

# SOLUCIONES

Evaluación

Fecha

**Ejercicio nº 1.-**

a) Calcula, utilizando la definición de logaritmo:

$$\log_3 \frac{1}{9} - \log_3 \sqrt{3} + \log_3 81$$

b) Calcula el valor de  $x$ , aplicando las propiedades de los logaritmos:

$$\log x = \log 102 - \log 34$$

**Solución:**

$$a) \log_3 3^{-2} - \log_3 3^{1/2} + \log_3 3^4 = -2 - \frac{1}{2} + 4 = \frac{3}{2}$$

$$b) \log x = \log \frac{102}{34} \Rightarrow x = \frac{102}{34} = 3$$

**Ejercicio nº 2.-**

a) Halla el término general de la sucesión:

2; 4,2; 8,82; 18,522; ...

b) Obtén el criterio de formación de la siguiente sucesión recurrente:

5, -1, 4, 3, 7, ...

**Solución:**

a) Es una progresión geométrica con  $a_1 = 2$  y  $r = 2,1$ . Por tanto:

$$a_n = 2 \cdot (2,1)^{n-1}$$

b) Cada término, a partir del tercero, se obtiene sumando los dos anteriores:

$$a_1 = 5, a_2 = -1, a_n = a_{n-1} + a_{n-2} \text{ para } n > 2$$

### **Ejercicio nº 3.-**

**Resuelve:**

a)  $1 - x = \sqrt{7 - 3x}$

b)  $x^2 + 3x \leq 0$

c)  $2^{x+2} + 2^x - 5 = 0$

**Solución:**

a)

$$(1-x)^2 = 7-3x \rightarrow 1+x^2-2x = 7-3x \rightarrow x^2+x-6 = 0 \rightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{1+24}}{2} \begin{cases} x = 2 \text{ (no vale)} \\ x = -3 \end{cases}$$

b)

$$x(x+3) \leq 0 \begin{cases} \begin{cases} x \leq 0 \\ x+3 \geq 0 \\ x \geq 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x \leq 0 \\ x \geq -3 \\ x \geq 0 \end{cases} \rightarrow \text{Intervalo } [-3, 0] \\ \begin{cases} x+3 \leq 0 \\ x \geq 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x \leq -3 \\ x \geq 0 \end{cases} \rightarrow \text{Imposible} \end{cases}$$

c)

$$2^x \cdot 2^2 + 2^x - 5 = 0$$

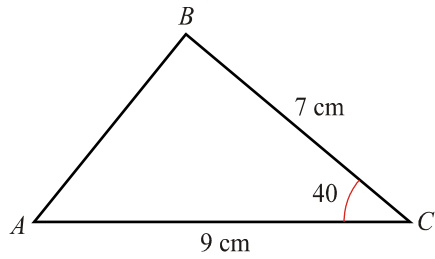
$$4 \cdot 2^x + 2^x - 5 = 0$$

$$5 \cdot 2^x - 5 = 0$$

$$2^x = 1 \Rightarrow x = 0$$

### **Ejercicio nº 4.-**

**Calcula los lados y los ángulos del triángulo ABC:**



**Solución:**

- Aplicamos el teorema del coseno para hallar el lado  $c$ :

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\hat{C}$$

$$c^2 = 49 + 81 - 2 \cdot 7 \cdot 9 \cdot \cos 40^\circ$$

$$c^2 = 49 + 81 - 96,52$$

$$c^2 = 33,48$$

$$c = 5,79 \text{ cm}$$

- Aplicamos el teorema de los senos para hallar el ángulo  $\hat{A}$ :

$$\frac{a}{\text{sen}\hat{A}} = \frac{c}{\text{sen}\hat{C}} \rightarrow \frac{7}{\text{sen}\hat{A}} = \frac{5,79}{\text{sen}40^\circ} \rightarrow$$

$$\rightarrow \text{sen}\hat{A} = \frac{7\text{sen}40^\circ}{5,79} = 0,777 \Rightarrow \hat{A} = 50^\circ 59' 51''$$

- El ángulo  $\hat{B}$  lo obtenemos así:

$$\hat{B} = 180^\circ - (\hat{A} + \hat{C})$$

- Así:

$$\hat{A} = 50^\circ 59' 51''; a = 7 \text{ cm}$$

$$\hat{B} = 89^\circ 0' 9''; b = 9 \text{ cm}$$

$$\hat{C} = 40^\circ; c = 5,79 \text{ cm}$$

**Ejercicio nº 5.-**

- a) Demuestra la siguiente igualdad:

$$\frac{\cos x - \text{sen} x}{\cos x + \text{sen} x} - \frac{1}{\cos 2x} = -\text{tg} 2x$$

- b) Resuelve:

$$\text{sen}^2 x = 1 + \cos^2 x$$

**Solución:**

$$\begin{aligned} \text{a) } \frac{\cos x - \operatorname{sen} x}{\cos x + \operatorname{sen} x} - \frac{1}{\cos 2x} &= \frac{(\cos x - \operatorname{sen} x)(\cos x - \operatorname{sen} x)}{(\cos x + \operatorname{sen} x)(\cos x - \operatorname{sen} x)} - \frac{1}{\cos 2x} = \\ &= \frac{\cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x - 2\operatorname{sen} x \cos x}{\cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x} - \frac{1}{\cos 2x} = \\ &= \frac{1 - \operatorname{sen} 2x}{\cos 2x} - \frac{1}{\cos 2x} = \frac{1 - \operatorname{sen} 2x - 1}{\cos 2x} = \frac{-\operatorname{sen} 2x}{\cos 2x} = -\operatorname{tg} 2x \end{aligned}$$

$$\text{b) } \operatorname{sen}^2 x = 1 + \cos^2 x \rightarrow \operatorname{sen}^2 x = 1 + 1 - \operatorname{sen}^2 x \rightarrow 2\operatorname{sen}^2 x = 2$$

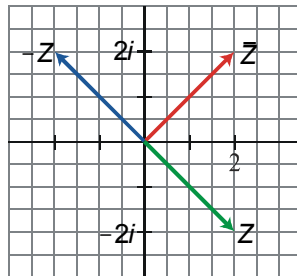
$$\operatorname{sen}^2 x = 1 \begin{cases} \operatorname{sen} x = 1 \rightarrow x_1 = 90^\circ + 360^\circ k \rightarrow x_1 = \frac{\pi}{2} + 2\pi k \\ \operatorname{sen} x = -1 \rightarrow x_2 = 270^\circ + 360^\circ k \rightarrow x_2 = \frac{3\pi}{2} + 2\pi k \end{cases} \quad \text{con } k \in \mathbf{Z}$$

**Ejercicio nº 6.-**

Representa  $z = 2 - 2i$ , su opuesto y su conjugado, y exprésalos en forma polar.

**Solución:**

- Opuesto:  $-z = -2 + 2i$ ; Conjugado:  $\bar{z} = 2 + 2i$
- Representación:



- Forma polar:

$$z = \sqrt{8}_{315^\circ} = 2\sqrt{2}_{315^\circ}; \quad -z = 2\sqrt{2}_{135^\circ}; \quad \bar{z} = 2\sqrt{2}_{45^\circ}$$

**Ejercicio nº 7.-**

Calcula:

$$\text{a) } \frac{(7 - i)i^{43}}{-2 + i}$$

$$b) \sqrt[3]{4 - 4\sqrt{3}i}$$

**Solución:**

$$\begin{aligned} a) \frac{(7-i)i^{43}}{-2+i} &= \frac{(7-i)i^3}{-2+i} = \frac{(7-i)(-i)}{-2+i} = \frac{-7i+i^2}{-2+i} = \frac{-1-7i}{-2+i} = \\ &= \frac{(-1-7i)(-2-i)}{(-2+i)(-2-i)} = \frac{2+i+14i+7i^2}{(-2)^2-i^2} = \frac{2+15i-7}{4+1} = \frac{-5+15i}{5} = \\ &= -\frac{5}{5} + \frac{15}{5}i = -1+3i \end{aligned}$$

$$b) \sqrt[3]{4 - 4\sqrt{3}i} = \sqrt[3]{8_{300^\circ}} = 2_{\frac{300^\circ+360^\circ n}{3}} = 2_{100^\circ+120^\circ n} \quad \text{para } n = 0, 1, 2$$

Las tres raíces son:

$$2_{100^\circ} = 2(\cos 100^\circ + i \operatorname{sen} 100^\circ) = -0,35 + 1,97i$$

$$2_{220^\circ} = 2(\cos 220^\circ + i \operatorname{sen} 220^\circ) = -1,53 - 1,29i$$

$$2_{340^\circ} = 2(\cos 340^\circ + i \operatorname{sen} 340^\circ) = 1,88 - 0,68i$$

### Ejercicio nº 8.-

Las coordenadas del punto medio del segmento **AB** son **(3, 2)**.

Halla **B**, sabiendo que **A(6, -1)**.

**Solución:**

- Llamamos **M** al punto medio de **AB**, así, **M(3, 2)**.
- Llamamos **B(x, y)**
- Como **M** es el punto medio de **AB**, ha de ser:

$$\left( \frac{6+x}{2}, \frac{-1+y}{2} \right) = (3, 2)$$

es decir:

$$\left. \begin{array}{l} \frac{6+x}{2} = 3 \\ \frac{-1+y}{2} = 2 \end{array} \right\} \begin{array}{l} 6+x = 6 \\ -1+y = 4 \end{array} \left\{ \begin{array}{l} x = 0 \\ y = 5 \end{array} \right.$$

Por tanto, **B(0, 5)**.

**Ejercicio nº 9.-**

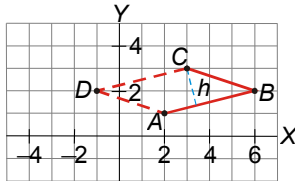
Las coordenadas de tres de los cuatro vértices del paralelogramo  $ABCD$  son  $A(2, 1)$ ,  $B(6, 2)$  y  $C(3, 3)$ .

a) Halla las coordenadas del vértice  $D$ .

b) Halla el área del paralelogramo.

**Solución:**

a)



- Para hallar  $D$ , tenemos en cuenta que:  $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD}$ .
- Si llamamos  $D(x, y)$ , tenemos que:  $(-3, 1) = (x - 2, y - 1)$
- Así:

$$\left. \begin{array}{l} -3 = x - 2 \\ 1 = y - 1 \end{array} \right\} \begin{array}{l} x = -1 \\ y = 2 \end{array} \quad \text{Las coordenadas de } D \text{ son: } D(-1, 2)$$

b) • Tomamos como base,  $b$ , el lado  $AB$ :

$$b = |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(6 - 2)^2 + (2 - 1)^2} = \sqrt{17}$$

- La altura,  $h$ , correspondiente al vértice  $C$ , es la distancia de  $C$  al lado  $AB$ .
- Hallamos la recta,  $r$ , que pasa por  $A$  y  $B$ :

$$m = \frac{2 - 1}{6 - 2} = \frac{1}{4} \rightarrow y = 1 + \frac{1}{4}(x - 2) \rightarrow 4y = 4 + x - 2 \rightarrow r: x - 4y + 2 = 0$$

• La altura será:

$$h = \text{dist}(C, r) = \frac{|3 - 4 \cdot 3 + 2|}{\sqrt{1^2 + (-4)^2}} = \frac{7}{\sqrt{17}}$$

Por tanto, el área es:

$$\text{Área} = b \cdot h = \sqrt{17} \cdot \frac{7}{\sqrt{17}} = 7 \text{ u}^2$$

**Ejercicio nº 10.-**

a) Identifica la siguiente cónica y represéntala:

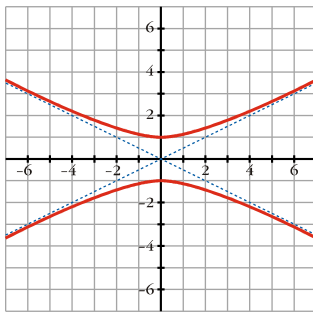
$$4y^2 - x^2 = 4$$

b) ¿Cuáles son sus focos?

**Solución:**

$$a) 4y^2 - x^2 = 4 \rightarrow \frac{y^2}{1} - \frac{x^2}{4} = 1$$

Es una hipérbola, cuya gráfica es:



$$b) \text{ Como } c^2 - a^2 = b^2, \text{ y } a = 1 \text{ y } b = 2 \rightarrow c^2 = 5 \rightarrow c = \pm\sqrt{5}$$

Los focos son  $F(0, \sqrt{5})$  y  $F'(0, -\sqrt{5})$ .

**Ejercicio nº 11.-**

Halla los siguientes límites y representa los resultados que obtengas:

$$a) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{-x^2 - x}{3x^2 + 6x + 3}$$

$$b) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x^2 - x}{3x^2 + 6x + 3}$$

$$c) \lim_{x \rightarrow -1} \frac{-x^2 - x}{3x^2 + 6x + 3}$$

**Solución:**

$$a) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{-x^2 - x}{3x^2 + 6x + 3} = \frac{-6}{27} = \frac{-2}{9}$$

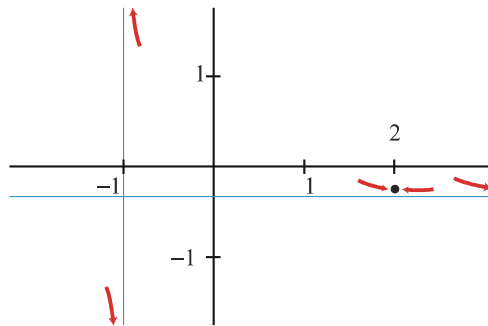
$$b) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x^2 - x}{3x^2 + 6x + 3} = -\frac{1}{3}$$

$$c) \lim_{x \rightarrow -1} \frac{-x^2 - x}{3x^2 + 6x + 3} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{-x(x+1)}{3(x+1)^2} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{-x}{3(x+1)}$$

Hallamos los límites laterales:

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{-x}{3(x+1)} = -\infty; \quad \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{-x}{3(x+1)} = +\infty$$

• Representación:



### Ejercicio nº 12.-

Halla la función derivada de cada una de las siguientes funciones:

$$a) f(x) = 3x^4 - \frac{9x^2}{3}$$

$$b) f(x) = \frac{3x^2 - 2}{x^2 - 1}$$

$$c) f(x) = xe^x$$

**Solución:**

$$a) f'(x) = 12x^3 - \frac{18x}{3}$$

$$b) f'(x) = \frac{6x(x^2 - 1) - (3x^2 - 2) \cdot 2x}{(x^2 - 1)^2} = \frac{6x^3 - 6x - 6x^3 + 4x}{(x^2 - 1)^2} = \frac{-2x}{(x^2 - 1)^2}$$

$$c) f'(x) = e^x + xe^x = e^x(1 + x)$$



**Ejercicio nº 13.-**

Dada la función :

$$f(x) = 3x^2 - x$$

- a) Escribe la ecuación de la recta tangente a la función en  $x = 1$ .  
b) Halla los tramos en los que la función crece y en los que decrece.

**Solución:**

a) •  $f'(x) = 6x - 1$

- La pendiente de la recta es  $f'(1) = 5$ .
- Cuando  $x = 1$ ,  $y = 2$ .
- La recta será:

$$y = 2 + 5(x - 1) = 2 + 5x - 5 = 5x - 3$$

b) Estudiamos el signo de la derivada:

$$6x - 1 > 0 \Rightarrow 6x > 1 \Rightarrow x > \frac{1}{6}$$

$$6x - 1 < 0 \Rightarrow 6x < 1 \Rightarrow x < \frac{1}{6}$$

- Es decreciente en  $\left(-\infty, \frac{1}{6}\right)$  y creciente en  $\left(\frac{1}{6}, +\infty\right)$ , y tiene un mínimo en  $x = \frac{1}{6}$ .

**Ejercicio nº 14.-**

Dada la función:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \leq 0 \\ 1 - x^2 & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

- a) Estudia su continuidad.  
b) Dibuja su gráfica.

**Solución:**

a) • Si  $x \neq 0$ , la función es continua.

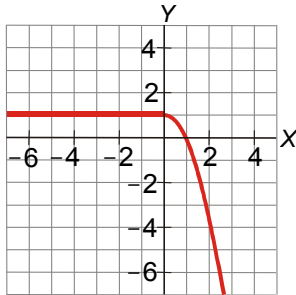
• Si  $x = 0$ :

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (1) = 1 \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (1 - x^2) = 1 \\ f(0) = 1 \end{array} \right\} \text{ También es continua en } x = 0.$$

• Es una función continua.

b) • Si  $x \leq 0$ , es un trozo de recta horizontal.

- Si  $x > 0$ , es un trozo de parábola.
- La gráfica sería:



**Ejercicio nº 15.-**

a) Dibuja la gráfica de la función:

$$f(x) = \frac{x^3}{3} - x^2 - 3x$$

b) Ayúdate de la gráfica para estudiar los siguientes aspectos de  $f(x)$ : dominio, continuidad e intervalos de crecimiento y de decrecimiento.

**Solución:**

a) •  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left( \frac{x^3}{3} - x^2 - 3x \right) = -\infty$  ;  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{x^3}{3} - x^2 - 3x \right) = +\infty$

- Puntos de corte con los ejes:

Con el eje  $X \rightarrow \frac{x^3}{3} - x^2 - 3x = 0 \rightarrow x^3 - 3x^2 - 9x = 0$

$$\rightarrow x(x^2 - 3x - 9) = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \frac{3 \pm \sqrt{9 + 36}}{2} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 4,86 \\ x = -1,85 \end{cases}$$

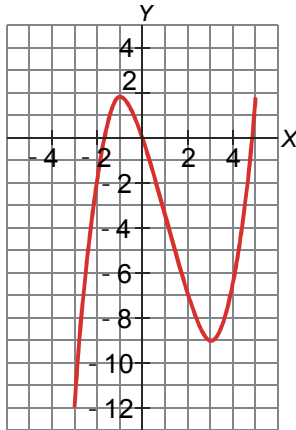
Puntos  $(0, 0)$ ;  $(4,86; 0)$  y  $(-1,85; 0)$ .

Con el eje  $Y \rightarrow x = 0 \rightarrow y = 0 \rightarrow$  Punto  $(0, 0)$

- Puntos singulares:

$$f'(x) = x^2 - 2x - 3 = 0 \rightarrow x = \frac{2 \pm \sqrt{4 + 12}}{2} = \frac{2 \pm 4}{2} \rightarrow \begin{cases} x = -1 \rightarrow \text{Punto} \left( -1, \frac{5}{3} \right) \\ x = 3 \rightarrow \text{Punto} (3, -9) \end{cases}$$

- Gráfica:



b) • Dominio =  $\mathbf{R}$

- Es una función continua.
- Creciente en  $(-\infty, -1) \cup (3, +\infty)$  y decreciente en  $(-1, 3)$ .

**Ejercicio nº 16.-**

a) Dibuja la gráfica de la función:

$$f(x) = \frac{x+1}{x^2}$$

b) Sobre la gráfica anterior, estudia la continuidad y los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de  $f(x)$ .

**Solución:**

a) • Dominio =  $\mathbf{R} - \{0\}$

- Puntos de corte con los ejes:

Con el eje  $X \rightarrow x+1=0 \rightarrow x=-1 \rightarrow$  Punto  $(-1, 0)$ .

Con el eje  $Y \rightarrow$  No corta al eje  $Y$ , pues  $x=0$  no está en el dominio.

- Asíntota vertical:  $x=0$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = +\infty ; \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$$

- Asíntota horizontal:  $y=0$

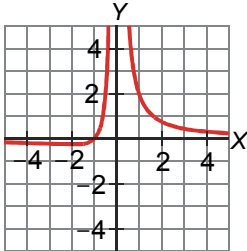
$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0 ; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$$

- Puntos singulares :

$$f'(x) = \frac{x^2 - (x+1) \cdot 2x}{x^4} = \frac{x(x-2x-2)}{x^4} = \frac{-x-2}{x^3} = 0$$

$$\Rightarrow x = -2 \rightarrow \text{Punto} \left( -2, \frac{-1}{4} \right).$$

- Gráfica :



b)

- Continuidad:

Si  $x \neq 0$ , es continua.

En  $x = 0$  es discontinua, pues tiene una rama infinita (asíntota vertical).

- Creciente en  $(-2, 0)$  y decreciente en  $(-\infty, -2) \cup (0, +\infty)$ .

### Ejercicio nº 17.-

Hemos medido la longitud del palmo de cinco alumnos y alumnas de un instituto y hemos anotado el número de calzado que usan, obteniendo los siguientes resultados:

Longitud del palmo (cm)	21	20	26	23	20
N.º Calzado	37	37	40	38	38

Halla el coeficiente de correlación y la recta de regresión para esta distribución. ¿Qué podemos decir acerca de la relación entre las dos variables?

**Solución:**

- Llamamos  $x$  a la longitud del palmo e  $y$  al número de calzado.

$x_i$	$y_i$	$x_i^2$	$y_i^2$	$x_i y_i$
21	37	441	1369	777
20	37	400	1369	740
26	40	676	1600	1040
23	38	529	1444	874
20	38	400	1444	760
110	190	2446	7226	4191

Medias:

$$\bar{x} = \frac{110}{5} = 22; \quad \bar{y} = \frac{190}{5} = 38$$

Desviaciones típicas:

$$\sigma_x = \sqrt{\frac{2446}{5} - 22^2} = \sqrt{5,2} = 2,28$$

$$\sigma_y = \sqrt{\frac{7226}{5} - 38^2} = \sqrt{1,2} = 1,10$$

Covarianza:

$$\sigma_{xy} = \frac{4191}{5} - 22 \cdot 38 = 2,2$$

- Coeficiente de correlación:  $r = \frac{2,2}{2,28 \cdot 1,10} = 0,88$

- Recta de regresión:

$$m_{yx} = \frac{2,2}{5,2} = 0,42 \rightarrow y = 38 + 0,42(x - 22) = 0,42x + 28,76$$

- Hay una relación fuerte y positiva entre las dos variables; a mayor longitud del palmo, mayor número de calzado.

### **Ejercicio nº 18.-**

**Sabiendo que:**

$$P[A' \cap B'] = 0,2; \quad P[A] = 0,3; \quad P[A \cap B] = 0,1$$

**Calcula  $P[B]$ ,  $P[A/B]$  y  $P[A \cup B]$**

**Solución:**

- $P[A' \cap B'] = P[(A \cup B)'] = 1 - P[A \cup B] = 0,2 \Rightarrow P[A \cup B] = 0,8$   
 $P[A \cup B] = P[A] + P[B] - P[A \cap B]$



$$\begin{aligned} \text{a) } P[x > 6] &= P[x = 7] + P[x = 8] = \binom{8}{7} \cdot 0,01^7 \cdot 0,99 + \binom{8}{8} \cdot 0,01^8 = \\ &= 7,92 \cdot 10^{-14} + 10^{-16} = 7,92 \cdot 10^{-14} + 0,01 \cdot 10^{-14} = 7,93 \cdot 10^{-14} \end{aligned}$$

$$\text{b) } P[x = 0] = 0,99^8 = 0,923$$

### Ejercicio nº 21.-

Las estaturas, en cm, de un grupo de personas se distribuyen según una  $N(160, 5)$ .  
Calcula, en este grupo de personas, la probabilidad de:

a) Medir más de 170 cm.

b) Medir entre 150 y 165 cm.

**Solución:**

$$x \approx N(160, 5) \rightarrow z \approx N(0, 1)$$

$$\text{a) } P[x > 170] = P\left[z > \frac{170 - 160}{5}\right] = P[z > 2] = 1 - P[z \leq 2] = 1 - 0,9772 = 0,0228$$

$$\begin{aligned} \text{b) } P[150 < x < 165] &= P\left[\frac{150 - 160}{5} < z < \frac{165 - 160}{5}\right] = \\ &= P[-2 < z < 1] = P[z < 1] - P[z < -2] = P[z < 1] - (1 - P[z \leq 2]) = \\ &= P[z < 1] + P[z \leq 2] - 1 = 0,8413 + 0,9772 - 1 = 0,8185 \end{aligned}$$

### Ejercicio nº 22.-

En un instituto hay 200 chicas y 180 chicos. Calcula la probabilidad de que en un grupo de 30 alumnas y alumnos haya mas de 20 chicos.

**Solución:**

- Si llamamos  $x =$  "nº de chicos en el grupo", tenemos que  $x$  es  $B(30; 0,47)$ , puesto que:

$$P[\text{chico}] = \frac{180}{200 + 180} = \frac{180}{380} = 0,47$$

- Tenemos que calcular  $P[x > 20]$ ; lo hacemos aproximadamente con una normal:

$$\mu = n \cdot P = 30 \cdot 0,47 = 14,1; \quad \sigma = \sqrt{npq} = 2,73$$

- Entonces:

$x$  es  $B(30; 0,47)$   $\rightarrow$   $x'$  es  $N(14,1; 2,73)$   $\rightarrow$   $z$  es  $N(0, 1)$

• Así:

$$\begin{aligned} P[x > 20] &= P[x' \geq 20,5] = P\left[z \geq \frac{20,5 - 14,1}{2,73}\right] = P[z \geq 2,34] = \\ &= 1 - P[z < 2,34] = 1 - 0,9904 = 0,0096 \end{aligned}$$