

SISTEMAS DE ECUACIONES.

1. El sistema

$$\left. \begin{array}{rcl} x & + & y & - & z & = & 2 \\ & & y & - & z & = & 0 \\ 3x & + & y & & & = & 7 \end{array} \right\}$$

Puede ser expresado en forma matricial mediante la ecuación $A \cdot X = B$. Resolver matricialmente el sistema sin aplicar el método de Cramer, ni el de Gauss.

Solución: $x = 2, y = 1, z = 1$.

2. Dado el sistema:

$$\left. \begin{array}{rcl} x & + & 2y & + & 3z & = & 0 \\ x & + & ay & + & z & = & 0 \\ 2x & + & 3y & + & 4z & = & 2 \end{array} \right\}$$

Discutir si existe algún valor a para el cual el sistema sea compatible indeterminado.

Solución: No hay ningún valor de a que haga el sistema compatible indeterminado.

3. Discutir, para los diferentes valores del parámetro del parámetro de m, el siguiente sistema de ecuaciones lineales:

$$\left. \begin{array}{rcl} 3x & + & my & + & z & = & m-2 \\ x & + & y & + & 2z & = & 0 \\ mx & + & y & - & z & = & m-2 \end{array} \right\}$$

Solución:

Si $m \notin \{-2, 2\} \rightarrow S.C.D.$

Si $m = 2 \rightarrow S.C.I$

Si $m = -2 \rightarrow S.I.$

4. Discutir el sistema según los valores de a:

$$\left. \begin{array}{rcl} 2x & + & y & + & z & = & 0 \\ ax & - & y & - & z & = & a-1 \\ 3x & & & - & 2az & = & a-1 \end{array} \right\}$$

Solución:

Si $a \notin \{1, -3\} \rightarrow S.C.D.$

Si $a = 1 \rightarrow S.C.I$

Si $a = -3 \rightarrow S.I.$

5. Discutir, según los valores de m , el sistema:

$$\left. \begin{array}{rcl} x & + & y & 2z & = & 2 \\ -3x & + & 2y & + 3z & = & -2 \\ 2x & + & my & - 5z & = & -4 \end{array} \right\}$$

Solución:

Si $m \neq -3 \rightarrow S.C.D.$

Si $m = -3 \rightarrow S.I$

6. Determinar para qué valores del parámetro a el sistema

$$\left. \begin{array}{rcl} ax & + & y & a^2z & = & 3 \\ -x & - & 7y & + 8z & = & 0 \\ x & + & a^3y & + a^2z & = & -3 \end{array} \right\}$$

admite como solución $(x, y, z) = (1, 1, 1)$ **1**, y resolverlo en estos casos, comprobando que, efectivamente, $(x, y, z) = (1, 1, 1)$ es solución del sistema. Razona tu respuesta.

Solución:

Si $a = -2 \rightarrow$ Sistema admite como solución $(x, y, z) = (1, 1, 1)$

7. Estudiar, dependiendo del parámetro m el sistema

$$\left. \begin{array}{rcl} x & + & y & & = & 1 \\ & & my & + z & = & 0 \\ x & + & (m+1)y & + mz & = & m+1 \end{array} \right\}$$

Solución:

Si $m \neq \{0, 1\} \rightarrow S.C.D.$

Si $m = 0 \rightarrow S.C.I.$

Si $m = 1 \rightarrow S.I.$

8. Discutir para los distintos valores del parámetro k y resolver en los caso que proceda, el sistema siguiente:

$$\left. \begin{array}{rcl} x & + & y & + z & = & 0 \\ kx & & & + 2z & = & 0 \\ 2x & - & y & + kz & = & 0 \end{array} \right\}$$

Solución: Si $k \notin \{-3, 2\} \rightarrow S.C.D.$
Si $k \in \{-3, 2\} \rightarrow S.C.I.$

9. Determinar los valores de a para los cuales el sistema:

$$\left. \begin{aligned} ax + y - z &= 0 \\ -ax + (a+1)y &= 0 \\ -x - 2y + (a+1)z &= 0 \end{aligned} \right\}$$

tiene solución distinta a la trivial y obténgase la solución para uno de los valores de a.

Solución:

Si $a \in \{1, -1 + \sqrt{2}, -1 - \sqrt{2}\} \rightarrow$ Sistema tiene solución distinta de la trivial.

Para $a = 1 \rightarrow (x, y, z) = (0, k, k), k \in \mathfrak{R}$

10. Discutir el siguiente sistema, según los valores del parámetro a:

$$\left. \begin{aligned} x - 2y - 3z &= 0 \\ 3x + 10y - z &= 0 \\ x + 14y + 5z &= 0 \\ x + 6y + az &= 0 \end{aligned} \right\}$$

y resuélvelo cuando tenga infinitas soluciones.

Solución:

Si $a \notin \{-1, 1\} \rightarrow S.C.D.$ (Solución trivial)

Si $a = 1 \rightarrow S.C.I. \rightarrow (x, y, z) = (-4a, a, -2a), a \in \mathfrak{R}$

**11. Calcular la ecuación que deben tener todos aquellos valores de X que verifiquen que:
 $A \cdot X = X$, siendo**

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & 0 \\ 6 & 6 & -3 & 4 \end{pmatrix}; X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$$

Solución:

$$X = \begin{pmatrix} k \\ 0 \\ 0 \\ -2k \end{pmatrix}, k \in \mathfrak{R}$$

12. Discutir el siguiente sistema según los valores de m y resolverlo cuando sea posible

$$\begin{aligned} x + 2z - 3 &= 0 \\ 3x + y + z + 1 &= 0 \\ 2y - z + 2 &= 0 \\ x - y + mz + 5 &= 0 \end{aligned}$$

Solución:

Si $a \neq -2 \rightarrow S.I.$ Si $a = -2 \rightarrow S.C.D. \rightarrow (x, y, z) = (-1, 0, 2)$ **13. Dadas las matrices**

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & a \end{pmatrix}, X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}, 0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

- a) Estudiar el rango de A según los valores de a.
b) Resolver la ecuación matricial $A \cdot X = 0$.

Solución:

Si $a \neq -2 \rightarrow \text{rg}(A) = 4$ Si $a = -2 \rightarrow \text{rg}(A) = 3$ Si $a \neq -2 \rightarrow (x, y, z, t) = (0, 0, 0, 0)$. Solución trivial.Si $a = -2 \rightarrow (x, y, z, t) = (-2\lambda, \lambda, \lambda, \lambda), \lambda \in \mathfrak{R}$ **14. Discutir según los valores de a el siguiente sistema:**

$$\begin{cases} x + 2y + z = 0 \\ x + (a+2)y + 2z = 0 \\ x + (a-2)y + (a-2)y = 0 \end{cases}$$

Solución:

Si $a \notin \{0, 2\} \rightarrow S.C.D.$ (Solución trivial)Si $a \in \{0, 2\} \rightarrow S.C.I.$