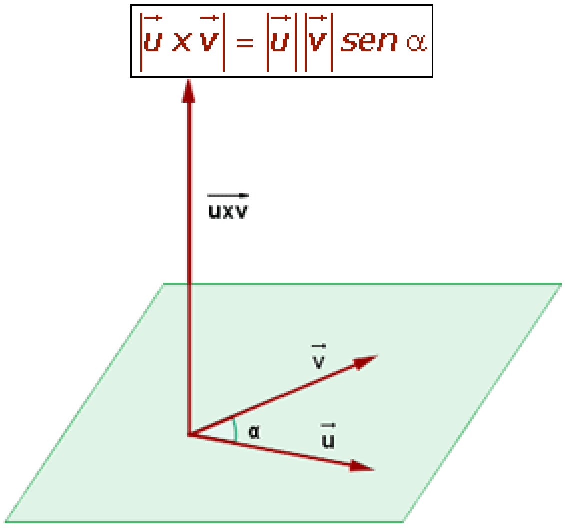
$$\cos\gamma = \frac{-3}{\sqrt{1^2+2^2+(-3)^2}} = \frac{-3}{\sqrt{14}}$$

$$\left(\frac{1}{\sqrt{14}}\right)^2 + \left(\frac{2}{\sqrt{14}}\right)^2 + \left(\frac{-3}{\sqrt{14}}\right)^2 = \frac{1}{14} + \frac{4}{14} + \frac{9}{14} = 1$$

4. PRODUCTO VECTORIAL.

4.1. *Producto vectorial.*

El **producto vectorial** de dos vectores es otro vector cuya dirección es **perpendicular** a los dos vectores y su sentido sería igual al avance de un **sacacorchos** al girar de u a v. Su módulo es igual a:



El producto vectorial se puede expresar mediante un determinante:

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix}\vec{i} - \begin{vmatrix} u_1 & u_3 \\ v_1 & v_3 \end{vmatrix}\vec{j} + \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix}\vec{k}$$

__Ejemplos__

1. Calcular el producto vectorial de los vectores $\vec{u} = (1, 2, 3)$ y $\vec{v} = (-1, 1, 2)$.

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}\vec{i} - \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}\vec{j} + \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}\vec{k} =$$

$$= \vec{i} - 5\vec{j} + \overline{3k}$$

2. Dados los vectores $\vec{u} = 3\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$ y $\vec{v} = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$, hallar el producto vectorial de dichos vectores. Comprobar que el vector hallado es ortogonal a $\vec{u}$ y $\vec{v}$.

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \vec{k} = -2\vec{i} - 2\vec{j} + 4\vec{k}$$

$$\left(\vec{u} \times \vec{v}\right) \perp \vec{u} \qquad (-2,-2,4)\cdot(3,-1,1) = -6+2+4 = 0$$

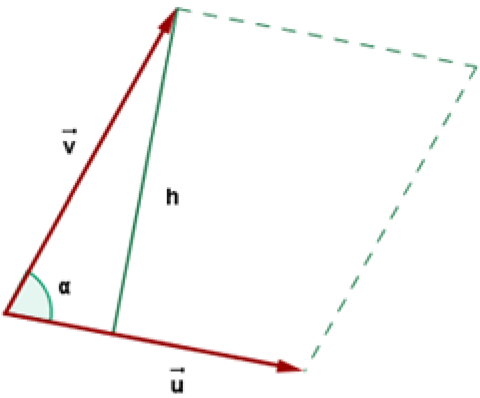
$$\left(\vec{u} \times \vec{v}\right) \perp \vec{v} \qquad (-2,-2,4)\cdot(1,1,1) = -2-2+4 = 0$$

El producto vectorial de $\vec{u} \times \vec{v}$ es ortogonal a los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$.

Área del paralelogramo

Geométricamente, el módulo del producto vectorial de dos vectores coincide con el área del paralelogramo que tiene por lados a esos vectores.

$$\boxed{A = \left|\vec{u}\right| \cdot h = \left|\vec{u}\right| \left|\vec{v}\right| \operatorname{sen} \alpha = \left|\vec{u} \times \vec{v}\right|}$$



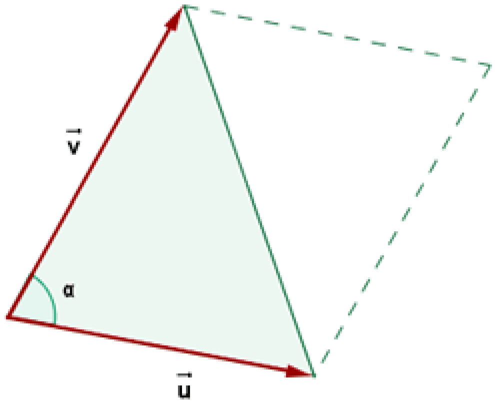
Ejemplo

Dados los vectores $\vec{u} = (3, 1, -1)$ y $\vec{v} = (2, 3, 4)$, hallar el área del paralelogramo que tiene por lados los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$.

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} \vec{k} = 7\vec{i} - 14\vec{j} + 7\vec{k}$$

$$A = \left|\vec{u} \times \vec{v}\right| = \sqrt{7^2 + 14^2 + 7^2} = \sqrt{294}\, u^2$$

Área de un triángulo



$$A = \frac{1}{2}\left|\vec{u} \times \vec{v}\right|$$

Ejemplo

Determinar el área del triángulo cuyos vértices son los puntos A(1, 1, 3), B(2, −1, 5) y C(−3, 3, 1).

$\overrightarrow{AB} = (1, -2, 2)$ $\qquad$ $\overrightarrow{AC} = (-4, 2, -2)$

$$\vec{w} = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -2 & 2 \\ -4 & 2 & -2 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} -2 & 2 \\ 2 & -2 \end{vmatrix}\vec{i} - \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -4 & -2 \end{vmatrix}\vec{j} + \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -4 & 2 \end{vmatrix}\vec{k} = 0\vec{i} - 6\vec{j} - 6\vec{k}$$

$$\vec{w} = (0, -6, -6)$$

$$\left|\vec{w}\right| = \sqrt{0^2 + (-6)^2 + (-6)^2} = 6\sqrt{2}$$

$$A = \frac{1}{2} \cdot 6\sqrt{2} = 3\sqrt{2}\, u^2$$

4.2. *Propiedades del producto vectorial.*

1. Anticonmutativa

$\vec{u} \times \vec{v} = -\vec{v} \times \vec{u}$

2. Homogénea

$\lambda\,(\vec{u} \times \vec{v}) = (\lambda\vec{u}) \times \vec{v} = \vec{u} \times (\lambda\vec{v})$

3. Distributiva

$\vec{u} \times (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \times \vec{v} + \vec{u} \times \vec{w}$.

4. El producto vectorial de dos vectores paralelos en igual al vector nulo.

$\vec{u} \parallel \vec{v} \qquad \vec{u} \times \vec{v} = \vec{0}$

5. El producto vectorial $\vec{u} \times \vec{v}$ es perpendicular a $\vec{u}$ y a $\vec{v}$.

5. PRODUCTO MIXTO DE TRES VECTORES.

5.1. *Producto mixto. Definición.*

El **producto mixto** de los vectores $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$ es igual al producto escalar del primer vector por el producto vectorial de los otros dos.

El producto mixto se representa por [$\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$].

$$\boxed{\left[\vec{u},\vec{v},\vec{w}\right] = \vec{u}\cdot\left(\vec{v}\times\vec{w}\right)}$$

El producto mixto de tres vectores es igual al determinante que tiene por filas las coordenadas de dichos vectores respecto a una base ortonormal.

$$\boxed{\left[\vec{u},\vec{v},\vec{w}\right] = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix}}$$

<u>**Ejemplos**</u>

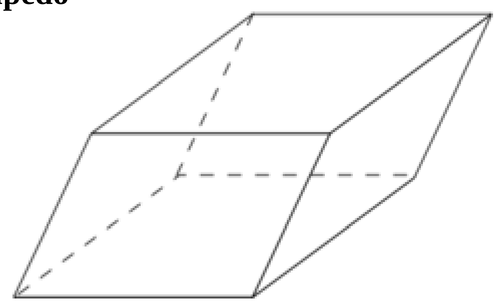
1. Calcular el producto mixto de los vectores:

$\vec{u} = (2, -1, 3) \quad \vec{v} = (0, 2, -5) \quad \vec{w} = (1, -1, -2)$

$$\vec{v}\times\vec{w} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 2 & -5 \\ 1 & -1 & -2 \end{vmatrix} = -9\vec{i} - 5\vec{j} - 2\vec{k}$$

$$\vec{u}\cdot\left(\vec{v}\times\vec{w}\right) = (2,-1,3)\cdot(-9,-5,-2) = -18+5-6 = -19$$

Volumen del paralelepípedo



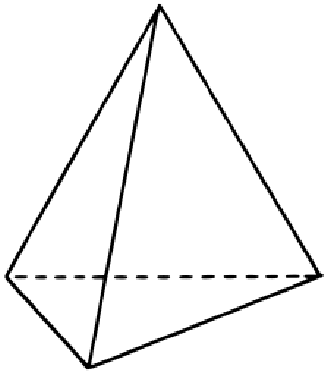
El valor absoluto del producto mixto representa el volumen del paralelepípedo cuyas aristas son tres vectores que concurren en un mismo vértice.

2. Hallar el volumen del paralelepípedo formado por los vectores:

$\vec{u} = (3, -2, 5)$ $\vec{v} = (2, 2, -1)$ $w = (-4, 3, 2)$

$$V = \left[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\right] = \begin{vmatrix} 3 & -2 & 5 \\ 2 & 2 & -1 \\ -4 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 91u^3$$

Volumen de un tetraedro



El volumen de un tetraedro es igual a 1/6 del producto mixto, en valor absoluto.

$$V = \frac{1}{6}\begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix}$$

3. Obtener el volumen del tetraedro cuyos vértices son los puntos A(3, 2, 1), B(1, 2, 4), C(4, 0, 3) y D(1, 1, 7).

$\overrightarrow{AB} = (1-3, 2-2, 4-1) = (-2, 0, 3)$

$\overrightarrow{AC} = (4-3, 0-2, 3-1) = (1, -2, 2)$

$\overrightarrow{AD} = (1-3, 1-2, 7-1) = (-2, -1, 6)$

$$V = \frac{1}{6}\left|\left[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\right]\right|$$

$$\left[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\right] = \begin{vmatrix} -2 & 0 & 3 \\ 1 & -2 & 2 \\ -2 & -1 & 6 \end{vmatrix} = 24 - 3 - 12 - 4 = 5$$

$$V = \frac{1}{6} \cdot 5 = \frac{5}{6}u^3$$

5.2. *Propiedades del producto mixto.*

1. El producto mixto no varía si se permutan circularmente sus factores, pero cambia de signo si éstos se trasponen.

$$\left[\vec{u},\vec{v},\vec{w}\right]=\left[\vec{v},\vec{w},\vec{u}\right]=\left[\vec{w},\vec{u},\vec{v}\right]$$
$$\left[\vec{u},\vec{v},\vec{w}\right]=-\left[\vec{v},\vec{u},\vec{w}\right]=-\left[\vec{u},\vec{w},\vec{v}\right]=-\left[\vec{w},\vec{v},\vec{u}\right]$$

2. Si tres vectores son linealmente dependientes, es decir, si son coplanarios, producto mixto vale 0.