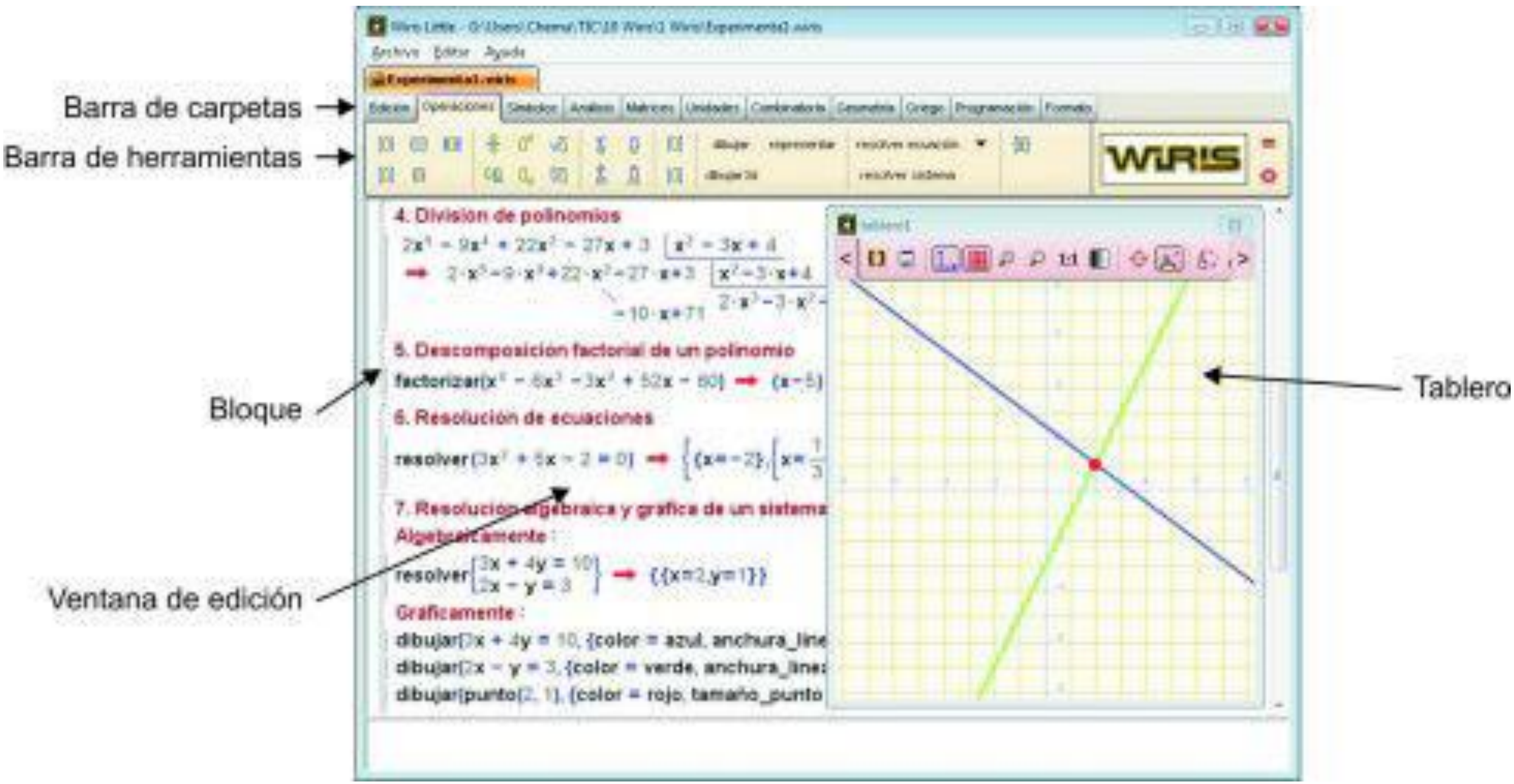
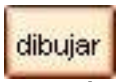
WIRIS

2º BACHILLERATO
NOVIEMBRE 2011

La ventana **Edición** es la que contiene las expresiones.



GRÁFICAS 2D

- 

dibujar
- Dibuja en el plano. Dentro del paréntesis colocamos la expresión a representar.
- **dibujar(x^3 – 4x)**
- De forma optativa podemos añadir el color y la anchura de línea entre llaves. Los colores disponibles son: negro, blanco, rojo, verde, azul, cian, magenta, amarillo, marrón, naranja, rosa y gris. Los anchos de línea son cualquier número.
- **dibujar(x^3 – 4x, {color = rojo, anchura_línea = 2})**
- Sí dibujamos un punto le podemos poner color y tamaño de punto. Los tamaños son cualquier número.
- **dibujar(punto(3, 5), {color = rojo, tamaño_punto = 10})**
-

GRÁFICAS 2D

- 

representar
- **representar(x^3 – 4x)**
- También podemos cambiar el color y el ancho de línea, con una sintaxis diferente.
- **representar(x^3 – 4x, {curva = {color = rojo, anchura_línea = 2}})**

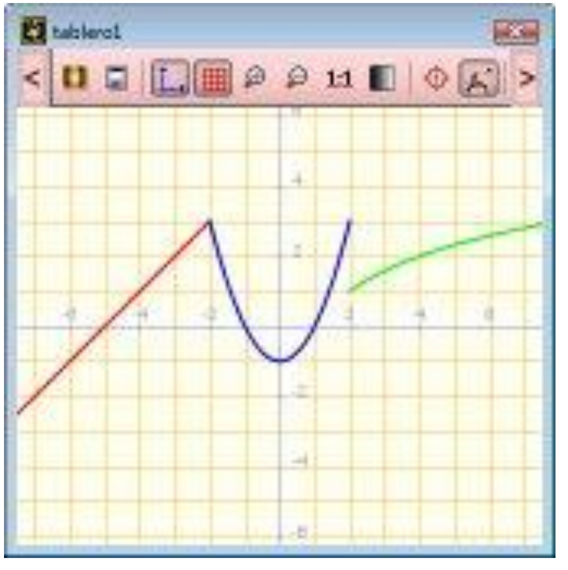
GRÁFICAS 2D

Funciones definidas por partes o a trozos :

dibujar($x + 5$, $-\infty..-2$, {color = rojo, anchura_línea = 2})

dibujar($x^2 - 1$, $-2..2$, {color = azul, anchura_línea = 2})

dibujar($\log_2 x$, $2..+\infty$, {color = verde, anchura_línea = 2})

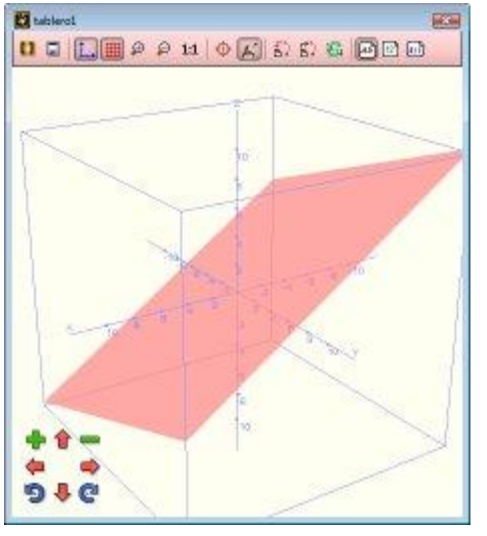


GRÁFICAS 3D:

- **dibujar3d(2x – y + 3z = 1)**
- **dibujar3d(2x – y + 3z = 1, {color = rojo})**

Plano en el espacio

dibujar3d(2x − y + 3z = 1, {color = rojo})



GRÁFICAS 3D:

dibujar(punto(3, 5), {color = rojo, tamaño_punto = 10})

Relación Álgebra − Geometría en el espacio $\mathbb{R}^3$

Álgebra :

$$\text{resolver}\begin{Bmatrix} 2x - y + 3z = 4 \\ 3x + y - z = 8 \\ x + 2y + z = 9 \end{Bmatrix} \rightarrow \{\{x=2, y=3, z=1\}\}$$

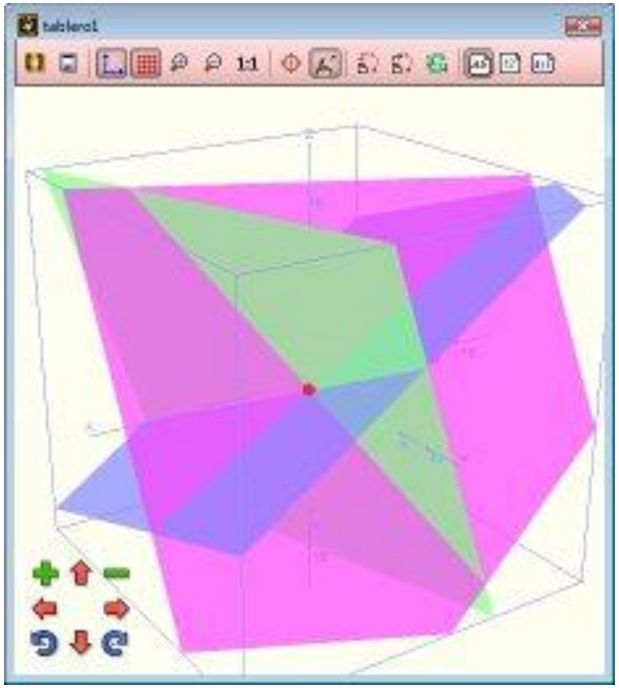
Geometría :

dibujar3d(2x − y + 3z = 4, {color = azul})

dibujar3d(3x + y − z = 8, {color = verde})

dibujar3d(x + 2y + z = 9, {color = magenta})

dibujar3d(punto(2, 3, 1), {color = rojo, tamaño_punto = 10})



GRÁFICAS 3D:

Relación Álgebra − Geometría en el espacio $\mathbb{R}^3$

Álgebra :

$$\text{resolver}\left\{\begin{matrix} x - y + z = 2 \\ x + y - 3z = 4 \\ 3x - y - z = -3 \end{matrix}\right\} \rightarrow \{\square\}$$

$$\text{rango}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -3 \\ 3 & -1 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow 2$$

$$\text{rango}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -3 & 4 \\ 3 & -1 & -1 & -3 \end{pmatrix} \rightarrow 3$$

$R(C) = 2 \neq R(A) = 3 \Rightarrow$ Sistema incompatible

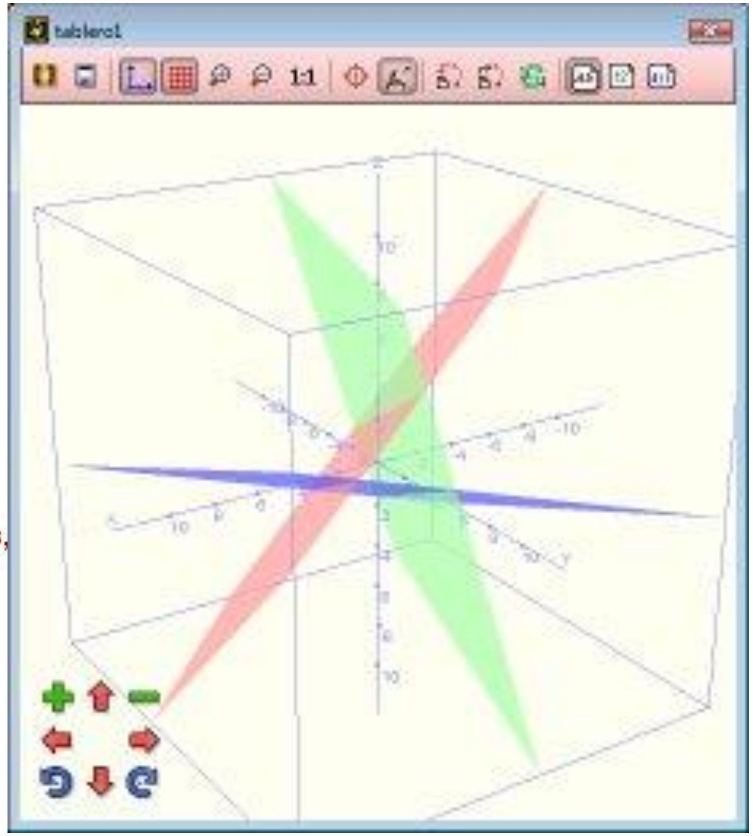
Geometría :

$R(C) = 2 \neq R(A) = 3$ y como no hay dos planos paralelos, los tres planos forman una superficie prismática.

dibujar3d($x - y + z = 2$, {color = rojo}) → tablero1

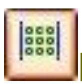
dibujar3d($x + y - 3z = 4$, {color = azul}) → tablero1

dibujar3d($3x - y - z = -3$, {color = verde}) → tablero1



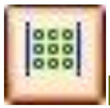
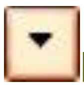
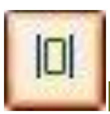
FUNCIONES UTILIZADAS:

Funciones de vectores

 **Vector**	Introduce vectores.
 **Norma**	Calcula el módulo de un vector.
 **Producto escalar**	Calcula el producto escalar.
 **Producto vectorial**	Calcula el producto vectorial.
 **Determinante**	Calcula el producto mixto eligiendo 3 filas y 3 columnas

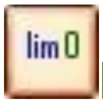
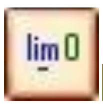
FUNCIONES UTILIZADAS:

Funciones de matrices y determinantes

 **Matriz**	Introduce una matriz.
 **Determinante**	Calcula un determinante.
 **Menú**	Añade filas o columnas a una matriz.
 **Transponer**	Calcula la matriz transpuesta.
 **Inverso**	Calcula la matriz inversa.
 **Potencia**	Calcula la potencia de una matriz.
 **Determinante**	Calcula el determinante de una matriz.
rango(A)	Calcula el rango de una matriz.

FUNCIONES UTILIZADAS:

Funciones de análisis

 **Límite**	Calcula el límite.
 **Límite derecha**	Calcula el límite por la derecha.
 **Límite izquierda**	Calcula el límite por la izquierda.
 **Derivar**	Calcula la derivada.
 **Integral**	Calcula la integral indefinida.
 **Integral definida**	Calcula la integral definida.

Resolución de SEL

Resuelve el sistema siguiente. Clasifícalo e interprétalo gráficamente:

$$\left.\begin{aligned} x + 2y &= 3 \\ 4x + y &= -2 \end{aligned}\right\}$$

Ejercicio 69

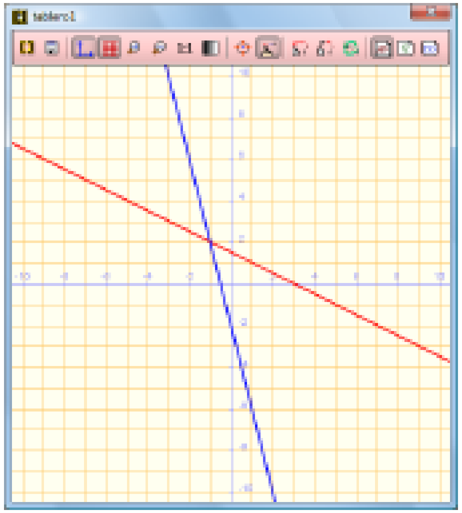
resolver$\left\{\begin{aligned} x + 2y &= 3 \\ 4x + y &= -2 \end{aligned}\right\}$ → $\{\{x=-1, y=2\}\}$

El sistema es heterogéneo compatible determinado.

dibujar(x + 2y = 3, {color = rojo, anchura_linea = 2})

dibujar(4x + y = −2, {color = azul, anchura_linea = 2})

Las dos rectas son secantes.



Resolución de SEL

Resuelve el sistema siguiente. Clasifícalo e interprétalo gráficamente:

$$\left.\begin{array}{r} x - y + z = 2 \\ x + y - 3z = 4 \\ 3x - y - z = -3 \end{array}\right\}$$

Ejercicio 70

$$\text{resolver}\left\{\begin{array}{l} x - y + z = 2 \\ x + y - 3z = 4 \\ 3x - y - z = -3 \end{array}\right\} \rightarrow \{[\,]\}$$

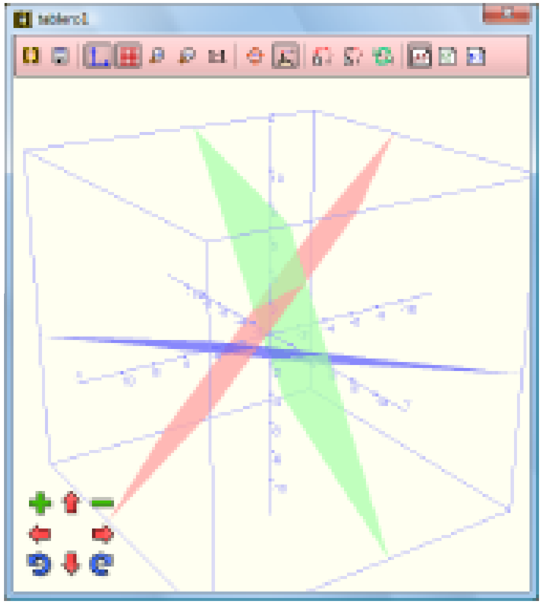
El sistema es heterogéneo incompatible.

dibujar3d(x − y + z = 2, {color = rojo}) → tablero1

dibujar3d(x + y − 3z = 4, {color = azul}) → tablero1

dibujar3d(3x − y − z = −3, {color = verde}) → tablero1

Los tres planos forman una superficie prismática y no tienen ningún punto en común.



Resuelve algebraicamente los siguientes sistemas y, a la vista del resultado, clasifícalos:

73.

$$\left.\begin{aligned} 2x - y &= 3 \\ 4x + y &= 3 \end{aligned}\right\}$$

74.

$$\left.\begin{aligned} 3x + y &= 4 \\ 3x + y &= 2 \end{aligned}\right\}$$

83.

$$\left.\begin{aligned} 2x - y + z &= 3 \\ 8x - 4y + 4z &= 12 \\ -6x + 3y - 3z &= -9 \end{aligned}\right\}$$

84.

$$\left.\begin{aligned} -5x + 2y - 2z &= 7 \\ x + 2y + z &= 3 \\ 5x - 2y + 2z &= 8 \end{aligned}\right\}$$

Matrices

83. Dadas las siguientes matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 7 & -6 \\ -5 & 0 & 3 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 5 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

Halla:

$A + B$; $A - B$; $2A - 3B$; $A \cdot B^t$

Ejercicio 83

$A = \begin{pmatrix} 4 & 7 & -6 \\ -5 & 0 & 3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 4 & 7 & -6 \\ -5 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

$B = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 5 & 3 & 4 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 5 & 3 & 4 \end{pmatrix}$

$A + B \rightarrow \begin{pmatrix} 6 & 4 & -5 \\ 0 & 3 & 7 \end{pmatrix}$

$A - B \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 10 & -7 \\ -10 & -3 & -1 \end{pmatrix}$

$2A - 3B \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 23 & -15 \\ -25 & -9 & -6 \end{pmatrix}$

$A \cdot B^T \rightarrow \begin{pmatrix} -19 & 17 \\ -7 & -13 \end{pmatrix}$

84. Dada la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -3 & -3 \\ 5 & -4 & -4 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Calcula A^2, A^3, A^{257}

Ejercicio 84

$A = \begin{pmatrix} 4 & -3 & -3 \\ 5 & -4 & -4 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 4 & -3 & -3 \\ 5 & -4 & -4 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

$A^2 \rightarrow \begin{pmatrix} 4 & -3 & 0 \\ 4 & -3 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$

$A^3 \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$A^{257} \rightarrow \begin{pmatrix} 4 & -3 & 0 \\ 4 & -3 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$

Determinantes

97. Halla el determinante de la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 0 \end{pmatrix}$$

98. Halla la matriz inversa de:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 4 \\ -5 & 1 & 0 \\ -7 & 6 & -8 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 97

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 0 \end{vmatrix} \rightarrow 27$$

Ejercicio 98

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 & 4 \\ -5 & 1 & 0 \\ -7 & 6 & -8 \end{pmatrix}^{-1} \rightarrow \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} & 0 & -\frac{1}{3} \\ -\frac{10}{3} & 1 & -\frac{5}{3} \\ -\frac{23}{12} & \frac{3}{4} & -\frac{13}{12} \end{pmatrix}$$

Problema 100

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 9 & -12 \\ 16 & 18 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 9 & -12 \\ 16 & 18 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} \cdot (C - 2B) \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & -20 \\ -1 & 54 \end{pmatrix}$$

Determinantes

100. Resuelve la ecuación matricial:

$$AX + 2B = C$$

sabiendo que:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 9 & -12 \\ 16 & 18 \end{pmatrix}$$

Solución:

Planteamiento

$AX + 2B = C \Rightarrow AX = C - 2B \Rightarrow X = A^{-1}(C - 2B)$

a) Introduce las matrices A, B y C

b) Introduce $\mathbf{A^{-1} \cdot (C - 2B)}$

Problema 100

$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$

$B = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$

$C = \begin{pmatrix} 9 & -12 \\ 16 & 18 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 9 & -12 \\ 16 & 18 \end{pmatrix}$

$A^{-1} \cdot (C - 2B) \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & -20 \\ -1 & 54 \end{pmatrix}$

Sistema lineales con parámetros

Discute, según los valores de k, el siguiente sistema:

$$\left.\begin{aligned}(1-k)x+y+z&=0\\ x+(1-k)y+z&=k\\ x+y+(1-k)z&=k^2\end{aligned}\right\}$$

Ejercicio 68

$C(k) = \begin{pmatrix} 1-k & 1 & 1 \\ 1 & 1-k & 1 \\ 1 & 1 & 1-k \end{pmatrix} \rightarrow k \mapsto \begin{pmatrix} -k+1 & 1 & 1 \\ 1 & -k+1 & 1 \\ 1 & 1 & -k+1 \end{pmatrix}$

$A(k) = \begin{pmatrix} 1-k & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1-k & 1 & k \\ 1 & 1 & 1-k & k^2 \end{pmatrix} \rightarrow k \mapsto \begin{pmatrix} -k+1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -k+1 & 1 & k \\ 1 & 1 & -k+1 & k^2 \end{pmatrix}$

resolver($|C(k)| = 0$) $\rightarrow$ $\{\{k=0\},\{k=3\}\}$

Si $k \neq 0$, $k \neq 3$, $R(C) = R(A) = 3$ = número de incognitas

El sistema es compatible determinado.

Estudio para $k = 0$

$C(0) \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

rango($C(0)$) $\rightarrow$ 1

$A(0) \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

rango($A(0)$) $\rightarrow$ 1

Para $k = 0$, $R(C) = R(A) = 1 < 3$ = número de incógnitas

Sistema compatible indeterminado.

Estudio para $k = 3$

$C(3) \rightarrow \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$

rango($C(3)$) $\rightarrow$ 2

$A(3) \rightarrow \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & -2 & 9 \end{pmatrix}$

rango($A(3)$) $\rightarrow$ 3

Para $k = 3$, $R(C) = 2 < R(A) = 3$

Sistema incompatible.

Sistema lineales con parámetros

Resuelve el sistema cuando sea posible, según los valores de a, y clasifícalo.

$$\left.\begin{array}{l} ax+y+z=1 \\ x+ay+z=1 \\ x+y+az=a \\ x+y+z=a \end{array}\right\}$$

Ejercicio 69

$C(a) = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow a \mapsto \begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

$A(a) = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & 1 & a \end{pmatrix} \rightarrow a \mapsto \begin{pmatrix} a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & 1 & a \end{pmatrix}$

resolver$(|A(a)| = 0) \rightarrow \{\{a=-3\},\{a=1\}\}$

Para todo valor de $a \neq -3$, $a \neq 1$, $R(C) < R(A) = 4$

El sistema es incompatible.

Estudio para $a = -3$

$C(-3) \rightarrow \begin{pmatrix} -3 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

rango$(C(-3)) \rightarrow 3$

$A(-3) \rightarrow \begin{pmatrix} -3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -3 \end{pmatrix}$

rango$(A(-3)) \rightarrow 3$

Para $a = -3$, $R(C) = R(A) = 3 =$ número de incógnitas.

Sistema compatible determinado.

resolver$\left\{\begin{array}{l} -3x+y+z=1 \\ x-3y+z=1 \\ x+y-3z=1 \\ x+y+z=-3 \end{array}\right\} \rightarrow \{\{x=-1, y=-1, z=-1\}\}$

Estudio para $a = 1$

$C(1) \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

rango$(C(1)) \rightarrow 1$

$A(1) \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

rango$(A(1)) \rightarrow 1$

Para $a = 1$, $R(C) = 1 = R(A) <$ número de incógnitas $= 3$

Sistema compatible indeterminado.

resolver$\left\{\begin{array}{l} x+y+z=1 \\ x+y+z=1 \\ x+y+z=1 \\ x+y+z=1 \end{array}\right\} \rightarrow \{\{x=-z-y+1, y=y, z=z\}\}$