TEMA 2: ÁLGEBRA DE MATRICES

Nombre.. Curso.........

COMISSIÓ GESTORA DE LES PROVES D'ACCÉS A LA UNIVERSITAT
COMISIÓN GESTORA DE LAS PRUEBAS DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD

PROVES D'ACCÉS A LA UNIVERSITAT	PRUEBAS DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD
CONVOCATÒRIA:	CONVOCATORIA:
MATEMÀTIQUES II	MATEMÁTICAS II

BAREM DE L'EXAMEN: Cal elegir sols UNA de les dues OPCIONS, A o B, i s'han de fer els tres problemes d'aquesta opció.
Cada problema puntua fins a 10 punts.
La qualificació de l'exercici és la suma de les qualificacions de cada problema dividida entre 3, i aproximada a les centèsimes.
Cada estudiant pot disposar d'una calculadora científica o gràfica. Se'n prohibeix la utilització indeguda (guardar fórmules o text en memòria).
S'use o no la calculadora, els resultats analítics i gràfics han d'estar sempre degudament justificats.
BAREMO DEL EXAMEN: **Se elegirá solo UNA de las dos OPCIONES, A o B, y se han de hacer los tres problemas de esa opción.**
Cada problema se puntuará hasta 10 puntos.
La calificación del ejercicio será la suma de las calificaciones de cada problema dividida entre 3 y aproximada a las centésimas.
Cada estudiante podrá disponer de una calculadora científica o gráfica. Se prohíbe su utilización indebida (guardar fórmulas o texto en memoria).
Se utilice o no la calculadora, los resultados analíticos y gráficos deberán estar siempre debidamente justificados.

OPCIÓN A

Problema A.1. Dado el sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 1 \\ x + ay + 3z = 2 \\ 2x + (2+a)y + 6z = 3 \end{cases}$$

a) Encuentra un valor de a para el cual el sistema sea incompatible. (4 puntos)

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & a & 3 & 2 \\ 2 & (2+a) & 6 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow{\substack{F2-F1 \\ F3-2F1}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & a-2 & 0 & 1 \\ 0 & a-2 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{F3-F2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & a-2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Nos queda $(a-2)y = 1$

$$\begin{cases} \text{Si } a = 2\text{. El sistema es incompatible.} \\ \text{Si } a \neq 2\text{. El sistema es compatible indeterminado.} \end{cases}$$

b) Discute si existe algún valor de a para el cual el sistema sea compatible determinado. (2 puntos)

No hay ningún valor de a para el cual el sistema sea compatible determinado, puesto que nos quedamos con más incógnitas que ecuaciones.

c) Resuelve el sistema para a=0. (4 puntos)

Partiendo de $(a-2)y = 1 \rightarrow -2y = 1 \rightarrow y = \frac{-1}{2}$, pero como se trata de un sistema compatible indeterminado, una de las incógnitas hay que ponerla en función de un parámetro. $z = \lambda$

Despejando: $x + 2y + 3z = 1 \rightarrow x = 1 - 2y - 3z \rightarrow x = 1 - 2\left(\frac{-1}{2}\right) - 3\lambda \rightarrow x = -3\lambda + 2$

Solución: $\boxed{\left(-3\lambda+2, \frac{-1}{2}, \lambda\right), \lambda \in \Re}$

Problema A.2. Dadas las matrices cuadradas $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ **y** $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ -3 & -3 & -2 \end{pmatrix}$

a) **Calcular las matrices (A – I)^2 y A(A – 2 I).** ***(5 puntos)***

$$(A - I) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ -3 & -3 & -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ -3 & -3 & -3 \end{pmatrix}$$

$$(A - I)^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ -3 & -3 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ -3 & -3 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \text{Matriz nula}$$

$$(A - 2\,I) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ -3 & -3 & -2 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ -3 & -3 & -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ -3 & -3 & -4 \end{pmatrix}$$

$$A(A - 2\,I) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ -3 & -3 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ -3 & -3 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = -I_3$$

b) Determinar el valor del parámetro real λ para el que se verifica que $A^{-1} = \lambda\,(A - 2\,I)$. *(5 puntos)*

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & -3 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{c} F2-F1 \\ 2F3+3F1 \end{array} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & -1 & 3 & 0 & 2 \end{array}\right) 2F3+3F2 \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 3 & 4 \end{array}\right)$$

$$2F1-F2 \left(\begin{array}{ccc|ccc} 4 & 0 & 1 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 3 & 4 \end{array}\right) F1-F3 \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 4 & 0 & 0 & 0 & -4 & -4 \\ 0 & 2 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 3 & 4 \end{array}\right)$$

$$F2-F3 \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 4 & 0 & 0 & 0 & -4 & -4 \\ 0 & 2 & 0 & -4 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 3 & 4 \end{array}\right) \begin{array}{c} F1/4 \\ F2/2 \end{array} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 3 & 4 \end{array}\right) \rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -2 & -1 & -2 \\ 3 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

$A^{-1} = \lambda\,(A - 2\,I)$

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -2 & -1 & -2 \\ 3 & 3 & 4 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ -3 & -3 & -4 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -2 & -1 & -2 \\ 3 & 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \lambda & \lambda \\ 2\lambda & \lambda & 2\lambda \\ -3\lambda & -3\lambda & -4\lambda \end{pmatrix} \rightarrow \lambda = -1$$

Problema A.3 Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ y el vector $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, se pide obtener razonadamente

a) El vector X tal que A X = 0X. (3 puntos).

A X = 0X

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} x - y = 0 \\ 2x + 4y = 0 \end{cases} \rightarrow x = y \rightarrow 2y + 6y = 0 \rightarrow y = 0, x = 0$$

b) Todos los vectores X tales que A X = 3X. (4 puntos).

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 3\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} x - y = 3x \\ 2x + 4y = 3y \end{cases} \rightarrow \begin{cases} -2x - y = 0 \\ 2x + y = 0 \end{cases} \rightarrow -2x - y = 0 \rightarrow y = \lambda, x = \frac{-\lambda}{2}$$

Como hay una fila que está en función de la otra, se puede eliminar. En este caso, se elimina la segunda ecuación.

Solución: $(x, y) = \left(\frac{-\lambda}{2}, \lambda \right), \lambda \in \Re$

c) Todos los vectores X tales que A X = 2X. (3 puntos).

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} x - y = 2x \\ 2x + 4y = 2y \end{cases} \rightarrow \begin{cases} -x - y = 0 \\ 2x + 2y = 0 \end{cases} \rightarrow -x - y = 0 \rightarrow y = \lambda, x = -\lambda$$

Como hay una fila que está en función de la otra, se puede eliminar. En este caso, se elimina la segunda ecuación.

Solución: $\boxed{(x, y) = (-\lambda, \lambda), \lambda \in \Re}$

Se dan las matrices $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ y M, donde M es una matriz de dos filas y dos columnas que verifica $M^2 = M$. Comprobar razonadamente que la matriz $P = I - M$ cumple las relaciones: $P^2 = P$ y $M P = P M$. *(4 puntos, repartidos en 2 puntos por cada igualdad)*

$P^2 = P$

$P^2 = (I-M)\cdot(I-M) = I^2 - IM - MI + M^2 = I - 2IM + M = I - 2M + M = I - M$

$MP = PM$

$MP = M\cdot(I-M) = M - M^2 = M - M = 0$

$PM = (I-M)\cdot M = M - M^2 = M - M = 0$

GENERALITAT VALENCIANA
CONSELLERIA D'EDUCACIÓ

COMISSIÓ GESTORA DE LES PROVES D'ACCÉS A LA UNIVERSITAT
COMISIÓN GESTORA DE LAS PRUEBAS DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD

SISTEMA UNIVERSITARI VALENCIÀ
SISTEMA UNIVERSITARIO VALENCIANO

PROVES D'ACCÉS A LA UNIVERSITAT	PRUEBAS DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD
CONVOCATÒRIA:	CONVOCATORIA:
MATEMÀTIQUES II	MATEMÁTICAS II

BAREM DE L'EXAMEN: Cal elegir sols UNA de les dues OPCIONS, A o B, i s'han de fer els tres problemes d'aquesta opció.
Cada problema puntua fins a 10 punts.
La qualificació de l'exercici és la suma de les qualificacions de cada problema dividida entre 3, i aproximada a les centèsimes.
Cada estudiant pot disposar d'una calculadora científica o gràfica. Se'n prohibeix la utilització indeguda (guardar fórmules o text en memòria).
S'use o no la calculadora, els resultats analítics i gràfics han d'estar sempre degudament justificats.
BAREMO DEL EXAMEN: Se elegirá solo UNA de las dos OPCIONES, A o B, y se han de hacer los tres problemas de esa opción.
Cada problema se puntuará hasta 10 puntos.
La calificación del ejercicio será la suma de las calificaciones de cada problema dividida entre 3 y aproximada a las centésimas.
Cada estudiante podrá disponer de una calculadora científica o gráfica. Se prohíbe su utilización indebida (guardar fórmulas o texto en memoria).
Se utilice o no la calculadora, los resultados analíticos y gráficos deberán estar siempre debidamente justificados.

OPCIÓN B

Problema B.1. Sea el sistema de ecuaciones $S:\begin{cases} x + y + z = m \\ 2x + 3z = 2m+1 \\ x + 3y + (m.-2)z = m-1 \end{cases}$

donde m es un parámetro real. Obtener razonadamente:

a) **Todas las soluciones del sistema S cuando $m = 2$.** ***(4 puntos)***

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 3 & 5 \\ 1 & 3 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{matrix} F2-2F1 \\ F3-F1 \end{matrix} \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & -1 \end{array}\right) F3+F2 \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \to SCI$$

$z = \lambda$

$y = \dfrac{\lambda - 1}{2}$

$x = 2 - \dfrac{\lambda-1}{2} - \lambda = \dfrac{4 - \lambda + 1 - 2\lambda}{2} = \dfrac{5-3\lambda}{2}$

Solución: $\boxed{(x,y,z) = \left(\dfrac{5-3\lambda}{2}, \dfrac{\lambda-1}{2}, \lambda\right), \lambda \in \Re}$

b) Todos los valores de m para los que el sistema S tiene una solución única. ***(2 puntos)***

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 1 & 1 & m\\ 2 & 0 & 3 & 2m+1\\ 1 & 3 & m-2 & m-1\end{array}\right)\begin{array}{c}F2-2F1\\ F3-F1\end{array}\to\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 1 & 1 & m\\ 0 & -2 & 1 & 1\\ 0 & 2 & m-3 & -1\end{array}\right)F3+F2\to\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 1 & 1 & m\\ 0 & -2 & 1 & 1\\ 0 & 0 & m-2 & 0\end{array}\right)$$

Nos queda que: $(m-2)z=0$

Si $\mathrm{m}=2\to 0\mathrm{z}=0\to$ Sistema Compatble Indeterminado
Si $\mathrm{m}\neq 2\to$ Sistema Compatible Determinado.

c) El valor de m para el que el sistema S admite la solución $(x,y,z)=\left(\frac{3}{2},-\frac{1}{2},0\right)$ *(4 puntos)*

$$x+y+z=m\to\frac{3}{2}-\frac{1}{2}+0=m\to m=1$$

Pero hay que comprobar que se cumple en todas las ecuaciones.

$$2x+3z=2m+1\to 3=2m+1\to 2=2m\to m=1$$

Solución: $\boxed{m=1}$

Problema B.2. Sean I y A las matrices cuadradas siguientes: $I=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$**,** $A=\begin{pmatrix}17 & 29\\ -10 & -17\end{pmatrix}$**.Se pide calcular, escribiendo explícitamente las operaciones necesarias:**

a) Las matrices A^2 y A^3. ***(5 puntos).***

$$A^2=\begin{pmatrix}17 & 29\\ -10 & -17\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}17 & 29\\ -10 & -17\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}=-I_2$$

$$A^3=A^2\cdot A=-I\cdot A=\begin{pmatrix}-17 & -29\\ 10 & 17\end{pmatrix}$$

b) Los números α y β para los que se verifica $(I+A)^3=\alpha I+\beta A$. ***(5 puntos).***

<u>Primera forma de solucionarlo</u>

$$(I+A)=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}17 & 29\\ -10 & -17\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}18 & 29\\ -10 & -18\end{pmatrix}$$

$$(I+A)^2=\begin{pmatrix}18 & 29\\ -10 & -18\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}18 & 29\\ -10 & -18\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}34 & 58\\ -20 & -34\end{pmatrix}$$

$$(I+A)^3=(I+A)^2\cdot(I+A)=\begin{pmatrix}34 & 58\\ -20 & -34\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}18 & 29\\ -10 & -18\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}32 & 58\\ -20 & -36\end{pmatrix}$$

$(I+A)^3 = \alpha I + \beta A$

$$\begin{pmatrix} 32 & 58 \\ -20 & -36 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 17 & 29 \\ -10 & -17 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha + 17\beta & 29\beta \\ -10\beta & \alpha - 17\beta \end{pmatrix} \rightarrow \begin{matrix} 58 = 29\beta \\ 32 = \alpha + 17\beta \end{matrix} \rightarrow \begin{matrix} \beta = 2 \\ 32 = \alpha + 34 \\ \alpha = -2 \end{matrix}$$

Solución: $\boxed{\begin{matrix} \beta = 2 \\ \alpha = -2 \end{matrix}}$

<u>Segunda forma de solucionarlo</u>

$A^2 = -I, A^3 = -A$

$(I+A)^3 = (I+A)^2 \cdot (I+A) = (I + 2A + A^2) \cdot (I+A) = (I + 2A - I)(I+A) = 2A(I+A) = 2A + 2A^2 =$

$= 2A - 2I = -2I + 2A$

$$\left.\begin{matrix} (I+A)^3 = -2I + 2A \\ (I+A)^3 = \alpha I + \beta A \end{matrix}\right\} \rightarrow \alpha = -2, \beta = 2$$

Problema B.3. Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 6 & 4 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$**, y** $x = \begin{pmatrix} y \\ y \end{pmatrix}$ **se pide:**

a) Los valore de α para los que $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ es la única solución de la ecuación matricial $AX = \alpha X$ *(5 puntos).*

$AX = \alpha X$

$$\begin{pmatrix} 6 & 4 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 6x + 4y \\ -x + y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha x \\ \alpha y \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} 6x + 4y = \alpha \cdot x \\ -x + y = \alpha \cdot y \end{cases} \rightarrow \begin{cases} (6-\alpha)x + 4y = 0 \\ -x + (1-\alpha)y = 0 \end{cases}$$

$$\alpha = 2 \rightarrow \begin{cases} (6-2)x + 4y = 0 \\ -x + (1-2)y = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 4x + 4y = 0 \\ -x - y = 0 \end{cases} \rightarrow SCI$$

$$\alpha = 5 \rightarrow \begin{cases} (6-5)x + 4y = 0 \\ -x + (1-5)y = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x + 4y = 0 \\ -x - 4y = 0 \end{cases} \rightarrow SCI$$

Para el resto de valores el sistema tiene la solución trivial.

Solución: $\boxed{\alpha \in \Re - \{2,5\}}$

b) Resolver la ecuación matricial *A X = 2X. (5 puntos).*

$$\begin{pmatrix} 6 & 4 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 6x+4y \\ -x+y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \end{pmatrix} \to \begin{cases} 6x+4y=2x \\ -x+y=2y \end{cases} \to \begin{cases} 4x+4y=0 \\ -x-y=0 \end{cases} \to y=\lambda, x=-\lambda$$

Como hay una fila que está en función de la otra, se puede eliminar. En este caso, se elimina la segunda ecuación.

Solución: $\boxed{(x,y)=(-\lambda,\lambda), \lambda \in \Re}$

Se dan las matrices $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ **y M, donde M es una matriz de dos filas y dos columnas que verifica M^2 = M.** Comprobar razonadamente que la matriz $P = I - M$ cumple las relaciones: $P^2 = P$ y $M P = P M$. *(4 puntos, repartidos en 2 puntos por cada igualdad)*

$$P^2 = P$$

$$P^2 = (I-M)\cdot(I-M) = I^2 - IM - MI + M^2 = I - 2IM + M = I - 2M + M = I - M$$

$$MP = PM$$

$$MP = M\cdot(I-M) = M - M^2 = M - M = 0$$

$$PM = (I-M)\cdot M = M - M^2 = M - M = 0$$